

## Estabilidade dos Núcleos e Modelo do Gás de Fermi

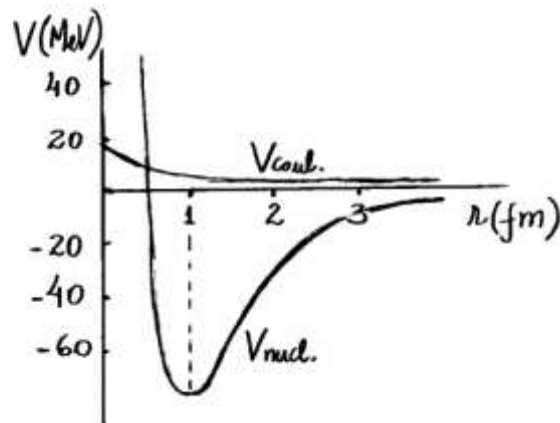
A força que mantém juntos os nucleões, tem uma natureza bem diferente da força eletrostática responsáveis pela estrutura dos átomos.

Sabe-se que as forças nucleares entre próton-próton, próton-nêutron e nêutron-nêutron, são essencialmente idênticas. Algumas evidências de tal propriedade tem sido observadas em experiências de espalhamento entre próton-próton e nêutron-nêutron.

O pequeno tamanho dos núcleos é uma indicação qualitativa de que a força nuclear entre nucleões está associada a uma interação de curto alcance.

A Fig. 1 faz, qualitativamente, uma comparação de uma interação Coulombiana típica  $V_{coul}$  com uma interação nuclear  $V_{nucl}$  para dois prótons no interior de um núcleo atômico.

O gráfico para  $V_{nucl}$  descreve um modelo possível de energia potencial nuclear para um par de prótons num estado com spin total nulo.



**Fig. 1** – Energia potencial, de Coulomb  $V_{coul}$  e nuclear  $V_{nucl}$ , para um sistema de dois nucleões.

A escala natural de comprimento em física nuclear é o fentômetro ( $fm$ ), onde

$$1fm = 10^{-15}m$$

lido frequentemente como 1fermi. O raio nuclear pode variar de 1 a 10 fm, enquanto o raio atômico pode chegar a 100.000 fm = 0,1nm.

Os diferentes tipos de núcleos são denominados de nuclídeos. Em 1913 F. Soddy, um dos colegas de Rutherford, propôs o conceito de isótopos, para as variedades de nuclídeos com mesmo número atômico  $Z$  e diferentes números de massa  $A$ .

Esses átomos ocupariam o mesmo lugar na tabela periódica, seriam quimicamente idênticos, mas fisicamente distintos. Soddy propôs o conceito de isótopos, 20 anos antes da descoberta do nêutron, numa tentativa de explicar porque um mesmo elemento apresentava diferentes comportamentos radioativos.

Os números  $A$  e  $Z$  são utilizados para identificar os nuclídeos e relacionam-se com o número de nêutrons  $N$  de acordo com a equação abaixo:

$$N + Z = A$$

A designação de uma espécie nuclear particular é simbolizada pela seguinte notação:

