

ASPECTOS EXPERIMENTAIS
DE
SUPERCONDUTORES
E
EQUAÇÃO DE LONDON

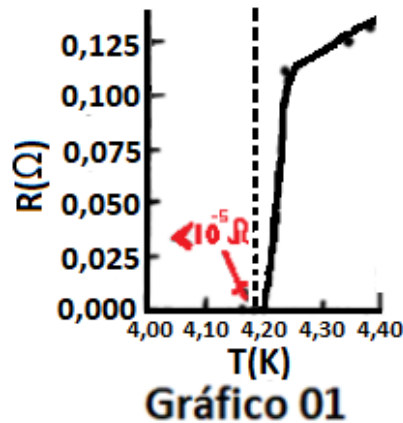
Sidney Pinheiro Duarte Santana – Matrícula: 201765800E

E-mail: sidneypinheiroduartesantana@gmail.com

1- ASPECTOS EXPERIMENTAIS DE SUPERCONDUTORES

1.1 – A Descoberta dos Supercondutores e a relação entre campo magnético externo e Temperatura Crítica

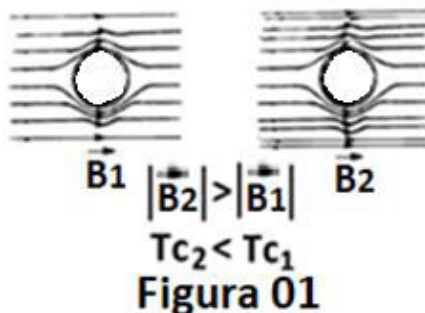
Medindo o valor da resistência elétrica $R(\Omega)$ do mercúrio em função da temperatura $T(K)$, Kamerling descobriu a supercondutividade em 1911. Obtendo o Gráfico 01 abaixo:



O que Kamerling descobriu e que podemos analisar, em específico para o mercúrio no Gráfico 01 acima, que existe Temperatura Crítica T_c para os materiais onde a resistência elétrica do material se torna praticamente $R = 0,000 \Omega$, ou seja, o material nessa temperatura não oferece resistência a passagem de corrente elétrica por ele, dessa forma conduz a energia elétrica sem perda. No caso do mercúrio, para o gráfico acima, temos $T_c = 4,20 K$.

Caso a esse material seja aplicado um Campo Magnético Externo \vec{B} que possa ser ajustado assumindo diferentes valores e nessas condições feito uma análise do(s) valor(es) que T_c assume, chegando a conclusão quanto maior o valor de \vec{B} menor se o valor de T_c .

Na Figura 01 abaixo temos o mesmo material onde é aplicado um Campo Magnético Externo ajustável, onde esse é aumentado de $|\vec{B}_1|$ para $|\vec{B}_2|$, mantendo a direção e o sentido, em consequência a Temperatura Crítica diminui de T_{c1} para T_{c2} .



Agindo assim, aumentando \vec{B} , chegaremos a um valor denominado Campo Magnético Crítico \vec{B}_c , onde para qualquer valor que o Campo Magnético assuma acima desse a supercondutividade deixará de existir, não haverá mais uma Temperatura Crítica T_c abaixo da qual a Resistência Elétrica seja $R = 0,000 \Omega$, isto é, sempre existirá um determinada perda na condução da corrente elétrica seja qual for a temperatura.

O Gráfico 02 abaixo mostra o comportamento da Temperatura Crítica T_c relacionada aos diversos valores de Campo Magnético Externo aplicado ao chumbo, onde poderemos fazer a seguinte análise:

- Para $0 < B(T) < B_c(0) = B_c$, teremos uma determinada Temperatura Crítica em $T(K)$ caracterizando supercondução;
- $B(T) = 0$, quando o Campo Magnético Externo for zero teremos um valor máximo possível para a Temperatura Crítica T_c caracterizando supercondução;
- $B(T) = B_c = B_c(0)$, quando o Campo Magnético Externo Crítico for máximo em seu valor possível a Temperatura Crítica $T_c = 0K$ perdendo a propriedade de supercondução;
- d) Não teremos supercondutividade para o $B(T) > B_c(0) = B_c$.

