

Condensado de Bose-Einstein

Heitor Ribeiro

October 2021

1 Condensado De Bose-Einstein

Viu-se no capítulo 12 que, para qualquer estatística, a **densidade de estados de energia** ϵ para um sistema de partículas de massa m seria

$$D_m(\epsilon) = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} V \epsilon^{1/2} = AV \epsilon^{1/2}, \quad (14.1)$$

onde V é o volume do sistema e $A = \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}}$.

Para um gás em condições normais, geralmente a diferença entre as distribuições de Maxwell-Boltzmann e Bose-Einstein é pequena. Isso ocorre porque nestes casos a densidade de partículas ρ é pequena ou porque o volume $V = N/\rho$ é grande, de modo que há um número elevado de estados quânticos por partícula, ou seja, uma alta densidade de estados $D_m(\epsilon)$.

No caso do Hélio líquido, entretanto, a temperatura T é baixa e o comprimento de onda térmico de de Broglie, $\lambda_{th} \propto T^{-1/2}$, dada no Capítulo 12, não é pequeno o suficiente para que usemos a estatística clássica.

A ideia ousada de que o Hélio líquido pode ser tratado como um gás ideal que obedece a distribuição de Bose-Einstein foi proposta em 1928 por F. London na tentativa de compreender o comportamento do hélio a baixas temperaturas.

Na teoria de London, conhecida como **modelo de dois fluídos**, considera-se o Hélio II (Hélio com $T < T_c$) formado por dois componentes: um **fluido normal**, com propriedades semelhantes a do Hélio I (Hélio com $T > T_c$), e um **superfluido** de propriedades muito diferentes. A densidade ρ_{II} do Hélio II seria, então,

$$\rho_{II} = \rho_s + \rho_n,$$

onde ρ_s é a densidade do superfluido e ρ_n é a densidade do fluido normal. Quando a temperatura é reduzida a partir do ponto λ , a fração da fase super-fluida aumenta e a fração do fluido normal

diminui, até restar somente a fase super-fluida no zero absoluto ($T = 0$).

Na fase super-fluida, todos os átomos de Hélio se encontram no estado de menor energia, o estado fundamental.

Não é óbvio que o Hélio líquido comporte-se como um gás ideal, já que é de se esperar que exista interação entre átomos. No entanto, os átomos de Hélio interagem somente por forças de Van der Waals, que são de pouca intensidade. Além disso, a baixa densidade do Hélio líquido ($0,145g/cm^3$ nas vizinhanças do ponto λ) sugere que a distância entre átomos seja relativamente grande. Assim, o modelo do gás ideal para o Hélio líquido deve constituir-se de uma aproximação razoável.

No capítulo 12 concluiu-se ainda que, para uma distribuição de Bose-Einstein, o número de partículas com energia ϵ é dado por

$$N = \sum_{\epsilon} n_{BE}(\epsilon) = \sum_{\epsilon} \frac{1}{e^{\beta\epsilon+\alpha} - 1}. \quad (14.3)$$

Como se fez com férmions, poderia-se em princípio substituir a distribuição discreta por uma distribuição contínua, uma vez que, em geral, os níveis de energia são numerosos e estão muito próximos. Ocorre, porém, que quando substitui-se a distribuição discreta por uma distribuição contínua, o estado fundamental desaparece. Isso pode ser visto, por exemplo, na equação (14.3), onde $D_n(\epsilon) \propto \epsilon^{1/2}$ e, portanto, $D_n(\epsilon) = 0$ para $\epsilon = 0$.

Este fato não é importante para um gás constituído por férmions, já que cada estado espacial não pode ser ocupado por mais de duas partículas e, portanto, não há problemas em ignorar duas partículas em por exemplo 10^{22} . Quando o gás é constituído por bósons, porém, não existe nenhuma restrição quanto ao número de partículas que podem ocupar o mesmo estado.

Particularmente, no Hélio líquido, os estados de mais baixa energia, principalmente o estado fundamental, são importantes.

O número de ocupações N_0 do estado fundamental ϵ_0 pode ser calculado a partir da equação (14.3), assumindo-se uma condição de contorno de ondas progressivas para partículas no interior de uma caixa grande de comprimento L , onde $\epsilon_0 = 0$, isto é,

$$N_0 = (e^{\alpha} - 1)^{-1}. \quad (14.4)$$

Evidentemente, pode-se assumir $\alpha > 0$ tal que N_0 é finito e positivo para bósons. É bom lembrar que, no caso de férmions a baixas temperaturas, $\alpha < 0$, pois este é proporcional ao negativo da energia de Fermi ($\alpha = -\beta\epsilon_F$). Entretanto, nesses casos, $N_0 = (e^{\alpha} + 1)^{-1} > 0$. Se α é muito pequeno, em particular $\alpha = 1/N$, da expansão em série $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2/2! + \dots \approx 1 + 1/N$, a equação (14.4) torna-se

$$N_0 \approx \left(1 + \frac{1}{N} - 1\right)^{-1} = N. \quad (14.5)$$

O número de partículas N para qualquer valor de α , dado na equação (14.3), pode ser reescrito então como

$$N = N_0 + \sum_{\epsilon \neq 0} \frac{1}{e^{\beta\epsilon + \alpha} - 1}. \quad (14.6)$$

