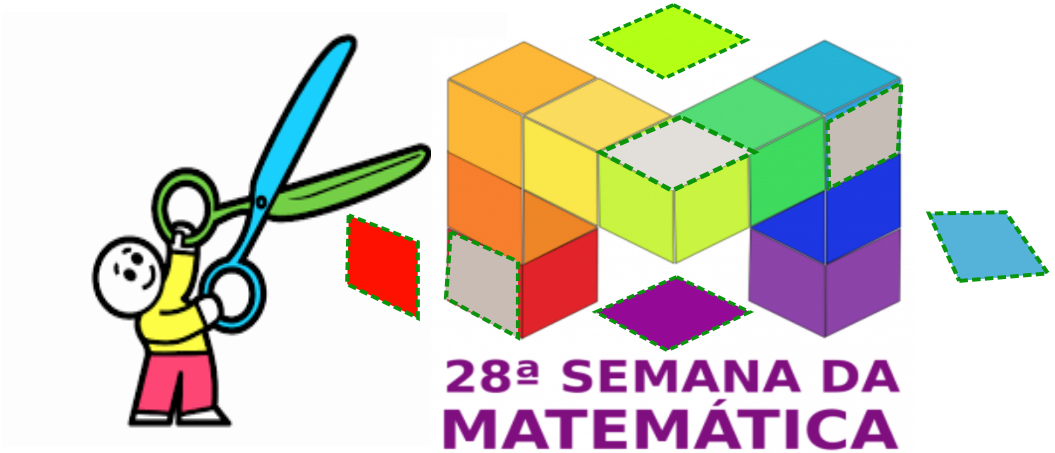


Corta-cola e Característica de Euler

Catarina Mendes de Jesus Sánchez
Leticia Pereira Silva
Lorena Maria Ferreira de Matos

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Juiz de Fora

Bem-vindos à oficina de
Corta-cola e Característica de Euler!

Vamos explorar um pouco sobre a definção e as propriedades da característica de Euler pelo método de corta e cola.

A **característica de Euler** é uma medida **topológica** que nos permite entender a estrutura de objetos geométricos, como poliedros e superfícies.

Característica de Euler e Aplicações

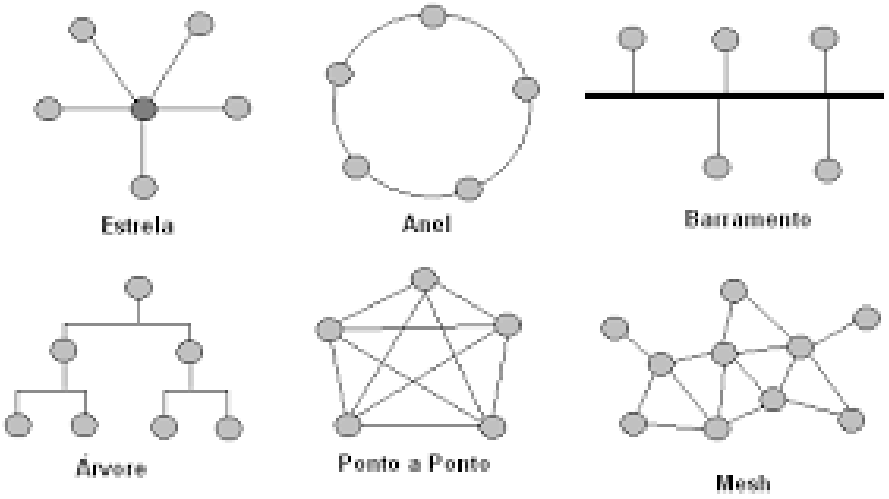
A característica de Euler é uma ferramenta poderosa que tem várias aplicações em matemática, ciência da computação e engenharia.

- ***Geometria Computacional:*** pode ser usada para verificar a validade (se tem erros) em modelos 3D.

  Exemplo: Pode indicar que está faltando ou sobrando alguma face.