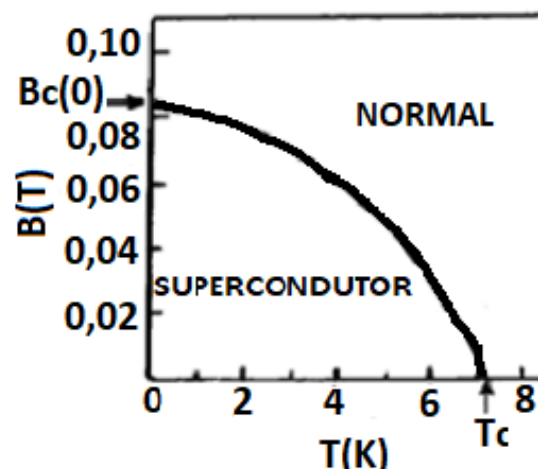


Gráfico 02

1.2 – Tipos de Supercondutores

Os materiais supercondutores podem ser divididos em dois tipos:

- a) **Tipo I: Materiais Monoatômicos Simples** são macios;
- b) **Tipo II: Ligas ou Cerâmicas** são duros.

Na Tabela 01 abaixo temos os supercondutores do Tipo I e do Tipo II e seus valores T_c quando $B = 0$ e $B_c(0)$ quando $T = 0$.

TIPO I	$T_c(K)$	$B_c(0K;T)$	TIPO II	$T_c(K)$	$B_c(0K;T)$
Al	1,175	0,0105	Nb ₃ Sn	18,1	24,5
Cd	0,517	0,0028	Nb ₃ Ge	23,2	34,0
Hg	4,154	0,0411	NbN	16,0	45,3
In	3,408	0,0282	V ₃ Ga	16,5	35,0
Nb	9,25	0,2060	V ₃ Si	17,1	15,6
Os	0,66	0,0070	PbMoS	14,4	6,0
Pb	7,196	0,0803	CNb	8,0	1,7
Sn	3,722	0,0305	Al ₂ CMo ₃	9,8	15,6
Tl	2,38	0,0178	Rb ₃ C ₆₀	29,0	?
Zn	0,85	0,0054	Cs ₂ RbC ₆₀	33,0	?

MONOATÔMICOS - MACIOS

LIGAS/CERÂMOCAS - DUROS

Tabela 01

No Gráfico 03 abaixo temos geral para todos os materiais da Tabela 01.

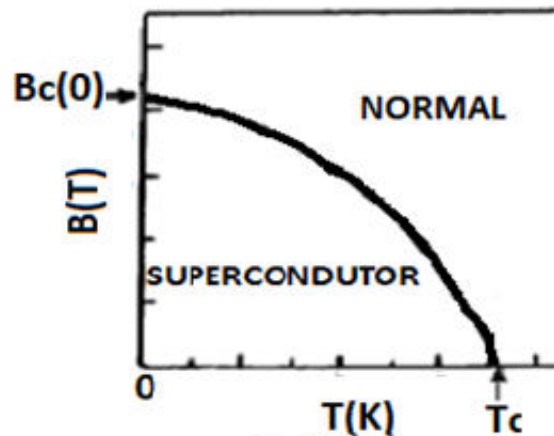


Gráfico 03

1.3 – Modelagem matemática somente pela Física Clássica

Seja um material a uma temperatura T maior que a crítica ($T > T_c$) e em um Campo Magnético Externo \vec{B} pequeno, menor que o Campo Magnético Externo Crítico ($|\vec{B}| < |\vec{B}_c|$). Então o material é resfriado reduzindo T , em consequência após T atingir T_c , ou seja $T=T_c$, torna-se um supercondutor, conduz uma corrente elétrica sem perdas, isto é, $R = 0 \Omega$. Assim matematicamente temos:

$$\mathcal{E} = R i$$

Onde \mathcal{E} é a f.e.m. no supercondutor, i é a corrente elétrica que passa no supercondutor e R é a resistência elétrica no supercondutor, como sabemos $R = 0 \Omega$. Partido de $\mathcal{E} = R i$ e como $R = 0 \Omega$, temos:

$$\mathcal{E} = 0 * i$$

$$\mathcal{E} = 0 V$$

Logo em um supercondutor temos $\mathcal{E} = 0 V$

Pela Lei de Faraday temos:

