Introdução às álgebras de Hopf

Profa. Virgínia Silva Rodrigues (UFSC)

29ª Semana da Matemática da UFJF
25 a 29 de novembro de 2024

Minicurso apresentado durante o evento: 29ª Semana da Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

Sumário

Introdução

A noção primária de uma álgebra de Hopf surgiu num trabalho sobre topologia algébrica de Heinz Hopf (1941) e um dos livros pioneiros para o qual essa teoria emergia foi o livro de Sweedler, [8]. Um tempo depois essa noção foi formulada para o contexto da categoria de espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbf{k}$. Álgebras de Hopf desse tipo, chamadas de álgebras de Hopf sobre um corpo, surgiram em uma série de situações: como álgebras subjacentes de grupos afins na teoria de grupos algébricos, como grupos formais na teoria dos números, como álgebras envolventes universais na teoria de Lie e na teoria de representações de álgebras.

Nesse contexto, uma álgebra de Hopf é uma $\mathbf{k}$-biálgebra ($\mathbf{k}$-álgebra com sua estrutura dual chamada coálgebra, e uma relação de compatibilidade entre essas duas estruturas) munida de uma antípoda.

Com o desenvolvimento dos estudos em teoria de categorias, que são apresentadas pela primeira vez em 1945, no trabalho de Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane intitulado *General Theory of Natural Equivalences* com o intuito de entender transformações naturais e, mais tarde, em 1963, com o surgimento das categorias monoidais também apresentadas primeiramente num trabalho de Mac Lane, veja [4] e [5], as álgebras de Hopf puderam ser estendidas para outros contextos. Por exemplo, para o contexto das categorias monoidais dos R-módulos, em que R é um anel comutativo, veja [1].

Nesse minicurso, pretendemos apresentar as álgebras de Hopf no contexto da categoria dos espaços vetoriais (finito ou infinito dimensionais) que, em particular, são categorias monoidais, isso justifica a introdução de diagramas comutativos nas definições dos objetos e morfismos. Os diagramas são interessantes para a dualização da estrutura de uma álgebra, que são as coálgebras. Pretendemos apresentar alguns exemplos importantes de álgebras de Hopf como a álgebra de polinômios cuja estrutura de coálgebra provém da propriedade universal da álgebra de polinômio, assim como outros exemplos como a álgebra de grupo, a álgebra de Sweedler de dimensão 4 e a álgebra tensorial de um espaço vetorial.

Capítulo 1

Álgebras e coálgebras

1.1 A categoria dos espaços vetoriais

Definição 1.1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de*

(i) *uma coleção de objetos: $Obj(\mathcal{C})$;*

(ii) *para cada par de objetos (X, Y), X, Y em $Obj(\mathcal{C})$, definimos a coleção de morfismos* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, *morfismos de X para Y;*

(iii) *para cada X em $Obj(\mathcal{C})$, existe um morfismo $id_X : X \to X$, chamado de morfismo identidade;*

(iv) *para quaisquer X, Y, Z em $Obj(\mathcal{C})$, é definida uma operação dada por*

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & (g, f) & \mapsto & \circ(g, f) = g \circ f. \end{array}$$

Esta operação, chamada composição, deve satisfazer, para quaisquer f em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, *$g$ em* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ *e h em* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, *as seguintes condições:*

(a) *$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, ou seja, $\circ$ é associativa;*

(b) *$f \circ id_X = f = id_Y \circ f$.*

Alguns exemplos de categorias conhecidas: A categoria *Set* (categoria dos conjuntos), *Ring* (categoria dos anéis com unidade), *Grp* (categoria dos grupos), *Ab* (categoria de grupos abelianos). Quais são os objetos e morfismos para essas categorias ?

Para outro exemplo de categoria, consideramos A um anel com unidade. A categoria ${}_A\mathbf{M}$ dos A-módulos à esquerda e $\mathbf{M}_A$, a categoria dos A-módulos à direita. Os objetos são A-módulos à direita (à esquerda) , respectivamente. Os morfismos são morfismos de A-módulos à direita (à esquerda), respectivamente.

O caso particular em que $A = \mathbf{k}$, em que $\mathbf{k}$ é um corpo qualquer, nos permite considerar a categoria dos espaços vetoriais tanto infinito como finito dimensional. Denotamos por $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ a categoria dos $\mathbf{k}$-espaços vetoriais de dimensão qualquer tal que os objeto em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$

$$Obj(\mathrm{Vect}_k) \text{ são espaços vetoriais sobre } \mathbf{k} \text{ ou } \mathbf{k}\text{-espaços vetoriais}$$

e, para cada par de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais V, W, tem-se

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}}(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ é morfismo entre } \mathbf{k}\text{-espaços vetoriais}\}.$$

Os morfismos entre $\mathbf{k}$-espaços vetoriais são as transformações lineares. Para simplificar escrita, escrevemos apenas $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ para designar $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}}(V, W)$.

De modo análogo, temos a categoria $\mathrm{vect}_{\mathbf{k}}$ dos $\mathbf{k}$-espaços vetoriais de dimensão finita, isto é, os objetos são $\mathbf{k}$-espaços vetoriais de dimensão finita.

1.2 Álgebras e coálgebras em $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$

Seja $\mathbf{k}$ um corpo, a definição abaixo já conhecida da álgebra clássica, é válida também para $\mathbf{k}$ um anel comutativo com unidade. Todavia ao longo desse minicurso, $\mathbf{k}$ será sempre um corpo.

Definição 1.2.1. *Um anel com unidade A diz-se uma $\mathbf{k}$-álgebra se A é um A é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial ($\mathbf{k}$-módulo) e, $\forall a, b \in A, \alpha \in \mathbf{k}$, $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.*

Exemplo 1.2.2. Um corpo $\mathbf{k}$ é uma $\mathbf{k}$-álgebra.

Exemplo 1.2.3. Consideremos $A = \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ o anel das matrizes quadradas $n \times n$ sobre $\mathbf{k}$ é uma $\mathbf{k}$-álgebra, sendo um $\mathbf{k}$-espaço vetorial de dimensão n^2. Podemos pensar $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{\mathbf{p}}$, p primo.

Exemplo 1.2.4 (Álgebra de polinômios)**.** O anel $A = \mathbf{k}[X]$ dos polinômios na variável X sobre $\mathbf{k}$ é uma $\mathbf{k}$-álgebra, notando que é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial com base $\{X^i\}_{i \geq 0} = \{1, X, X^2, \cdots, X^n, \cdots\}$.

Exemplo 1.2.5 (Álgebra de grupo)**.** Sejam $\mathbf{k}$ um corpo e G um grupo. Definimos

$$\mathbf{k}[G] = \bigoplus_{g \in G} \mathbf{k}g,$$

em que $\mathbf{k}g =< g >$ é o $\mathbf{k}$-espaço gerado por g (mais precisamente gerado por $1_{\mathbf{k}}g$ que escrevemos como g). Um elemento $x \in \mathbf{k}[G]$ é escrito como $x = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, em que a soma em questão é finita e $\alpha_g \in \mathbf{k}, g \in G$. Claramente, $\mathbf{k}[G]$ é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial com base $\{g\}_{g \in G}$.

A estrutura de $\mathbf{k}$-álgebra para $\mathbf{k}[G]$ é dada pela multiplicação como segue

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g \cdot \sum_{h \in G} \beta_h h = \sum_{g,h \in G} \alpha_g \beta_h gh$$

e a unidade é dada por $1_{\mathbf{k}[G]} = 1_{\mathbf{k}[G]}$.

Agora introduzimos uma definição equivalente à Definição 1.2.1 de $\mathbf{k}$-álgebra via diagramas (essa definição é dada dessa maneira exatamente pelo fato de que $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ (e $\text{vect}_{\mathbf{k}}$) é um caso particular de uma categoria monoidal).