- ***Topologia de Redes e Superfícies:*** fornece informações sobre a conectividade, a estrutura e funcionalidade de redes.

Exemplos: redes de transporte, redes neurais e modelagem de tecidos biológicos.



Característica de Euler na Topologia

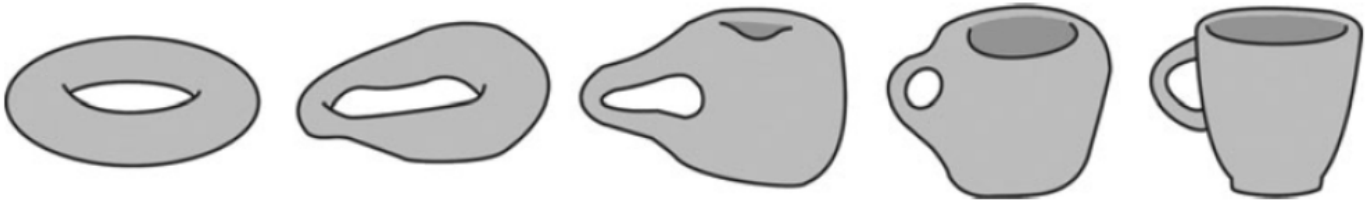
A característica de Euler também desempenha um papel importante na Topologia.

Veremos que usada para classificar superfícies fechadas.

Por exemplo:

- Para uma esfera: $\chi = 2$
- Para um toro: $\chi = 0$

A ***Topologia*** estuda objetos que são deformados sob o efeito de certas forças sem perder as suas **propriedades básicas**.



Topologia: espaços topológicos

Para definir uma função entre dois conjuntos X e Y é continua, primeiro precisa saber quem são os **abertos** de X e de Y.

Exemplo: Os abertos da topologia usual na reta são todos possíveis intervalos abertos.

Topologia no caso geral:

Uma **topologia** $\mathcal{T}$ em um conjunto não vazio X é uma coleção de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes condições:

1. O conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto inteiro X estão em $\mathcal{T}$, ou seja, $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. A interseção finita de conjuntos em $\mathcal{T}$ também está em $\mathcal{T}$.
   Isto é, se $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, então $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$.
3. A união arbitrária de conjuntos em $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$. Ou seja, se $U_\alpha \alpha \in A$ é uma coleção de conjuntos em $\mathcal{T}$, então $\bigcup \alpha \in A\, U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Os elementos $\mathcal{T}$ são os **abertos** do **espaço topológico** $(X, \mathcal{T})$.

Exemplo: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ é a topologia caótica para qualquer conjunto X.

Verifique que a função identidade de $(X, \mathcal{T}_{caotica})$ em $(X, \mathcal{T}_{usual})$ é continua.

Voltando a deformação de objetos

• Se $f : X \to Y$ e $f^{-1} : Y \to X$ são funções contínuas, então f é um homeomorfismo.

• Se existe uma **deformação contínua** entre X e Y então existe uma **homotopia** entre $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$.

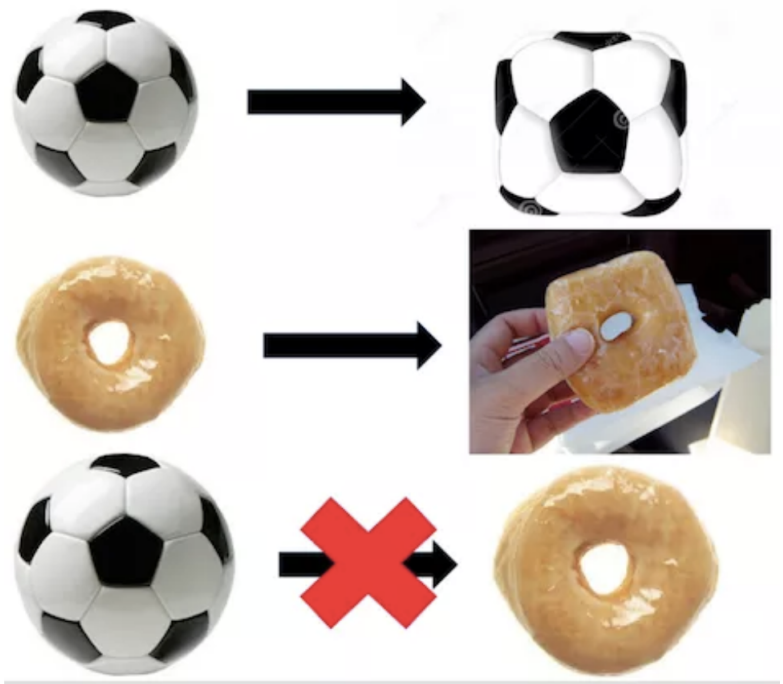
• Todo homeomorfismo é uma equivalência de homotopia, mas o inverso não é verdadeiro.