Seja \vec{B}_i Campo Magnético Interno ao supercondutor, ϕ_{B_i} é o fluxo magnético desse vetor \vec{B}_i e A a área transversal desse supercondutos na qual \vec{B}_i atravessa, assim temos $\mathcal{E} = - \frac{d\phi_{B_i}}{dt}$ e como $\mathcal{E} = 0 V$,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_{\vec{B}_i}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\phi_{\vec{B}_i}}{dt} = 0$$

$$d\phi_{\vec{B}_i} = 0 dt$$

$$\int d\phi_{B_i} = \int 0 dt$$

$$\phi_{B_i} = C, \text{ onde } C \in \mathcal{R}, C \text{ é uma constante.}$$

Também temos:

$$\phi_{B_i} = \int \vec{B}_i \cdot d\vec{A} \text{ e como } \phi_{B_i} = C, \text{ temos,}$$

$$\int \vec{B}_i \cdot d\vec{A} = C$$

Logo pela Física Clássica o interior do supercondutor suporta um Campo Magnético \vec{B}_i no interior do supercondutor desde que seja \vec{B}_i constante.

1.4 – O Efeito Meissner

Contrariando os resultados Clássicos a anteriormente descritos, em 1933 Meissner e Ochsenfeld obtiveram resultados através de experimentos mostrando que quando resfriamos um supercondutor para uma temperatura T , sendo essa temperatura menor ou igual a temperatura crítica T_c , ou seja $T \leq T_c$, e existindo um Campo Magnético Externo \vec{B} constante ao supercondutor, nessas condições, as linhas de campo de \vec{B} são expulsas da região interna do material. Dessa forma o Campo Magnético Interno \vec{B}_i (igual a Campo Magnético Resultante \vec{B}_{Ri}) é igual a zero.

Abaixo temos a Figura 02 mostrando Efeito Meissner.

Temos um material supercondutor imerso em um Campo Magnético Externo Constante \vec{B} , com temperatura T variando, sendo $T > T_c$ ou $T \leq T_c$;

Na Figura 02a) temos $T > T_c$ onde podemos observar que o Campo Magnético \vec{B} passa no Interior do matéria, teremos um Campo Magnético Interior Resultante $\vec{B}_{Ri} = \vec{B}_i$, ou seja, $\vec{B}_{Ri} = \vec{B}_i \neq 0$.

Na Figura 02b) temos o Efeito Meissner pois $T \leq T_c$, o material se torna supercondutor e o Campo Magnético é expelido do interior do material resultando em seu interior a anulação desse campo, Campo Magnético Interior Resultante $\vec{B}_{Ri} = \vec{B}_i$, ou seja, $\vec{B}_{Ri} = \vec{B}_i = 0$.

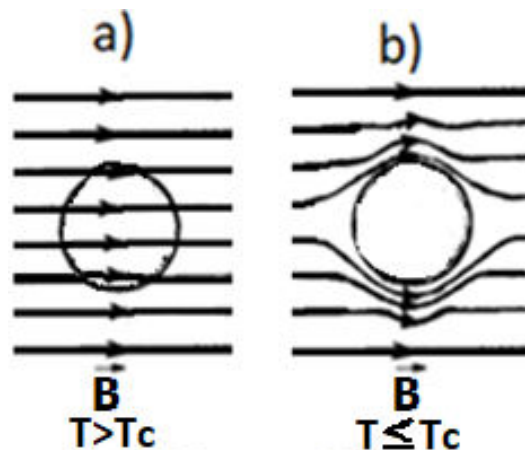


Figura 02

1.5 – A Explicação para o Efeito Meissner

O Efeito Meissner ocorre pois a supercorrente ou corrente de blindagem elétrica, livre de perda, percorre o supercondutor em sua superfície, sendo que sua direção e intensidade gera um Campo Magnético Induzido \vec{B}_{IND} que anula o Campo Magnético Externo \vec{B} agindo no interior.