Definição 1.2.6. *Uma álgebra em $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ é uma tripla (A, m, u), em que A é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial, $m : A \otimes A \to A$ ($\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$) e $u : \mathbf{k} \to A$ são morfismos de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais (são transformações lineares) tais que os diagramas sejam comutativos*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes id_A"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbf{k} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, blue, "(\alpha')^{-1}"'] & & A \otimes \mathbf{k} \arrow[ul, "id_A \otimes u"'] \arrow[dl, blue, "\alpha^{-1}"] \\
& A \arrow[ul, "\alpha'"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}
\quad (2)$$

em que

$$\begin{array}{rcccrccc}
\alpha^{-1}: & A \otimes \mathbf{k} & \to & A & \alpha: & A & \to & A \otimes \mathbf{k} \\
& a \otimes k & \mapsto & ak & & a & \mapsto & a \otimes 1_{\mathbf{k}} \\
(\alpha')^{-1}: & \mathbf{k} \otimes A & \to & A & \alpha': & A & \to & \mathbf{k} \otimes A \\
& k \otimes a & \mapsto & ka & & a & \mapsto & 1_{\mathbf{k}} \otimes a
\end{array}$$

são os conhecidos isomorfismos $\mathbf{k}$-lineares.

Os morfismos m e u na definição acima são chamados, respectivamente, *multiplicação* e *unidade* da álgebra. A comutatividade do diagrama (1) é a *associatividade* de A. Notemos que a comutatividade do diagrama (2) é dada pelas igualdades

$$m \circ (u \otimes id_A) = (\alpha')^{-1} \text{ o que implica } m \circ (u \otimes id_A) \circ \alpha' = id_A$$

e

$$m \circ (id_A \otimes u) = \alpha^{-1} \text{ o que implica } m \circ (id_A \otimes u) \circ \alpha = id_A.$$

Isto quer dizer que, para todo $a \in A$, vale que

$$(m \circ (u \otimes id_A) \circ \alpha')(a) = id_A(a) = a, \text{ isto é, } m(u(1_{\mathbf{k}}) \otimes a) = a$$

e

$$(m \circ (id_A \otimes u) \circ \alpha)(a) = id_A(a), \text{ isto é, } m(a \otimes u(1_{\mathbf{k}})) = a.$$

Isso motiva o fato de u ser chamado a *unidade* da álgebra.

Exercício 1.2.7. Verificar a equivalência das definições 1.2.1 e 1.2.6.

Os exemplos apresentados acima são exemplos de álgebras em Vect$_{\mathbf{k}}$: $\mathbf{k}[X]$ e $\mathbf{k}[G]$ se G é um grupo infinito em vect$_{\mathbf{k}}$: o corpo $\mathbf{k}$, $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ e $\mathbf{k}[G]$ se G é um grupo finito.

Uma das vantagens de se definir uma álgebra em Vect$_{\mathbf{k}}$ (via diagramas) é que podemos dualizar a definição de uma álgebra, ou seja, podemos "inverter"as flechas e dessa forma, é definida a estrutura chamada *coálgebra*.

Definição 1.2.8. *Uma coálgebra em* Vect$_{\mathbf{k}}$ *é uma tripla* (C, Δ, ε)*, em que* C *é um* $\mathbf{k}$*-espaço vetorial,* $\Delta : C \to C \otimes C$ *e* $\varepsilon : C \to \mathbf{k}$ *são morfismos de* $\mathbf{k}$*-espaços vetoriais tais que os diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, bend right, "(\gamma')^{-1}"'] \arrow[dr, bend left, "\gamma^{-1}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ \mathbf{k} \otimes C \arrow[ur, "\gamma'"'] & & C \otimes \mathbf{k}. \arrow[ul, "\gamma"] \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad (4)$$

Os morfismos Δ e ε da definição acima são chamados, respectivamente, *comultiplicação* e *counidade* da coálgebra. A comutatividade do diagrama (3) é chamada *coassociatividade.*

Observemos que, para cada $c \in C$, temos

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(c) &= \overbrace{(id_C \otimes \Delta)}^{\mathbf{k}\text{-linear}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c_i' \right) = \sum_{i=1}^{n} (id_C \otimes \Delta)(c_i \otimes c_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes \Delta(c_i') = \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \otimes d_{ij}' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \otimes (d_{ij} \otimes d_{ij}').
\end{aligned}$$

Podemos observar que composições sucessivas de $\Delta's$ dificultam consideravelmente o desenvolvimento de cálculos envolvendo tais composições, por isso é utilizada a conhecida **notação de Sweedler**, que pode ser encontrada com detalhes em [2]. Resumidamente,

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Alguns autores omitem os somatórios, assim

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Tendo em mente essa notação, vejamos o que significa a coassociatividade

$$\begin{aligned}
((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) &= (id_C \otimes \Delta) \left(\sum c_1 \otimes c_2 \right) = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \\
&= \sum c_1 \otimes \left(\sum c_{2_1} \otimes c_{2_2} \right) \\
&= \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= (\Delta \otimes id_C)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right)\\ &= \sum \Delta(c_1) \otimes c_2\\ &= \sum \left(\sum c_{1_1} \otimes c_{1_2}\right) \otimes c_2\\ &= \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2\end{aligned}$$

Pela comutatividade do diagrama (3), segue que

$$\sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

A comutatividade do diagrama (4) garante que $(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \gamma^{-1}$ e compondo γ à esquerda, obtemos $\gamma \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \gamma \circ \gamma^{-1} = id_C$. Para todo $c \in C$, temos

$$\begin{aligned}c = id_C(c) &= (\gamma \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(c) = (\gamma \circ (id_C \otimes \varepsilon))(\sum c_1 \otimes c_2)\\ &= \gamma(\sum c_1 \otimes \varepsilon(c_2)) = \sum \gamma(c_1 \otimes \varepsilon(c_2))\\ &= \sum c_1 \varepsilon(c_2).\end{aligned}$$

Analogamente, $c = \sum \varepsilon(c_1)c_2$. Logo, concluímos que

$$\sum c_1\varepsilon(c_2) = c = \sum \varepsilon(c_1)c_2.$$

Esta propriedade chama-se *propriedade da counidade*. Podemos estabelecer uma recorrência para a notação de Sweedler. Para $n \geq 2$, temos

$$\Delta_n = (\Delta \otimes id^{n-1}) \circ \Delta_{n-1},$$

em que $\Delta_n : C \to \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{n+1 \text{ vezes}}$ e $id^{n-1} = \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-1 \text{ vezes}}$. Por exemplo, para $n = 2$ temos

$$\Delta_2 = (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \otimes \Delta.$$

Já para $n = 3$, temos

$$\Delta_3 = (\Delta \otimes id \otimes id) \circ \Delta_2 = (\Delta \otimes id \otimes id) \circ (\Delta \otimes id) \circ \Delta).$$

Exemplo 1.2.9. $\mathbf{k}$ é uma coálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, em que $\Delta : \mathbf{k} \to \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ é dada por $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1_{\mathbf{k}}$ e $\varepsilon : \mathbf{k} \to \mathbf{k}$ é dada pela identidade $\varepsilon = id_{\mathbf{k}}$.

Exemplo 1.2.10. A álgebra de matrizes $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ é uma coálgebra em $\mathrm{vect}_{\mathbf{k}}$, que será denotada por $\mathbb{M}_n^c(\mathbf{k})$, cuja comultiplicação é definida nos elementos de uma base $\{e_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ por

$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{1 \leq s \leq n} e_{is} \otimes e_{sj} \ \text{ e } \ \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Exemplo 1.2.11. A álgebra de grupo $\mathbf{k}[G]$ é uma coálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ se G é um grupo infinito e em $\mathrm{vect}_{\mathbf{k}}$ se G é finito, definindo $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1_{\mathbf{k}}$, para todo $g \in G$.

De fato, chamando $C = \mathbf{k}[G]$, temos que

$$\begin{aligned}((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(g) &= (id_C \otimes \Delta)(g \otimes g) = g \otimes \Delta(g) = g \otimes g \otimes g\\ &= \Delta(g) \otimes g = (\Delta \otimes id_C)(g \otimes g)\\ &= ((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(g).\end{aligned}$$

Fica como exercício mostrar a comutatividade do segundo diagrama da definição de uma coálgebra.

O próximo exemplo generaliza o exemplo acima, veja.

