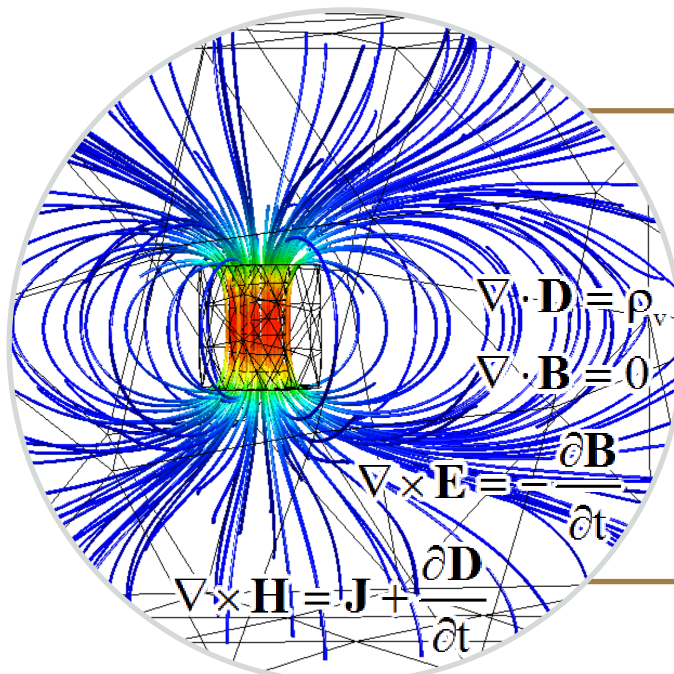
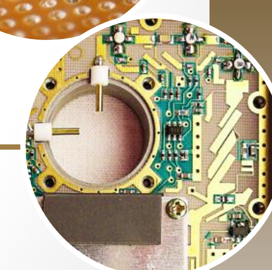
ELETROMAGNETISMO

CEL065

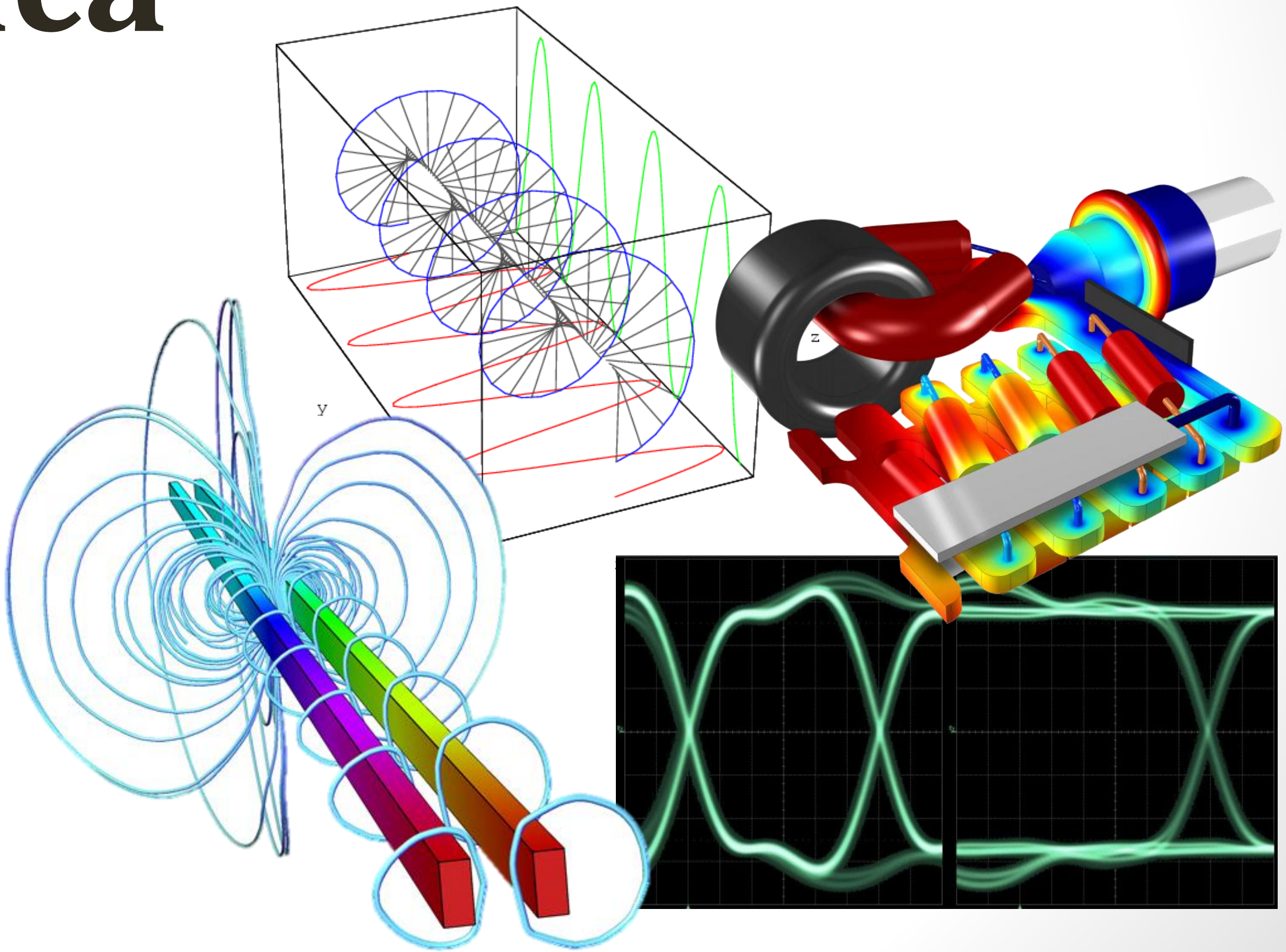




Prof. Pedro S. Almeida
pedro.almeida@ufjf.edu.br

Universidade Federal de Juiz de Fora

Eletrodinâmica Clássica



Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

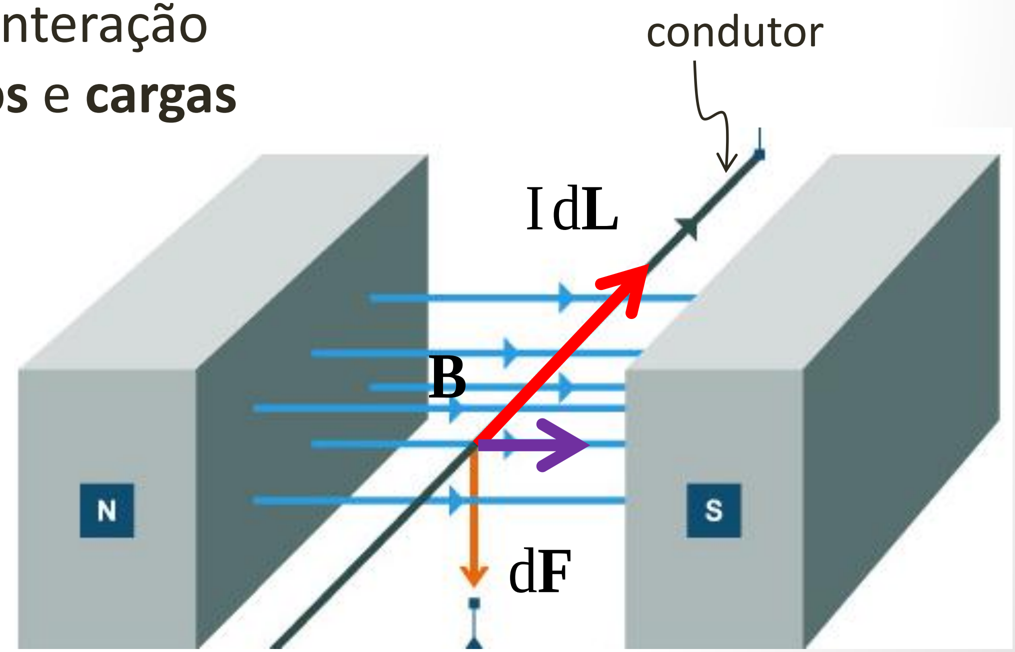
- Força de Lorentz
  - Definição dos campos E e B em função das forças & origem do magnetismo
- Leis de Faraday e de Lenz
  - B variante no tempo & indução eletromagnética
- Equações de Maxwell & campo eletromagnético
  - Corrente de deslocamento & forma vetorial da lei de Faraday
- Solução no vácuo e onda eletromagnética
- Consequências das equações de Maxwell & efeitos eletromagnéticos em alta frequência
  - Onda eletromagnética plana, vetor de Poynting, propagação e reflexão
  - Linhas de transmissão & antenas
  - Efeito pelicular, de proximidade e correntes de Foucault

Força de Lorentz

- Como visto anteriormente, a força magnética exercida por um campo magnético de densidade de fluxo **B** em um elemento de corrente I d**L** pode ser descrita pela equação:

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

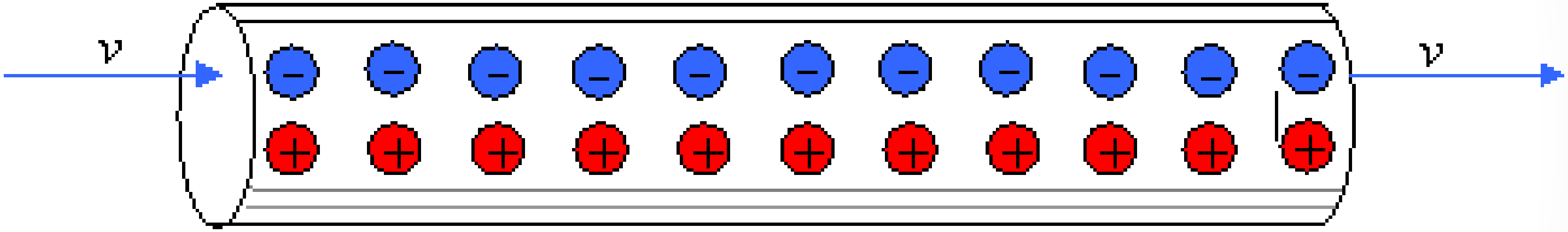
- Sabemos que **correntes** são geradas pelo **movimento de cargas**, portanto a força magnética sobre elementos de corrente tem origem na interação entre **campos magnéticos** e **cargas em movimento**.
- Pela primeira vez, introduz-se uma **variação temporal** nas análises: **VELOCIDADE**



Força de Lorentz

- Cargas em movimento uniforme (velocidade linear constante):
  - *Dentro de um condutor → elétrons se movem:*

$$I\,d\mathbf{L} \propto -(q_e \mathbf{v})$$



Carga elementar: $\boldsymbol{q_e}$ *= 1,602 x 10^{-19} C*

Densidade de portadores de carga (do cobre): $\boldsymbol{n_e}$ *= 8,5 x 10^{28} m^{-3}*

Velocidade de deriva dos elétrons livres:

$$v = \frac{I}{n_e q_e S} \ (m/s)$$

Tipicamente, J_{Cu_max} = 2 a 6 A/mm² (~ 4 MA/m²) → limita v

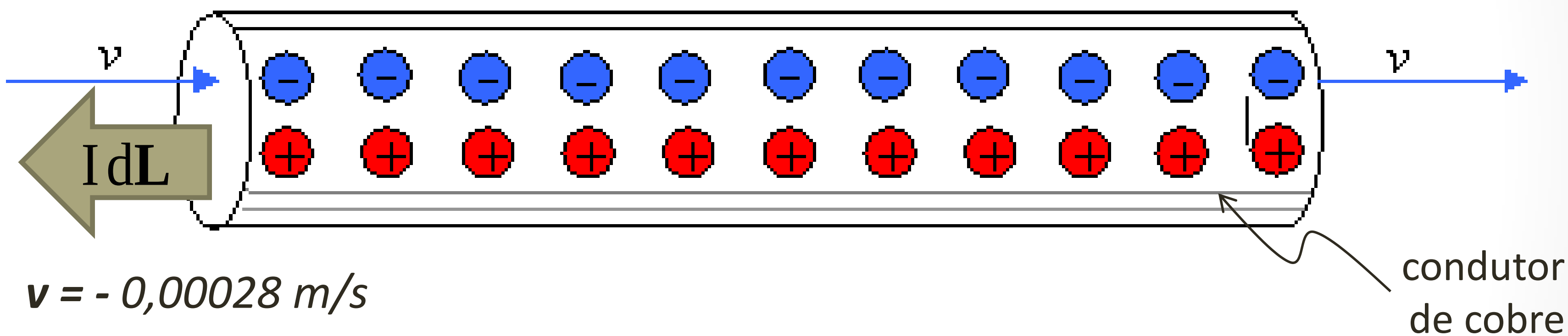
$$\therefore v_{max} = \frac{J_{max}}{n_e q_e} \xrightarrow[\text{cobre qualquer}]{\text{Condutor de}} v_{typ} \cong 0{,}000\ 29\ m/s$$

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

- Cargas em movimento uniforme (velocidade linear constante):
  - *Dentro de um condutor → elétrons se movem → sentido inverso de I:*

$$I\,d\mathbf{L} \propto -(q_e\mathbf{v}) \;\Rightarrow\; I\,d\mathbf{L} = \left(n_e S q_e v\right) d\mathbf{L}$$



v* = *- 0,00028 m/s

Força integral no condutor:

Força atuando sobre uma carga de teste:

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = \int I\,d\mathbf{L}\times\mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}_{\mathbf{m}} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

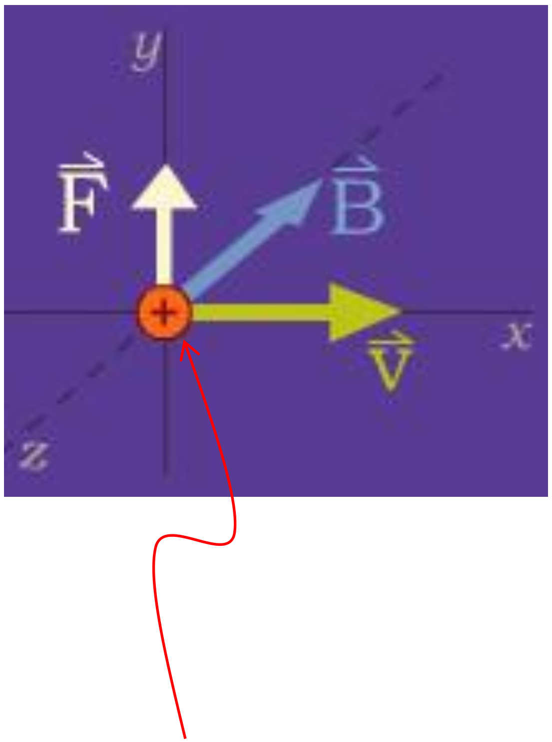
Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

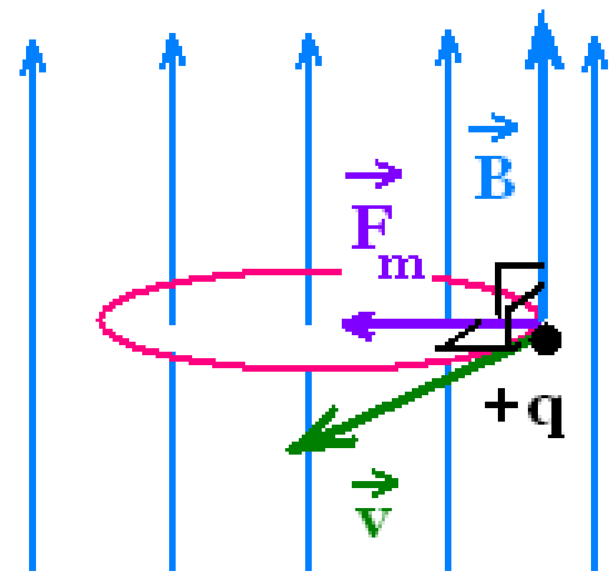
- Cargas em movimento uniforme (velocidade linear constante):
  - *Fora ou dentro de um condutor, vale:*

$$\mathbf{F}_{\mathbf{m}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

***Força de Lorentz** em uma carga devido a um campo magnético*



carga de teste



magnetic force

Num campo magnético uniforme, essa força será uma força centrípeta!