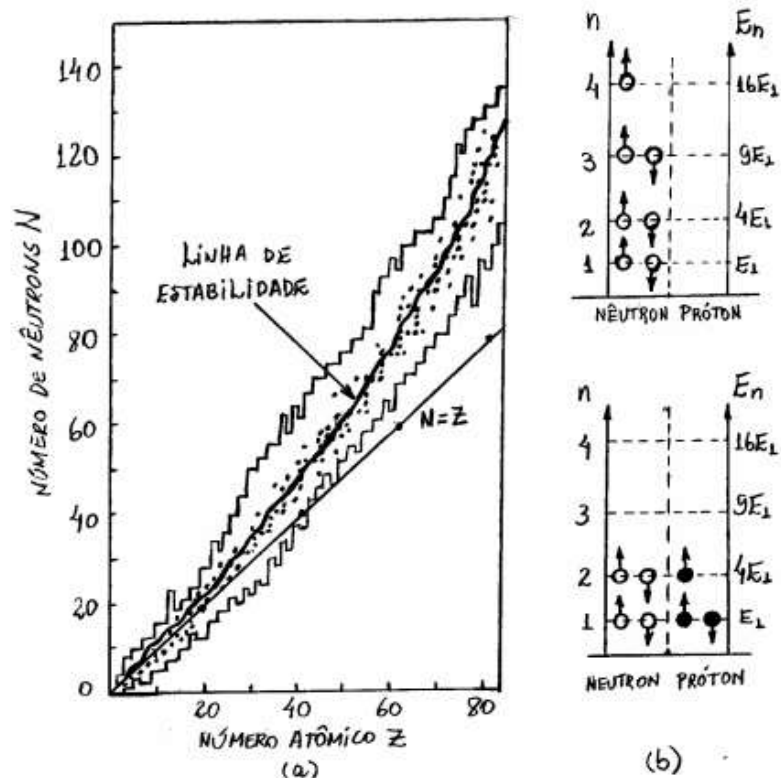


onde  $X$  é o símbolo químico para o átomo de número atômico  $Z$ .

Uma outra categoria importante de nuclídeos são aqueles que possuem o mesmo número de massa  $A$ , e são conhecidos como isóbaros.

Dos mais de 3000 nuclídeos conhecidos, existem somente 266 cujos estados fundamentais são estáveis. Todos os outros são instáveis e podem decair para outros tipos de nuclídeos.

A Fig. 2 (a) mostra um gráfico do número de nêutrons  $N$  em função do número de prótons  $Z$  para nuclídeos estáveis e instáveis com tempos de vida superiores a 1ms.



**Fig. 2** – (a) Comportamento do número de nêutrons  $N$  em função do número de prótons  $Z$  para os núclídeos conhecidos. (b) Distribuição de 7 nêutrons e 4 nêutrons e 3 prótons, num poço de potencial infinito.

Os pontos no gráfico indicam os 266 núclídeos estáveis e a região entre as linhas irregulares representa os núclídeos instáveis.

A linha que passa pelo meio dos núclídeos estáveis é denominada de linha de estabilidade.

A forma geral da linha de estabilidade pode ser compreendida em termos do princípio de Pauli e da repulsão eletrostática entre prótons. Seja por exemplo, um modelo simples de poço de potencial infinito para dois núcleos com diferentes números de prótons e nêutrons, como mostrado nos diagramas da Fig. 2 (b). Deve-se notar que a energia se torna mínima quando são iguais o número prótons e nêutrons, e máxima se todas as partículas forem do mesmo tipo. Existe, portanto, uma tendência devido ao princípio de Pauli, para que  $N = Z$ . Essa tendência muda um pouco quando se inclui a repulsão eletrostática entre prótons, que deve ser proporcional ao número atômico  $Z$ . Quanto maior o valor

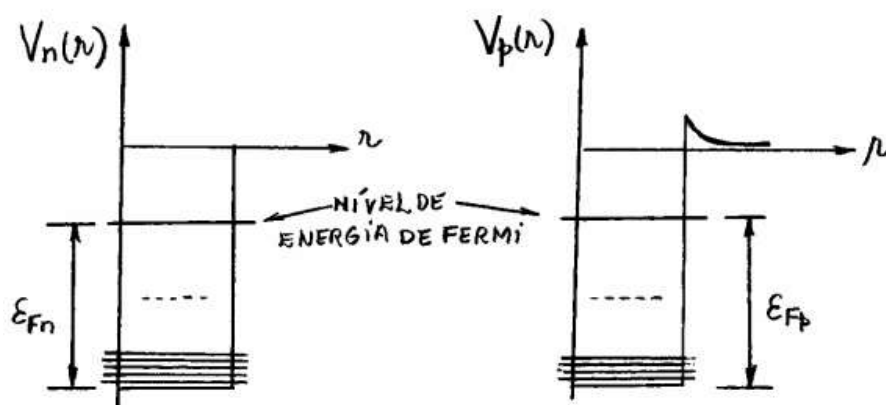
de  $Z$  um número maior de nêutrons  $N$  deve ser requerido para alcançar a condição de menor energia. Assim, à medida que se aumenta o número atômico  $Z$ , a condição de estabilidade deve ocorrer para  $N > Z$ .

