Desigualdade de Heisenberg para transformada de Fourier

Adaptação do artigo “Heisenberg’s inequality for Fourier transform”, de Riccardo Pascuzzo, como forma de avaliação para a disciplina Física Moderna - 2018.3.
Professor: Dr. Rodrigo Alves Dias

G. F. Vasconcelos Júnior, C. A. Rubim, A. A. Marinato, K. S. Berbereia

10 de dezembro de 2018

Sumário

1 Transformada de Fourier

Definição 1. Sejam $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$. A transformada de Fourier de $f(t)$ é definida por

$$F[f(t);\omega] = \hat{f}(\omega) = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t} f(t)dt \qquad \omega \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

enquanto que a transformada de Fourier inversa é definida por

$$f(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t} \hat{f}(t)d\omega \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

onde $AB = \frac{1}{2\pi}$.

Comentário 1. $L^2(\mathbb{R})$ é o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável, munido de produto interno usual. Ou seja, $f \in L^2(\mathbb{R})$ se a integral de f^2 converge.

Observação 1.1. Como há diferentes definições da transformada de Fourier, para cobrir grande parte delas, nas equações (1) e (2) utilizamos o símbolo $\pm$ e as constantes genéricas A e B, que podem ser escolhidas de três maneiras:

1. $A = 1$ e $B = \frac{1}{2\pi}$
2. $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3. $A = \frac{1}{2\pi}$ e $B = 1$

Como apontaremos na sequência, cada escolha de A e B é feita de maneira a simplificar algumas fórmulas.

Relembraremos algumas propriedades da transformada de Fourier que serão úteis para provar a desigualdade de Heinsenberg.

Proposição 1.1. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 1.1. (Convolução). Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Definimos a convolução de f e g como

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Então

1. $(f * g)(t) \in L^2(\mathbb{R})$,
2. $F[(f * g)(t); \omega] = \frac{1}{A}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

Observação 1.2. Nesse caso deveríamos escolher $A = 1$, de maneira que a equação acima se torne

$$F[(f * g)(t); \omega] = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

O teorema anterior é necessário para provar a igualdade fundamental que segue:

Teorema 1.2. (Parseval) Sejam $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$. Então

$$A\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = B\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f(\omega)}|^2 d\omega, \tag{3}$$

que é a fórmula de Parseval.

Observação 1.3. Nesse caso deveríamos escolher $A = B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, de maneira que (3) fique

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f(\omega)}|^2 d\omega,$$

A equação acima pode ser vista como uma preservação da norma em L^2: relembrando que

$$||f||_{L^2}^2 = ||f||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

nós obtemos que

$$||f||_2 = ||\hat{f}||_2.$$

Observação 1.4. Como consequência da fórmula de Parseval obtemos

$$\begin{aligned}\frac{A}{B}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\Big)^2 =& \frac{A}{B}\Big(\frac{B}{A}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f(\omega)}|^2 d\omega\Big)^2 \\ =& \frac{B}{A}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f(\omega)}|^2 d\omega\Big)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Teorema 1.3. (Diferenciação temporal) Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$

$$F\Big[\frac{d^n f}{dt^n}; \omega\Big] = (\mp i\omega)^n \hat{f}(\omega). \tag{5}$$

2 Desigualdade de Heisenberg

O princípio da incerteza é tanto uma proposição sobre características intrínsecas a sistemas quânticos, quanto uma proposição a cerca da nossa limitação técnica de realizar medidas em tais sistemas sem os perturbar. Na linguagem da mecânica quântica, um par de váriáveis canônicas conjugadas, como momento e posição, não podem ser precisamente determinadas simultaneamente em qualquer estado quântico. De um ponto de vista mais matematicamente rigoroso, o princípio da incerteza pode ser formulado através do seguinte resultado:

Teorema 2.1. (Desigualdade de Heisenberg). Se f, $tf(t)$ e $\omega\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ então:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2 dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega\right) \geq \frac{A}{4B}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt\right)^2 \tag{6}$$

$$= \frac{B}{4A}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega\right)^2 \tag{7}$$