Exemplo 1.2.12. Sejam $\mathbf{k}$ um corpo e S um conjunto. Consideremos $\mathbf{k}[S]$ o espaço vetorial gerado por S. Assim, $\mathbf{k}[S]$ possui uma estrutura de coálgebra dada por $\Delta(s) = s \otimes s$ e $\varepsilon(s) = 1_{\mathbf{k}}$, $\forall s \in S$. Se $S = \varnothing$ então $\mathbf{k}[\varnothing] = \{0\}$.

Seja C uma coálgebra em Vect$_{\mathbf{k}}$. Um elemento $c \in C$ é dito *grouplike* (ou elemento de tipo grupo) se $\Delta(c) = c \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 1_{\mathbf{k}}, \forall c \in C$. As coálgebras dos exemplos 1.2.9, 1.2.11 e 1.2.12 acima apresentam esses elementos. Todavia, o Exemplo 1.2.10, não possui elementos *grouplike*, por quê? Voltaremos a falar sobre isso na seção 1.4 desse capítulo, havendo tempo.

Finalizamos a seção definindo álgebras comutativas e coálgebras cocomutativas. Uma álgebra (A, m, u) em Vect$_k$ diz-se *comutativa* se $m(a \otimes b) = m(b \otimes a)$, para quaisquer $a, b \in A$. Em termos de diagramas, temos

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A, & \end{tikzcd}$$

em que σ é o isomorfismo linear $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$, também conhecido como *twist* e por isso $m(a \otimes b) = (m \circ \sigma)(a \otimes b) = m(\sigma(a \otimes b)) = m(b \otimes a)$.

Dada uma álgebra A em Vect$_{\mathbf{k}}$, a álgebra *oposta* de A, que é denotada por A^{op}, é tal que $A = A^{op}$ como espaços vetoriais e $m^{op} = m \circ \sigma$. Não é difícil ver que A é comutativa se, e somente se, $A = A^{op}$ como álgebras.

Uma coálgebra (C, Δ, ε) em Vect$_k$ diz-se *cocomutativa* se $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1$, para qualquer $c \in C$, em termos de diagramas temos

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & C \otimes C \arrow[dl, "\sigma"] \\ & C \otimes C & \end{tikzcd}$$

e essa comutatividade é expressa como $\sum c_1 \otimes c_2 = \Delta(c) = (\sigma \circ \Delta)(c) = \sigma(\Delta(c)) = \sigma(\sum c_1 \otimes c_2) = \sum c_2 \otimes c_1$.

Dada uma coálgebra C em Vect$_{\mathbf{k}}$, a coálgebra *co-oposta* de C, que é denotada por C^{cop}, é tal que $C = C^{cop}$ como espaços vetoriais e $\Delta^{cop} = \sigma \circ \Delta$. Não é difícil ver que C é cocomutativa se, e somente se, $C = C^{cop}$ como coálgebras.

1.3 Morfismos de álgebras e de coálgebras em Vect$_{\mathbf{k}}$

Uma vez estudadas álgebras e coálgebras em Vect$_{\mathbf{k}}$, agora estudamos morfismos desses objetos nessa mesma categoria.

Definição 1.3.1. *Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) duas álgebras em Vect$_{\mathbf{k}}$. Um morfismo de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais $f : A \to B$ diz-se um morfismo de álgebras se os diagramas abaixo comutam*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & \mathbf{k}. \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Da comutatividade do primeiro diagrama temos, para quaisquer $a, a' \in A$, que

$$\begin{aligned} f(m_A(a \otimes a')) &= (f \circ m_A)(a \otimes a') = (m_B \circ (f \otimes f))(a \otimes a') = m_B((f \otimes f)(a \otimes a')) \\ &= m_B(f(a) \otimes f(a')). \end{aligned}$$

Pela comutatividade do segundo diagrama segue que $f(u_A(1_{\mathbf{k}})) = u_B(1_{\mathbf{k}})$.

Lembrando que essa definição e a definição clássica são equivalentes, lembrando que um morfismo $f : A \to B$ de $\mathbf{k}$-álgebras é um morfismo de anéis, de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais e $f(1_A) = 1_B$.

Definição 1.3.2. *Sejam* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *e* $(D, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *duas coálgebras em* $Vect_{\mathbf{k}}$. *Um morfismo de* $\mathbf{k}$-*espaços vetoriais* $f : C \to D$ *diz-se um morfismo de* $\mathbf{k}$-*coálgebras se os diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbf{k}. & \end{tikzcd}$$

Devido à comutatividade do primeiro diagrama, isto é, $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ implica, para todo $c \in C$, que

$$\begin{aligned} \sum (f(c))_1 \otimes (f(c))_2 &= \Delta_D(f(c)) = (\Delta_D \circ f)(c) \\ &= ((f \otimes f) \circ \Delta_C)(c) = (f \otimes f)(\Delta_C(c)) = (f \otimes f)(\sum c_1 \otimes c_2) \\ &= \sum f(c_1) \otimes f(c_2) \end{aligned}$$

e a comutatividade do segundo diagrama nos diz que

$$\varepsilon_C(c) = (\varepsilon_D \circ f)(c) = \varepsilon_D(f(c)), \ \forall c \in C.$$

1.4 A álgebra e a coálgebra duais

Nosso objetivo nessa sessão é mostrar que se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então o espaço vetorial dual $C^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C, \mathbf{k})$ é uma álgebra, essa prova independe de C ser ou não finito dimensional.

Para o caso em que (A, m, u) é uma álgebra, o espaço vetorial dual $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$ não é necessariamente uma coálgebra. O problema reside no que diremos a seguir.

Para conseguir produzir em A^* uma estrutura de coálgebra, precisamos determinar $\Delta_{A^*} : A^* \to A^* \otimes A^*$ e $\varepsilon_{A^*} : A^* \to \mathbf{k}$. Desta forma, ao considerarmos $m : A \otimes A \to A$, temos o morfismo de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais $m^* : A^* \to (A \otimes A)^*$. É necessário estabelecer a seguinte função $f : (A \otimes A)^* \to A^* \otimes A^*$, veja abaixo:

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "m^*"] \arrow[rr, bend right, "\Delta_{A^*} = f \circ m^*"'] & (A \otimes A)^* \arrow[r, "f"] & A^* \otimes A^*. \end{tikzcd}$$

Porém, nem sempre é possível determinar f, a menos que $\dim_{\mathbf{k}} A < \infty$. Sabemos, no entanto, que o $\mathbf{k}$-morfismo $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ é injetor sem qualquer hipótese adicional. No caso de A ser finito dimensional, ρ é um isomorfismo, veja a Proposição 1.4.1 abaixo. Caso não seja exigida finito dimensionalidade, podemos definir uma estrutura de coálgebra não em todo o espaço vetorial A^*, mas em um subespaço A^0 de A^*, chamado *dual finito* de A. Nesse minicurso, não abriremos essa discussão.

Proposição 1.4.1. *Sejam* M, N *e* V $\mathbf{k}$-*espaços vetoriais e morfismos de* $\mathbf{k}$-*espaços vetoriais*

$$\phi : M^* \otimes V \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(M, V),$$

$$\phi' : \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(M, N^*) \to (M \otimes N)^*,$$

$$\rho : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*,$$

definidos por

$$\phi(f \otimes v) = f(m)v, \forall f \in M^*, n \in V \ \ e \ m \in M,$$

$$\phi'(g)(m \otimes n) = g(m)(n), \forall g \in Hom_{\mathbb{K}}(M, N^*), m \in M \ \ e \ n \in N,$$

$$\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n), \forall f \in M^*, g \in N^*, m \in M \ \ e \ n \in N.$$

Então:

(i) ϕ *é injetora e, além disso, se* $\dim_{\mathbf{k}} V < \infty$, *então* ϕ *é um isomorfismo.*

(ii) *ϕ' é um isomorfismo.*

(iii) *ρ é injetora e, além disso, se $dim_{\mathbf{k}}N < \infty$, então ρ é um isomorfismo.*

O lema seguinte é útil na prova de que C^* é uma álgebra.