Exemplo: Um disco sólido não é homeomórfo a um único ponto, mas existe uma homotopia que deforma o disco em um ponto.

Voltando a deformação de objetos

Característica de Euler: é um dos principais invariantes topológicos para classificar as superfícies de acordo com sua forma.

Verifica quais dos objetos abaixo tem a mesma característica de Euler.



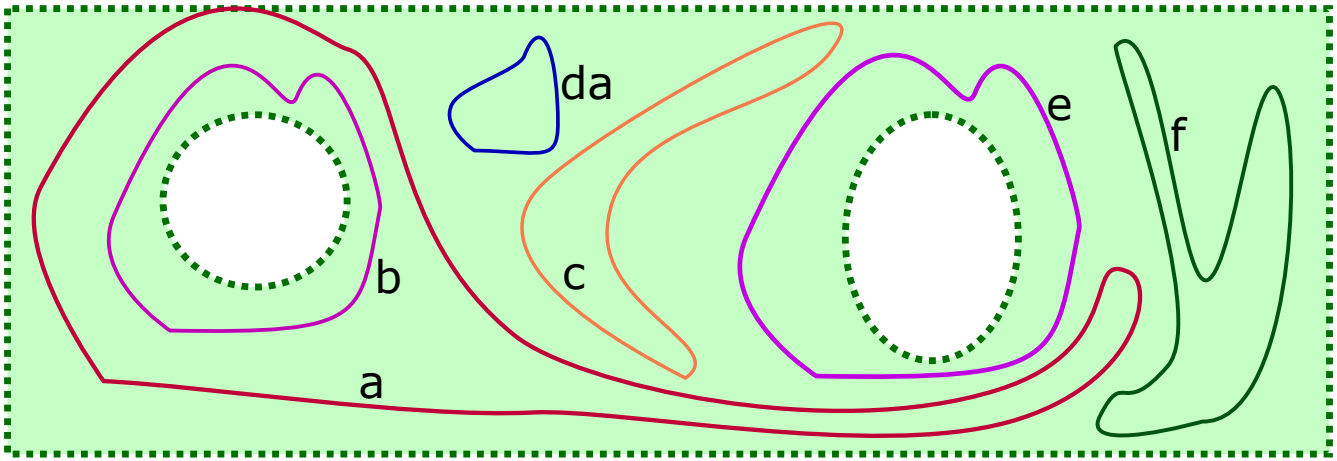
Classe topológicas | Adalberto Fazzio

Homotopia

Definiçñao: Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f e g são **homotópicas**, denotado por $f \simeq g$, se existe uma função contínua $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que:

$$F(x,0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x,1) = g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

A função F é chamada de **homotopia** entre f e g. Se tal homotopia existe, diz-se que f e g são homotópicas em X.



Quais curvas são homotopicas?

