

14.3 - Condensado de Bose-Einstein

Viu-se no capítulo 12 que, para qualquer estatística, a densidade de estados de energia ε para um sistema de partículas de massa m , é:

$$D_m(\varepsilon) = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}} V \varepsilon^{\frac{1}{2}} = AV \varepsilon^{\frac{1}{2}}; \quad (14.1)$$

onde V é o volume do sistema e $A = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}}$.

Para um gás em condições normais, geralmente a diferença entre as distribuições de Maxwell-Boltzmann e Bose-Einstein é pequena. Isso ocorre porque nesses casos, a densidade de partículas ρ é pequena ou o volume $V = \frac{N}{\rho}$ é grande e portanto, apresentam um número elevado de estados quânticos por partícula ou alta densidade de estados $D_m(\varepsilon)$.

No caso do hélio líquido, entretanto, a temperatura T é baixa e o comprimento de onda térmico de De Broglie, $\lambda_{th\alpha} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$, dada na equação (12.75) do capítulo 12, não é pequeno o suficiente para que a estatística clássica seja usada.

A ideia um tanto ousada de que o hélio líquido pode ser tratado como um gás ideal que obedece a distribuição de Bose-Einstein foi proposta em 1938 por F. London na tentativa de compreender o comportamento do hélio a baixas temperaturas.

Na teoria de London, conhecida como modelo de dois fluídos, considera-se o Hélio II (hélio com $T < T_c$) formado por dois componentes: um fluído normal, com propriedades semelhantes a do hélio I (hélio com $T > T_c$), e um superfluido (com viscosidade nula) de propriedades muito diferentes. A densidade ρ_{II} do hélio II seria então:

$$\rho_{II} = \rho_s + \rho_n; \quad (14.2)$$

onde ρ_s é a densidade do superfluido e ρ_n é a densidade do fluído normal.

Quando a temperatura é reduzida a partir do ponto λ , a fração da fase superfluida na mistura aumenta e a fração da fase normal diminui, até restar somente a fase superfluida no zero absoluto ($T = 0k$).

Na fase superfluida, todos os átomos de hélio encontram-se no estado de menor energia, o estado fundamental.

Não é óbvio que o hélio líquido comporta-se como um gás ideal, já que é de se esperar que exista interação entre átomos. No entanto, os átomos de hélio interagem

somente por forças de Van Der Waals que são de pouca intensidade. Além disso, a baixa densidade do hélio líquido ($0,145g/cm^3$ nas vizinhanças do ponto lâmbda) sugere que a distância entre átomos seja relativamente grande. Assim, o modelo do gás ideal para o hélio líquido deve constituir-se de uma aproximação razoável.

No capítulo 12, concluiu-se ainda que para uma distribuição de Bose-Einstein, o número de partículas com energia ε é dado por:

$$N = \sum_{\varepsilon} n_{BE}(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon + \alpha} - 1}; \quad (14.3)$$

Como se fez com férmions, poderia-se em princípio, substituir a distribuição discreta por uma distribuição contínua, uma vez que em geral os níveis de energia são números e estão muito próximos. Ocorre, porém, que quando substitui-se a distribuição discreta por uma distribuição contínua, o estado fundamental desaparece. Isso pode ser visto, por exemplo, na equação (14.1), onde $D_m(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e portanto $D_m(\varepsilon) = 0$ para $\varepsilon = 0$.

Este fato não é importante no caso de um gás constituído por férmions, já que cada estado espacial não pode ser ocupado por mais de duas partículas, e portanto, não há problema em ignorar duas partículas em, por exemplo, 10^{22} . Quando o gás é constituído por bósons, porém, não existe nenhuma restrição quanto ao mínimo de partículas que podem ocupar o mesmo estado.

Particularmente, no caso do hélio líquido, os estados de mais baixa energia, principalmente o estado fundamental, são importantes.

