Conceitos iniciais

Tiago M. Magalhães

Departamento de Estatística - ICE-UFJF

Juiz de Fora, 13 de março de 2024

Roteiro

Roteiro

1. Operações
2. Resultados matriciais
3. Estimação
4. Referências bibliográficas

Somatórios

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad (1)$$

Somatórios

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \tag{1}$$

em que $\sum$ é denominado operador soma.

Somatórios

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \tag{1}$$

em que $\sum$ é denominado operador soma.

Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^{n} a = na$;

Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^{n} a = na$;
- $\sum_{i=1}^{n}(Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$;

Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^{n} a = na$;
- $\sum_{i=1}^{n}(Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$;
- $\sum_{i=1}^{n}(b + cZ_i) = nb + c\sum_{i=1}^{n} Z_i$;

Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^{n} a = na$;
- $\sum_{i=1}^{n}(Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$;
- $\sum_{i=1}^{n}(b + cZ_i) = nb + c\sum_{i=1}^{n} Z_i$;

em que a, b, c são constantes e $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ são números quaisquer.

Somatórios

De (1), nós temos as seguintes propriedades:

- $\sum_{i=1}^{n} a = na$;
- $\sum_{i=1}^{n}(Y_i + Z_i) = \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$;
- $\sum_{i=1}^{n}(b + cZ_i) = nb + c\sum_{i=1}^{n} Z_i$;

em que a, b, c são constantes e $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ são números quaisquer.

Produtórios

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^{n} Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n, \qquad (2)$$

Produtórios

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^{n} Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n, \tag{2}$$

em que $\prod$ é denominado operador produto.

Produtórios

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n números quaisquer. Então,

$$\prod_{i=1}^{n} Y_i = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n, \tag{2}$$

em que $\prod$ é denominado operador produto.

Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$;

Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^{n}(Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^{n} Y_i \times \prod_{i=1}^{n} Z_i$;

Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^{n} (Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^{n} Y_i \times \prod_{i=1}^{n} Z_i$;
- $\prod_{i=1}^{n} (bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^{n} Z_i$;

Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^{n}(Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^{n} Y_i \times \prod_{i=1}^{n} Z_i$;
- $\prod_{i=1}^{n}(bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^{n} Z_i$;

em que a, b são constantes e $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ são números quaisquer.

Produtórios

De (2), nós temos as seguintes propriedades:

- $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$;
- $\prod_{i=1}^{n}(Y_i \times Z_i) = \prod_{i=1}^{n} Y_i \times \prod_{i=1}^{n} Z_i$;
- $\prod_{i=1}^{n}(bZ_i) = b^n \times \prod_{i=1}^{n} Z_i$;

em que a, b são constantes e $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ são números quaisquer.

Roteiro

Equações lineares

Um sistema de n equações e p incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = y_2 \\ \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = y_n \end{cases},$$

pode ser escrito na forma matricial,

Equações lineares

Um sistema de n equações e p incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= y_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= y_n \end{cases},$$

pode ser escrito na forma matricial, como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y},$$

Equações lineares

Um sistema de n equações e p incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = y_2 \\ \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = y_n \end{cases},$$

pode ser escrito na forma matricial, como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y},$$

Equações lineares

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz de coeficientes $n \times p$, $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$

Equações lineares

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz de coeficientes $n \times p$, $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$ e $\mathbf{y}$ é vetor $n \times 1$,

Equações lineares

em que **A** é uma matriz de coeficientes $n \times p$, **x** é um vetor $p \times 1$ e **y** é vetor $n \times 1$, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Equações lineares

em que $\mathbf{A}$ é uma matriz de coeficientes $n \times p$, $\mathbf{x}$ é um vetor $p \times 1$ e $\mathbf{y}$ é vetor $n \times 1$, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n.

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Este determinante é um polinômio de grau n em λ

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Este determinante é um polinômio de grau n em λ e a equação terá n soluções.