Como a ocupação do estado fundamental está preservada na equação (14.6), a distribuição discreta pode agora ser substituída por uma distribuição contínua, obtida a partir da função densidade de estados, dada na equação (14.1),

$$N = N_0 + \int_0^\infty n_{BE}(\epsilon) D_m(\epsilon) d\epsilon = N_0 + AV \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} (e^{\beta\epsilon + \alpha} - 1)^{-1}, \quad (1)$$

ou, adotando-se a troca de variável $z = \beta\epsilon$,

$$N = N_0 + AV G(k_B T)^{3/2} G(\alpha), \quad (14.7)$$

onde

$$G(\alpha) = \int_0^\infty dz z^{1/2} (e^{z + \alpha} - 1)^{-1}. \quad (14.8)$$

Para valores muito grandes de α , pode-se adotar somente os dois primeiros termos da expansão da função $(e^{z + \alpha} - 1)^{-1}$ e mostrar que

$$G(\alpha) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha}. \quad (14.9)$$

Para $\alpha = 0$, pode-se calcular a integral na equação (14.8) e mostrar que

$$G(\alpha) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612. \quad (14.10)$$

Quando α é da ordem de $1/N$, isto é, pequeno o suficiente para que $G(\alpha) \approx G(0)$, a equação (14.7) resulta em

$$N_0 = N - AV (k_B T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612. \quad (14.11)$$

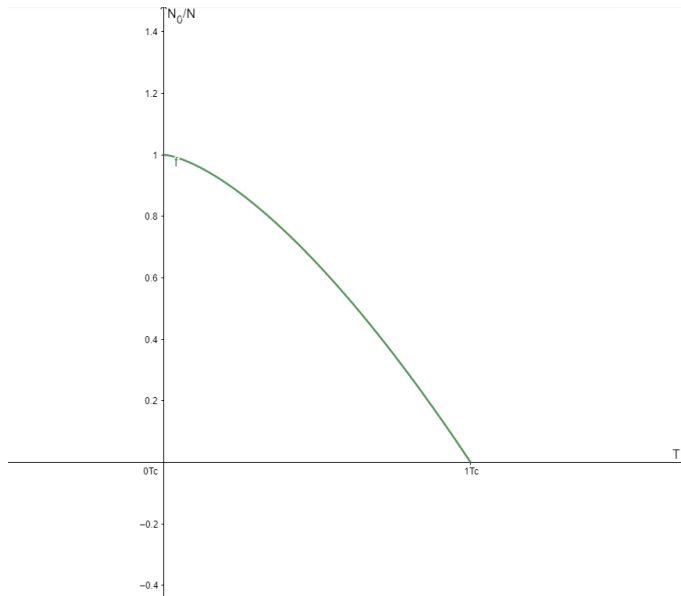


Figure 1: Comportamento da fração N_0/N em função da temperatura T

ou

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}, \quad (14.12)$$

onde

$$T_c = \frac{1}{k_B} \left(\frac{2N}{VA\sqrt{\pi^2, 612}} \right)^{2/3} = \frac{2\pi\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{\rho}{2, 612} \right)^{2/3}. \quad (14.13)$$

Com $A = m^{3/2}/\sqrt{2\pi^2\hbar^3}$ e $\rho = N/V$ sendo a densidade de partículas. A figura abaixo mostra a fração N_0/N de superfluidos N_0 na mistura N em função da temperatura T para $T \leq T_c$, de acordo com a equação (14.12).

No modelo de dois fluidos de London, os N_0 átomos que foram acrescentados na equação (14.6) se condensaram no estado fundamental. São estes átomos que constituem o superfluido. Os $N - N_0$ átomos restantes constituem o fluido normal.

A concordância do valor teórico da temperatura crítica $T_c = 3,1K$ com o valor experimental da temperatura do ponto lambda, $T_c = 2,17K$, pode ser considerada razoável, particularmente se for levado em consideração que os cálculos teóricos se baseiam na hipótese de que o Hélio líquido se comporta como um gás ideal.

O processo de acumulação de átomos no estado fundamental a uma temperatura $T = 0$ é denominada **condensação de Bose-Einstein**. O fenômeno foi previsto por Einstein em 1924, mas levou mais de 70 anos para ser observado em átomos de rubídio, como se verá na próxima seção.

2 Exercícios

1 - O que é a condensação de Bose-Einstein? Por que átomos de ${}^3\text{He}$ podem formar condensados de Bose-Einstein, apesar de terem spins semi-inteiros?

2 - O hidrogênio spin polarizado tem sido condensado a uma densidade de $\rho = 5 \times 10^{24}$ átomos/ m^3 . Calcule a temperatura crítica T_c para essa densidade assumindo-se que esse sistema comporta-se como um gás ideal. Resp.: 47mK

3 - Obtenha a energia total e a capacidade térmica para um gás ideal de Bósons, considerando que este esteja à uma temperatura abaixo da temperatura crítica T_c para a condensação de Bose-Einstein.