Lema 1.4.2. *Seja $f : X \to Y$ um morfismo de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais. Então $f^* : Y^* \to X^*$ dada por $f^*(g) := g \circ f, \forall g \in Y^*$ é um morfismo de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais.*

Para mostrar que se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então C^* é uma álgebra, precisamos determinar a estrutura de álgebra de C^*, ou seja, precisamos determinar $m_{C^*} : C^* \otimes C^* \to C^*$ e $u_{C^*} : \mathbf{k} \to C^*$. Desta forma, observemos que

$$\begin{tikzcd} C^* \otimes C^* \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend left, "m_{C^*}"] & (C \otimes C)^* \arrow[r, "\Delta^*"] & C^* \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{k} \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "u_{C^*}"'] & \mathbf{k}^* \arrow[r, "\varepsilon^*"] & C^*, \end{tikzcd}$$

ou seja, podemos definir

$$\boxed{m_{C^*} = \Delta^* \circ \rho} \quad \text{e} \quad \boxed{u_{C^*} = \varepsilon^* \circ \psi},$$

em que $\psi(x)(y) = xy$, para quaisquer $x, y \in \mathbf{k}$.

Proposição 1.4.3. *Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra em* $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$*, então (C^*, m_{C^*}, u_{C^*}) é uma álgebra em* $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$.

Demonstração. Sejam $f, g \in C^*$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}
(m_{C^*}(f \otimes g))(c) &= ((\Delta^* \circ \rho)(f \otimes g))(c) \\
&= (\Delta^*(\rho(f \otimes g)))(c) \\
&\overset{1.4.2}{=} (\rho(f \otimes g) \circ \Delta)(c) \\
&= \rho(f \otimes g)(\Delta(c)) \\
&= \rho(g \otimes g)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) \\
&= \sum \rho(f \otimes g)(c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2).
\end{aligned}$$

Sendo assim, definimos $m_{C^*}(f \otimes g) := f * g : C \to \mathbf{k}$, chamado **produto de convolução**. Logo, $\forall c \in C$,

$$\boxed{m_{C^*}(f \otimes g)(c) = (f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2).}$$

Primeiramente, verifiquemos a comutatividade do primeiro diagrama da Definição 1.2.6. Ao mostrarmos isto, estaremos mostrando que o produto de convolução é associativo. Sejam $f, g, h \in C^*$. Assim, para todo $c \in C$,

$$\begin{aligned}
(((m_{C^*} \circ (m_{C^*} \otimes id_{C^*}))(f \otimes g \otimes h))(c) &= (m_{C^*}((f * g) \otimes h))(c) \\
&= ((f * g) * h)(c) = \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\
&= \sum \left(\sum f(c_{1_1})g(c_{1_2})\right) h(c_2) \\
&= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\
&= \sum f(c_1)\left(\sum g(c_{2_1})h(c_{2_2})\right) \\
&= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\
&= (f * (g * h))(c) \\
&= (m_{C^*}(f \otimes (g * h)))(c) \\
&= (((m_{C^*} \circ (id_{C^*} \otimes m_{C^*}))(f \otimes g \otimes h))(c).
\end{aligned}$$

Logo, $m_{C^*} \circ (m_{C^*} \otimes id_{C^*}) = m_{C^*} \circ (id_{C^*} \otimes m_{C^*})$. Observemos também que, para todo $x \in \mathbf{k}$, temos

$$\begin{aligned}((u_{C^*}(x))(c) &= ((\varepsilon^* \circ \psi)(x))(c) \\ &= (\varepsilon^*(\psi(x)))(c) \\ &\overset{1.4.2}{=} (\psi(x) \circ \varepsilon)(c) \\ &= \psi(x)(\varepsilon(c)) \\ &= x\varepsilon(c).\end{aligned}$$

Logo, $\forall c \in C$,

$$\boxed{((u_{C^*}(x))(c) = x\varepsilon(c)}$$

Agora verifiquemos a comutatividade do segundo diagrama. Sejam $f \in C^*$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}(m_{C^*} \circ (id_{C^*} \otimes u_{C^*}) \circ \alpha)(f) &= m_{C^*}((id_{C^*} \otimes u_{C^*})(f \otimes 1_{\mathbf{k}})) \\ &= (f * u_{C^*}(1_{\mathbf{k}}))(c) = \sum f(c_1)(u_{C^*}(1_{\mathbf{k}}))(c_2) \\ &= \sum f(c_1)\varepsilon(c_2) \\ &= f\left(\sum c_1\varepsilon(c_2)\right) \\ &\overset{(*)}{=} f(c) \\ &= (id_{C^*}(f))(c),\end{aligned}$$

em $(*)$ usamos a propriedade da counidade. Analogamante, $m_{C^*} \circ (u_{C^*} \otimes id_{C^*}) \circ \alpha' = id_{C^*}$.

O que acabamos de provar imediatamente acima é que $u_{C^*}(1_{\mathbf{k}}) * f = f = f * u_{C^*}(1_{\mathbf{k}}), \forall f \in C^*$, isto é, que $u_{C^*}(1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon$ é a unidade de C^*. ■

Voltamos à questão dos elementos *grouplike* mencionados na seção 1.2.

Proposição 1.4.4. *Sejam A uma álgebra finito dimensional e $A^* = Hom_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$ sua coálgebra dual. Então*

$$G(A^*) = \mathrm{Alg}(A, \mathbf{k}) := \{f : A \to \mathbf{k} : f \text{ é morfismo de álgebras em } \mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}\},$$

em que $G(A^*)$ é o conjunto de elementos grouplike da coálgebra A^*.

Proposição 1.4.5. *Seja $A = \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ a álgebra de matrizes já mencionada. Então a coálgebra dual $A^* = (\mathbb{M}_n(\mathbf{k}))^*$ é isomorfa à coálgebra $\mathbb{M}_n^c(\mathbf{k})$, a coálgebra de matrizes.*

Notemos que, devido à Proposição 1.4.4, temos que $G(A^*) = \mathrm{Alg}(A, \mathbf{k}) = \mathrm{Alg}(\mathbb{M}_n(\mathbf{k}), \mathbf{k})$. Afirmamos que $G(A^*) = \varnothing$.

De fato, não existe $f : \mathbb{M}_n(\mathbf{k}) \to \mathbf{k}$ para $n > 1$ pois, caso contrário, como $Ker(f)$ é um ideal de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ e $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ é um anel simples, os únicos ideais são os triviais. Logo, $Ker(f) = \{0\}$ ou $Ker(f) = \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$. Se $Ker(f) = \{0\}$, então $\dim(Ker(f)) = 0$ e, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, temos que $\dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{M}_n(\mathbf{k})) = n^2 \geq 4$ $(n > 1)$, que é um absurdo, visto que $\dim(Im(f)) \leq \dim(\mathbf{k}) = 1$.

Se $Ker(f) = \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$, então f é o morfismo nulo, que também nos dá um absurdo, pois f é um morfismo de álgebras e portanto, $f(1) = 1$.

Logo, $G(A^*) = \varnothing$ e podemos concluir, pelo isomorfismo dito acima, que $G(\mathbb{M}^c(n, \mathbf{k})) = \varnothing$, ou seja, $\mathbb{M}^c(n, \mathbf{k})$, para $n > 1$, é um exemplo de coálgebra que não possui elementos *grouplike*.

Capítulo 2

Álgebras de Hopf

2.1 Biálgebras

Seja H um $\mathbf{k}$-espaço vetorial dotado de uma estrutura de álgebra (H, m, u) e de coálgebra (H, Δ, ε) em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Nesse momento, é necessário perguntar-se: o tensor de duas álgebras (coálgebras) em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ ainda é uma álgebra (coálgebra) em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$? Respondemos nas proposições seguintes.

Proposição 2.1.1. *Se A e B são álgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, então $A \otimes B$ é uma álgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, cujos morfismos $m_{A\otimes B} : A \otimes B \otimes A \otimes B \to A \otimes B$ e $u_{A\otimes B} : \mathbf{k} \to A \otimes B$ são dados, respectivamente, pelas composições abaixo*

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{id_A \otimes \sigma \otimes id_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_A \otimes m_B} A \otimes B$$

$$\mathbf{k} \xrightarrow{\phi} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \xrightarrow{u_A \otimes u_B} A \otimes B.$$

Proposição 2.1.2. *Se C e D são coálgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, então $C \otimes D$ é uma coálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ com os morfismos $\Delta_{C\otimes D} : C \otimes D \to C \otimes D \otimes C \otimes D$ e $\varepsilon_{C\otimes D} : C \otimes D \to \mathbf{k}$ dados, respectivamente, por*

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{id_C \otimes \sigma \otimes id_D} C \otimes D \otimes C \otimes D$$

$$C \otimes D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbf{k}.$$

Proposição 2.1.3. Seja H um $\mathbf{k}$-espaço vetorial que seja simultaneamente uma álgebra (H, m_H, u_H) e uma coálgebra $(H, \Delta_H, \varepsilon_H)$. Então são equivalentes:

(i) m_H e u_H são morfismos de coálgebras;

(ii) Δ_H e ε_H são morfismos de álgebras.