Exemplo de Homotopia

Considere as funções f e g definidas no intervalo unitário $[0, 1]$:
$f : [0, 1] \to [0, 1]$ é a identiade, $f(x) = x$

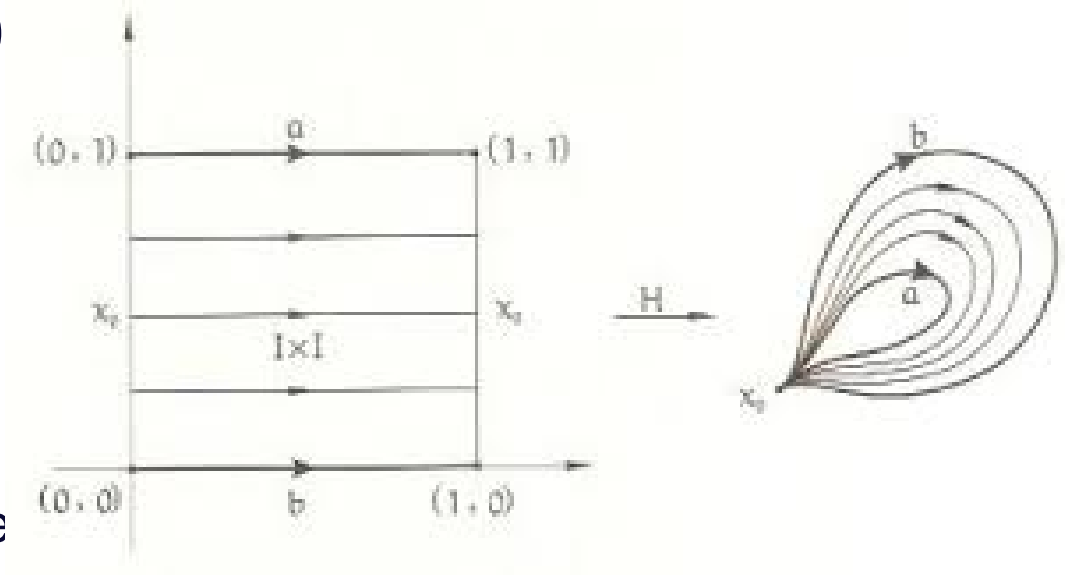
$g : [0, 1] \to [0, 1]$ é constante $g(x) = 0$

Essas duas funções diferentes são homotópicas uma à outra.

A homotopia entre f e g pode ser definida pela função contínua

$H : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$: $H(x, t)$

onde t varia de 0 a 1.



Durante esta homotopia, a função $f(x) = x$ é continuamente transformada na função $g(x) = 0$, mantendo a continuidade

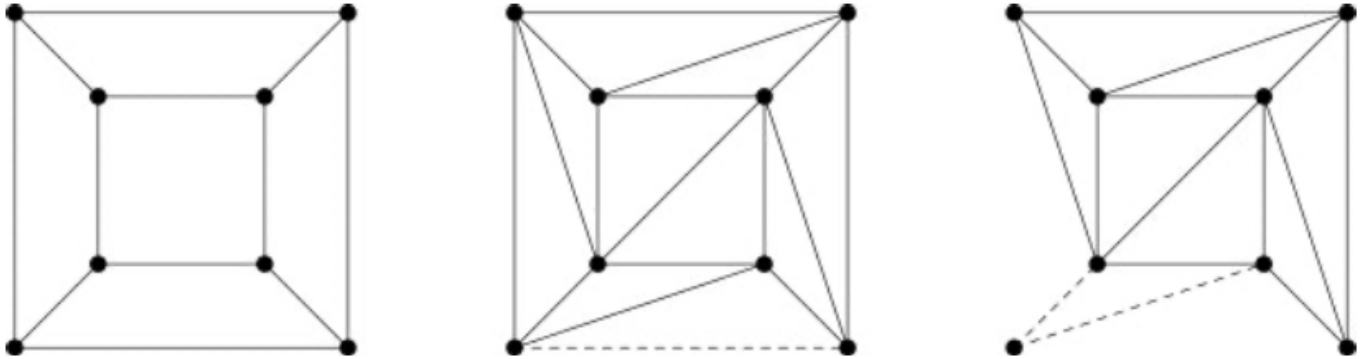
Portanto, f e g são homotópicas no intervalo $[0, 1]$.