O número de ocupação N_o do estado fundamental ε_o pode ser calculado a partir da equação (14.3) assumindo-se uma condição de contorno de ondas progressivas para partículas no interior de uma caixa grande de comprimento L, onde $\varepsilon_o = 0$, isto é:

$$N_o = (\varphi^{\alpha} - 1)^{-1}; \quad (14.4)$$

Evidentemente, deve-se assumir $\alpha > 0$ tal que N_o é finito e positivo para os bósons. É bom lembrar que no caso de férmions a baixas temperaturas, $\alpha < 0$, pois este é proporcional ao negativo da energia de Fermi ($\alpha - \beta\varepsilon_F$). Entretanto, nesses casos,

$N_o = (\varphi^{\alpha} - 1)^{-1} > 0$. Se α é muito pequeno, em particular $\alpha = 1/N$, φ da expansão em série $\varphi^{\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots \simeq 1 + 1/N$, a equação (14.4), torna-se:

$$N_o \simeq \left(1 + \frac{1}{N} - 1\right)^{-1} = N ; \quad (14.5)$$

O número de partículas N para qualquer valor de α , dado na equação (14.3), pode ser reescrito como:

$$N = N_o + \sum_{\varepsilon \neq 0} \frac{1}{\varphi^{\beta\varepsilon+\alpha} - 1} ; \quad (14.6)$$

Como a ocupação do estado fundamental está preservada na equação (14.6), a distribuição discreta pode agora ser substituída por uma distribuição contínua, obtida a partir da função densidade de estados, dada na equação (14.1), como:

$$N = N_o + \int_0^{\infty} n_{BE}(\varepsilon) D_m(\varepsilon) d\varepsilon = N_o + AV \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\varphi^{\beta\varepsilon+\alpha} - 1)^{-1}$$

ou, adotando-se a troca de variável $z = \beta\varepsilon$:

$$N = N_o + AV(k_B T)^{\frac{3}{2}} G(\alpha) ; \quad (14.7)$$

onde:
$$G(\alpha) = \int_0^{\infty} dz z^{\frac{1}{2}} (\varphi^{z+\alpha} - 1)^{-1} ; \quad (14.8)$$

Para valores muito grandes de α , pode-se adotar somente os dois primeiros termos da expansão da função $(\varphi^{z+\alpha} - 1)^{-1}$ e mostrar que:

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi^{-\alpha} ; \quad (14.9)$$

Para $\alpha = 0$, pode-se calcular a integral na equação (14.8) e mostrar que:

$$G(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612 ; \quad (14.10)$$

Quando α é da ordem de $1/N$, isto é, pequeno o suficiente para que $G(\alpha) \simeq G(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612$. A equação (14.7) resulta em:

$$N_o = N - AV(K_B T)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2,612 ; \quad (14.11)$$

ou
$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}} ; \quad (14.12)$$

onde
$$T_c = \frac{1}{K_B} \left(\frac{2N}{VA\sqrt{\pi} 2,612} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2\pi\hbar^2}{K_B m} \left(\frac{\rho}{2,612} \right)^{\frac{2}{3}} ; \quad (14.13)$$

com $A = m^{\frac{3}{2}} / \sqrt{2\pi} \hbar^3$ e $\rho = N/V$ sendo a densidade de partículas.

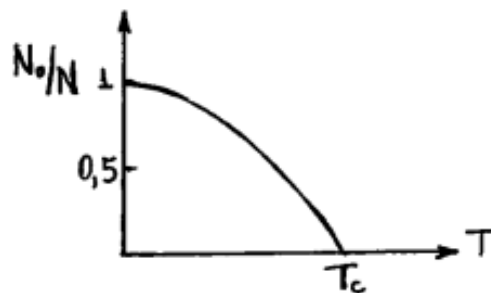


fig 14.4

A *fig 14.4* acima mostra a fração N_0/N de superfluidos N_0 na mistura N , em função da temperatura T para $T \leq T_c$, de acordo com a equação (14.12).

No modelo de dois fluidos de London, os N_0 átomos que foram acrescentados na equação (14.6), se condensaram no estado fundamental. São esses átomos que constituem o superfluido. Os $N - N_0$ átomos restantes constituem o fluido normal.

A concordância do valor teórico da temperatura crítica $T_c = 3,1k$, com o valor experimental da temperatura do ponto lâmbda $T_c = 2,17k$, pode ser considerada razoável, particularmente se for levado em consideração que os cálculos teóricos baseiam-se na hipótese de que o hélio líquido se comporta como um gás ideal.