Força de Lorentz

- Cargas estáticas ou em movimento – efeito do **campo elétrico**:
  - *Lembrando da **Lei de Coulomb** para a força exercida por uma carga em outra carga pontual, a partir da qual o **campo elétrico é definido**:*

$$\left|\mathbf{F}_C\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r_{2,1}{}^2} \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1}{r^2}\mathbf{a}_r$$

O campo elétrico de q_1** é o **campo vetorial** associado à **força de Coulomb** sentida por uma **carga de teste q_2

Por isto que: 1 V/m = 1 N/C

Portanto

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{a}_r = q_2\mathbf{E}_1 \Rightarrow \mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

*Lei de Coulomb = **Força de Lorentz** em uma carga devido a um campo elétrico*

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

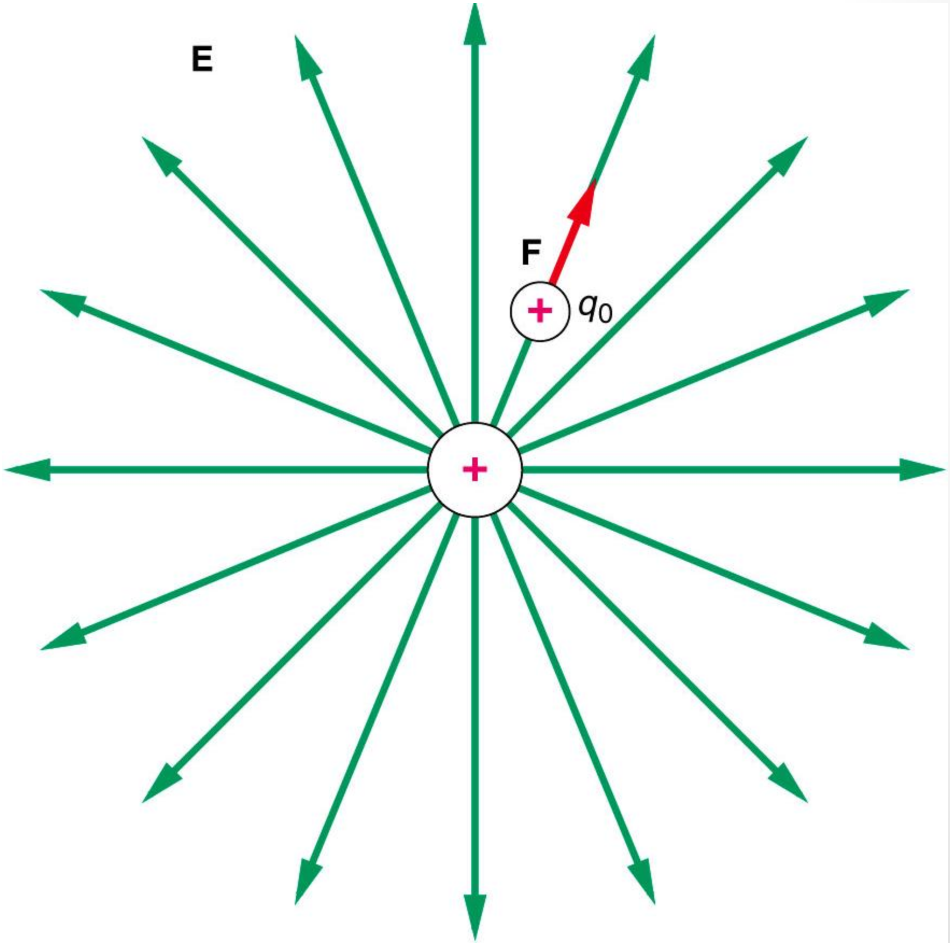
Força de Lorentz

- Cargas estáticas ou em movimento – efeito do **campo elétrico**:
  - *Lembrando da **Lei de Coulomb** para a força exercida por uma carga em outra carga pontual, a partir da qual o **campo elétrico é definido**:*

$$\mathbf{F_e} = q\mathbf{E}$$

Força de Lorentz em uma carga devido a um campo elétrico

(a carga pode estar em movimento ou não, dentro ou fora de um condutor)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Força de Lorentz

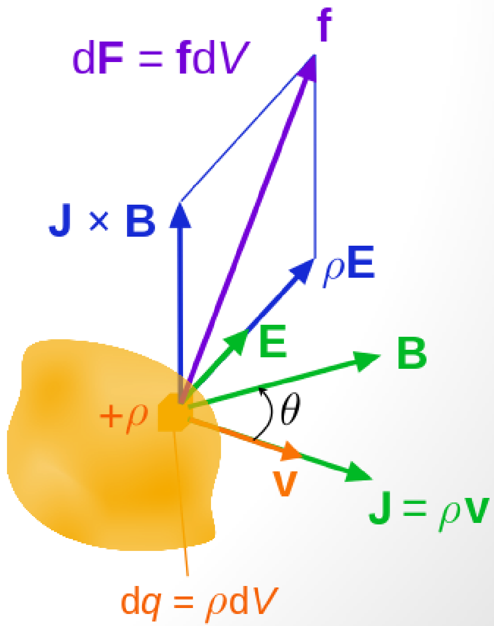
- Unificando ambas as forças (elétrica e magnética) como uma única força que atua em uma carga de → previsão da força que atua em cargas para qualquer caso:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

Força de Lorentz para uma carga pontual de teste

Para uma distribuição contínua:

$$\mathbf{F} = \iiint_V \left(\rho_v \mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}\right) dV$$



Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

- Unificando ambas as forças – exemplo c/ carga pontual (de teste)

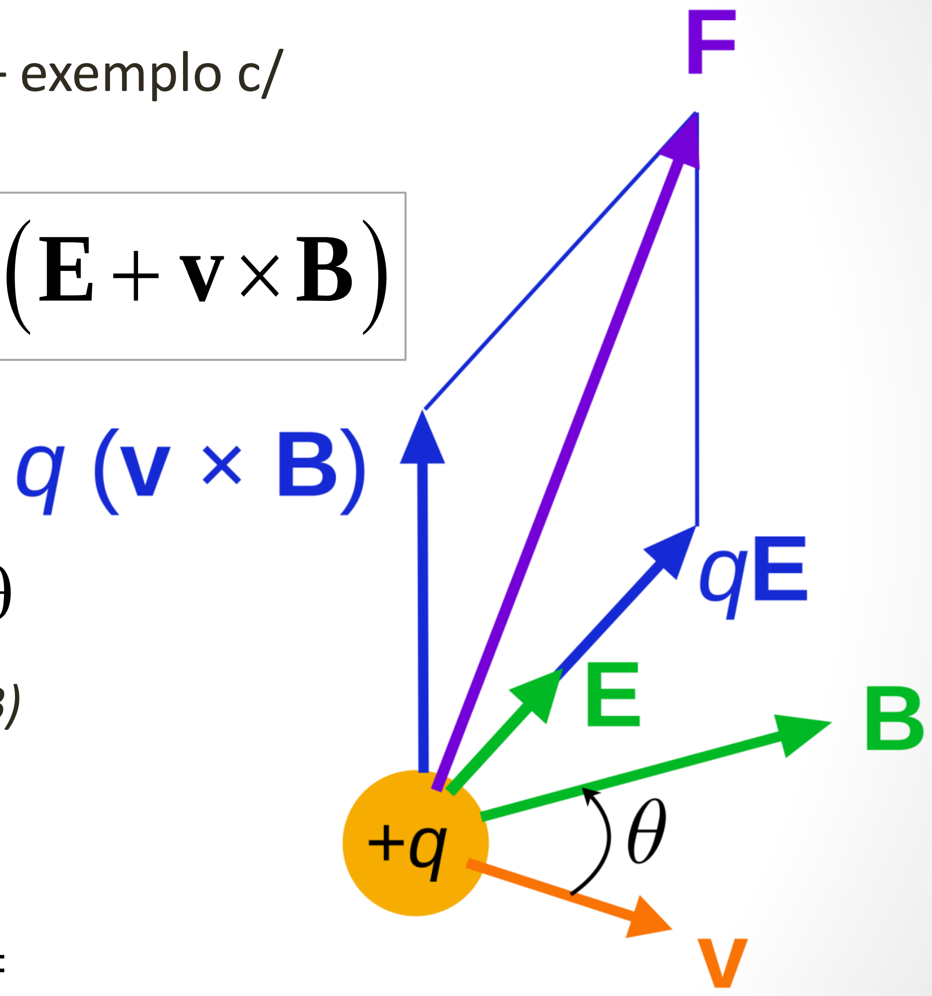
$$\boxed{\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)}$$

$$\left|\mathbf{F_e}\right| = \left|q\mathbf{E}\right| = q\left|\mathbf{E}\right|$$

*(mesmo sentido de **E**)*

$$\left|\mathbf{F_m}\right| = \left|q\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)\right| = q\left|\mathbf{v}\right|\left|\mathbf{B}\right| \operatorname{sen}\theta$$

*(perpendicular ao plano de **v** e **B**)*



Resultante:

$$\left|\mathbf{F}\right| = \sqrt{\left|\mathbf{F_e}\right|^2 + \left|\mathbf{F_m}\right|^2} =$$

$$q\sqrt{E^2 + v^2B^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

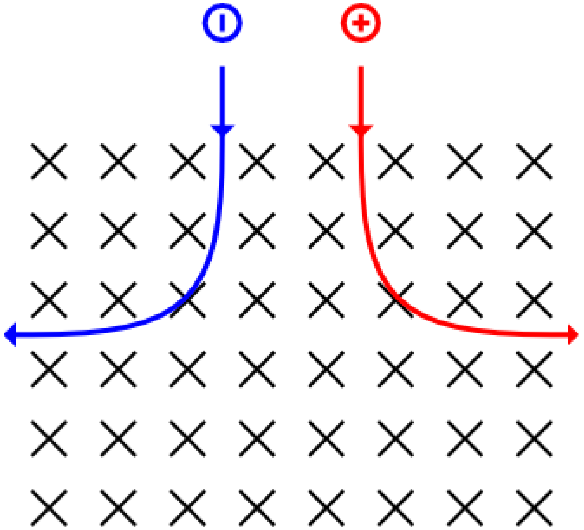
Força de Lorentz

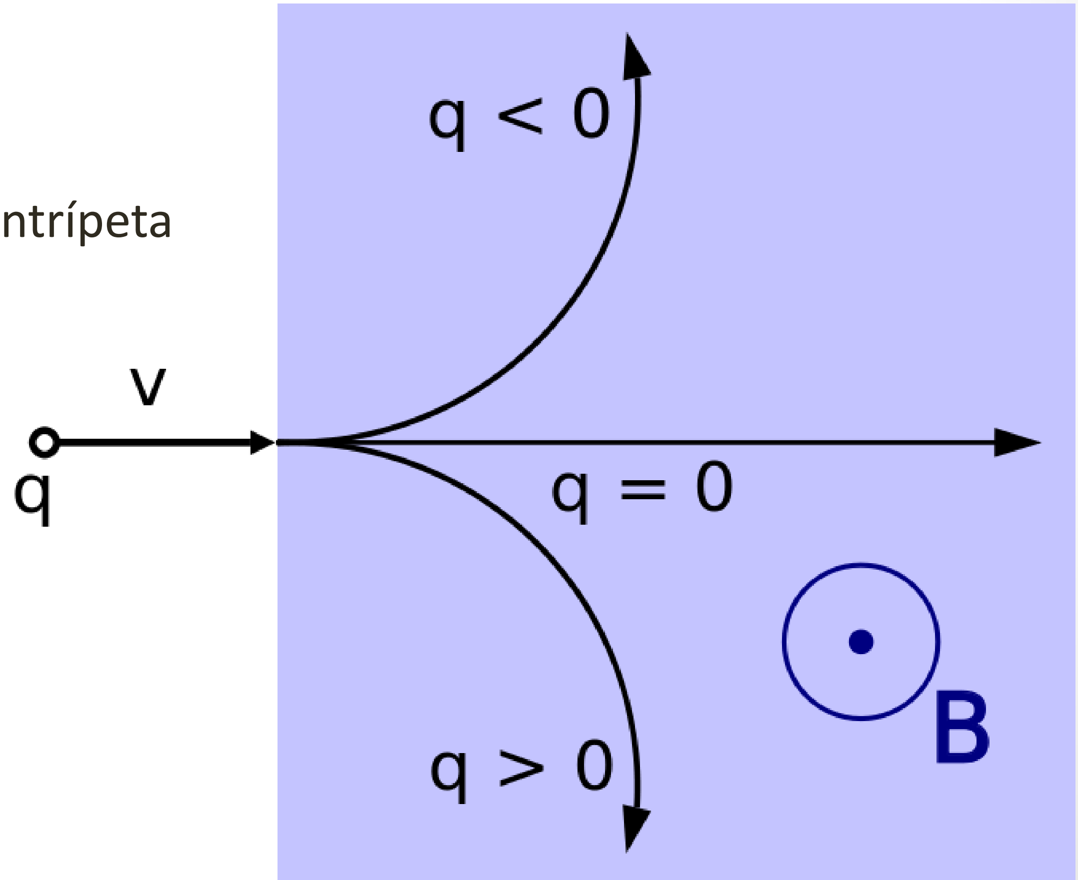
- Força sobre carga pontual em campo magnético uniforme:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$= q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

A força é contínua e radial → centrípeta





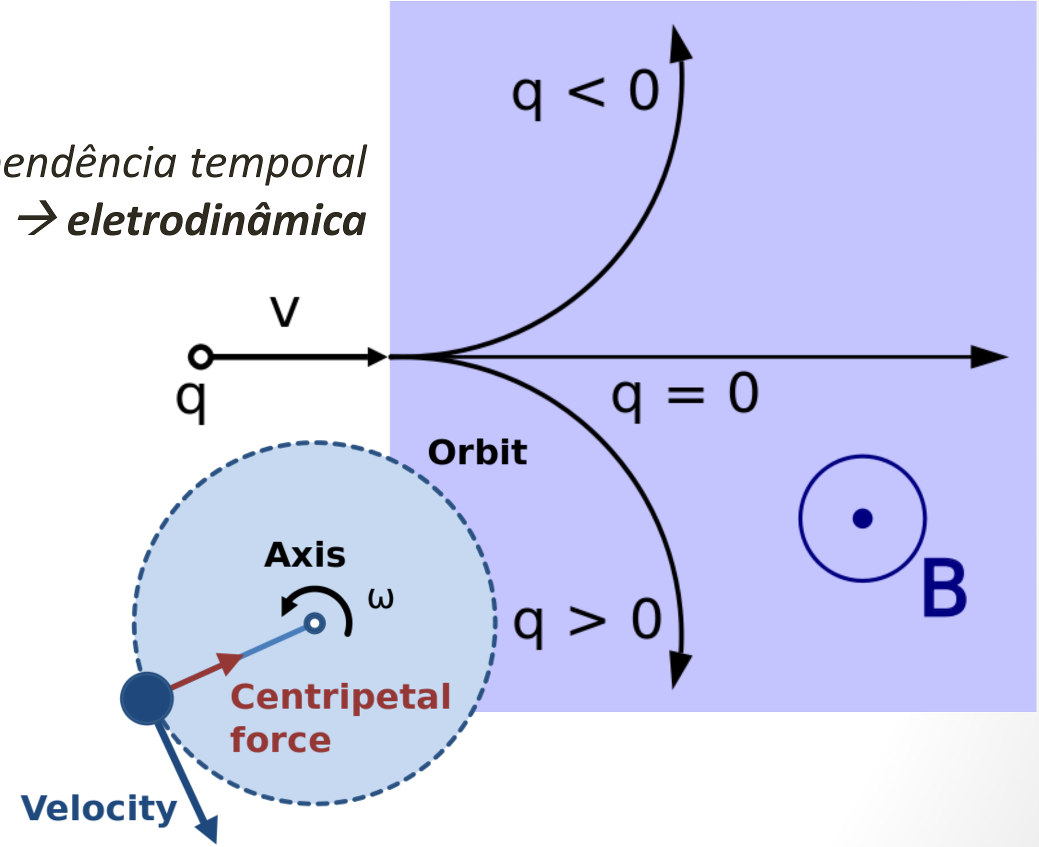
Força de Lorentz

- Força sobre carga pontual em campo magnético uniforme:

Lorentz e 2ª Lei de Newton:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

dependência temporal
→ ***eletrodinâmica***



$$\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \frac{m}{q}\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

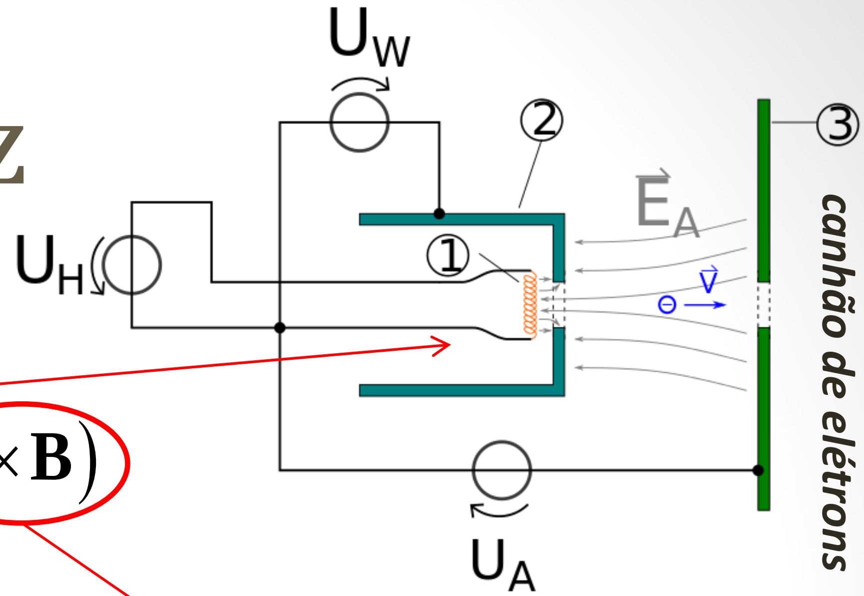
Aceleração centrípeta:

$$a_c = \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r}$$

$$\therefore \frac{m}{q}\frac{v^2}{r} = vB \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m}{q}\frac{v}{B}$$

Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

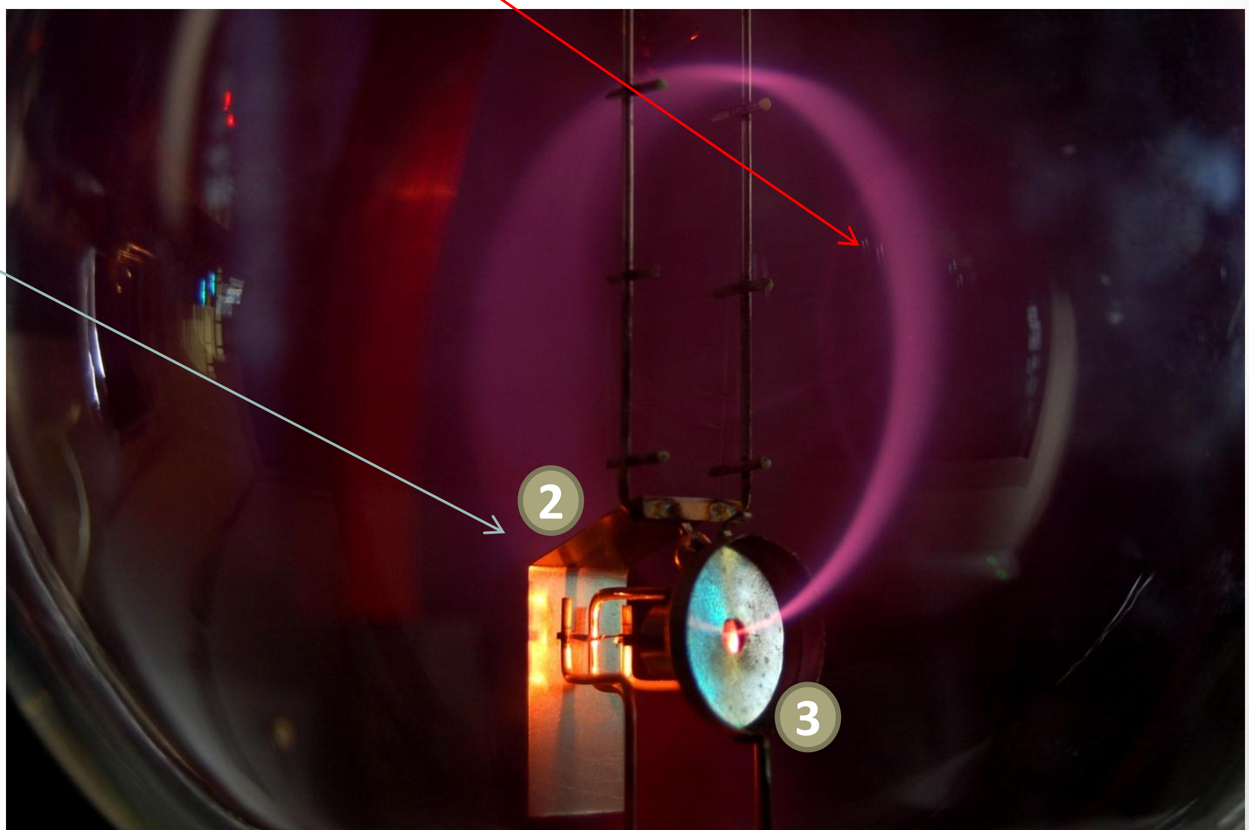


Elétrons acelerados por um campo elétrico na presença de um campo magnético:

$$\mathbf{F} = -q_e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

canhão de elétrons

$$r = \frac{m}{q}\frac{v}{B}$$



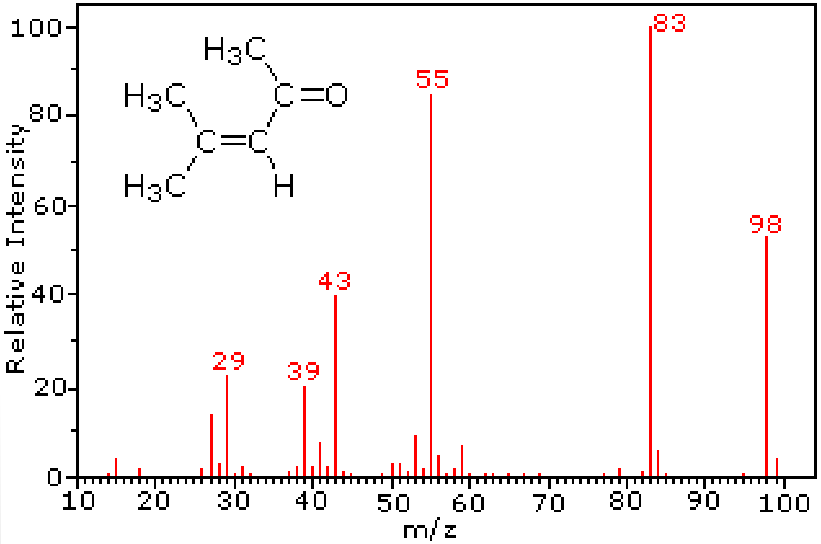
UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

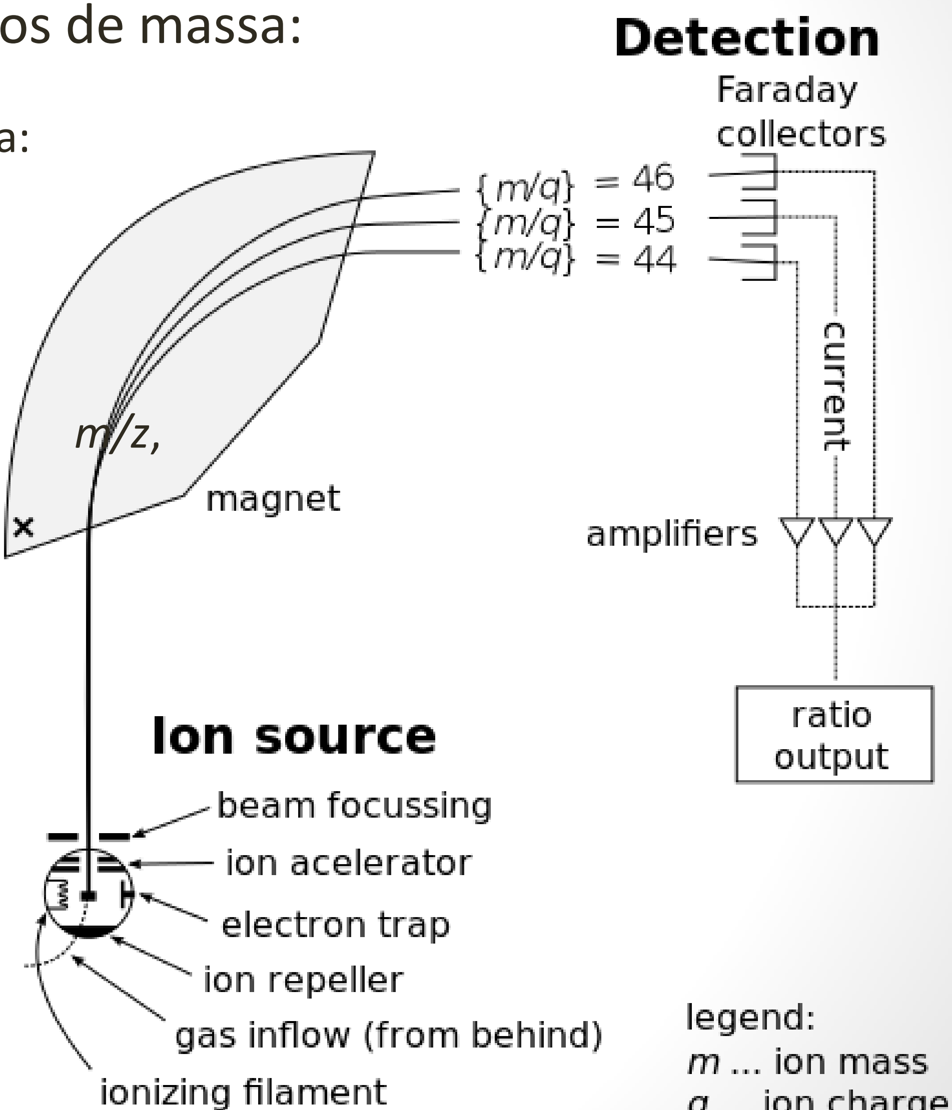
- Aplicação em espectrômetros de massa:

Razão massa por carga:

$$r = \frac{m}{q}\frac{v}{B} \qquad r \propto \frac{m}{q}$$



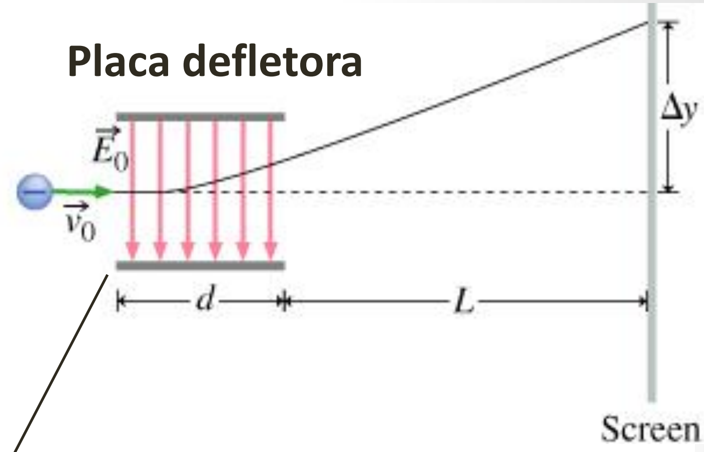
(z=q/e)

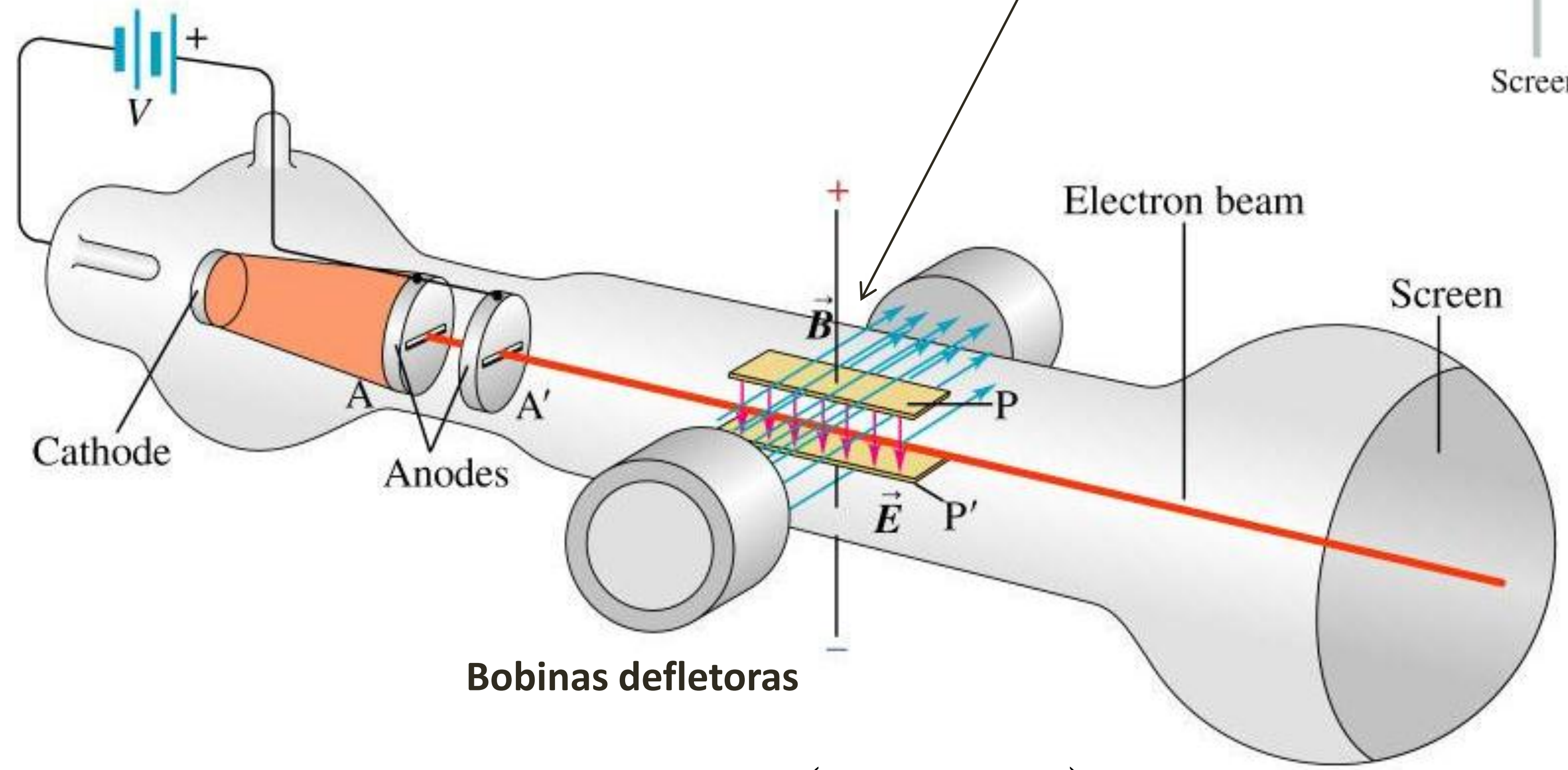


Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

- Aplicação em tubos de imagem (CRT):