O modelo de poço de potencial infinito para núcleos, mostrado na Fig. 2 (b), é conhecido como modelo do gás de Fermi, onde os núcleos são tratados como um gás de Fermi constituído como uma mistura de prótons e nêutrons.

Nesse modelo, os prótons e nêutrons movem-se livremente numa distribuição esférica, definida como o volume nuclear, comportando-se como um gás degenerado de Fermi, no qual os nucleões ocupam seus estados mais baixos de energia sem violar o princípio de Pauli. Próton e nêutron são partículas distinguíveis uma da outra, e assim o princípio de Pauli e a estatística de Fermi-Dirac podem ser aplicados aos dois núcleos separadamente.

A Fig. 3 mostra poços de potenciais constantes para representar o movimento livre de cada uma das partículas nucleares distintas. O efeito de repulsão Coulombiana entre prótons é representado por pontos  $V_p(r) > 0$ , no gráfico  $V_p(r)$  em função de  $r$ .

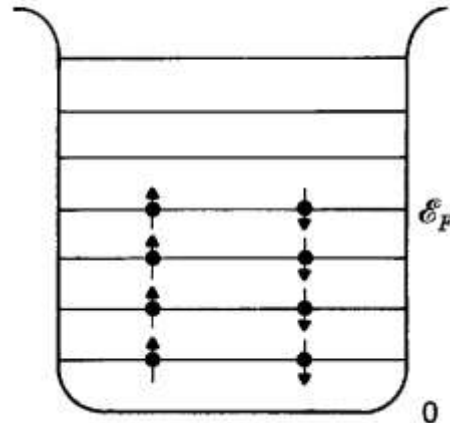
Em cada caso, assume-se um grande número de níveis de energia, com ocupação total para todos aqueles que estão abaixo do nível de Fermi ( $\epsilon_{Fn}$  para nêutrons e  $\epsilon_{Fp}$  para prótons).



**Fig. 3** – Interação nuclear entre, (a) nêutron e, (b) prótons de acordo com o modelo do gás de Fermi.

**Exemplo 1** – Avalie a energia de Fermi de um núcleo típico e use os resultados para determinar a profundidade do potencial nuclear líquido.

**Solução** – A energia de Fermi,  $\varepsilon_F$ , é a energia indicada na Fig. 4 do nucleão no nível mais alto preenchido do sistema, medido a partir do fundo do poço de potencial.



**Fig. 4** – Uma representação esquemática da energia de níveis preenchidos pelos nêutrons no estado fundamental de um núcleo. Os níveis mais baixos são preenchidos, de acordo com as limitações do princípio da exclusão, até a energia de Fermi  $\varepsilon_F$ .

Está relacionado com a massa do nucleão  $M$ , e a densidade do nucleão

$\rho$ , por  $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$ , que escrevemos aqui como:

$$\varepsilon_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2M} \left( \frac{3}{\pi} \rho \right)^{2/3}$$

(Esta expressão pode ser obtida diretamente da equação para as energias dos níveis de um poço quadrado tridimensional simplesmente preenchendo seus níveis mais baixos até a energia de Fermi.).