O processo de acumulação de átomos no estado fundamental a uma temperatura $T = 0$ é denominado de condensação de Bose-Einstein. O fenômeno foi previsto por Einstein em 1924, mas levou mais de 70 anos para ser observado em átomos de rubídio, como se verá na próxima seção.

Simplificando e descobrindo o tema...

Alguns conceitos que foram usados e são importantes:

Spin: É uma característica da matéria, assim como massa ou carga elétrica.

Bósons: São partículas que apresentam spin inteiro, eles não possuem massa.

Férmions: São partículas que apresentam spin fracionário.

Os estados físicos da matéria são as formas pela qual a matéria pode se apresentar na natureza. Os estados mais comuns que conhecemos e aprendemos são: sólido, líquido e gasoso. Além desses três estados básicos, existem mais dois: o plasma, que é o estado em que o gás encontra-se ionizado e é possível de ser encontrado na natureza, por exemplo, em estrelas; e o condensado de bose-einstein que exploraremos aqui.

Previsto teoricamente pelos físicos Satyendra Bose e Albert Einstein em 1925, um condensado é caracterizado por partículas que se comportam de maneira extremamente organizada e vibram com a mesma energia como se fossem um único átomo. Esse estado não é encontrado na natureza, pois é necessária uma temperatura próxima ao zero absoluto (-273 °C).

O primeiro condensado deste tipo foi produzido por Eric Cornell e Carl Wieman em 1995, na Universidade do Colorado em Boulder, usando um gás de átomos de rubídio arrefecido a 170 nK (nano Kelvin). [1]

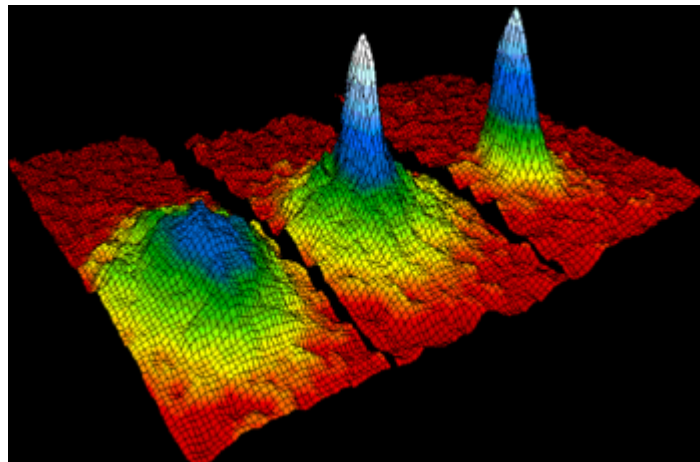


Fig 1 - Dados de distribuição de velocidade confirmando a descoberta de um novo estado da matéria, o Condensado de Bose-Einstein, a partir de um gás de Rubídio

Nesta representação da Fig 1, as cores representam o número de átomos em cada velocidade, sendo o vermelho menos átomos e o branco mais átomos. Branco e azul claro são velocidades menores. Esquerda: Logo antes do aparecimento do condensado de Bose-Einstein. Centro: No instante do aparecimento do condensado. Direita: após a rápida evaporação, deixando amostras puras do condensado. O pico não é infinitamente estreito devido ao Princípio da Incerteza de Heisenberg: quando um átomo é retido numa região específica do espaço a sua distribuição de velocidade possui necessariamente uma certa largura mínima.

- ★ Um conteúdo extra e interessante sobre esse assunto, é encontrado no mundo cinematográfico também. O filme original Netflix, Spectral, faz referência ao condensado de uma forma empolgante e arrepiante. Para não dar muito spoiler, deixo aqui o meu convite para que assista o filme e se divirta nessa ação, e ainda leia a referência [2] que deixarei aqui. Nela há a relação existente entre o filme e o condensado.
- ★ Um vídeo, com as informações relevantes e recentes dos estudos e desenvolvimento do condensado também é interessante. Por isso, o deixarei aqui como referência [3].