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Este determinante é um polinômio de grau n em λ e a equação terá n soluções. Se λ_i é raiz característica de $\mathbf{A}$,

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Este determinante é um polinômio de grau n em λ e a equação terá n soluções. Se λ_i é raiz característica de $\mathbf{A}$, a solução em $\mathbf{x}$ da equação $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = 0$ é o vetor característico correspondente, $\mathbf{x}_i$.

Raízes características

As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, são as soluções em λ da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Este determinante é um polinômio de grau n em λ e a equação terá n soluções. Se λ_i é raiz característica de $\mathbf{A}$, a solução em $\mathbf{x}$ da equação $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = 0$ é o vetor característico correspondente, $\mathbf{x}_i$.

Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;

Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;
- A soma das raízes características de $\mathbf{A}$ é o traço de $\mathbf{A}$;

Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;
- A soma das raízes características de $\mathbf{A}$ é o traço de $\mathbf{A}$;
- Se o posto de $\mathbf{A}$ é igual a r, $r(\mathbf{A}) = r$, zero é raiz da equação com multiplicidade $n - r$.

Raízes características

Resultados:

- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$;
- A soma das raízes características de $\mathbf{A}$ é o traço de $\mathbf{A}$;
- Se o posto de $\mathbf{A}$ é igual a r, $r(\mathbf{A}) = r$, zero é raiz da equação com multiplicidade $n - r$.

Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$

Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$ e $\mathbf{A} = (a_{ij})$, uma matriz simétrica $n \times n$,

Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$ e $\mathbf{A} = (a_{ij})$, uma matriz simétrica $n \times n$, é dita matriz da forma quadrática.

Formas quadráticas

A função $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x},$$

em que $\mathbf{x} = (x_1 x_2 \cdots x_n)^\top$ e $\mathbf{A} = (a_{ij})$, uma matriz simétrica $n \times n$, é dita matriz da forma quadrática.

Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

1. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;

Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

1. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;

Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

1. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;

Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

1. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
4. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é não negativa definida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida

Formas quadráticas

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

1. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
4. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é não negativa definida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida e é negativa semidefinida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida.

Nós podemos classificar as formas quadráticas em:

1. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$, para pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
3. $\mathbf{A}$ é dita não negativa se for positiva definida ou positiva semidefinida;
4. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é não negativa definida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida e é negativa semidefinida se $-\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva semidefinida.

Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n-dimensional com matriz de covariâncias Σ.

Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ um vetor aleatório *n*-dimensional com matriz de covariâncias Σ. A matriz Σ é não negativa definida,

Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ um vetor aleatório *n*-dimensional com matriz de covariâncias Σ. A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n-dimensional com matriz de covariâncias Σ. A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

$$\mathrm{Var}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \ \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n-dimensional com matriz de covariâncias Σ. A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

$$\mathrm{Var}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i=1}\sum_{j=1} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \ \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Observação:

Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n-dimensional com matriz de covariâncias Σ. A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

$$\mathrm{Var}(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \ \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Observação: A matriz Σ será positiva definida se somente se não existir relações lineares entres as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$.

Formas quadráticas

Exemplo. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ um vetor aleatório n-dimensional com matriz de covariâncias Σ. A matriz Σ é não negativa definida, pois, se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ vetor não aleatório

$$\mathrm{Var}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0, \ \forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Observação: A matriz Σ será positiva definida se somente se não existir relações lineares entres as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$.

Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$,

Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular,

Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$.

Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Então

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{C}\mathbf{y}, \tag{3}$$

Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Então

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{C}\mathbf{y}, \tag{3}$$

em que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}$, é a forma quadrática nas novas variáveis.

Formas quadráticas

Transformações. Seja $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ uma transformação de $\mathbf{x}$, em que $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular, isto é $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$. Então

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{C}\mathbf{y}, \tag{3}$$

em que $\mathbf{C} = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}$, é a forma quadrática nas novas variáveis.

Formas quadráticas

Resultados. De (3),

Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

1. Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

1. Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

em que $d_1, \ldots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.

Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

1. Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

   em que $d_1, \ldots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.

2. Se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida, existe uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ tal que

Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

1. Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

   em que $d_1, \ldots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.

2. Se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida, existe uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

Formas quadráticas

Resultados. De (3), nós temos os seguintes resultados

1. Existe uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ $n \times n$ tal que

$$Q = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{D}\mathbf{y} = d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

   em que $d_1, \ldots, d_n$ são elementos da diagonal de $\mathbf{D}$.

2. Se $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é positiva definida, existe uma transformação $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

1. $r(\mathbf{A}) < n$;

Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

1. $r(\mathbf{A}) < n$;
2. $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e se $a_{jj} = 0$, todo elemento da j-ésima linha e j-ésima coluna é zero;

Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

1. $r(\mathbf{A}) < n$;
2. $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e se $a_{jj} = 0$, todo elemento da j-ésima linha e j-ésima coluna é zero;
3. $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ é positiva semi definida, para toda matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$.

Formas quadráticas

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva semi definida, então

1. $r(\mathbf{A}) < n$;
2. $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ e se $a_{jj} = 0$, todo elemento da j-ésima linha e j-ésima coluna é zero;
3. $\mathbf{P}^\top \mathbf{A}\mathbf{P}$ é positiva semi definida, para toda matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$.

Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

1. $r(\mathbf{A}) = n$;

Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

1. $r(\mathbf{A}) = n$;
2. $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$;

Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

1. $r(\mathbf{A}) = n$;
2. $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$;
3. $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ é positiva definida, para qualquer matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$ não singular.

Formas quadráticas

Teorema 2. Seja $\mathbf{A}$, $n \times n$ uma matriz positiva definida, então

1. $r(\mathbf{A}) = n$;
2. $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$;
3. $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \mathbf{P}$ é positiva definida, para qualquer matriz $n \times n$ $\mathbf{P}$ não singular.

Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
2. As raízes características de $\mathbf{A}$ são não negativas

Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
2. As raízes características de $\mathbf{A}$ são não negativas e no mínimo uma delas é igual a zero.

Formas quadráticas

Teorema 3. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva semi definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) < n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
2. As raízes características de $\mathbf{A}$ são não negativas e no mínimo uma delas é igual a zero.

Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;

Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
2. As raízes características de $\mathbf{A}$ são todas positivas;

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
2. As raízes características de $\mathbf{A}$ são todas positivas;
3. E

$$a_{11} > 0,\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0,\ \ldots,\ \det(\mathbf{A}) > 0.$$

Formas quadráticas

Teorema 4. Uma matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se

1. Existe $\mathbf{B}$, $n \times n$, $r(\mathbf{B}) = n$ tal que $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \mathbf{A}$;
2. As raízes características de $\mathbf{A}$ são todas positivas;
3. E

$$a_{11} > 0, \ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \ \ldots, \ \det(\mathbf{A}) > 0.$$

Derivadas matriciais

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ e $f(\mathbf{x})$ uma função real de $x_1, \ldots, x_n$. A derivada de $f(\mathbf{x})$ com respeito a $\mathbf{x}$ é

Derivadas matriciais

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ e $f(\mathbf{x})$ uma função real de $x_1, \ldots, x_n$. A derivada de $f(\mathbf{x})$ com respeito a $\mathbf{x}$ é

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}^\top.$$

Derivadas matriciais

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ e $f(\mathbf{x})$ uma função real de $x_1, \ldots, x_n$. A derivada de $f(\mathbf{x})$ com respeito a $\mathbf{x}$ é

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}^\top .$$

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top\mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2.

