Renan Silva de Araújo - Matrícula: 201865668E
Estrutura da matéria II, ERE 2021.3

Quantização do fluxo magnético

Na teoria de Ginzburg-Landau, a função de onda de um par de Cooper num supercondutor é dada por um parâmetro de ordem $\Psi(r, t)$ que está relacionado à quantidade de elétrons supercondutores do material (ou superelétrons). Como $\Psi(r, t)$ não faz referência às posições dos dois elétrons do par em relação ao centro de massa deles, o uso dessa interpretação restringe-se a fenômenos que não alteram significativamente as distância entre os elétrons e o centro de massa. Vamos então analisar as consequências sobre o parâmetro de ordem $\Psi(r, t)$ dos pares de cooper de uma amostra supercondutora na presença de um campo magnético B.

A presença de um campo magnético externo B dá origem a um dos efeitos quânticos mais importantes observados em amostras supercondutoras, que é a quantização do fluxo magnético Φ.Para compreender este importante aspecto da supercondutividade, vamos considerar um anel supercondutor a uma temperatura $T < T_C$na presença de um campo magnético externo B, como mostra a figura abaixo:

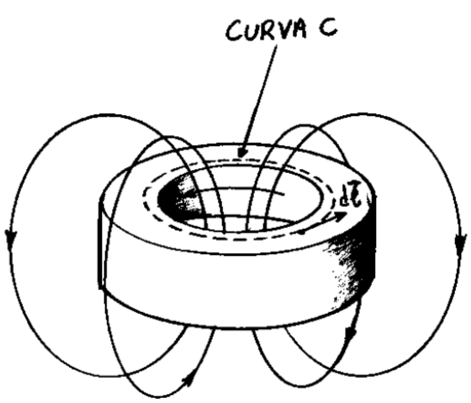

Figura 1: anel de material supercondutor resfriado abaixo da temperatura crítica ($T < T_C$) que foi submetido a um campo magnético uniforme B.

Na formulação de Ginzburg-Landau da supercondutividade, todas as características e propriedades do fenômeno seguem da função termodinâmica chamada *densidade de energia,* que é representada por:

$$f = f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e^*\mathbf{A}\right)\psi\right|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \,.$$

No caso de haver um campo magnético externo agindo sobre o material, sua contribuição à energia livre está presente através do último termo, que contém a energia magnética $\frac{\mu_0 H^2}{2}$. Já a reação do material a esse campo magnético externo se dá através do potencial vetor eletromagnético "A" presente no quarto termo da expressão, onde $B = \nabla\, x\, A$ é o campo magnético induzido do material. Quando o campo magnético externo é desligado, a corrente superficial externa desaparece, mas a corrente superficial interna permanece. Assim, o campo magnético original fica confinado na abertura do anel, como mostrado na figura 1. Essa afirmativa pode ser verificada lembrando-se que é nulo o campo elétrico E no interior de um material supercondutor. Assim, tomando-se uma curva C fechada no interior do supercondutor (como mostrado na figura 1), de uma das equações de maxwell conclui-se que:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \quad -\oint_C E.\,dl = 0$$

Isto é, o fluxo magnético Φ é mantido constante ao longo do tempo no interior do anel supercondutor. A integral de linha da densidade de supercorrente $J_s = \quad -\left(\frac{e\hbar}{m}\nabla\varphi + \frac{2e^2}{m}A\right)|\Psi|^2$, em torno da curva C, é:

$$\oint_C J_s.\,dl = \quad -\frac{e\,\hbar}{m}|\Psi|^2\oint_C \nabla\varphi.\,dl - 2\frac{e^2}{m}|\Psi|^2\oint_C A.\,dl$$

Como $J_S = 0$ sobre essa linha, então:

$$-\frac{e\,\hbar}{m}\oint_C \nabla\varphi.\,dl - 2\frac{e^2}{m}\oint_C A.\,dl = 0$$

Ou

$$\oint_C A.\,dl = -\frac{\hbar}{2e}\oint_C \nabla\varphi.\,dl$$

Na integral do segundo termo dessa equação, não se deve aplicar o teorema de stokes $\oint_C \nabla\rho.\,dl = \oint_S \nabla x \nabla\varphi.\,nda = 0$, uma vez que $\nabla x\nabla\varphi = 0$, pois, por ser uma fase, φ não se repete após um ciclo completo de J, mas sim assume valores inteiros de 2π. Utilizando-se, entretanto, a relação vetorial $d\varrho = \nabla\varphi.\,dl$ e a definição de fluxo magnético $\oint_C A.\,dl = \oint_S B.\,nda \equiv \Phi$, obtem-se:

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e}\oint_C d\varphi = -\frac{\hbar}{2e}\Delta\varphi$$

Para que o parâmetro de ordem $\Psi(r, t)$ seja unívoco, é necessário que, para uma volta completa em torno da curva C, a fase φ seja um múltiplo inteiro de 2π, isto é:

$$\Phi = -\frac{\hbar}{2e}2n\pi = -n\Phi_0$$

Onde

$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e} = \frac{\pi\,\hbar}{e} = 2,07x10^{-15}wb$ é denominado de *quantum de fluxo magnético* ou *fluxóide.*

Assim, a descrição de um supercondutor por meio de um parâmetro de ordem $\Psi(r, t)$ quântico resulta na quantização do fluxo magnético em unidades do fluxóide Φ_0. A quantização do fluxo magnético é de fato observada, e isso reforça a teoria de Ginzburg-Landau. Além disso, nos vórtices magnéticos dos supercondutores do tipo II, essa teoria prevê que cada vórtice contém exatamente um fluxóide, o que é comprovado experimentalmente.

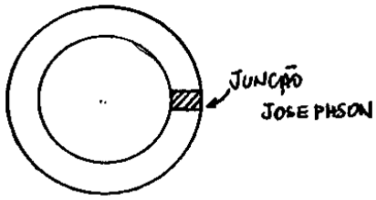

Figura 2: dispositivo supercondutor de interferência quântica (SQUID) formado por um anel supercondutor interrompido por uma junção de josephson.

Um dispositivo formado por um anel supercondutor e uma junção de Josephson (como mostrado na figura 2) produz efeitos de interferência quântica, que faz com que a supercorrente dependa da intensidade do campo magnético uniforme B aplicado. Sabemos que o módulo da densidade de supercorrente é $J_S = J_{So} sen\theta$. Quando o fluxo magnético é Φ_0 - correspondente a uma volta completa -, a fase θ_0 correspondente vale 2π. Para um fluxo magnético Φ qualquer, a fase θ correspondente será:

$$\theta = 2\pi(\frac{\Phi}{\Phi_0})$$

Tais dispositivos, conhecidos como SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) ou dispositivo supercondutor de interferência quântica, permitem medir campos magnéticos extremamente fracos, da ordem de $10^{-14}T$. O SQUID já foi usado, por exemplo, para medir os campos magnéticos produzidos pelo coração e pelo cérebro humano.