Referências:

[1] https://pt.wikipedia.org/wiki/Condensado_de_Bose-Einstein

[2] www.blog.quartogeek.com.br/spectral-um-filme-mediano-com-otimas-ideias-para-rpg - A teoria de Einstein sobre condensado de Bose.

[3] <https://www.youtube.com/watch?v=pRAdXpqzaaw> - Condensado de Bose-Einstein

[4] <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/condensado-de-bose-einstein.htm>

14.3 - Formação de condensados de Bose-Einstein por resfriamento de átomos a laser

Como qualquer átomo o ${}^4\text{He}$ é formado por férmions (prótons, nêutrons e elétrons). Entretanto, no caso do ${}^4\text{He}$, essas partículas estão associadas de tal forma que o spin total do estado fundamental é um número inteiro e, portanto, o ${}^4\text{He}$ é um bóson. Na verdade, examinando-se a tabela periódica, nota-se que a maioria dos átomos no estado fundamental são bósons.

O excesso de átomos que formam o gás no interior de uma caixa cúbica de comprimento L não traz dificuldade na análise de suas propriedades térmicas a baixa temperatura, uma vez que o espaçamento entre níveis de energia, $E_n = (\hbar^2 \pi^2 / 2mL^2)n^2$, é muito pequeno. E, portanto, a probabilidade de ocupação de um desses níveis também é muito pequena.

Por exemplo, o espaçamento entre os níveis de energia em uma caixa cúbica de volume 1cm^3 , contendo vapor de sódio, é da ordem de $\Delta E = E_{n+1} - E_n \simeq 10^{-20} \text{eV}$. De modo que, mesmo em temperaturas baixas, os átomos de uma amostra com 1 bilhão (10^9) de átomos ocupam uma pequena fração dos estados disponíveis, como mostra a *fig. 14.5*.

Além disso, se v é o volume ocupado por cada átomo, a distância média l entre os átomos no interior da caixa, é:

$$l = v^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1 \text{ cm}^3}{10^9 \text{ átomos}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{10^{-6} \text{ m}^3}{10^9 \text{ átomos}} \right)^{\frac{1}{3}} = 10^{-5} = 10 \mu\text{m}$$

ou seja, milhares de vezes maior que um diâmetro atômico. Isso significa que praticamente não há interação entre os átomos.

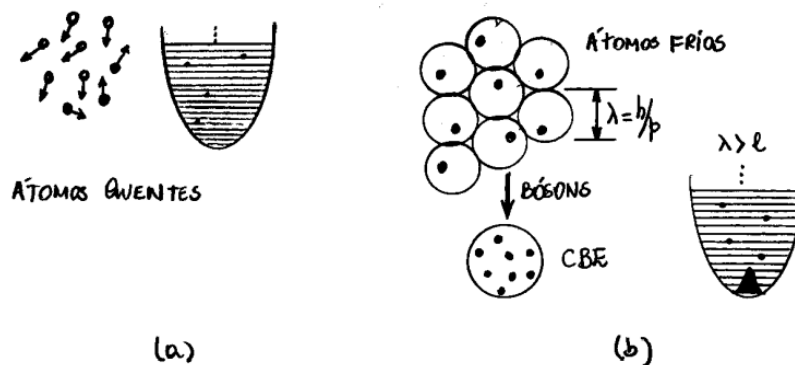


fig 14.5 - (a) átomos quentes de uma amostra em uma caixa cúbica, onde a probabilidade de ocupação de um estado é muito pequena. (b) quando os átomos são resfriados até que o comprimento de onda de De Broglie λ seja maior que a distância interatômica l , os átomos tendem a se concentrar no estado fundamental.

O método mais evidente para formar condensados de Bose-Einstein (CBE) a partir de bósons contidos em uma caixa macroscópica, seria reduzir a temperatura e aumentar a pressão, como se costuma fazer para liquefazer um gás. Entretanto, esse processo simples envolve uma dificuldade para a maioria dos átomos:

Quando o gás se liquefaz, a distância entre os átomos fica tão pequena que os átomos passam a interagir por meio dos elétrons da última camada, fazendo com que se comportem como férmions. É exatamente isso que acontece com o hélio II líquido (hélio com $T \leq T_c$), onde mesmo em temperaturas muito baixas, a fração de átomos no estado fundamental (fase superfluida) constitui-se somente de 10%.