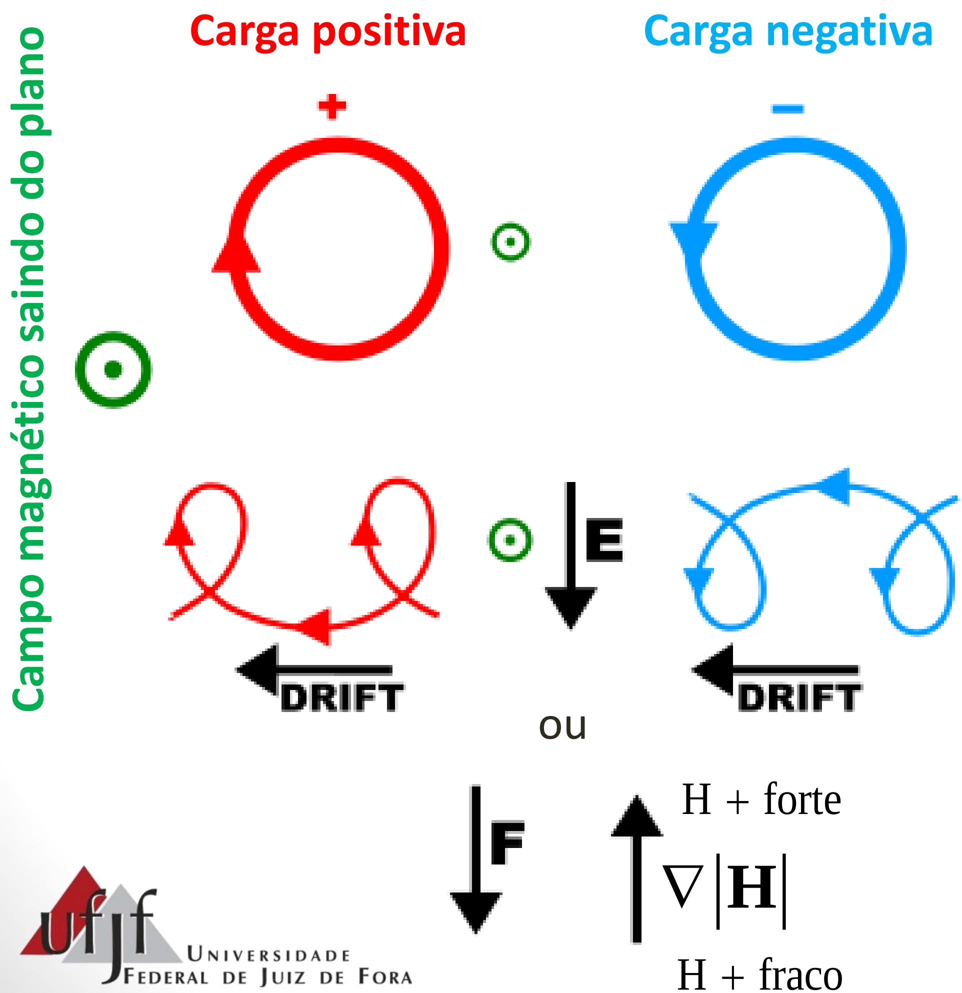


$$\mathbf{F} = -q_e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

- Generalização das trajetórias nas interações cargas-campos E / B



$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

Nenhum distúrbio e só campo magnético presente → raio constante, sem deriva

Na presença de um **campo elétrico** ou uma **força externa** ou um **campo magnético não homogêneo** → movimento de deriva (*drift*)

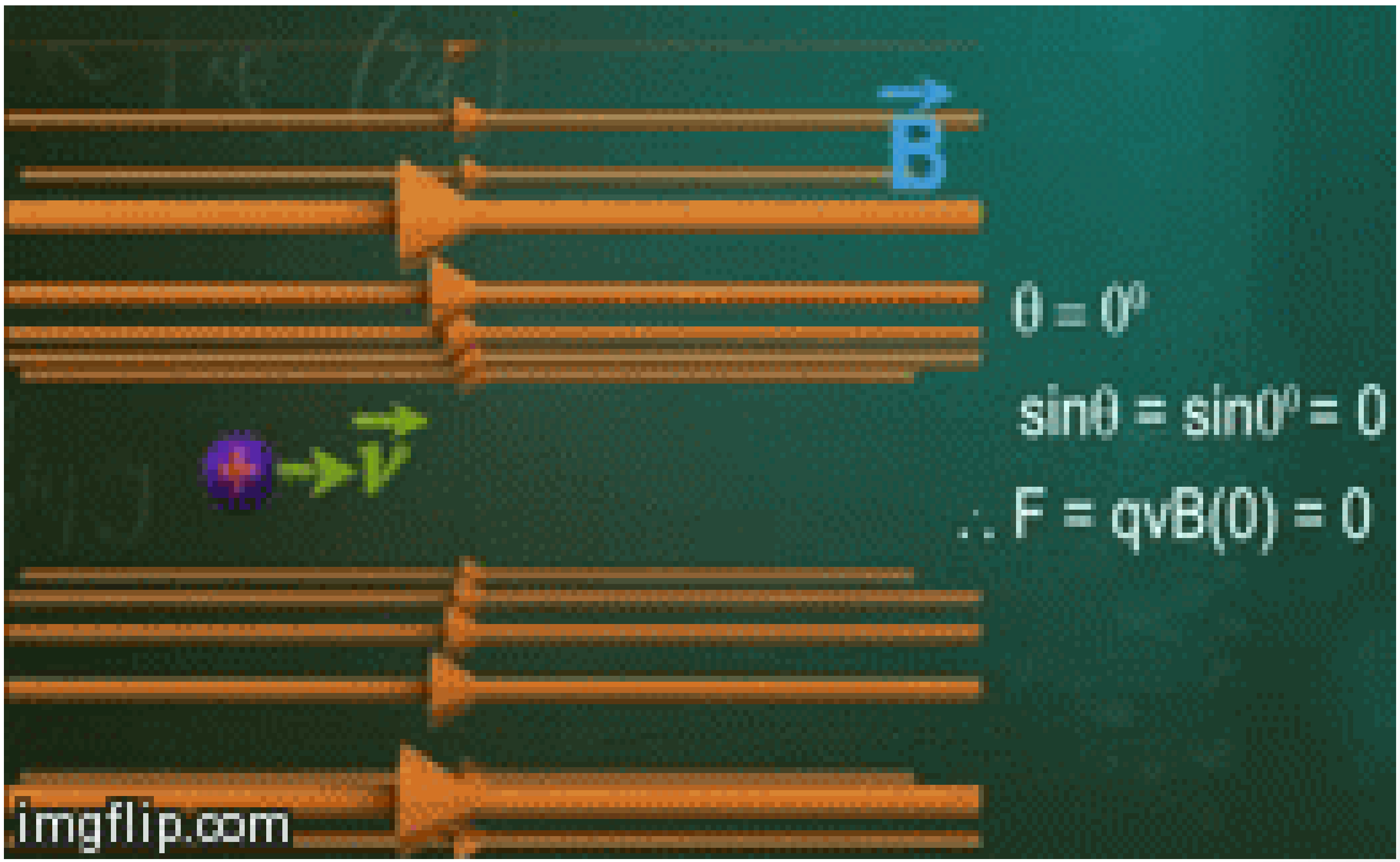
$$\mathbf{v_D} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

- Outras trajetórias interessantes em campo uniforme:

Carga positiva em movimento paralelo ao campo magnético:



Motion of a Charged Particle in a Magnetic Field – *https://www.youtube.com/watch?v=fwiKRis145E*

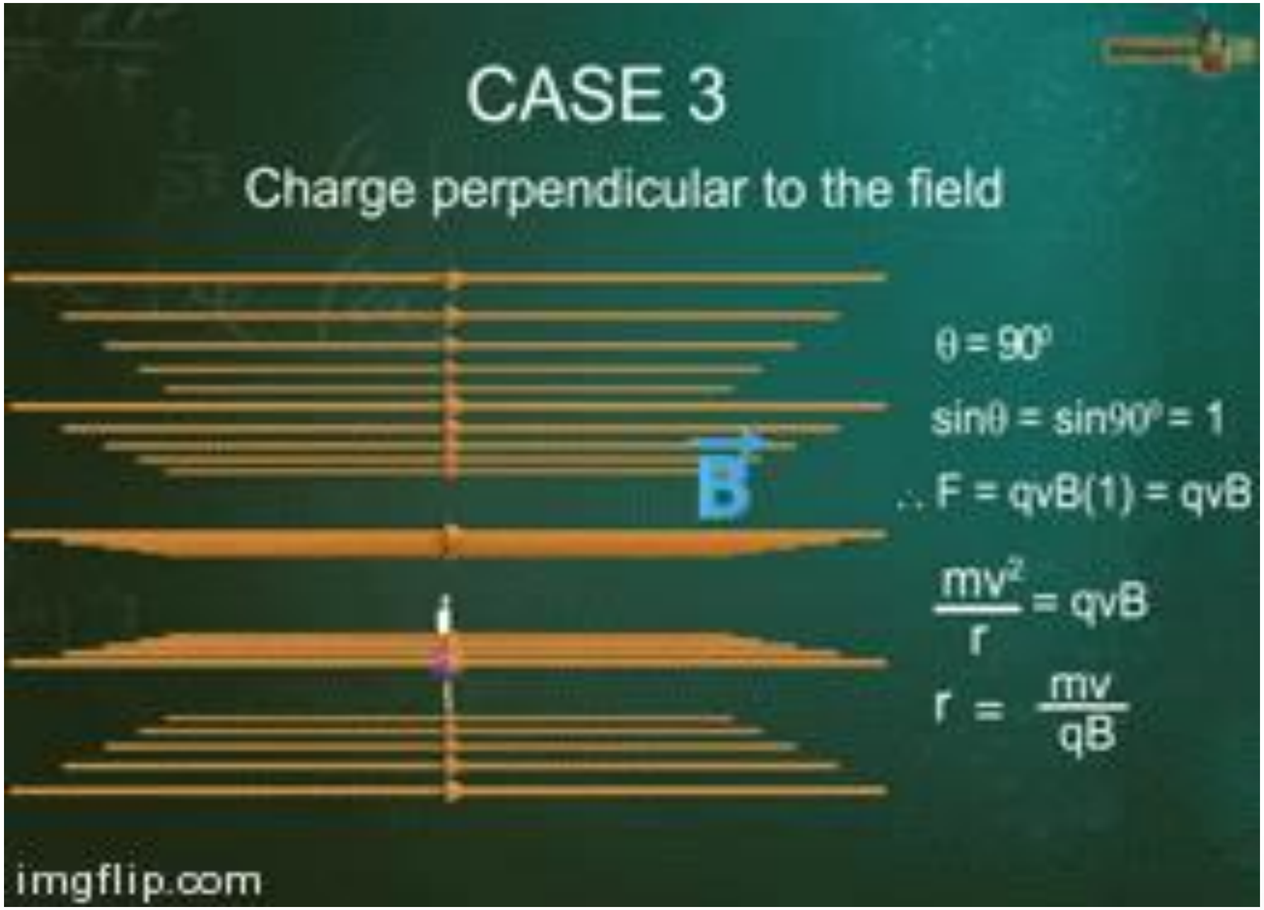
Universidade Federal de Juiz de Fora

Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

- Outras trajetórias interessantes em campo uniforme:

Carga positiva em movimento perpendicular ao campo magnético:



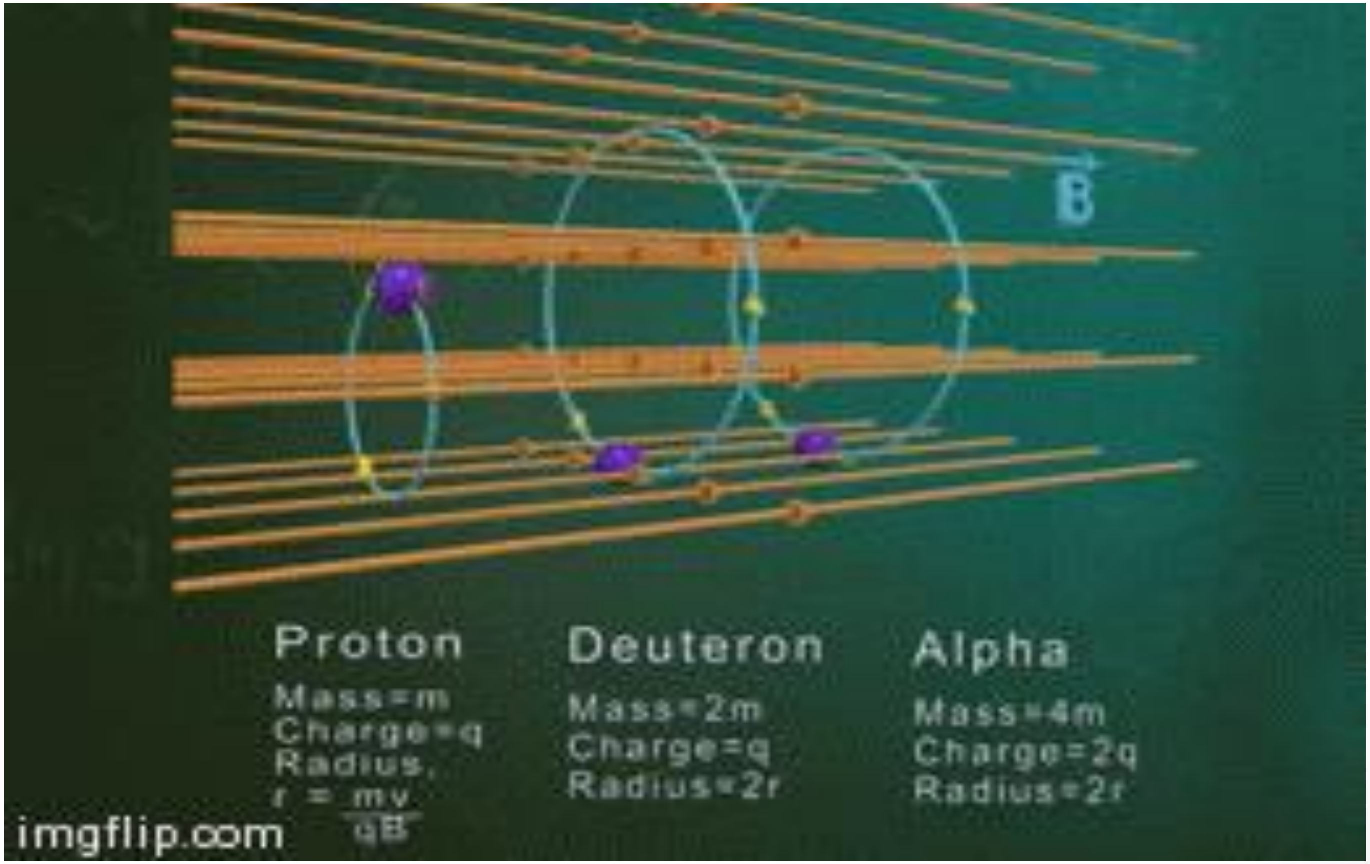
Motion of a Charged Particle in a Magnetic Field – [*https://www.youtube.com/watch?v=fwiKRis145E*](https://www.youtube.com/watch?v=fwiKRis145E)

Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

- Outras trajetórias interessantes em campo uniforme:

Partículas de diferentes cargas e massas em movimento perpendicular ao campo magnético:



Motion of a Charged Particle in a Magnetic Field – https://www.youtube.com/watch?v=fwiKRis145E

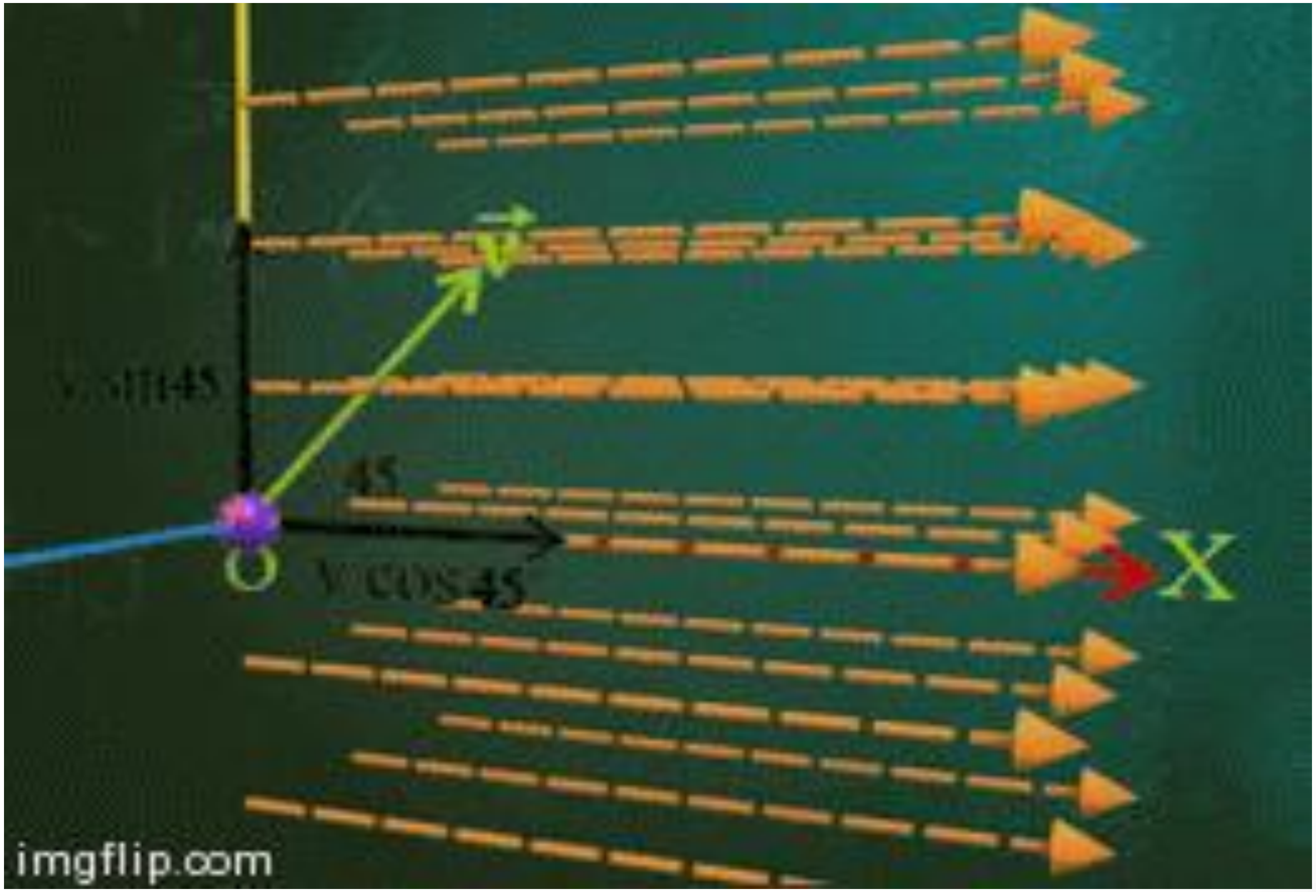
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

- Outras trajetórias interessantes em campo uniforme:

Carga positiva penetrando a região do campo com determinado ângulo:



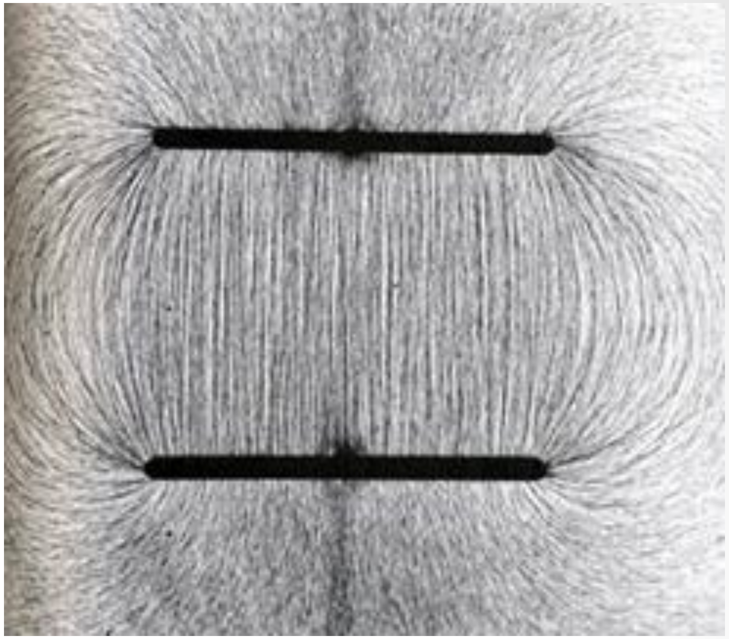
Motion of a Charged Particle in a Magnetic Field – [*https://www.youtube.com/watch?v=fwiKRis145E*](https://www.youtube.com/watch?v=fwiKRis145E)

Universidade Federal de Juiz de Fora

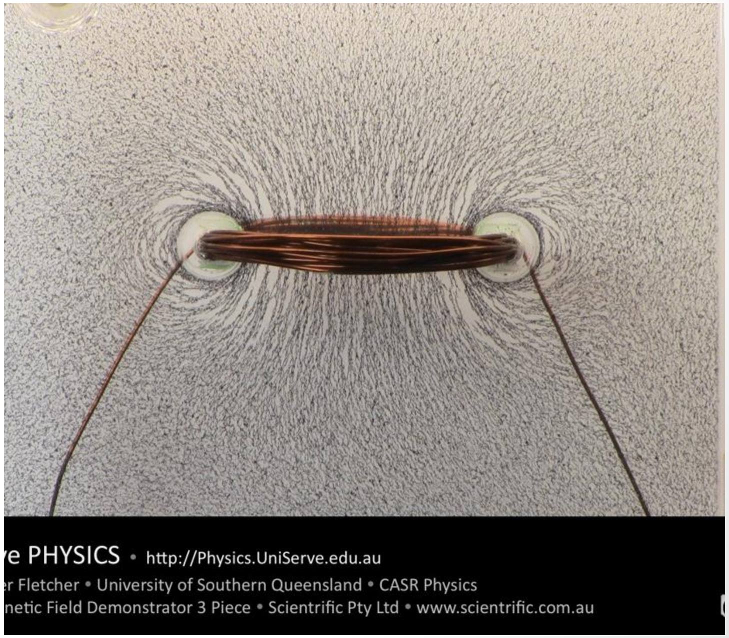
Campos E e B

Definição via forças

A **força eletrostática** (força de Coulomb) é uma manifestação do campo elétrico.



A **força magnética** (força de Lorentz) é uma manifestação do campo magnético.



Na prática, só sabemos da **existência** destes campos devido às **forças** e seus **efeitos observáveis** que eles causam em objetos macroscópicos!

Universidade Federal de Juiz de Fora

Campos E e B

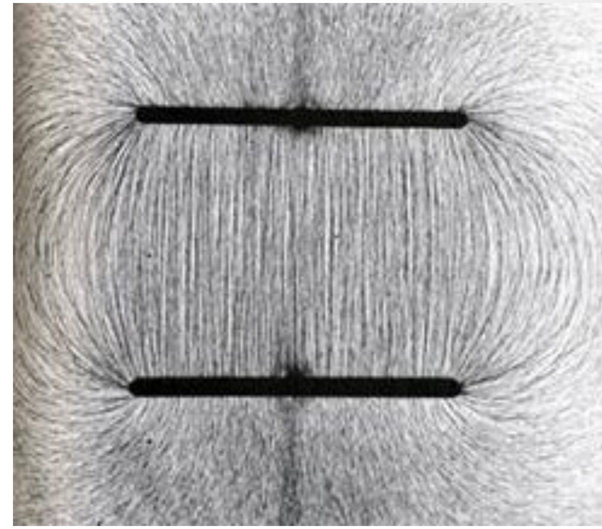
Definição via forças:

na verdade é a definição formal!

Campo elétrico – equação de definição:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_e}}$$

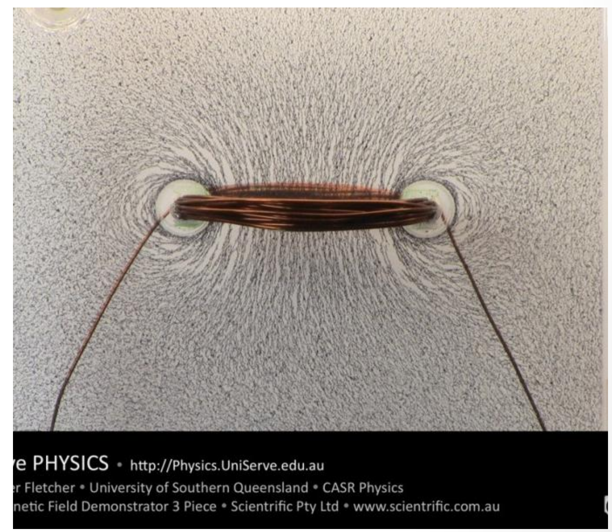
E: V/m = N/C

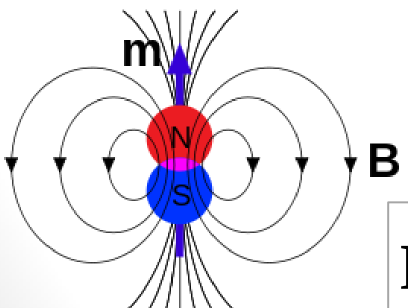


Campo magnético – equação de definição:

$$\boxed{\mathbf{F} = q_e\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)}$$

B: T = Wb/m² = N/A.m





Se existissem monopolos magnéticos – q_m (Wb):

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{F}/q_m}$$

H: A/m = N/Wb

*Se **H** vem de **dq_e/dt**, não poderia ser que **E** vem de **dq_m/dt** ?*

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_electromagnetism_equations

Universidade Federal de Juiz de Fora

Campos E e B – qual a relação?

A origem do magnetismo como um efeito relativístico

REFERENCIAL INERCIAL DO CONDUTOR

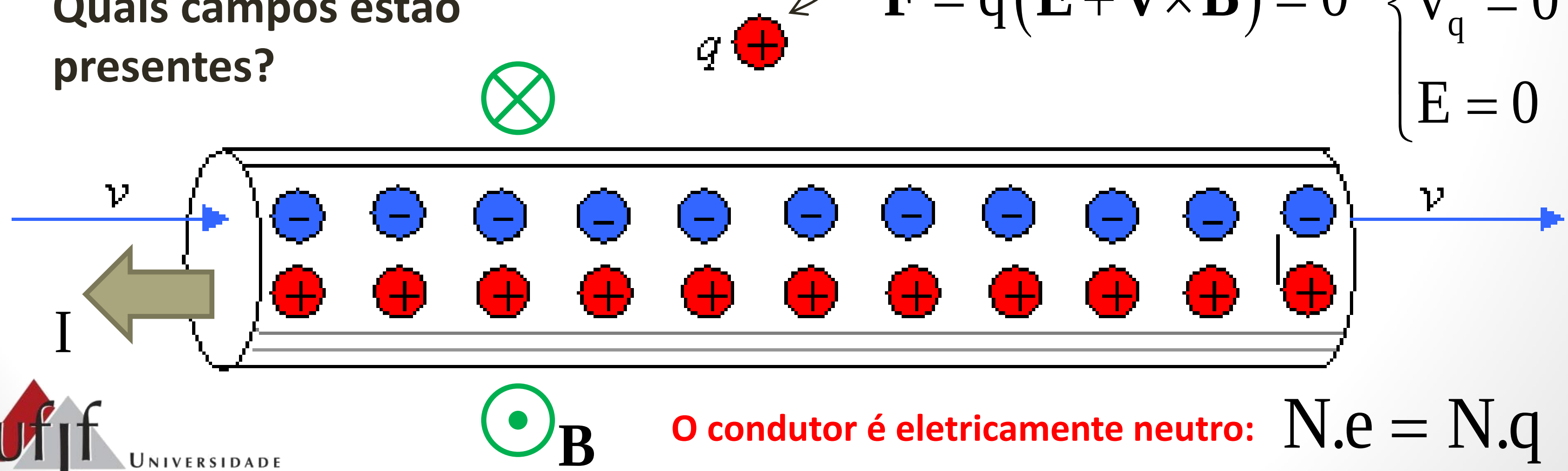
Experimento mental: se temos um condutor percorrido por uma corrente e há uma carga de teste em suas vizinhanças

- Sabemos que o movimento de elétrons livres dentro do condutor é dual ao movimento de cargas positivas, no sentido oposto – sentido convencional da corrente.
- Vamos primeiro considerar que a **carga de teste está em repouso**.

1. **Qual a força em q?**
2. **Por que?**
3. **Quais campos estão presentes?**

carga de teste

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) = 0 \quad \begin{cases} B \neq 0 \\ v_q = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$



O condutor é eletricamente neutro: $N.e = N.q$

Universidade Federal de Juiz de Fora

Campos E e B – qual a relação?

A origem do magnetismo como um efeito relativístico

REFERENCIAL INERCIAL DO CONDUTOR

Experimento mental: se temos um condutor percorrido por uma corrente e há uma carga de teste em suas vizinhanças

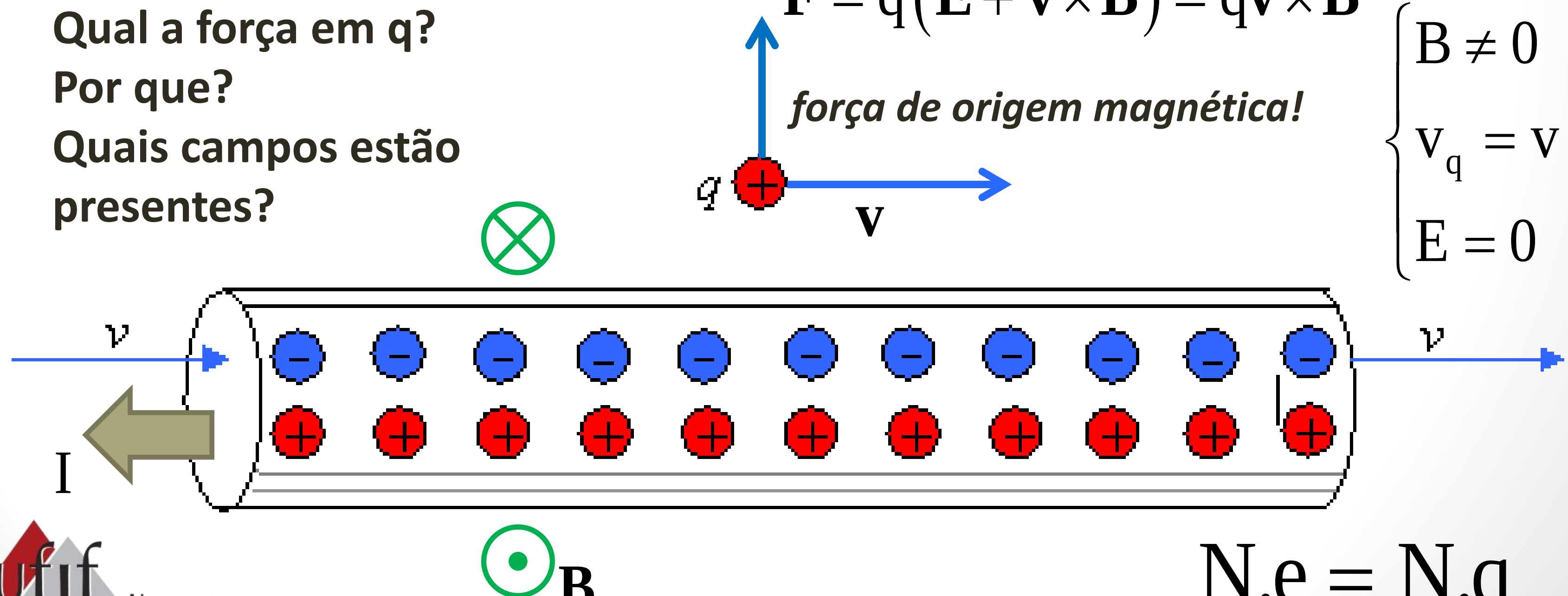
- Vamos agora considerar que a **carga está em movimento**. Por simplicidade, consideraremos que a velocidade de seu movimento é igual à velocidade dos elétrons dentro do condutor.