Característica de Euler

Teorema de Euler para grafos planos:

$$\chi = V - A + F = 2,$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces da superfície no plano (considerando a componente conex externa como uma face).



Superfícies Fechadas homeomorfas a esfera

A característica de Euler de um poliedro regular M é dado por:

$$\chi(M) = V - A + F = 2,$$

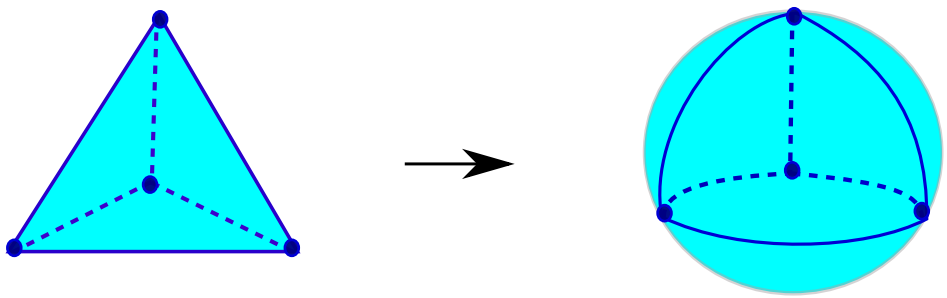
onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

Característica de Euler de superfícies

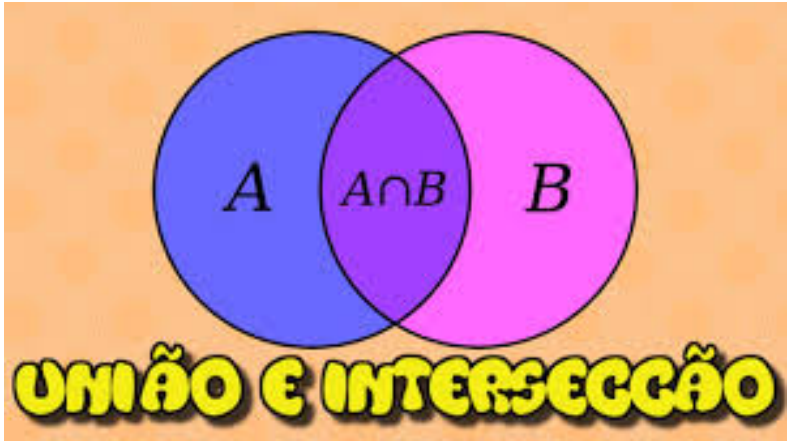
Se M é uma superfície qualquer com uma **triangulação** de V vértices, A arestas e F faces, então ***característica de Euler*** de M é dado por

$$\chi(M) = V - A + F$$



Observe que ao ïnflar.º poliedro, manteve ivariante o número de vértices, de arestas e de faces.

Propriedades da Característica de Euler



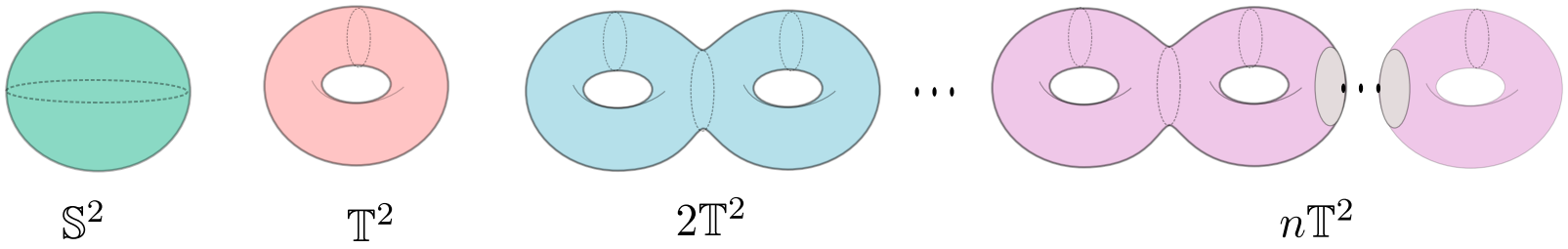
1. $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(A \cup B) - \chi(A \cap B)$
2. $\chi(.) = 1$
3. $\chi(\emptyset) = 0$

Se Q é contratil a um ponto, então $\chi(Q) = 1$

Superfícies Orientadas e Fechadas

Superfícies orientadas: Todo caminho fechado preserva orientação.