Demonstração. Se Δ_H e ε_H são morfismos de álgebras, então os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\Delta_H \otimes \Delta_H"] \arrow[dd, "m_H"'] & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "id_H \otimes \sigma \otimes id_H"] \arrow[dd, bend left=60, "m_{H\otimes H}"] \\
(5) & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "m_H \otimes m_H"] \\
H \arrow[r, "\Delta_H"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta_H"] & H \otimes H \\
& \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \arrow[u, "u_H \otimes u_H"'] \\
\mathbf{k} \arrow[uu, "u_H"] \arrow[r, "id_{\mathbf{k}}"'] \arrow[from=1-1, to=3-2, phantom, "(6)"] & \mathbf{k} \arrow[u, "\phi"'] \arrow[uu, bend right=80, "u_{H\otimes H}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H"] \arrow[d, "m_H"'] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \arrow[d, "m_{\mathbf{k}}=\phi^{-1}"] \\
H \arrow[r, "\varepsilon_H"'] & \mathbf{k}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\varepsilon_H"] & & \mathbf{k} \\
& \mathbf{k}. \arrow[ul, "u_H"] \arrow[ur, "id_{\mathbf{k}}=u_{\mathbf{k}}"'] \arrow[u, phantom, "(8)"] &
\end{tikzcd}
$$

Observemos agora os diagramas que nos dizem que m_H e u_H são morfismos de coálgebras.

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "\Delta_H \otimes \Delta_H"] \arrow[dd, bend right=70, "\Delta_{H\otimes H}"'] & H \arrow[dd, "\Delta_H"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "id_H \otimes \sigma \otimes id_H"] \arrow[r, phantom, "(9)"] & \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "m_H \otimes m_H"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H"'] & H \arrow[dd, "\varepsilon_H"] \\
\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \arrow[d, "\phi^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "(10)"] & \\
\mathbf{k} \arrow[r, "id_{\mathbf{k}}"'] & \mathbf{k}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \arrow[r, "u_H"] \arrow[d, "\phi=\Delta_{\mathbf{k}}"'] \arrow[dr, phantom, "(11)"] & H \arrow[d, "\Delta_H"] \\
\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \arrow[r, "u_H \otimes u_H"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \arrow[rr, "u_H"] \arrow[dr, "id_{\mathbf{k}}=\varepsilon_{\mathbf{k}}"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon_H"] \\
& \mathbf{k}. \arrow[u, phantom, "(12)"] &
\end{tikzcd}
$$

Os quatro primeiros diagramas implicam nos quatro últimos diagramas e vice-versa, exatamente como segue (5) $\Leftrightarrow$ (9), (6) $\Leftrightarrow$ (11), (7) $\Leftrightarrow$ (10) e (8) $\Leftrightarrow$ (12). ■

Observação 2.1.4. O fato de Δ e ε serem morfismos de álgebras nos diz que, para quaisquer $g, h \in H$,

$$\Delta(gh) = \sum (gh)_1 \otimes (gh)_2 = \sum g_1 h_1 \otimes g_2 h_2 \quad \text{e} \quad \Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$$
$$\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) \quad \text{e} \quad \varepsilon(1_H) = 1_K.$$

Definição 2.1.5. *Uma biálgebra em* $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ *é um* $\mathbf{k}$*-espaço vetorial que possui uma estrutura de álgebra* (H, m, u) *e de coálgebra* (H, Δ, ε) *em* $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ *tal que* Δ *e* ε *são morfismos de álgebras (ou, equivalentemente, tal que* m *e* u *são morfismos de coálgebras).*

Exemplo 2.1.6. $\mathbf{k}$ é uma biálgebra em $\mathrm{vect}_{\mathbf{k}}$.

Exemplo 2.1.7. Se H é uma biálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ então H^{op}, H^{cop} e $H^{op,cop}$ são também biálgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Explicando: H^{op} possui a estrutura de álgebra oposta de H e a mesma estrutura de coálgebra de H, H^{cop} possui a estrutura de coálgebra co-oposta de H e a mesma estrutura de álgebra de H e $H^{op,cop}$ possui a estrutura de álgebra oposta de H e de coálgebra co-oposta de H.

Proposição 2.1.8. *Se* H *é uma biálgebra em* $\mathrm{vect}_{\mathbf{k}}$*, então* H^* *é uma biálgebra em* $\mathrm{vect}_{\mathbf{k}}$*.*

Definição 2.1.9. *Sejam* H, L *biálgebras em* $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$*. Um morfismo de* $\mathbf{k}$*-espaços vetoriais* $f : H \to L$ *é dito um morfismo de biálgebras se* f *é um morfismo de álgebras e de coálgebras.*

Vamos apresentar exemplos de biálgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ na seção 2.3.

2.2 Álgebras de Hopf

Nosso objetivo nessa seção é apresentar a definição e algumas propriedades de álgebras de Hopf. Inicialmente, vamos discutir um caso geral da álgebra de convolução apresentada na seção 1.4. Essa discussão é necessária para que possamos definir a chamada antípoda. A existência da antípoda diferencia uma biálgebra de uma álgebra de Hopf.

Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra, ambas em $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$. Podemos definir em $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$ uma estrutura de álgebra em $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ com a multiplicação também chamada produto de convolução como é apresentado a seguir:

$$(f * g)(c) = (m \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) = (m \circ (f \otimes g))(\sum c_1 \otimes c_2) = m(\sum f(c_1) \otimes f(c_2)) = \sum f(c_1)g(c_2),$$

para quaisquer $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$ e $c \in C$. O morfismo $u \circ \varepsilon : C \to A$ em $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ será a unidade dessa álgebra.

Proposição 2.2.1. *O* $\mathbf{k}$*-espaço vetorial* $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$ *é uma álgebra com o produto* $*$ *definido acima.*

Demonstração. Mostremos que $*$ é associativo, isto é, vale o diagrama (1) da definição de álgebra. Para quaisquer $f, g, h \in \text{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A)$ e $c \in C$, temos

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) = \sum f(c_{11})g(c_{12})h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_{21})h(c_{22}) = \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= (f * (g * h))(c), \end{aligned}$$

ou seja, $(f * g) * h = f * (g * h)$. Agora, verifiquemos que $u \circ \varepsilon = id_{\text{Hom}_{\mathbf{k}}(C,A)}$, que é equivalente a mostrarmos o diagrama (2) da definição de uma álgebra,

$$\begin{aligned} (f * (u \circ \varepsilon))(c) &= \sum f(c_1)(u \circ \varepsilon)(c_2) = \sum f(c_1)u(\varepsilon(c_2)) \\ &= \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)u(1_{\mathbf{k}}) = \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)1_A \\ &= \sum f(c_1\varepsilon(c_2)) = f(\sum c_1\varepsilon(c_2)) = f(c), \end{aligned}$$

e por $c \in C$ ser arbitrário, $f * (u \circ \varepsilon) = f$. De forma análoga mostra-se que $(u \circ \varepsilon) * f = f$. Portanto, $(\text{Hom}_{\mathbf{k}}(C, A), *, u \circ \varepsilon)$ é uma álgebra. ■

Agora, consideremos H uma biálgebra com a estrutura de coálgebra $H^c = (H, \Delta, \varepsilon)$ e de álgebra $H^a = (H, m, u)$. Podemos concluir pelo que vimos acima que $Hom_{\mathbf{k}}(H^c, H^a)$ é uma álgebra com o produto de convolução $*$ e unidade $u \circ \varepsilon$.