Demonstração. Primeiro nós observamos que, como f, $tf(t)$ e $\omega\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, então (6) está bem definida. Devido à pertinência $f \in L^2(\mathbb{R})$, segue da Proposição 1.1 que $\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ e isso significa que (7) também est[a bem definida.
De (4) imediatamente segue (7).
Vamos provar (6). Temos de (5) que a finitude de $\int |\omega\widehat{f}|^2$ implica que f é absolutamente contínua e $f' \in L^2(\mathbb{R})$, desde que $\widehat{(f')} = \mp\omega\widehat{f}(\omega)$. Isso nos permite definir:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda t f(t) + f'(t)|^2 dt \geq 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Com efeito, como $tf(t), f'(t) \in L^2(\mathbb{R})$, então $tf(t) + f'(t) \in L^2(\mathbb{R})$, logo $I(\lambda) < \infty$ e, portanto, a expressão anterior está bem definida. Além disso, como $|f(t)|^2 = f(t)\overline{f(t)}$, temos

$$\begin{aligned}|\lambda t f(t) + f'(t)|^2 =& [\lambda t f(t) + f'(t)]\Big[\lambda t\overline{f(t)} + \overline{f'(t)}\Big]\\ =& \lambda^2 t^2 |f(t)|^2 + \lambda t\Big[f(t)\overline{f'(t)} + f'(t)\overline{f(t)}\Big] + |f'(t)|^2,\end{aligned}$$

assim, obtemos

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\lambda^2 t^2 |f(t)|^2 + \lambda t\Big[f(t)\overline{f'(t)} + f'(t)\overline{f(t)}\Big] + |f'(t)|^2\Big] dt.$$

Integrando por partes, podemos escrever

$$I(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt + \lim_{a\to\infty} \lambda t\Big| |f(t)|^2 \Big|_{-a}^{a} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[-\lambda |f(t)|^2 + |f'(t)|^2\Big] dt.$$

Como $I(\lambda)$ converge e todas as integrais no lado direito também convergem, segue que o termo dentro do limite deve tender a zero, pois, de outra maneira, $|f(t)|^2$ seria comparavável à t^-1 para $t >> 1$ e f não pertenceria a $L^2(\mathbb{R})$. Portanto

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 t^2 |f(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[-\lambda |f(t)|^2 + |f'(t)|^2\Big] dt.$$

Como $f' \in L^2(\mathbb{R})$, podemos aplicar (3) e, usando (5) com $n = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 dt =& \frac{B}{A}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{(f')}(\omega)|^2 d\omega \\ =& \frac{B}{A}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \omega^2 d\omega.\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$I(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |f(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda |f(t)|^2 dt + \frac{B}{A}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

que é uma equação quadrática para λ. Como $I(\lambda) \geq 0$ para qualquer valor de λ, então tal equação não possui raízes reais além do 0, e logo $\Delta \leq 0$:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2 dt\right)^2 - 4\frac{B}{A}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2 dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2|\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega\right) \leq 0$$

que nos leva a (6). □

Observação 2.1. Podemos reescrever a desigualdade de Heisenberg na norma em L^2:

$$||tf(t)||_2^2 \left|\left|\omega\widehat{f}(\omega)\right|\right|_2^2 \geq \frac{A}{4B}||f||_2^4 = \frac{B}{4A}\left|\left|\widehat{f}\right|\right|_2^4.$$

Aqui, cabe ressaltar que na literatura, usualmente o teorema acima é reescrito de outra maneira, a saber:

Corolário 2.1. Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. A dispersão de f é definida como [2]

$$D_0(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx. \tag{9}$$

Então

$$D_0(f(x))D_0(\widehat{f}(k)) \geq \frac{1}{16\pi^2}. \tag{10}$$

A demonstração dessa afirmação segue as mesmas linhas da demonstração feita anteriormente.

Apresentar essa outra maneira de visualizar o mesmo resultado é apenas uma questão de estética. Porém, nessa reformulação, ganhamos uma intuição sobre o resultado. Pois bem, para uma solução ψ não normalizada da equação de Schroedinger, $D_0(\psi(x))$ ganha a interpretação de dispersão de ψ em relação à posição, o que nos contextos de interesse físico, claramente é Δx, ou seja, a incerteza associada à posição. Analogamente, a dispersão $D_0(\psi(\hat{k}))$ ganha a intepretação de incerteza associada ao momento Δp. Logo

$$D_0(\psi(x))D_0(\widehat{\psi}(k)) = \Delta x \Delta p \geq \frac{1}{16\pi^2}. \tag{11}$$

Vale ressaltar que para essa exposição, não consideramos ψ normalizada, o que implica que para aparecer a constante de Planck no lado direito da desigualdade anterior, seria necessário antes uma normalização e um ajuste de constantes apenas.

Assim, podemos concluir que existe uma incerteza intrínseca associada a tais funções ψ e às informações as quais podemos obter das mesmas!

Referências

[1] R. Pascuzzo *Heisenberg's inequality for Fourier transform*, disponível em `http://www.dam.brown.edu/fractional_calculus/documents/Heisenbergsinequality.pdf`. Acesso em 07/12/2018.

[2] M. Pinsky *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets* (Graduate studies in mathematics, vol. 102, American Mathematical Society).