1. **Qual a força em q?**
2. **Por que?**
3. **Quais campos estão presentes?**

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

força de origem magnética!

$$\begin{cases} B \neq 0 \\ v_q = v \\ E = 0 \end{cases}$$



$$N.e = N.q$$

Campos E e B – qual a relação?

A origem do magnetismo como um efeito relativístico

Experimento mental: se temos um condutor percorrido por uma corrente e há uma carga de teste em suas vizinhanças

- **ESTÁVAMOS NO REFERENCIAL INERCIAL DO CONDUTOR** – e se estivermos no **referencial da carga** em movimento uniforme?

REFERENCIAL INERCIAL DA CARGA
as Leis da Física tem que ser as mesmas!

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) = ?$$

$$\begin{cases} B \neq 0 \\ v_q = 0 \end{cases}$$

velocidade relativa

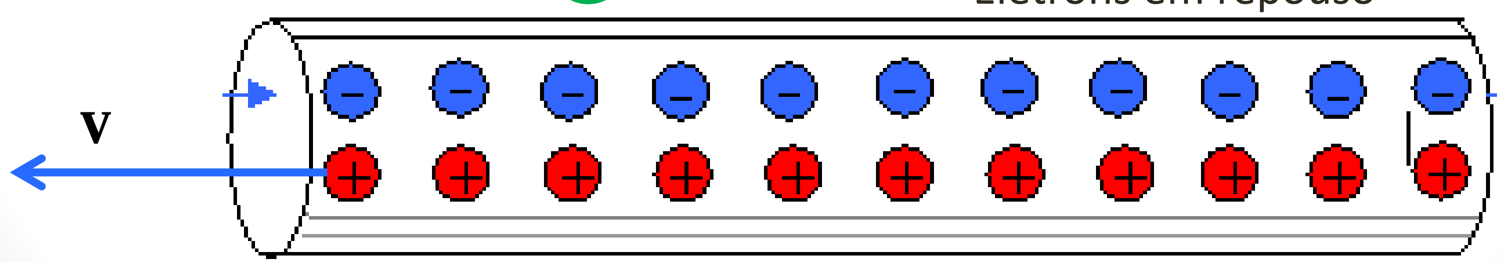
EXISTE FORÇA EM q ?

1. **Qual a força em q?**
2. **Por que?**
3. **Quais campos estão presentes?**

q $\oplus$

- Cargas positivas se movendo
- Elétrons em repouso

$\otimes$



$\odot$ **B** **se movendo**

Campos E e B – qual a relação?

A origem do magnetismo como um efeito relativístico

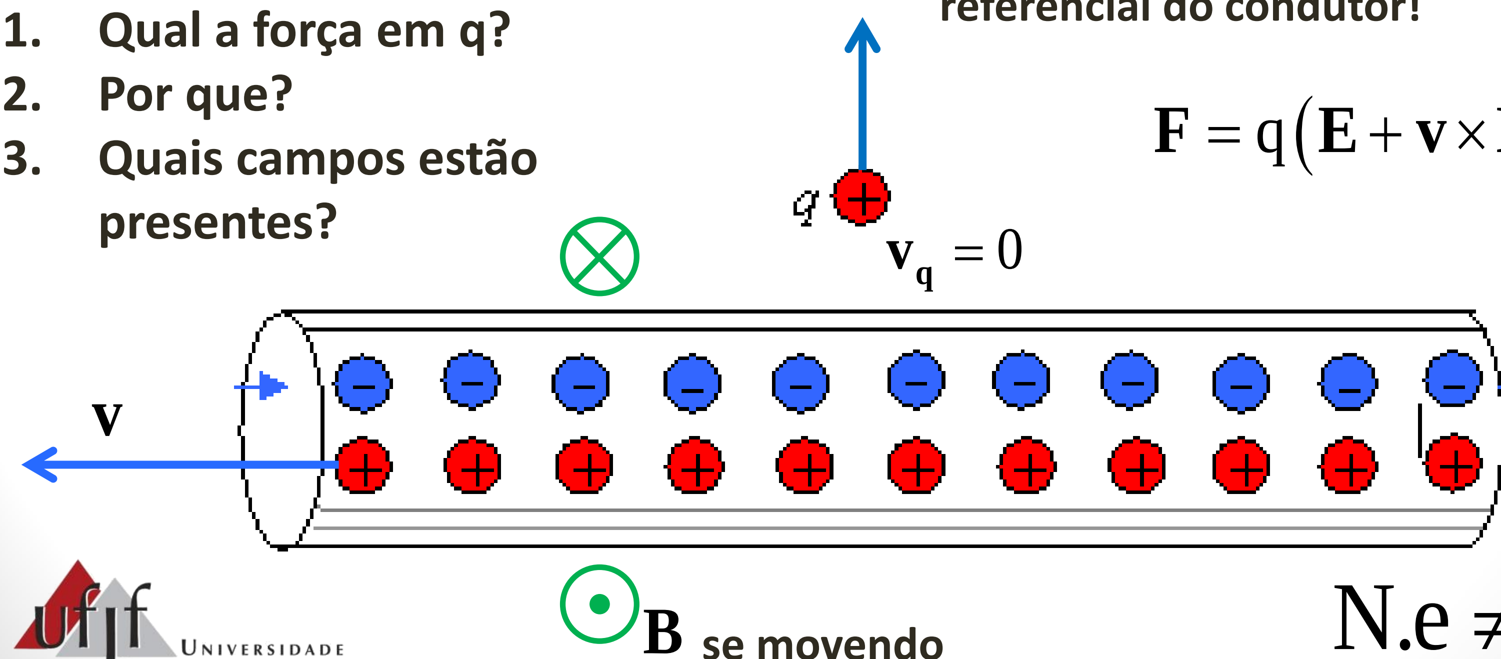
Experimento mental: se temos um condutor percorrido por uma corrente e há uma carga de teste em suas vizinhanças

REFERENCIAL INERCIAL DA CARGA
as Leis da Física tem que ser as mesmas!

EXISTE FORÇA EM q → tem que existir!
E tem que ser igual à força no referencial do condutor!

1. **Qual a força em q?**
2. **Por que?**
3. **Quais campos estão presentes?**

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) = q\mathbf{E}$$



força só pode ser de origem elétrica!

$$\text{N.e} \neq \text{N.q}$$

Campos E e B – qual a relação?

A origem do magnetismo como um efeito relativístico

REFERENCIAL INERCIAL DA CARGA
as Leis da Física tem que ser as mesmas!

Experimento mental: se temos um condutor percorrido por uma corrente e há uma carga de teste em suas vizinhanças

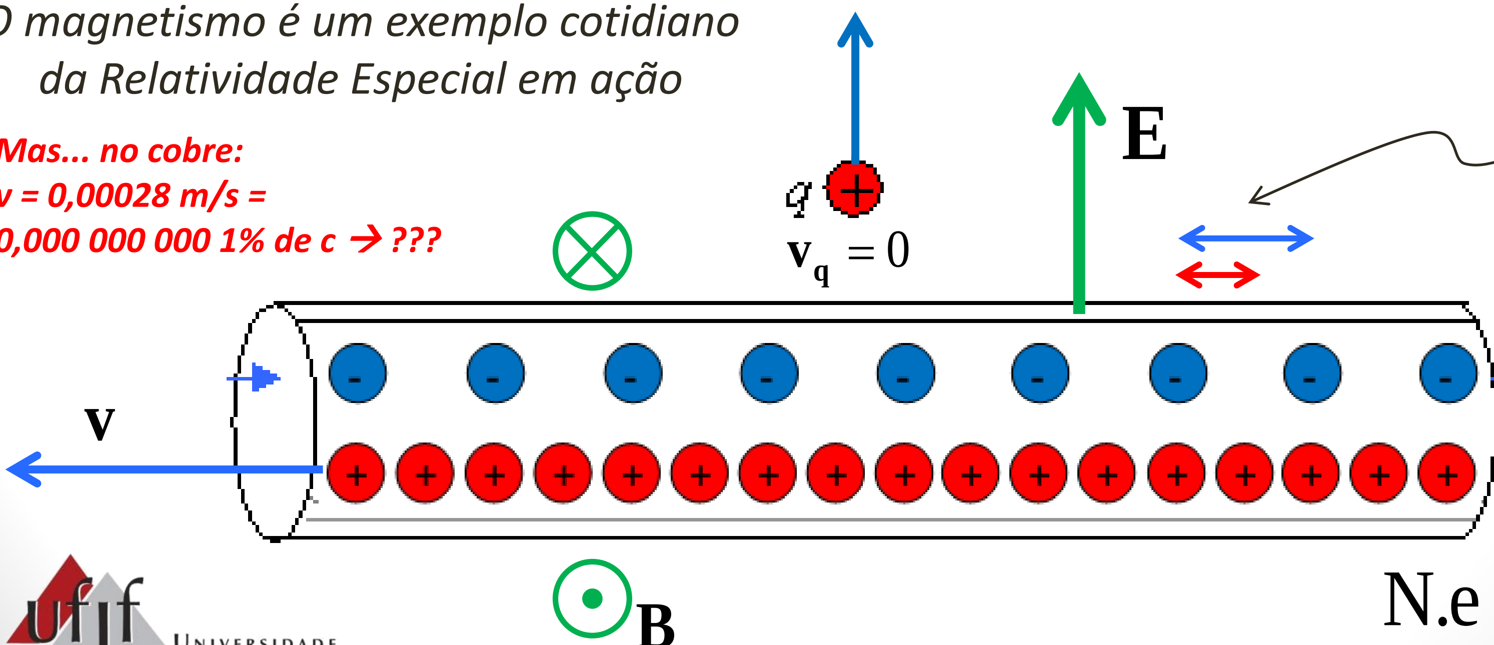
Segundo a Relatividade Especial:

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) = q\mathbf{E}$$

O magnetismo é um exemplo cotidiano da Relatividade Especial em ação

Mas... no cobre:
v = 0,00028 m/s =
0,000 000 000 1% de c → ???



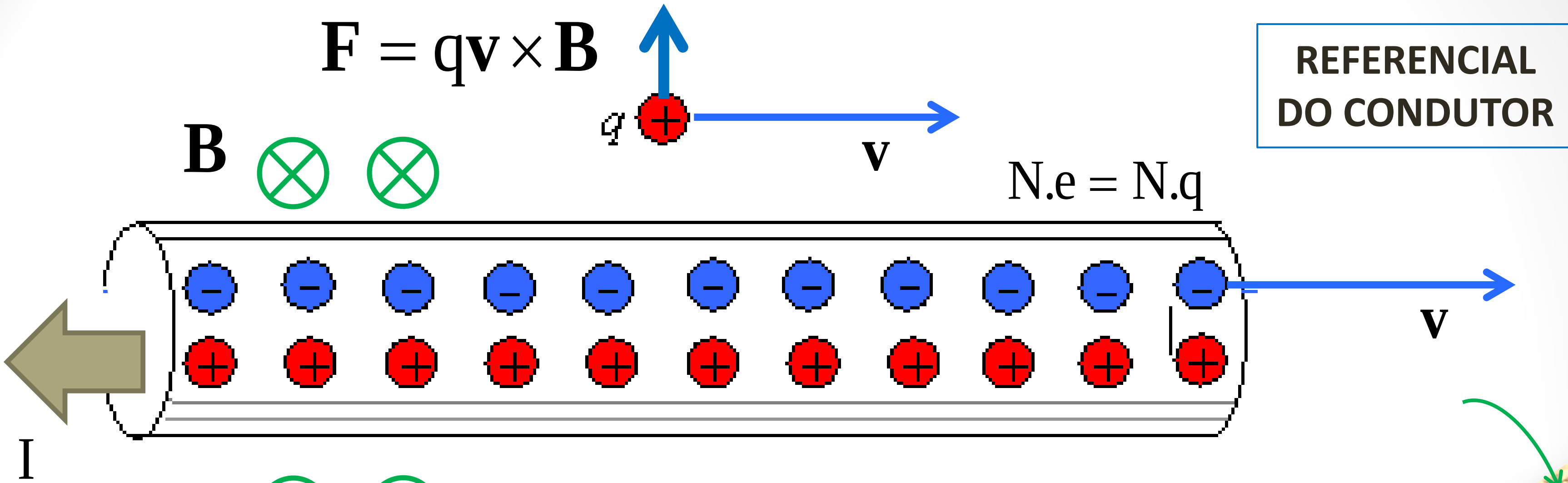
Contração do espaço para quem se move

$$N.e < N.q$$

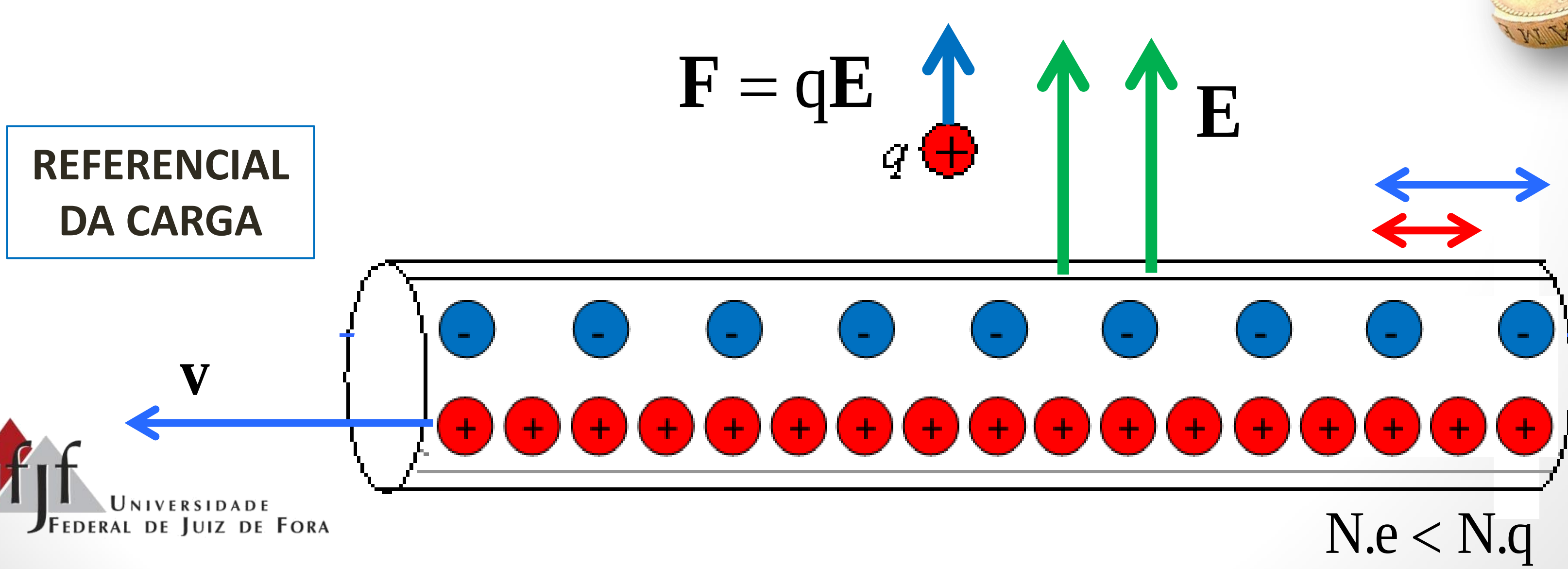
o condutor não é mais eletricamente neutro

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

O Fenômeno Eletromagnético



O **campo magnético** é nada mais que um **campo elétrico** visto de um outro referencial inercial!