Definição 2.2.2. *Seja* H *uma biálgebra em* $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$*. Um morfismo* $S : H \to H$ *em* $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ *é dito antípoda de* H *se* S *é a inversa do morfismo identidade* $id_H : H \to H$ *em relação ao produto de convolução da álgebra* $Hom_{\mathbf{k}}(H^c, H^a)$*.*

Definição 2.2.3. *Uma biálgebra* H *com antípoda é chamada álgebra de Hopf.*

Observação 2.2.4. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S.

(i) A antípoda S é única (este fato é sabido uma vez que o inverso de um elemento de uma álgebra, quando existe, é único). No entanto, apresentamos essa prova. Por definição, $S * id_H = u \circ \varepsilon = id_H * S$. Suponhamos S' outra antípoda de H então $S' * id_H = u \circ \varepsilon = id_H * S'$. Assim,

$$S = S * (u \circ \varepsilon) = S * (id_H * S') = (S * id_H) * S' = (u \circ \varepsilon) * S' = S'.$$

(ii) Para todo $h \in H$, como $S * id_H = id_H * S = u \circ \varepsilon$, temos

$$\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1 S(h_2) = (u \circ \varepsilon)(h) = \varepsilon(h)u(1_{\mathbf{k}}) = \varepsilon(h)1_H.$$

Esta é a conhecida *propriedade da antípoda* e é, de fato, o que define uma antípoda.

Definição 2.2.5. *Sejam* H *e* B *duas álgebras de Hopf. Um morfismo* $f : H \to B$ *em* $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ *é um morfismo de álgebras de Hopf se é um morfismo de biálgebras.*

O próximo resultado mostra que um morfismo de álgebras de Hopf preserva antípodas.

Proposição 2.2.6. Sejam H e B duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_B, respectivamente. Se $f : H \to B$ é um morfismo de álgebras de Hopf então $S_B \circ f = f \circ S_H$.

Demonstração. Sejam $H = (H, m_H, u_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ e $B = (B, m_B, u_B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ as respectivas estruturas de biálgebras de H e B. Consideremos a álgebra $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^c, B^a), *, u_B \circ \varepsilon_H)$. Verifiquemos que $(S_B \circ f) * f = f * (f \circ S_H) = u_B \circ \varepsilon_H$, pois assim estaremos mostrando que $S_B \circ f$ e $f \circ S_H$ são ambos inversos de f em relação ao produto de convolução de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(H^c, B^a)$ e, consequentemente, teremos que $S_B \circ f = f \circ S_H$. Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
((S_B \circ f) * f)(h) &= \sum (S_B \circ f)(h_1) f(h_2) = \sum S_B(f(h_1)) f(h_2) \\
&= \sum S_B((f(h))_1)(f(h))_2, \text{ pois } f \text{ é morfismo de coálgebras} \\
&= (S_B * id_B)(f(h)) = (u_B \circ \varepsilon_B)(f(h)) = (u_B \circ \varepsilon_B \circ f)(h) \\
&= (u_B \circ \varepsilon_H)(h), \text{ pois } f \text{ é morfismo de coálgebras.}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(f * (f \circ S_H))(h) &= \sum f(h_1)(f \circ S_H)(h_2) = \sum f(h_1 S_H(h_2)), \text{ pois } f \text{ é morfismo de álgebras} \\
&= f(\textstyle\sum h_1 S_H(h_2)) = f(\varepsilon_H(h) 1_H) = \varepsilon_H(h) f(1_H) \\
&= \varepsilon_H(h) 1_B, \text{ pois } f \text{ é morfismo de álgebras} \\
&= \varepsilon_H(h) u_B(1_{\mathbf{k}}) = u_B(\varepsilon_H(h)) = (u_B \circ \varepsilon_H)(h).
\end{aligned}$$

Portanto, $S_B \circ f = f \circ S_H$. ∎

Proposição 2.2.7. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então, para quaisquer $h, g \in H$, são válidas:*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$;

(ii) $S(1_H) = 1_H$;

(iii) $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$;

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Essa proposição nos diz que S é um antimorfismo de álgebras (propriedades (i) e (ii)) e que S é um antimorfismo de coálgebras (propriedades (iii) e (iv)).

2.3 Exemplos

2.3.1 A álgebra de polinômios $\mathbf{k}[X]$

Proposição 2.3.1. Seja A uma álgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Então para todo $0 \neq a \in A$, existe um único morfismo de álgebras $\phi : \mathbf{k}[X] \to A$ em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$tal que $\phi(X) = a$.

Demonstração. Como $\mathbf{k}[X]$ é um $\mathbf{k}$-espaço vetorial com base $\{X_i\}_{i\geq 0}$, em que $X^0 = 1$, é possível definir $\phi : \mathbf{k}[X] \to A$, $\forall i \geq 0$, $\phi(X^i) = a^i$, em que $a^0 = 1$. Estendendo por linearidade, temos

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} b_i X^i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i \phi(X^i) = \sum_{i=1}^{n} b_i a^i.$$

Não é difícil verificar que ϕ é um morfismo de álgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Para a unicidade, suponhamos que exista $\phi' : \mathbf{k}[X] \to A$ morfismo de álgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ tal que $\phi'(X) = a$. Assim,

$$\phi'(X^i) = [\phi'(X)]^i = a^i = \phi(X^i),$$

ou seja, $\phi' = \phi$. ∎

Exemplo 2.3.2. A álgebra de polinômios $H = \mathbf{k}[X]$ é uma álgebra de Hopf.

De fato, considerando $A = \mathbf{k}[X] \otimes \mathbf{k}[X]$ e $a = X \otimes 1 + 1 \otimes X \in A$ e, pela Proposição 2.3.1, existe um único morfismo de álgebras $\Delta : \mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}[X] \otimes \mathbf{k}[X]$ tal que $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$. Assim, $\Delta(X^i) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^i$.

De modo similar ao que fizemos acima, existe um único morfismo $\varepsilon : \mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}$ em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ dado por $\varepsilon(X) = 0$ e $\varepsilon(1) = 1$ e notemos que $1 = 1_{\mathbf{k}} = 1_{\mathbf{k}[X]}$. Neste caso, $\varepsilon(X^i) = \varepsilon(X)^i = 0$ e $\varepsilon(\alpha) = \alpha\varepsilon(1) = \alpha, \forall \alpha \in \mathbf{k}$.

Para verificarmos que $\mathbf{k}[X]$ é uma biálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, basta mostrarmos apenas que $(\mathbf{k}[X], \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Para a verificação da comutatividade do diagrama (3), observemos que como Δ é morfismo de álgebras, os morfismos

$$(id_H \otimes \Delta) \circ \Delta : \mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}[X] \otimes \mathbf{k}[X] \otimes \mathbf{k}[X]$$

$$(\Delta \otimes id_H) \circ \Delta : \mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}[X] \otimes \mathbf{k}[X] \otimes \mathbf{k}[X]$$

também são morfismos de álgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ tais que

$$((id_H \otimes \Delta) \circ \Delta)(X) = ((\Delta \otimes id_H) \circ \Delta)(X) = X \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X.$$

Portanto, pela Proposição 2.3.1, temos que $(id_H \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id_H) \circ \Delta$ e vale a comutatividade do diagrama (3). Analogamente, é mostrada a comutatividade do diagrama (4).

A antípoda é definida da seguinte maneira

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbf{k}[X] & \to & \mathbf{k}[X] \\ & X & \mapsto & -X, \end{array}$$

ou seja, $S(X^i) = (-1)^i X^i$ e $S(1) = 1$. Pela Proposição 2.3.1, segue que S é morfismo de álgebras. Observemos que vale a propriedade da antípoda:

$$\begin{aligned} (S * id_{\mathbf{k}[X]})(X) &= S(X)1 + S(1)X \\ &= -X1 + 1X \\ &= 0 \\ &= \varepsilon(X)1 \\ &= \varepsilon(X)u(1_{\mathbf{k}}) \\ &= (u \circ \varepsilon)(X) \\ &= (id_{\mathbf{k}[X]} * S)(X) \end{aligned}$$

e também,

$$(S * id_{\mathbf{k}[X]})(1) = S(1)1 = 1 = (u \circ \varepsilon)(1) = (id_{\mathbf{k}[X]} * S)(1).$$

Observação 2.3.3. Como $\mathbf{k}[X]$ é comutativa e cocomutativa, a antípoda S é um morfismo de álgebras e de coálgebras.