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ (forma quadrática),

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ (forma quadrática), $\mathbf{A}$ uma matriz de constantes, então

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ (forma quadrática), $\mathbf{A}$ uma matriz de constantes, então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Derivadas matriciais

Teorema 1. Se $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ é um vetor de constantes e $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top\mathbf{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

Teorema 2. Se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}$ (forma quadrática), $\mathbf{A}$ uma matriz de constantes, então

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Decomposições

Uma matriz simétrica $\mathbf{A}$ pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\top},$$

Decomposições

Uma matriz simétrica $\mathbf{A}$ pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\top,$$

em que $\mathbf{L}$ é uma matriz diagonal inferior,

Decomposições

Uma matriz simétrica $\mathbf{A}$ pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\top,$$

em que $\mathbf{L}$ é uma matriz diagonal inferior, $\mathbf{L}^\top$ é uma matriz diagonal superior

Decomposições

Uma matriz simétrica $\mathbf{A}$ pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\top,$$

em que $\mathbf{L}$ é uma matriz diagonal inferior, $\mathbf{L}^\top$ é uma matriz diagonal superior e $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal.

Decomposições

Uma matriz simétrica $\mathbf{A}$ pode ser fatorada em

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\top,$$

em que $\mathbf{L}$ é uma matriz diagonal inferior, $\mathbf{L}^\top$ é uma matriz diagonal superior e $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal.

Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p, tal que

Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{T}$$

Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{T}$$

e $t_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, p$.

Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{T}$$

e $t_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, p$. Para a determinação de $\mathbf{T}$, ver Graybill (1983), por exemplo.

Decomposições

Seja uma matriz $\mathbf{A}$, $p \times p$, positiva definida. Então existe uma única matriz triangular superior $\mathbf{T}$, de posto p, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^\top \mathbf{T}$$

e $t_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, p$. Para a determinação de $\mathbf{T}$, ver Graybill (1983), por exemplo.

Decomposições

Decomposição de Cholesky. Uma matriz $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se existir $\mathbf{W}$ não singular tal que

Decomposições

Decomposição de Cholesky. Uma matriz $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se existir $\mathbf{W}$ não singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{W}^\top.$$

Decomposições

Decomposição de Cholesky. Uma matriz $\mathbf{A}$ é positiva definida se e só se existir $\mathbf{W}$ não singular tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{W}^\top.$$

Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma D \Gamma}^\top,$$

Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{D}\boldsymbol{\Gamma}^\top,$$

em que $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$,

Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^\top,$$

em que $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_p)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ são as raízes características de $\mathbf{A}$

Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{D}\boldsymbol{\Gamma}^{\top},$$

em que $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_p)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ são as raízes características de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ são os correspondentes vetores característicos normalizados,

Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{D} \boldsymbol{\Gamma}^\top,$$

em que $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_p)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ são as raízes características de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ são os correspondentes vetores característicos normalizados, isto é, ${\mathbf{x}_i}^\top \mathbf{x}_i = 1$, $i = 1, \ldots, p$.

Decomposições

Decomposição espectral. Qualquer matriz simétrica $\mathbf{A}$, $p \times p$, pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^\top,$$

em que $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_p)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ são as raízes características de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ são os correspondentes vetores característicos normalizados, isto é, ${\mathbf{x}_i}^\top \mathbf{x}_i = 1$, $i = 1, \ldots, p$.

Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{D}\mathbf{\Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p^\top .$$

Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{D}\mathbf{\Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1{}^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p{}^\top.$$

Observação:

Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1{}^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p{}^\top.$$

Observação: Se $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes,

Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1{}^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p{}^\top.$$

Observação: Se $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então $\mathbf{x}_i{}^\top \mathbf{x}_j = 0$.

Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{D}\boldsymbol{\Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1{}^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p{}^\top.$$

Observação: Se $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então $\mathbf{x}_i{}^\top \mathbf{x}_j = 0$. Nós dizemos que $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são ortogonais.

Decomposições

Verifica-se que

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{\Gamma}^\top = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1{}^\top + \cdots + \lambda_p \mathbf{x}_p \mathbf{x}_p{}^\top.$$

Observação: Se $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são dois vetores característicos associados as raízes características diferentes, então $\mathbf{x}_i{}^\top \mathbf{x}_j = 0$. Nós dizemos que $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são ortogonais.