Vamos considera o gás de Fermi de nêutrons em um núcleo esférico de raio

$$r' = aA^{1/3}$$

Para um núcleo típico, o número de nêutrons é

$$N \cong 0.60 A$$

Assim

$$\rho \cong \frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3 A}$$

Que dá

$$\rho \cong \frac{0.60A}{1.33\pi a^3 A} = \frac{0.45}{\pi a^3}$$

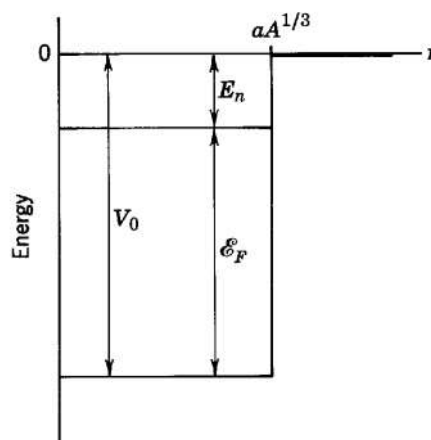
E a energia de Fermi é

$$\varepsilon_F = \frac{\pi^2 \hbar^2 (0.26)}{2Ma^2}$$

Usando um raio constante  $a \cong 1.1F$  consistente com as medições de espalhamento de elétrons como resumido por ( $a = 1.07A^{\frac{1}{3}} \times 10^{-15}m = 1.07A^{1/3}F$ ), e avaliando os outros parâmetros, obtivemos

$$\varepsilon_F \cong 43 \text{ MeV}$$

As relações entre a profundidade do potencial  $V_0$ , a energia de Fermi  $\varepsilon_F$ , e a energia de ligação do último nêutron  $E_n$ , são mostrados na Fig. 5.  $E_n$  é aproximadamente igual a 7 MeV para um núcleo típico.



**Fig. 5** – Ilustrando a relação entre a profundidade  $V_0$  de um potencial de poço quadrado nuclear de raio  $r' = aA^{1/3}$ , a energia de Fermi  $\varepsilon_F$ , e a energia de ligação  $E_n$  do último nêutron.

Assim, para este núcleo, a profundidade do potencial nuclear líquido atuando em seus nêutrons é

$$V_0 = \varepsilon_F + E_n \cong 43 \text{ MeV} + 7 \text{ MeV} = 50 \text{ MeV}$$

Um resultado muito semelhante é obtido para o potencial nuclear líquido para prótons. (É claro que os prótons também sentem um potencial Coulomb líquido exercido pelas cargas de outros prótons no núcleo.).

Weisskopf primeiro apontou que há uma explicação simples de como os nucleões podem mover-se independentemente através de um núcleo em seu estado fundamental. A explicação é baseada no modelo de gás de Fermi do núcleo. Esse modelo é essencialmente o mesmo que o modelo de gás de elétrons livres dos elétrons de condução em um metal. Ele assume que cada nucleão do núcleo se move em um potencial líquido atraente, que representa o efeito médio de suas interações com outros nucleões do núcleo.

O potencial líquido tem uma profundidade constante dentro do núcleo desde a distribuição de nucleões é constante nesta região; fora do núcleo, chega a zero a uma distância igual ao alcance das forças nucleares. Assim, o potencial líquido é de aproximadamente como um poço quadrado finito tridimensional de raio um pouco maior do que o raio nuclear e da profundidade que foi determinada no Exemplo 1. No estado fundamental do núcleo, seus nucleões, que são todos férmions de spin intrínseco  $s = 1/2$ , ocupam os níveis de energia do potencial líquido de forma a minimizar a energia total sem violar o princípio de exclusão.

A Fig. 4 indica os estados quânticos preenchidos pelos nêutrons no estado fundamental de um núcleo. Uma vez que os prótons são distinguíveis dos nêutrons, o princípio de exclusão opera independentemente nos dois tipos de nucleões, e devemos imaginar um diagrama separado e independente representando os estados quânticos preenchidos pelos prótons. Isto é imediatamente aparente a partir desses diagramas porque o princípio de exclusão impede quase todos os nucleões de se espalharem uns dos outros

quando o núcleo está em seu estado fundamental. A questão é que quase todos os estados que são energeticamente acessíveis já estão completamente preenchidos e, portanto, não pode haver essencialmente nenhuma colisão, exceto aquelas em que dois nucleões do mesmo tipo trocam estados quânticos. O efeito líquido de tal troca de duas partículas indistinguíveis é, no entanto, o mesmo como se não houvesse tido colisão alguma. Claro, se houver um conjunto de estados degenerados parcialmente preenchidos na energia de Fermi, os poucos nucleões nestes estados podem colidir com cada outro, mas apenas uma pequena fração do número total de nucleões pode estar em tais estados.