Assim sendo teremos:

$$\vec{B}_{\text{IND}} - \vec{B} = \vec{B}_{\text{Ri}}$$

Como o Campo Magnético Resultante Interno \vec{B}_{Ri} é zero, isto é, $\vec{B}_{\text{Ri}} = 0$,

$$\vec{B}_{\text{IND}} - \vec{B} = 0$$

$$\vec{B}_{\text{IND}} = \vec{B}$$

O Campo Magnético Induzido \vec{B}_{IND} faz com que o supercondutor perca energia, ocorre uma perda de energia magnética por unidade volume u_B que é dada por:

$$u_B = \frac{|\vec{B}_{\text{IND}}|^2}{2\mu_0} = \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$$

Obs: Sendo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ é a permeabilidade magnética no vácuo.

Como um exemplo de aplicação pratica podemos citar a levitação magnética que quando um ímã permanente e um supercondutor são dispostos como na Figura 03 abaixo, resultando na repulsão.

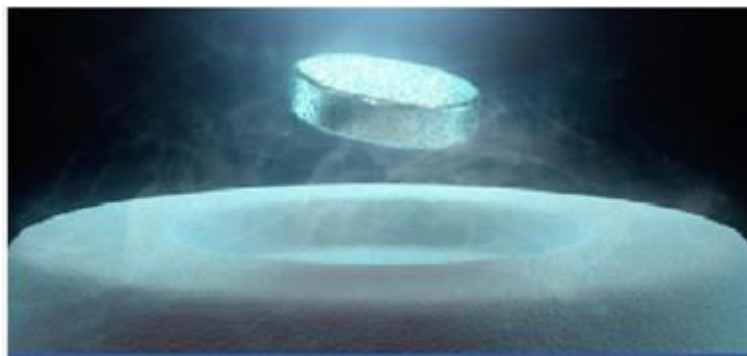


Figura 03

1.6 – Tipos (I e II) de Supercondutores e o Efeito Meissner associado

Através do Gráfico 04a) e 04b) analisaremos o comportamento do campo magnético induzido $\mu_0 M$ (μ_0 multiplicado pela magnetização M) em função do campo magnético externo \vec{B} aplicado ao supercondutor para respectivamente os supercondutores do Tipo I e do Tipo II. Assim sendo temos:

- a) O Tipo I no Gráfico 04a)** – Nesse Tipo de Supercondutor ocorre o Efeito Meissner Completo. Temos uma supercondução Diamagnética Perfeita. Apresenta um Campo Magnético Crítico B_c , onde para $B \leq B_c$ temos o Campo Magnético Induzido no supercondutor $\mu_0 M$ igual e oposto ao Campo Magnético Externo B , ou seja, $\mu_0 M = -B$, então para $B \leq B_c$ temos um cancelamento total do Campo Magnético no interior do material e esse permanece no estado de supercondução. Para $B > B_c$ temos que o Campo Magnético penetra no interior do material que retorna ao estado natural (não superconduzindo).
- b) O Tipo II no Gráfico 04b)** – Esses supercondutores apresentam dois Campos Magnéticos Críticos B_{c1} e B_{c2} . Quando $B \leq B_{c1}$, temos um cancelamento total do Campo Magnético no interior do material e esse permanece no estado de supercondução. Quando $B_{c1} < B \leq B_{c2}$ ocorre uma penetração parcial do Campo Magnético no interior do material. Quando $B > B_{c2}$ temos que o Campo Magnético penetra no interior do material que retorna ao estado natural (não superconduzindo).