• O disco, o cilindro e discos com k buracos são considerados superfícies orientadas com **bordos**.



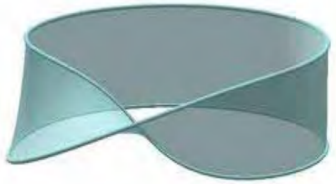
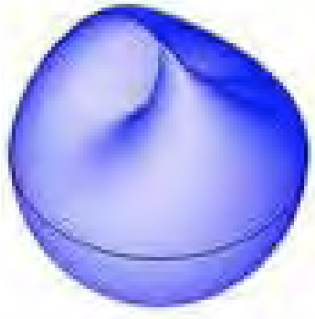
Teorema: A ***Característica de Euler*** de uma superfície orientada M, com k bordos e ***gênero*** g é:

$$\chi(M) = 2 - 2g(M) - k.$$

Superfícies fechadas e orientadas: podem ser vistas como ***soma conexa da esfera e n-toro*** .

Superfícies não orientadas

- ***Superfícies NÃO orientadas:*** Existem caminhos fechados que não preservam a orientação.

Exemplo: A ***faixa de Moebius***, ***plano projetivo*** e a ***garrafa de Klein*** são superfícies não orientadas.

Teorema: A ***Característica de Euler*** de uma superfície NÃO orientada M, com k bordos e ***gênero*** g é:

$$\chi(M) = 2 - g(M) - k.$$

Característica de Euler de Superfícies não Orientadas

Superfícies fechadas e não orientadas: podem ser vistas como ***soma conexa do n-toro e p projetivos***.

O ***gênero*** $g(M)$ é o número de **planos projetivos** em M.

Teorema da Classificação das Superfícies: Toda superfície fechada e orientada S é homeomorfa a esfera ou a soma conexa de n toros, $S \cong S^2 \# n\mathbb{T}$ para algum $n \geq 0$.

Se S é não orientada então é homeomorfa a soma conexa de n toros, $S \cong S^2 \# n\mathbb{T} \# p\mathbb{P}$ para algum $n \geq 0$.

Vamos praticar!!!!!!

Formam grupos de dois:

1. Grupo A e B: Calcule a a característica de Euler de grafos tipo árvore.
2. Grupo A e B: Calcule a a característica de Euler de grafos tipo cículo.
3. Grupo A e B: A constroi grafos e B calcula a característica de Euler (vice-versa).
4. Calcule o número de ciclos fechados de um grafo em função do número de vértices e arestas. Quantos ciclos tem uma árvore?
5. Grupo A e B: Calcule a característica de Euler de superfícies orientadas com k buracos, usando triangulação.
6. Grupo A e B: Calcule a característica de Euler de superfícies não orientadas com k buracos, usando triangulação.

Vamos praticar!!!!!!

Formam grupos de três.

Sabendo que

i) Característica de Euler do círculo $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(A \cup B) - \chi(A \cap B)$

ii) Se Q é contratil a um ponto, então $\chi(Q) = 1$

iii) $\chi(\emptyset) = 0$

1. Grupo A, B e C: C escolhe diferentes objetos ao redor e propõe para A e B calcular separadamente. Em seguida confere os resultados. Troca quem escolhe.

2. Grupo A, B e C: Mostrar que para cada inteiro $z \in \mathbb{Z}$ existem objetos M que podem ser decomposto em superfícies fechadas $S_1, \cdots, S_n$ tal que $\chi(M) = z$.