Roteiro

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ se

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ se

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ de um parâmetro desconhecido θ é não viciado se

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta.$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ se

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon) = 0, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ.

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ.

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ.

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador de mínima variância de θ

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ.

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador de mínima variância de θ se para qualquer outro estimador θ^*:

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ.

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador de mínima variância de θ se para qualquer outro estimador θ^*:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\theta^*), \text{ para todo } \theta^* > 0.$$

Propriedades dos estimadores

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador suficiente de θ se a distribuição condicional das observações dado $\hat{\theta}$ não depende do parâmetro θ.

Um estimador $\hat{\theta}$ é um estimador de mínima variância de θ se para qualquer outro estimador θ^*:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \leq \mathrm{Var}(\theta^*), \text{ para todo } \theta^* > 0.$$

Estimador de máxima verossimilhança

Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por $f(y;\theta)$. Dada observações independentes $Y_1, \ldots, Y_n$,

Estimador de máxima verossimilhança

Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por $f(y;\theta)$. Dada observações independentes $Y_1, \ldots, Y_n$, a FDP conjunta dessas observações é

Estimador de máxima verossimilhança

Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por $f(y;\theta)$. Dada observações independentes $Y_1, \ldots, Y_n$, a FDP conjunta dessas observações é

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i;\theta). \tag{4}$$

Estimador de máxima verossimilhança

Seja Y uma variável aleatória com função densidade de probabilidade (FDP) dada por $f(y;\theta)$. Dada observações independentes $Y_1, \ldots, Y_n$, a FDP conjunta dessas observações é

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i;\theta). \tag{4}$$

Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ, ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta).$$

Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ, ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verosmilhança (EMV) de θ,

Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ, ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verosmilhança (EMV) de θ, é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza $L(\theta)$.

Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ, ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verosmilhança (EMV) de θ, é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza $L(\theta)$. Sob condições gerais, o EMV é consistente e suficiente.

Estimador de máxima verossimilhança

Quando a FDP conjunta (4) é vista em função do parâmetro θ, ela é denominada função de verossimilhança e escrita

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta).$$

O estimador de máxima verosmilhança (EMV) de θ, é o valor do parâmetro desconhecido que maximiza $L(\theta)$. Sob condições gerais, o EMV é consistente e suficiente.

Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i,\ \ i = 1, \ldots, n,$$

em que $f_i(\theta)$ é uma função conhecida de θ

Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

em que $f_i(\theta)$ é uma função conhecida de θ e ε_i é uma variável aleatória,

Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

em que $f_i(\theta)$ é uma função conhecida de θ e ε_i é uma variável aleatória, usualmente assumida com média nula.

Estimador de mínimos quadrados

Suponha que uma observação amostral tenha a seguinte forma:

$$Y_i = f_i(\theta) + \varepsilon_i,\ \ i = 1, \ldots, n,$$

em que $f_i(\theta)$ é uma função conhecida de θ e ε_i é uma variável aleatória, usualmente assumida com média nula.

Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ.

Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ. O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de θ é obtido minimizando Q com respeito a θ.

Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ. O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de θ é obtido minimizando Q com respeito a θ. Em muitos casos, o EMQ é não viesado e consistente.

Estimador de mínimos quadrados

No método dos mínimos quadrados, para dada uma amostra aleatória, a soma de quadrados

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - f_i(\theta)]^2$$

é considerada com função do parâmetro θ. O estimador de mínimos quadrados (EMQ) de θ é obtido minimizando Q com respeito a θ. Em muitos casos, o EMQ é não viesado e consistente.

Roteiro

1 Operações

2 Resultados matriciais

3 Estimação

4 Referências bibliográficas

Referências bibliográficas

Graybill, F. A. (1983). *Matrices with applications in Statistics* (2 ed.). Belmont: Wadsworth International Group.

Obrigado!

✉ tiago.magalhaes@ufjf.br

🖱 ufjf.br/tiago_magalhaes

🌍 Departamento de Estatística, Sala 319