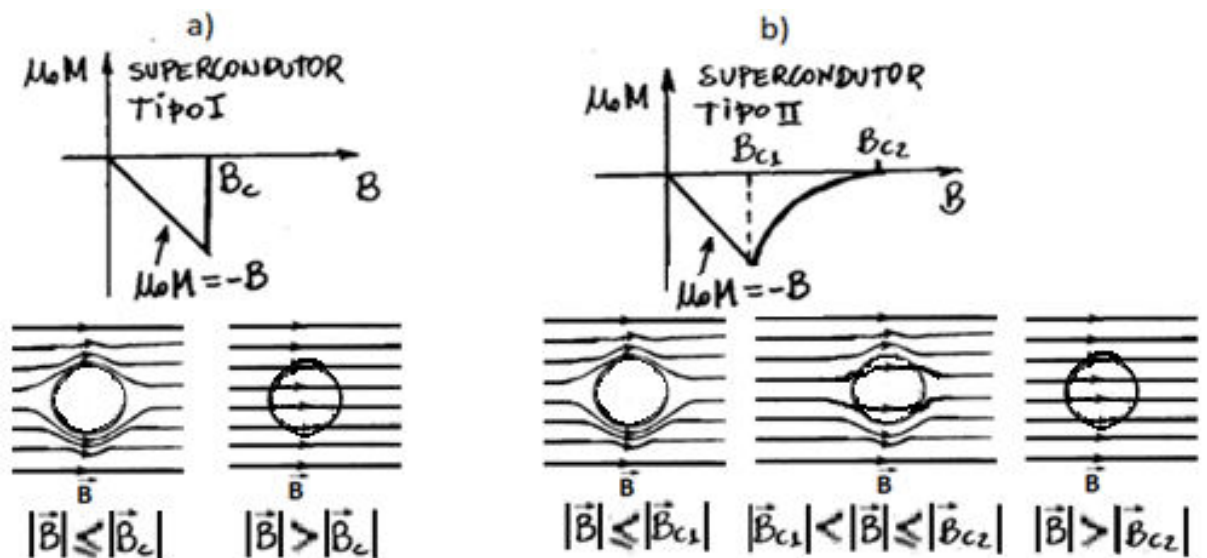


Gráfico 04 .

1.7 – O Efeito Isótopo

Descoberto experimentalmente em 1950, esse efeito ocorre e se explica pelas vibrações da rede cristalina do supercondutor. Nesse efeito a Temperatura Crítica T_c depende da massa isotópica M do cristal, respeitando a equação abaixo:

$$M^\alpha T_c = K$$

Onde α é um parâmetro relacionado a cada material em específico, K é uma constante.

Abaixo temos a Tabela 02 que nos fornece os valores de α para alguns materiais.

MATERIAL	α	MATERIAL	α
Cd	0,32	Nb ₃ Sn	0,08
Hg	0,50	Os	0,15
Pb	0,49	Zn	0,45

Tabela 02

O Efeito Isótopo é importante porque mostra que as vibrações da rede cristalina do supercondutor e as interações elétron-fóton não podem ser desprezadas no estudo de supercondutores.

Caso desprezásemos o Efeito Isotópico, estaríamos considerando que os íons da rede cristalina do material supercondutor não se movem, isso equivale a supor que para uma rede cristalina onde $M \rightarrow \infty$ encontraríamos $T_c \rightarrow 0$. Como segue abaixo:

$M^\alpha T_c = K$	Para $M \rightarrow \infty$, temos:
$T_c = \frac{K}{M^\alpha}$	$T_c = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{K}{M^\alpha}$
	$T_c = 0$
	Logo $T_c \rightarrow 0$, o que é absurdo.

2- EQUAÇÃO DE LONDON

2.1 – A Modelagem Matemática dos Irmãos London

Em 1935 os irmãos E. London e H. London formularam um modelo para explicar o Efeito Meissner da supercondutividade, para isso eles usaram o modelo matemático de dois fluidos que explica as propriedades de superfluidez do ^4He .

Partido do principio que somente parte dos eletros de condução se encontram no estado de supercondução, sendo ρ a densidade total de elétrons, ρ_n a densidade de elétrons normais e ρ_s a densidade de elétrons no estado supercondutor. Temos então:

$$\rho = \rho_n + \rho_s$$

As densidades de elétrons acima descritas dependem da temperatura. Para o caso particular da densidade de elétrons no estado supercondutor em função da temperatura, ou seja, $\rho_s(T)$, temos:

$$\rho_s(T_c) = 0 \quad \text{e} \quad \rho_s(0) = \rho$$

Por definição temos que a densidade de corrente de supercondução \vec{J}_S é dada por:

$$\vec{J}_S = - \rho_s e \vec{V}_S$$

$$\vec{V}_S = - \frac{\vec{J}_S}{\rho_s e}$$

Onde \vec{V}_S é a velocidade dos eletros supercondutores, sendo e a carga em Coulomb de um elétron q_e que vale $1,6 \cdot 10^{-19}$ C, ou seja, $q_e = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Pela Segunda Lei de Newton temos $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \frac{\partial \vec{V}_S}{\partial t}$ e temos a força elétrica dada por $\vec{F}_e = - q_e \cdot \vec{E} = - e \cdot \vec{E}$