Assim, vemos porque quase todos os nucleões que compõem um núcleo podem se mover livremente dentro do núcleo se estiver em seu estado fundamental.

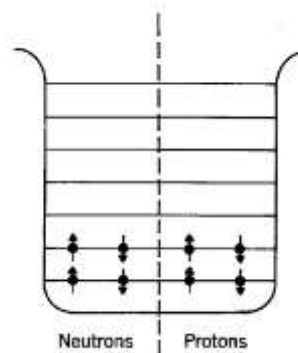
Há evidências de uma série de estudos do comportamento de nucleões de várias energias que a profundidade do potencial nuclear líquido,  $V_0$ , não é uma constante, mas diminui lentamente, e aproximadamente linearmente, conforme a energia do nucleão aumenta. Isso não causa dificuldade porque seu efeito na dinâmica do movimento do nucleão no potencial líquido pode ser completamente descrito pela introdução de uma massa de nucleão efetiva, da mesma forma que ao tratar o movimento de partícula independente de um elétron de condução no potencial líquido para uma rede cristalina. Ou seja, é possível continuar tratando  $V_0$  como uma constante com o valor que obtivemos no Exemplo 1, se a massa real do nucleão  $M$  for substituída por um massa efetiva do nucleão  $M^*$ . Além disso, como a mudança real em  $V_0$  é lenta,  $M^*$  não é muito diferente de  $M$ , e assim, para a maioria das considerações que envolvem nucleões de energia não muito alta, é permitido tomar  $M^* = M$ , ou seja, ignorar completamente o fato de que  $V_0$  não é bem uma constante.

Há também uma dependência da profundidade do potencial nuclear líquido  $V_0$  visto por um próton, ou por um nêutron, na diferença entre o número  $Z$  de prótons e o número  $N$  de nêutrons que o núcleo contém. Isso é descrito adicionando a  $V_0$  um termo  $\Delta V_0 \propto \pm(N - Z)/A$ , com o sinal de mais usado para o potencial visto por um próton e o sinal de menos usado para o potencial visto



por um nêutron. A dependência é decorrente do princípio da exclusão, que restringe as interações entre dois prótons, ou dois nêutrons, a certos estados quânticos, mas não impõe restrições às interações entre um próton e um nêutron. Conseqüentemente, a interação atrativa entre dois nucleões em um núcleo é mais forte entre um próton e um nêutron do que entre dois prótons ou entre dois nêutrons. Assim, o potencial nuclear líquido agindo em um próton é mais profundo do que agindo em um nêutron se o núcleo contiver mais nêutrons do que prótons em proporção ao excesso fracionário de nêutrons, e vice-versa se houver um excesso de próton. Esta dependência desempenha um papel importante no efeito descrito pelo termo de assimetria da fórmula semi-empírica da massa, como iremos indicar. Na maioria das outras considerações, não é tão importante e pode ser ignorado.

A tendência de os núcleos terem  $Z = N$  também tem uma explicação simples no modelo de gás de Fermi. Considere um núcleo de  $Z$  muito pequeno, para o qual a força de Coulomb atuando entre prótons pode ser ignorada em comparação com a força nuclear mais forte. Neste núcleo, existem dois gases de Fermi independentes, os nêutrons e os prótons. Ambos movem em potenciais nucleares líquidos que, nesta aproximação, são os mesmos – basicamente porque a força nuclear agindo entre nêutrons é a mesma que a força nuclear agindo entre prótons, uma vez que a força nuclear é independente de carga. Como é indicado na Fig. 6, os níveis de energia dos dois sistemas também devem ser os mesmos nesta aproximação. Para um determinado valor de  $A$ , a energia total do núcleo é obviamente minimizada se os níveis forem preenchidos com  $Z = N$ , porque nucleões ocupariam níveis de energia mais elevados do que o necessário se esta condição fosse violada.