Na próxima observação, lembramos rapidamente sobre a característica de um domínio de integridade.

Observação 2.3.4. Sejam D um domínio de integridade e $\varphi : \mathbb{Z} \to D$ o morfismo de anéis dado por

$$\varphi(n) = n1_D = \begin{cases} 1_D + 1_D + \cdots + 1_D (n \text{ vezes}), \text{ se } n > 0 \\ 0, \text{ se } n = 0 \\ (-1_D) + (-1_D) + \cdots + (-1_D)(-n \text{ vezes}), \text{ se } n < 0. \end{cases}$$

Assim temos $Ker(\varphi) = \{n \in \mathbb{Z} : \varphi(n) = n1_D = 0_D\}$. Se $Ker(\varphi) = \{0\}$, dizemos que a característica de D é zero. Se $Ker(\varphi) \neq 0$, então como $Ker(\varphi)$ é um ideal de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais, existe $p > 0$ tal que $Ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$. Nesse caso, dizemos que a característica de D é p. Além disso, este número p é sempre primo.

Observação 2.3.5. Se $\mathbf{k}$ é um corpo de característica $p > 0$, então $\mathbf{k}[X]$ é uma álgebra de Hopf com a mesma estrutura definida anteriormente. Porém,

$$\Delta(X^p) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^p = X^p \otimes 1 + 1 \otimes X^p.$$

Isso ocorre, pois os coeficientes binomiais

$$\binom{p}{i}$$

com $1 \leq i \leq p-1$ são divisíveis por p e portanto, iguais a zero.

2.3.2 A álgebra de grupo $\mathbf{k}[G]$

Pelos exemplos 1.2.5 e 1.2.11, $\mathbf{k}[G]$ é álgebra e coálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Para mostrarmos que $\mathbf{k}[G]$ é biálgebra, basta verificarmos que Δ e ε são morfismos em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. De fato,

$$\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h) \quad \text{e} \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1$$

$$\varepsilon(gh) = 1 = 1 \cdot 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h) \quad \text{e} \quad \varepsilon(1) = 1.$$

A antípoda $S : \mathbf{k}[G] \to \mathbf{k}[G]$ é definida por $S(g) = g^{-1}$. De fato,

$$(S * id_{\mathbf{k}[G]})(g) = S(g)g = g^{-1}g = 1 = \varepsilon(g)1 = (id_{\mathbf{k}[G]} * S)(g).$$

Logo, $\mathbf{k}[G]$ é álgebra de Hopf.

Exemplo 2.3.6. Se G é um grupo finito, então $(\mathbf{k}[G])^*$ é uma álgebra de Hopf (veja Proposição 2.1.8.).

A fim de darmos um exemplo de uma biálgebra que não é uma álgebra de Hopf, lembramos a definição de um monoide.

Definição 2.3.7. Um conjunto não vazio G equipado com uma operação $\cdot$ é dito um monoide se $\cdot$ é associativa e existe $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g, \forall g \in G$.

Exemplo 2.3.8. Se G é um monoide então $\mathbf{k}[G]$ é uma biálgebra. Porém, tal biálgebra não possui antípoda. De fato, caso existisse antípoda, teríamos pela estrutura de coálgebra, veja Exemplo 1.2.12., que $(S * id_{\mathbf{k}[G]})(g) = S(g)g = (u \circ \varepsilon)(g) = 1_{\mathbf{k}[G]}$ o que implica $S(g)g = 1_{\mathbf{k}[G]}$ e de modo análogo, $gS(g) = 1_{\mathbf{k}[G]}$. Desta forma, devido à unicidade da antípoda, deveríamos ter $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$ e isso não ocorre necessariamente, pois G é um monoide.

2.3.3 A álgebra tensorial $T(M)$

Definição 2.3.9. *Seja M um $\mathbf{k}$-espaço vetorial. Uma álgebra tensorial de M é um par (X, ι), em que X é uma álgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ e $\iota : M \to X$ é um morfismo em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ que satisfaz a seguinte propriedade universal: para toda álgebra A em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ e qualquer morfismo $f : M \to A$ em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, existe um único morfismo de álgebras $\overline{f} : X \to A$ em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, tal que $\overline{f} \circ \iota = f$.

Definimos

$$T^0(M) = \mathbf{k},\ T^1(M) = M,\ T^2(M) = M \otimes M,\ \cdots, T^n(M) = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{n \text{ vezes}} = \otimes^n M,$$

$\mathbf{k}$-espaços vetoriais e chamamos

$$T(M) = \bigoplus_{i \geq 0} T^i(M) = \mathbf{k} \oplus M \oplus (M \otimes M) \oplus (M \otimes M \otimes M) \oplus \cdots.$$

Observemos que temos uma inclusão canônica

$$\begin{array}{rccc} i: & M & \to & T(M) \\ & m & \mapsto & i(m) = m \in T^1(M). \end{array}$$

Além disso, dados $x \in T^n(M)$ e $y \in T^m(M)$ tais que

$$x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$$

$$y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_m,$$

definimos o chamado *produto de concatenação* de x e y por

$$x \cdot y = x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \in T^{n+m}(M).$$

A multiplicação de elementos arbitrários de $T(M)$ se estende por linearidade do produto apresentado acima. A unidade $1_{T(M)} = 1_{\mathbf{k}} \in T^0(M) = \mathbf{k}$, $T(M)$ torna-se uma álgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ e o par $(T(M), i)$ é uma álgebra tensorial de M.

Para o próximo exemplo, precisamos utilizar o lema a seguir, tal lema garante o "bom comportamento" dos geradores da álgebra tensorial.

Lema 2.3.10. *Sejam H uma biálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ e $S : H \to H$ um antimorfismo de álgebras. Se, para $a, b \in H$, valem*

$$(S * id_H)(a) = (id_H * S)(a) = (u \circ \varepsilon)(a) \tag{2.1}$$

$$(S * id_H)(b) = (id_H * S)(b) = (u \circ \varepsilon)(b), \tag{2.2}$$

então

$$(S * id_H)(ab) = (id_H * S)(ab) = (u \circ \varepsilon)(ab).$$

Demonstração. Como valem (2.1) e (2.2), sabemos que vale

$$\sum S(a_1)a_2 = \sum a_1 S(a_2) = \varepsilon(a)1_H \tag{2.3}$$

e

$$\sum S(b_1)b_2 = \sum b_1 S(b_2) = \varepsilon(b)1_H. \tag{2.4}$$

Por outro lado, como $\Delta(ab) = \sum (ab)_1 \otimes (ab)_2 = \sum a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$, então

$$\begin{aligned} (S * id_H)(ab) &= \sum S((ab)_1)(ab)_2 \\ &= \sum S(a_1 b_1) a_2 b_2 \\ &= \sum S(b_1) S(a_1) a_2 b_2 \\ &\overset{(2.3)}{=} \sum \varepsilon(a) S(b_1) b_2 \\ &\overset{(2.4)}{=} \varepsilon(a)\varepsilon(b) 1_H \\ &= \varepsilon(ab) 1_H \\ &= \varepsilon(ab) u(1_{\mathbf{k}}) \\ &= (u \circ \varepsilon)(ab). \end{aligned}$$

Analogamente, se mostra a outra igualdade. ∎

Exemplo 2.3.11. A álgebra tensorial $T(M)$ é uma álgebra de Hopf.