Onde m é a massa do elétron, \vec{a} é o vetor aceleração, \vec{F} é o vetor força dada pela Segunda Lei de Newton, \vec{E} é o vetor campo elétrico e \vec{F}_e é o vetor força elétrica.

Igualando as forças temos:

$$\vec{F} = \vec{F}_e$$

$$m \frac{\partial \vec{V}_S}{\partial t} = - e \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E} = - \frac{m}{e} \frac{\partial \vec{V}_S}{\partial t}$$

Substituindo $\vec{V}_S = - \frac{\vec{J}_S}{\rho_s e}$ na equação acima temos:

$$\vec{E} = \frac{m}{\rho_s e^2} \frac{\partial \vec{J}_S}{\partial t}$$

Pela Lei de Faraday temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Substituindo $\vec{E} = \frac{m}{\rho_s e^2} \frac{\partial \vec{J}_S}{\partial t}$ na equação acima temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{B} + \frac{m}{\rho_s e^2} \vec{\nabla} \times \vec{J}_S \right) = 0$$

Com a solução particular abaixo encontrada pelos irmãos London,

$$\vec{B} + \frac{m}{\rho_s e^2} \vec{\nabla} \times \vec{J}_S = 0 \quad (\text{Equação de London}).$$

O Efeito Meissner é explicado, pois quando se aplica um campo \vec{B} no supercondutor, a variação do fluxo magnético leva ao surgimento de uma densidade de corrente supercondutora \vec{J}_S , que por sua vez produz um campo $\frac{m}{\rho_s e^2} \vec{\nabla} \times \vec{J}_S$, que cancela campo \vec{B} .

É importante ressaltar que a Equação de London somente é válida para supercondutores.

2.2 – Aplicando as Equações de Maxwell na Equação de London

Sejam as Equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_S$$

ou

$$\vec{J}_S = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Aplicando a equação acima em $\vec{B} + \frac{m}{\rho_s e^2} \vec{\nabla} \times \vec{J}_S = 0$ (Equação de London) teremos mais detalhes do comportamento do Campo Magnético no interior do supercondutor. Sendo assim encontraremos:

$$\vec{B} + \frac{m}{\mu_0 \rho_s e^2} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

Como $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$, temos:

$$\vec{B} + \frac{m}{\mu_0 \rho_s e^2} (-\nabla^2 \vec{B}) = 0$$

$$\vec{B} = \frac{m}{\mu_0 \rho_s e^2} (\nabla^2 \vec{B})$$

ou

$$\vec{B} = \lambda_L^2 (\nabla^2 \vec{B})$$

Sendo $\lambda_L^2 = \frac{m}{\mu_0 \rho_s e^2}$ um parâmetro denominado **comprimento de penetração London**.

Aplicando-se um Campo Magnético \vec{B} em um supercondutor na direção do eixo z e estando esse supercondutor alinhado ao longo do eixo x teremos a equação:

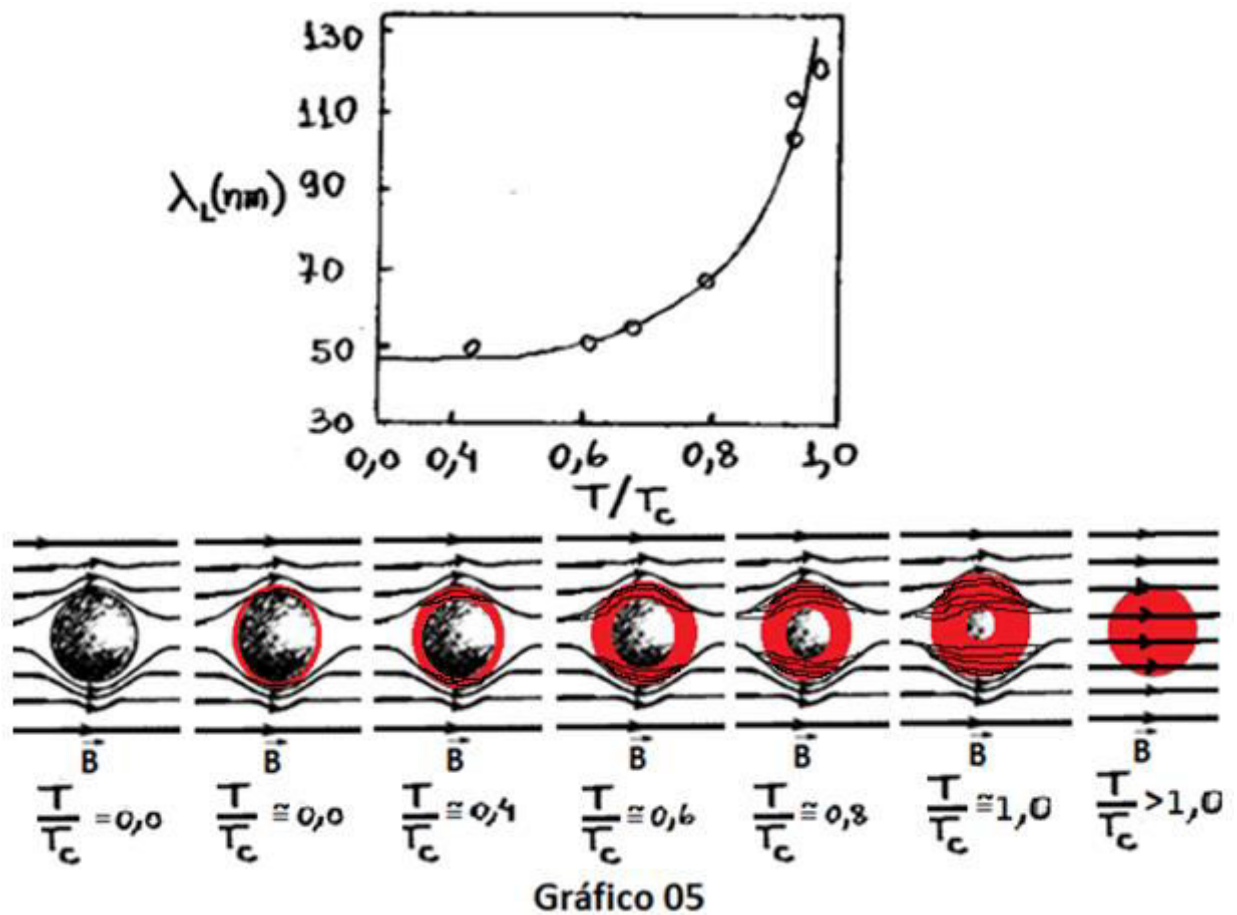
$$B(x) = \lambda_L^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x)$$

Uma solução seria:

$$B(x) = B(0) e^{\frac{-x}{\lambda_L}}$$

Essa equação nos diz que ocorrerá ausência de Campo Magnético \vec{B} somente a partir de $x = \lambda_L$

- Abaixo temos o Gráfico 05 onde está descrito o comportamento experimental do *comprimento de penetração London* λ_L em função da temperatura T para o caso do chumbo Pb. Podemos observar também, representado em vermelho, de forma exagerada propositalmente para uma melhor visualização, o **comprimento de penetração** λ_L . Se a partir da temperatura de valor $T = T_c$ (onde $T/T_c = 1$), diminuíssemos T até $T \rightarrow 0$ (onde $T/T_c \rightarrow 0$), λ_L diminuiria até $\lambda_L \rightarrow 0$, o Campo Magnético seria cancelado no interior do material, então esse alcançaria a supercondução. Caso a temperatura T fosse $T > T_c$ (onde $T/T_c > 1$), o λ_L ocuparia todo o interior do material, o Campo Magnético penetraria no seu no interior, o material não estaria em supercondução.



REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

LIMA, Carlos Raimundo Andrade. Notas de aula, Cap 14. UFJF