**Fig. 6** – Uma representação esquemática de independentes gases de Fermi de nêutrons e prótons no mínimo estado de energia de um núcleo de  $Z$  muito pequeno, que é indicado por um poço quadrado com bordas arredondadas.

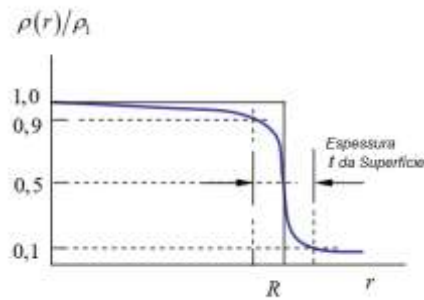
Um núcleo pode ajustar seus valores  $N$  e  $Z$ , mantendo um valor fixo de  $A = N + Z$  usando o processo de decaimento beta para converter nêutrons em prótons, ou vice-versa. Quando o argumento é quantitativo, leva à expressão matemática,  $f_4(Z, A) = +a_4 \frac{(Z-A/2)^2}{A}$ , usado no termo de assimetria da fórmula de massa semi-empírica. A razão pela qual o fator  $1 / A$  aparece no termo é que os níveis de um poço de potencial tridimensional são mais espaçados quanto maior o valor de  $A$ . Assim, com o aumento de  $A$ , há uma redução da penalidade de energia, associada à violação a condição  $N = Z$ , que é descrita pelo fator  $(Z - A/2)^2$ .

O efeito do termo  $\Delta V_0 \propto \pm(N - Z)/A$  na profundidade do potencial nuclear líquido, explicado anteriormente, também contribui significativamente para a presença do termo de assimetria na Fórmula de massa semi-empírica, e suas consequências. Considere um núcleo típico contendo  $N$  nêutrons e  $Z$  prótons, com  $N > Z$ . A contribuição do termo  $\Delta V_0$  para a ligação total a energia dos prótons  $Z$  é cancelada por sua contribuição dos primeiros nêutrons  $Z$ . Mas lá é uma contribuição não cancelada dos nêutrons restantes  $(N - Z)$  que diminui o total de energia de ligação, ou aumenta a massa nuclear, em proporção a  $(N - Z)^2/A \propto \left(Z - \frac{A}{2}\right)^2 / A$ .

**Exercício** – Sabe-se que, para um modelo nuclear esférico, a análise de espalhamentos de elétrons por núcleos mostra que a densidade de carga nuclear pode ser descrita por uma distribuição de Fermi:

$$\rho = \frac{\rho_1}{1 + e^{(r-R)/z_1}}$$

onde, os parâmetros  $R$  e  $z_1$  controlam a dependência com a distância radial  $r$ . A Figura abaixo mostra a curva característica desta função.



Mostre que a espessura da superfície nuclear  $t$  satisfaz a relação:

$$\frac{t}{z_1} = 4 \ln 3$$

### Links de vídeo-aulas

1. <https://pt.khanacademy.org/science/physics/quantum-physics/in-in-nuclei/v/nuclear-stability-and-nuclear-equations>
2. <https://www.youtube.com/watch?v=emSekijh7XI>
3. <https://www.youtube.com/watch?v=aUPLjlgYGk>

### Referências Bibliográficas

1. LIMA, Carlos R. A. “Notas de Aula de Estrutura da Matéria”. Superfluidez e Supercondutividade. Edição de Janeiro de 2013.
2. TIPLER. Paul A. LLEWELLYN. Ralph A. “Física Moderna”. 6 Ed. RJ. LTC, 2017.