Essa dificuldade foi resolvida em 1995, por C. E. Wieman e E. Cornell, mais de 70 anos depois da previsão de Einstein, usando uma técnica de resfriamento a laser e uma armadilha magnética. Esses pesquisadores formaram um CBE diretamente a partir de um vapor supersaturado de átomos de rubídio, resfriando a amostra sem permitir que o equilíbrio térmico fosse atingido. No equilíbrio térmico a amostra deixaria de ser um vapor supersaturado para ser um sólido metálico.

A amostra de vapor de rubídio à temperatura ambiente foi iluminada por seis lasers semicondutores de um comprimento de onda apropriado, como mostra a *fig 14.6*. As colisões dos fótons dos lasers com os átomos fazem com que, após um ou dois segundos, uma coleção de aproximadamente 10^7 átomos se concentrem numa região com aproximadamente 1,5cm de diâmetro, definida pela interseção dos feixes dos lasers. Por causa do aprisionamento promovido pelos lasers, a energia cinética dos átomos cai a tal ponto, que a “nuvem” atômica é resfriada a uma temperatura da ordem de 1mK.

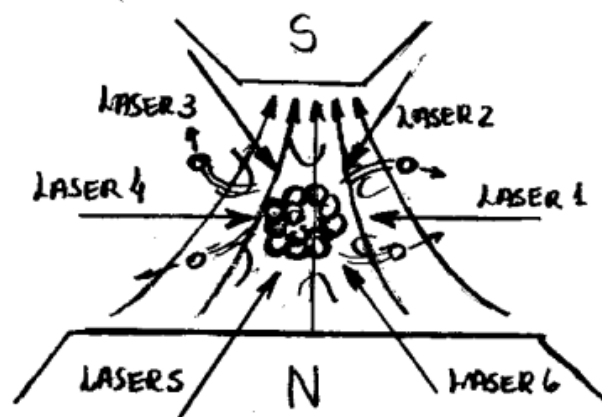


Fig. 14.6 - Técnica de formação de um condensado de Bose-Einstein a partir de uma amostra de vapor de rubídio.

Em seguida, uma armadilha magnética especial com um campo magnético não-uniforme, foi usado para “comprimir” os átomos da nuvem, tal que spins atômicos ($j = 2$) polarizam todos no estado $m_j = + 2$.

No vapor de átomos polarizados, o equilíbrio é atingido rapidamente. Muito antes que o verdadeiro estado de equilíbrio, o sólido, possa se formar, o que mantém a nuvem num estado de vapor supersaturado.

A armadilha magnética contém um “dreno” que permite a passagem dos átomos mais “quentes”, levando com eles boa parte da energia cinética, resfriando os átomos restantes a uma temperatura menor que $100nK$, da mesma forma como as moléculas de água que evaporam da superfície de uma xícara de café, resfriam o líquido que permanecem na xícara.

Os átomos restantes passam a ocupar o estado fundamental da armadilha magnética e sua temperatura cai a zero. São esses átomos que formam o condensado de Bose-Einstein.

O condensado se mantém estável durante 15 ou 20 segundos antes de ser destruído por colisões com átomos de impurezas que também estão colidindo com as paredes quentes da caixa.

Após a descoberta de Wieman e Cornell, diversos outros cientistas produziram condensados de Bose-Einstein. Em 1996, Ketterle e colaboradores produziram um condensado de átomos de sódio com $9 * 10^7$ átomos de um milímetro de diâmetro e com um tempo de vida de meio minuto.

Provavelmente a maioria das aplicações práticas de um CBE ainda estão por ser descobertas. Entretanto, existe uma aplicação que vale a pena mencionar. O CBE pode ser usado como base para a fabricação de um futuro laser atômico. Este fato foi demonstrado, também por Ketterle e colaboradores, no final de 1996. O condensado é um conjunto coerente de átomos, assim como a luz produzida por um laser é um conjunto coerente de fótons.

Assim, um laser atômico seria capaz de depositar átomos em substratos com uma enorme precisão, provavelmente substituindo a microlitografia na produção de circuitos integrados.