Já sabemos que $T(M)$ é uma álgebra com o produto de concatenação e unidade $1_{\mathbf{k}}$. Precisamos então dar uma estrutura de coálgebra para $T(M)$. Escrevemos $\alpha \overline{\otimes} \beta$ para explicitar que $\alpha \in T(M)$ está na 1ª posição do tensor e que $\beta \in T(M)$ está na 2ª posição do tensor. Considere o morfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & T(M) \otimes T(M) \\ & m & \mapsto & m \overline{\otimes} 1 + 1 \overline{\otimes} m, \end{array}$$

que por sua vez é um morfismo em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Como $(T(M), i)$ é uma álgebra tensorial, existe um único morfismo de álgebras $\Delta : T(M) \to T(M) \otimes T(M)$ tal que $\Delta \circ i = f$, ou seja, tal que $\Delta(m) = m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}m, \forall m \in i(M)$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & T(M) \arrow[dl, dashed, "\Delta"] \\ T(M)\otimes T(M). & \end{tikzcd}$$

De forma análoga, ao considerarmos o morfismo nulo $\theta : M \to \mathbf{k}$ temos, pelo fato de $(T(M), i)$ ser uma álgebra tensorial, que existe um único morfismo $\varepsilon : T(M) \to \mathbf{k}$ tal que $\varepsilon \circ i = \theta$, ou seja, tal que $\theta(m) = 0, \forall m \in i(M)$, veja o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & T(M) \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \\ \mathbf{k}. & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que com Δ e ε assim definidos, $T(M)$ possui uma estrutura de coálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$. Para garantirmos isso, precisamos mostrar que os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & T(M)\otimes T(M) \arrow[d, "id_{T(M)}\otimes\Delta"] \\ T(M)\otimes T(M) \arrow[r, "\Delta\otimes id_{T(M)}"'] & T(M)\otimes T(M)\otimes T(M) \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & T(M) \arrow[d, "\Delta"'] & \\ \mathbf{k}\otimes T(M) \arrow[ur, "\phi"] & & T(M)\otimes\mathbf{k} \arrow[ul, "\varphi"'] \\ & T(M)\otimes T(M). \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id_{T(M)}"] \arrow[ur, "id_{T(M)}\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Seja $m \in M$. Então

$$\begin{aligned} ((\Delta \otimes id_{T(M)}) \circ \Delta)(m) &= (\Delta \otimes id_{T(M)})(m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}m) \\ &= \Delta(m)\overline{\otimes}1 + \Delta(1)\overline{\otimes}m \\ &= m\overline{\otimes}1\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}1\overline{\otimes}m. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ((id_{T(M)} \otimes \Delta) \circ \Delta)(m) &= (id_{T(M)} \otimes \Delta)(m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}m) \\ &= m\overline{\otimes}\Delta(1) + 1\overline{\otimes}\Delta(m) \\ &= m\overline{\otimes}1\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}1\overline{\otimes}m. \end{aligned}$$

Para o segundo diagrama, temos

$$\begin{aligned} (\varphi \circ (id_{T(M)} \otimes \varepsilon) \circ \Delta) &= (\varphi \circ (id_{T(M)} \otimes \varepsilon))(m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}m) \\ &= \varphi(m\overline{\otimes}\varepsilon(1) + 1\overline{\otimes}\varepsilon(m)) \\ &= \varphi(m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}0) \\ &= \varphi(m\overline{\otimes}1) \\ &= m, \end{aligned}$$

ou seja, o segundo diagrama também comuta. Assim, como Δ e ε já são morfismos de álgebras em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ e acabamos de mostrar a álgebra tensorial $T(M)$ é uma coálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$, segue que $T(M)$ é uma biálgebra em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$.

Consideremos agora o morfismo em $\mathrm{Vect}_{\mathbf{k}}$ dado por

$$\begin{array}{rccc} g: & M & \to & T(M)^{op} \\ & m & \mapsto & -m, \end{array}$$

em que $T(M)$ é a álgebra oposta da álgebra tensorial $T(M)$. Como $(T(M), i)$ é uma álgebra tensorial, existe um único morfismo de álgebras $S : T(M) \to T(M)^{op}$ tal que $S \circ i = g$, ou seja, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & T(M) \arrow[dl, dashed, "S"] \\ T(M)^{op}. & \end{tikzcd}$$

Assim, $S(m) = -m, \forall m \in i(M)$. Observemos que para um elemento arbitrário $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \in T^n(M)$, temos $S(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = (-1)^n m_n \otimes \cdots \otimes m_1$. Assim, dados $x = x_1 \otimes ... \otimes x_n \in T^n(M)$ e $y = y_1 \otimes ... \otimes y_m \in T^m(M)$, observemos que

$$\begin{aligned} S(xy) &= S(x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_m) \\ &= (-1)^{n+m} y_m \otimes ... \otimes y_1 \otimes x_n \otimes ... \otimes x_1 \\ &= ((-1)^m y_m \otimes ... \otimes y_1)((-1)^n x_n \otimes ... \otimes x_1) \\ &= S(y)S(x) \end{aligned}$$

e como S é um morfismo de álgebras em $\text{Vect}_\mathbf{k}$, $S(1_{T(M)}) = 1_{T(M)^{op}} = 1_{T(M)}$. Sendo $T(M) = T(M)^{op}$ como espaços vetoriais, temos que $S : T(M) \to T(M)$ é um antimorfismo de álgebras em $\text{Vect}_\mathbf{k}$ que é a antípoda que torna $T(M)$ uma álgebra de Hopf. De fato, para verificarmos isto, precisamos garantir que

$$\sum S(m_1)m_2 = \sum m_1 S(m_2) = \varepsilon(m)1_{T(M)},$$

em que $\Delta(m) = \sum m_1 \otimes m_2$. No nosso caso, como $\Delta(m) = m\overline{\otimes}1 + 1\overline{\otimes}m$, precisamos verificar que

$$S(m)1 + S(1)m = mS(1) + 1S(m) = (u \circ \varepsilon)(m) = 0.$$

Notemos que isto, de fato corre para qualquer $m \in i(M)$,

$$\sum S(m_1)m_2 = S(m)1_{T(M)} + S(1_{T(M)})m = -m + m = 0.$$

Analogamente verifica-se a outra igualdade. Logo, pelo Lema 2.3.10, a propriedade da antípoda é válida para os geradoras da álgebra $T(M)$.

2.3.4 A álgebra de Hopf de Sweedler de dimensão 4

Seja $\mathbf{k}$ um corpo de característica diferente de 2 ($car(\mathbf{k}) \neq 2$). Seja H uma álgebra em $\text{Vect}_\mathbf{k}$ gerada pelos dois elementos c e x satisfazendo as seguintes relações:

$$c^2 = 1, \text{ ou seja, } c^{-1} = c;\ x^2 = 0 \text{ e } xc = -cx.$$

Observemos que, neste caso, o elemento xcx de H é $xcx = -cxx = -cx^2 = 0$. Como $\mathbf{k}$-espaço vetorial, H possui base $\{1, x, c, cx\}$.

Exemplo 2.3.12. A álgebra H definida acima, chamada álgebra de Hopf de Sweedler de dimensão 4, é uma álgebra de Hopf.

A estrutura de coálgebra de H é dada por $\Delta(c) = c \otimes c$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x$, $\varepsilon(c) = 1$ e $\varepsilon(x) = 0$. A antípoda $S : H \to H$ é dada por $S(c) = c^{-1} = c$ e $S(x) = -cx$.

Tal álgebra de Hopf H foi o primeiro exemplo de uma álgebra de Hopf que não é cocomutativa e não é comutativa. De fato, H não é comutativa por causa da relação $xc = -cx$, uma vez que $car(\mathbf{k}) \neq 2$. Além disso, H não é cocomutativa, pois $\Delta \neq \sigma \circ \Delta$, visto que $(\sigma \circ \Delta)(x) = 1 \otimes x + x \otimes c$.

Referências Bibliográficas

[1] T. Brzezinski and R. Wisbauer, **Corings and Comodules**. Cambridge University Press, 2003.

[2] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu and S. Raianu , **Hopf Algebras: An Introduction**. Marcel Dekker, Inc., 2001.

[3] T. W. Hungerford, **Algebra**. Springer, 2000.

[4] S. Mac Lane, **Categories for the Working Mathematician**, Springer, 1971.

[5] S. Mac Lane, **Natural associativity and commutativity**, Rice Univ. Studies, 49 (1963), nº 4, 28-46.

[6] S. Montgomery, **Hopf Algebras and Their Actions on Rings**. CBMS, Chicago, 1992.

[7] D. Radford, **Hopf Algebras**. World Scientific. Series on Knots and Everything, vol. 49, 2012.

[8] M. E. Sweedler, **Hopf Algebras**. W. A. Benjamin, Inc., 1969.