O Fenômeno Eletromagnético

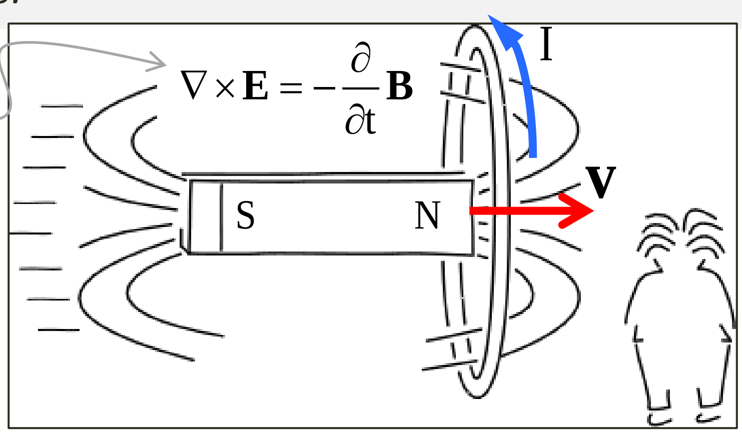
A origem do magnetismo como um efeito relativístico

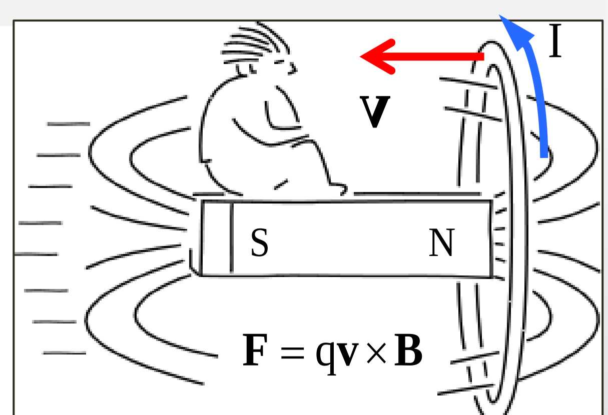
*Na verdade, um problema similar foi que motivou Albert Einstein a escrever seu artigo "**Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento**" ("Zur Elektrodynamik bewegter Körper"), em 1905, fundando assim a **Relatividade Especial**:*

*"Sabe-se que a **eletrodinâmica de Maxwell** (...) quando aplicada a **corpos em movimento**, leva a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenômenos. Tomemos, por exemplo, a **ação eletrodinâmica** recíproca de **um ímã e um condutor**. O **fenômeno observável** aqui depende apenas do **movimento relativo** do condutor e do ímã, enquanto a visão habitual estabelece uma **distinção nítida entre os dois casos**, nos quais um ou outro desses corpos está em movimento. Porque, se o <u>**ímã está em movimento**</u> e o **condutor em repouso**, surge na vizinhança do ímã um **campo elétrico** com uma certa energia definida, **produzindo uma corrente** nos locais onde partes do condutor estão situados. Mas se o **ímã está estacionário** e o <u>**condutor em movimento**</u>, **nenhum campo elétrico surge** na vizinhança do ímã. No condutor, no entanto, encontramos uma **força eletromotriz**, para a qual, por si só, não há energia correspondente, mas que **dá origem** (...) a **correntes elétricas** de **mesmo caminho e intensidade** como os produzidos pelas **forças elétricas** no primeiro caso."*

indução

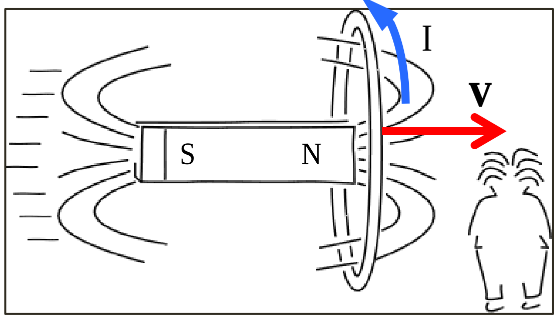
$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt}\Phi$$





Indução Eletromagnética

Nosso experimento prevê a indução:



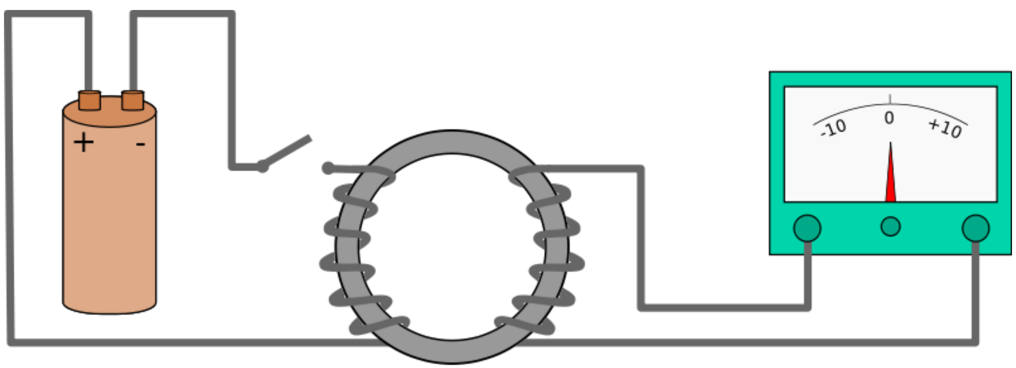
Uma dica:

$$\begin{cases} I = \dfrac{dQ}{dt} \\ \mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v} \end{cases}$$

Os experimentos de Michael Faraday com o magnetismo mostraram, pela primeira vez, **uma relação entre campos magnéticos e campos elétricos**:

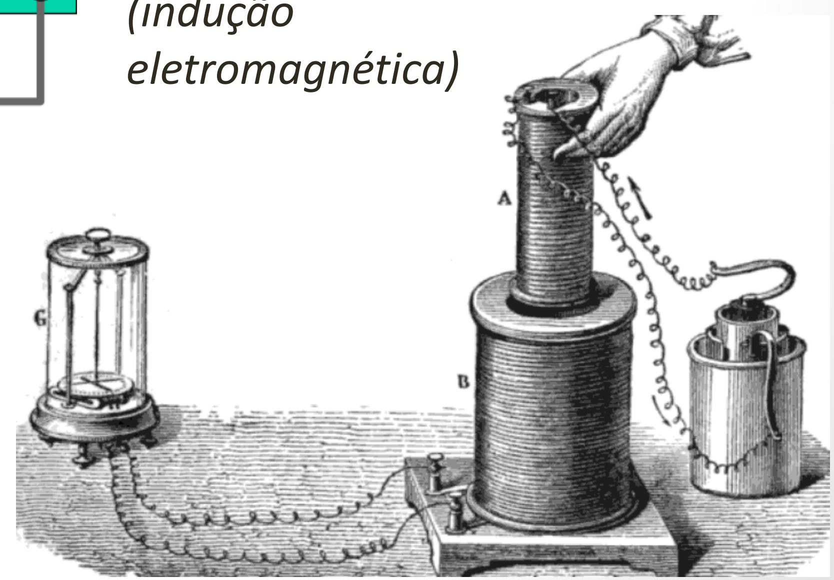
MAGNETISMO* vs. *ELETRICIDADE

→ TEMPO ←



Corrente variante no tempo
(efeito transformador – indução mútua)

Campo magnético variante no tempo-espaço (indução eletromagnética)



Para ir do magnetismo p/ eletricidade:

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E} \Rightarrow \partial\mathbf{B}/\partial t$$

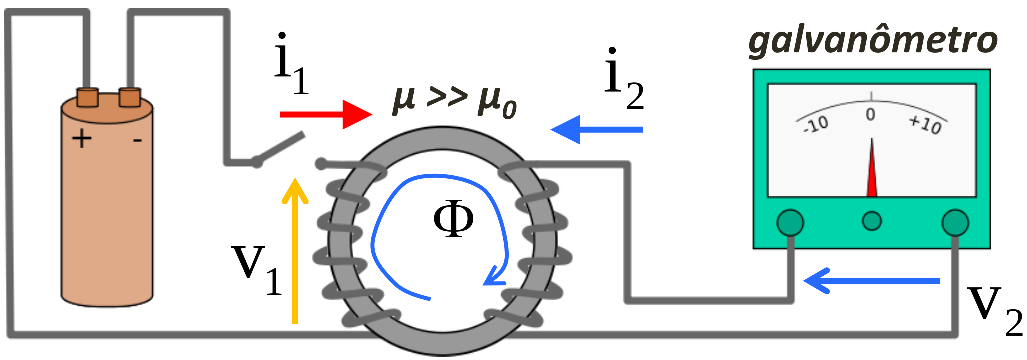
Universidade Federal de Juiz de Fora

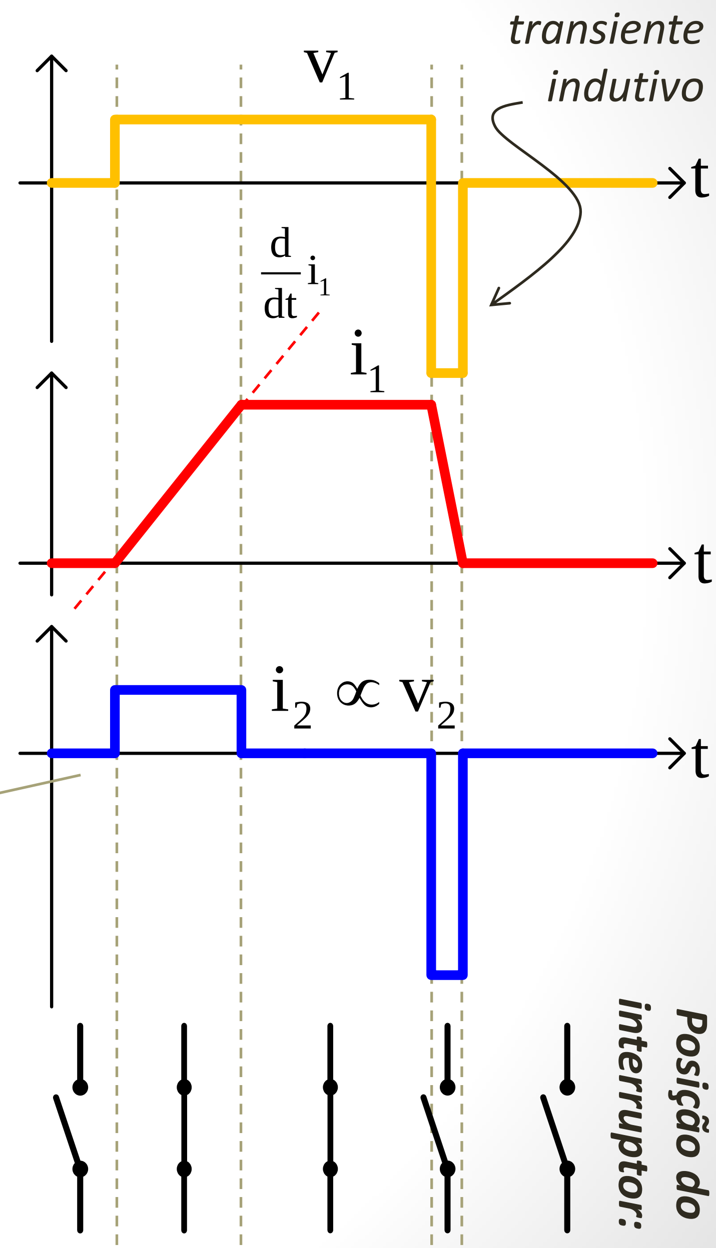
Indução Eletromagnética

Os experimentos de Michael Faraday

MAGNETISMO vs. ELETRICIDADE

Corrente variante no tempo
(efeito transformador – indução mútua)





Parece que: $$v_2 \propto \frac{d}{dt} i_1$$

Como o único acoplamento que existe é MAGNÉTICO:

$$v \propto \frac{d}{dt}\Phi$$

$(\Phi \propto N.i)$

Universidade Federal de Juiz de Fora

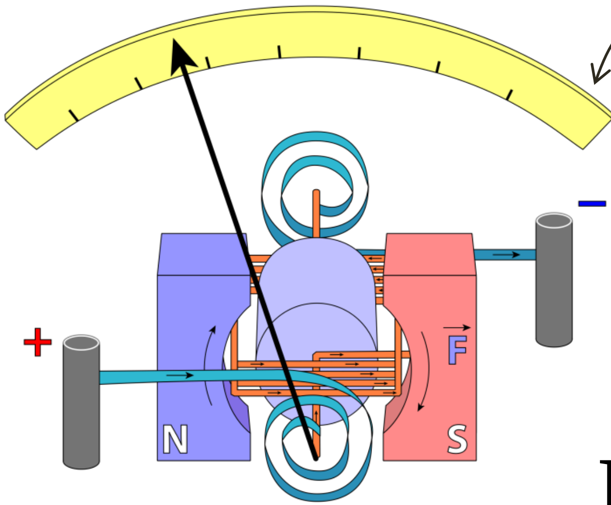
Indução Eletromagnética

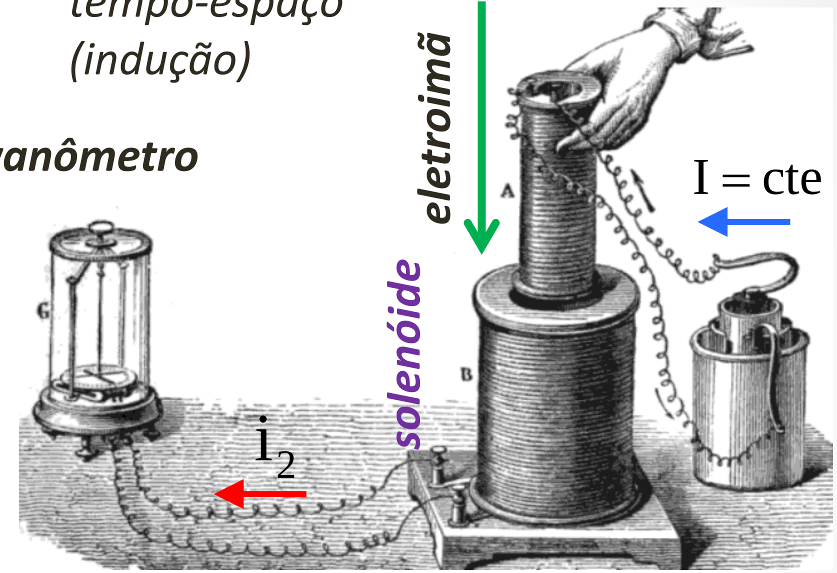
Os experimentos de Michael Faraday

MAGNETISMO vs. ELETRICIDADE

Campo magnético variante no tempo-espaço (indução)

galvanômetro

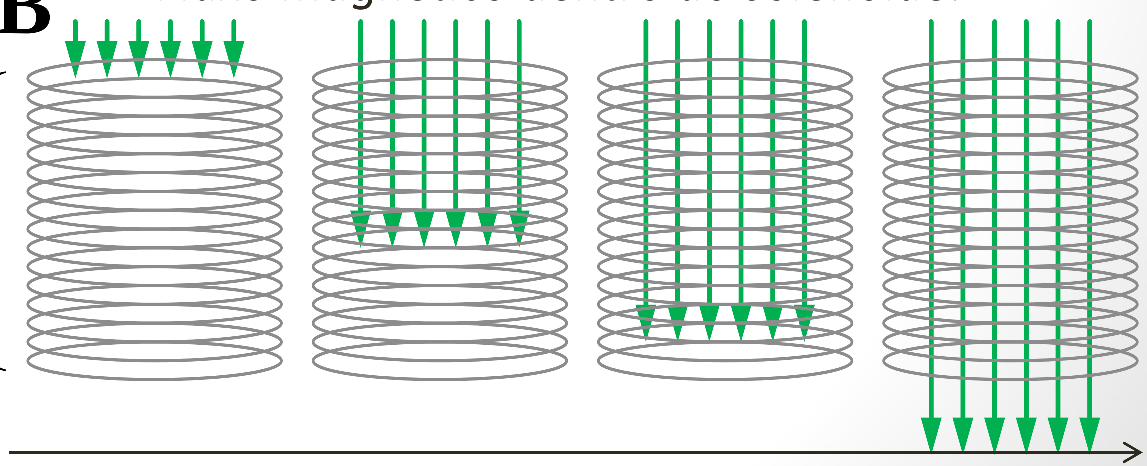




Fluxo magnético dentro do solenóide:

B

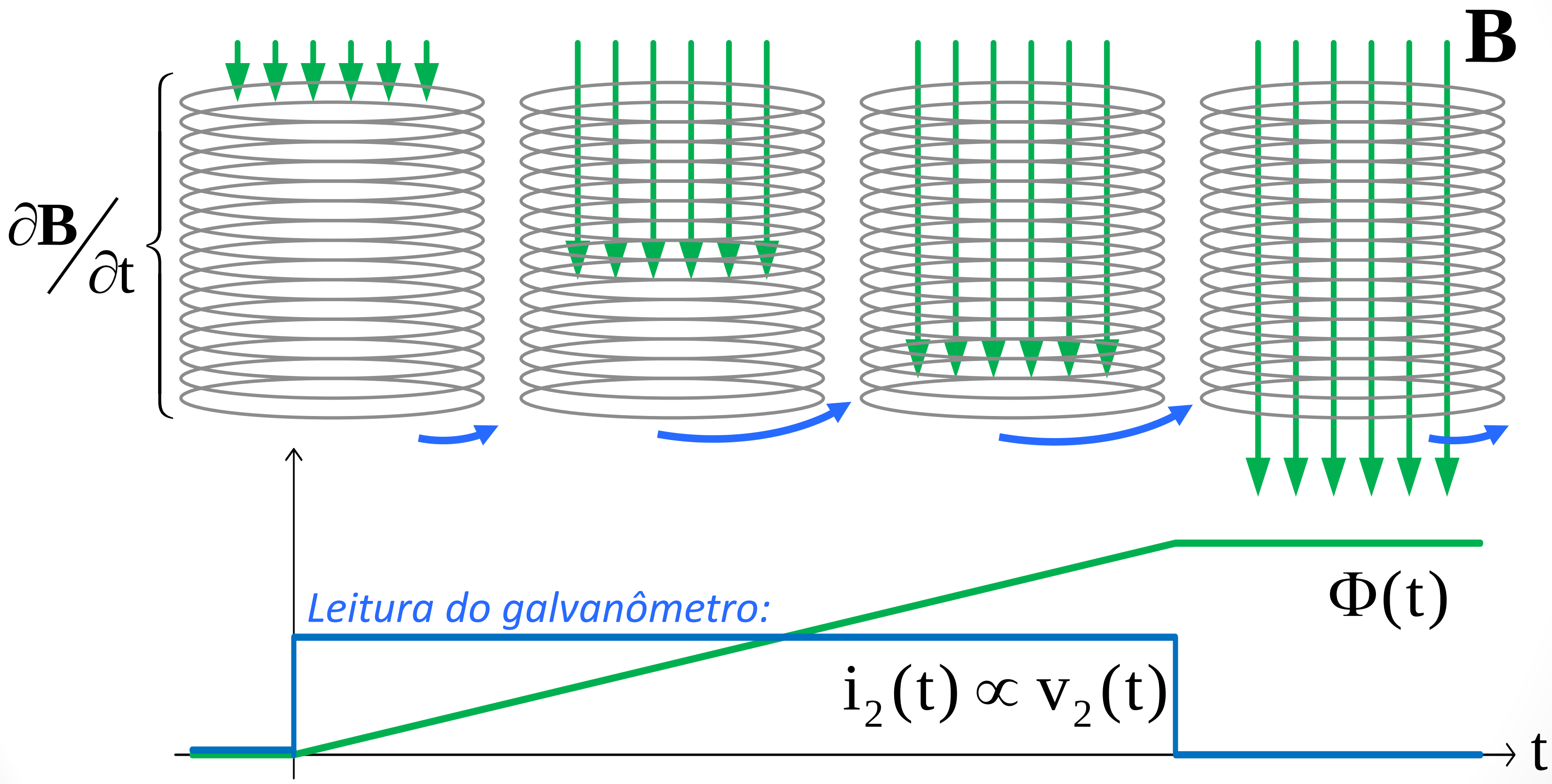
$$\partial \mathbf{B} / \partial t > 0$$



Indução Eletromagnética

Os experimentos de Michael Faraday

MAGNETISMO vs. ELETRICIDADE



Novamente, parece que:

$$v \propto \frac{d}{dt}\Phi$$

*Como provar que é uma **tensão induzida**, e não uma **corrente induzida**?*

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Lei de Faraday-Lenz

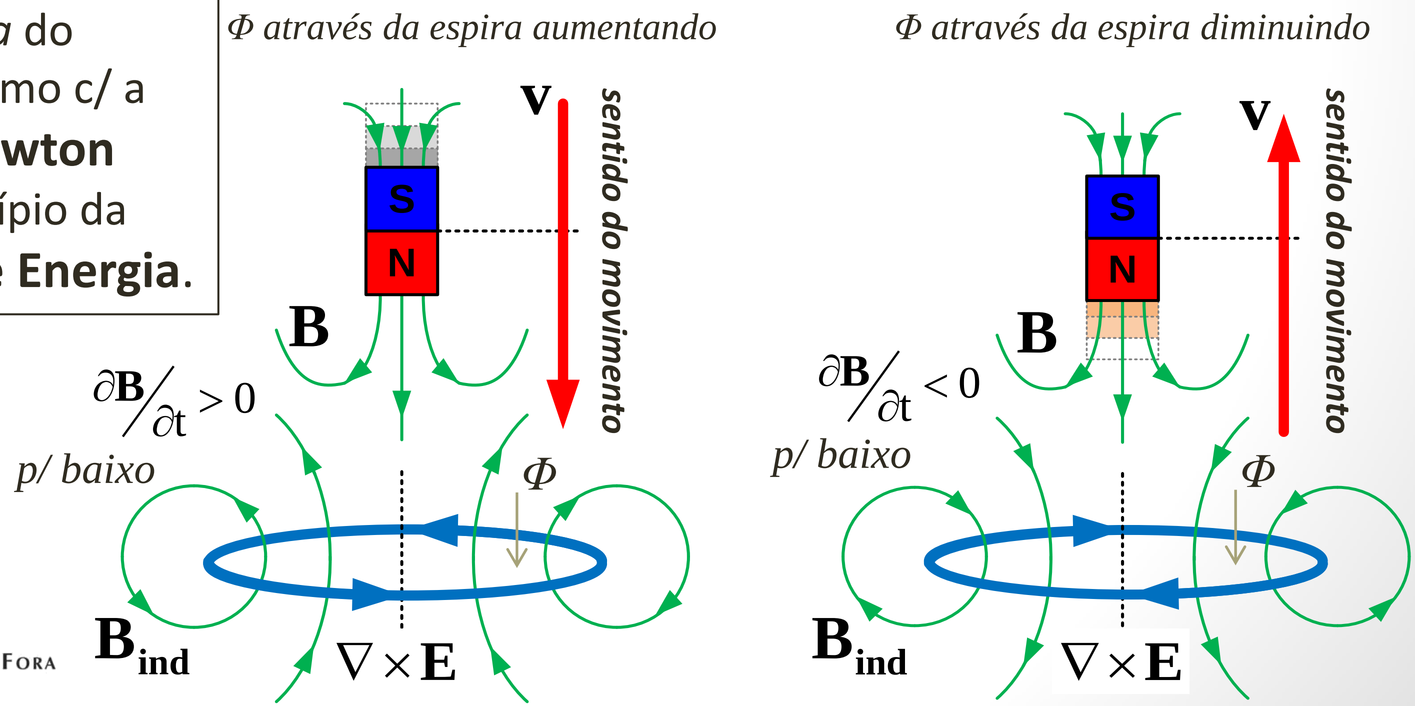
$$f.e.m. = v_{ind} = -N \frac{d}{dt} \Phi$$

- M. Faraday descobriu experimentalmente o princípio da indução eletromagnética.
- Heinrich Lenz propôs o **sentido da tensão** induzida (ou f.e.m.) – sinal negativo.

O **sentido da indução** é aquele que resulta numa f.e.m. que produziria uma corrente cujo campo magnético associado (induzido) tenta **se opor à variação**.

A origem disto é simples: *consistência* do eletromagnetismo c/ a **3ª Lei de Newton** & com o princípio da **Conservação de Energia**.

→ *O campo magnético quer permanecer imperturbado:*

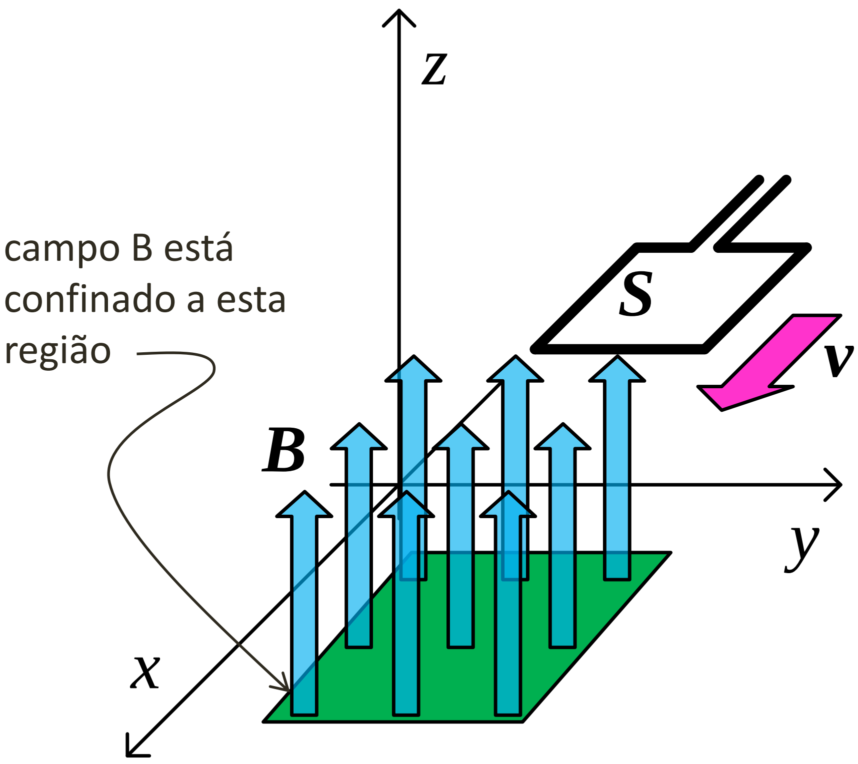


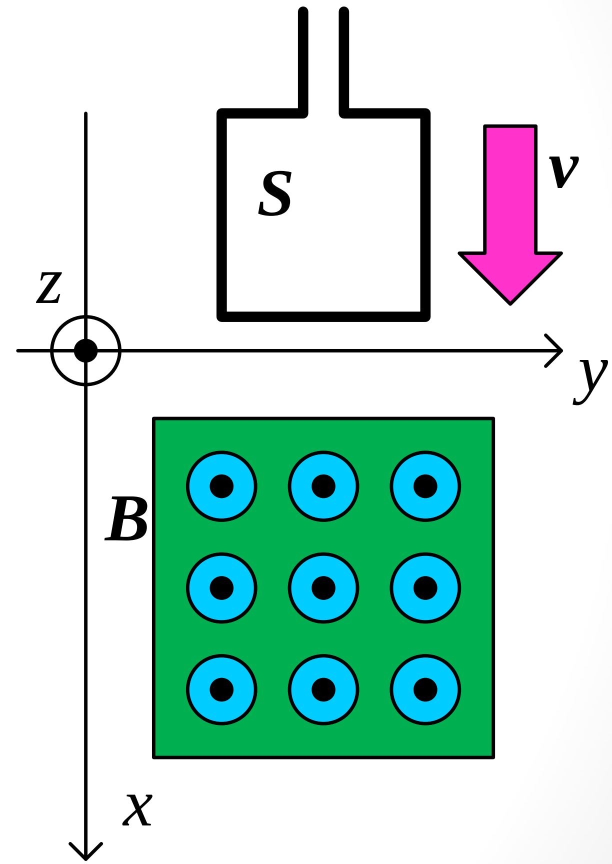
Universidade Federal de Juiz de Fora

Lei de Faraday-Lenz

$$\text{f.e.m.} = -N\frac{d}{dt}\Phi$$

Experimento mental:
uma espira condutora penetrando uma região do espaço que contêm um campo magnético uniforme





Lembrando que: $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$

Universidade Federal de Juiz de Fora

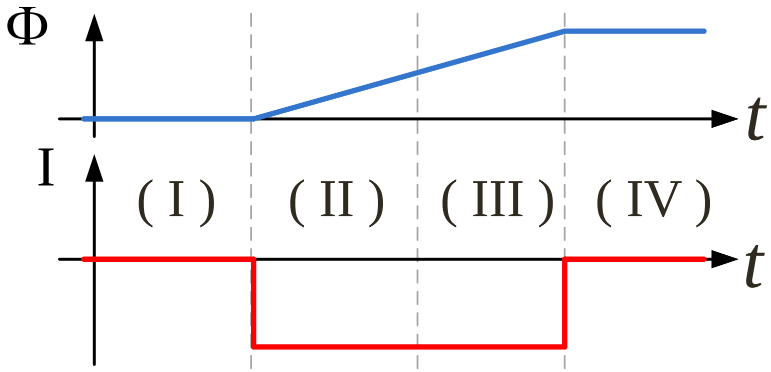
Lei de Faraday-Lenz

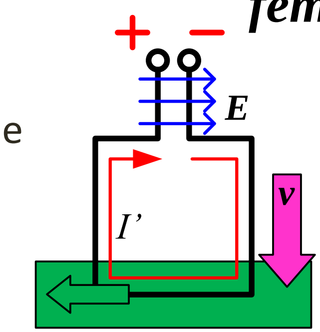
$$f.e.m. = -N\frac{d}{dt}\Phi$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{F} = q_e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

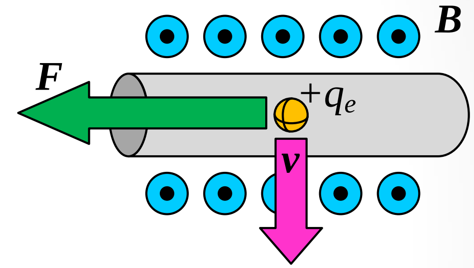
Experimento mental:
uma espira condutora penetrando uma região do espaço que contêm um campo magnético uniforme





I → referenciada no sentido positivo (anti-horário)

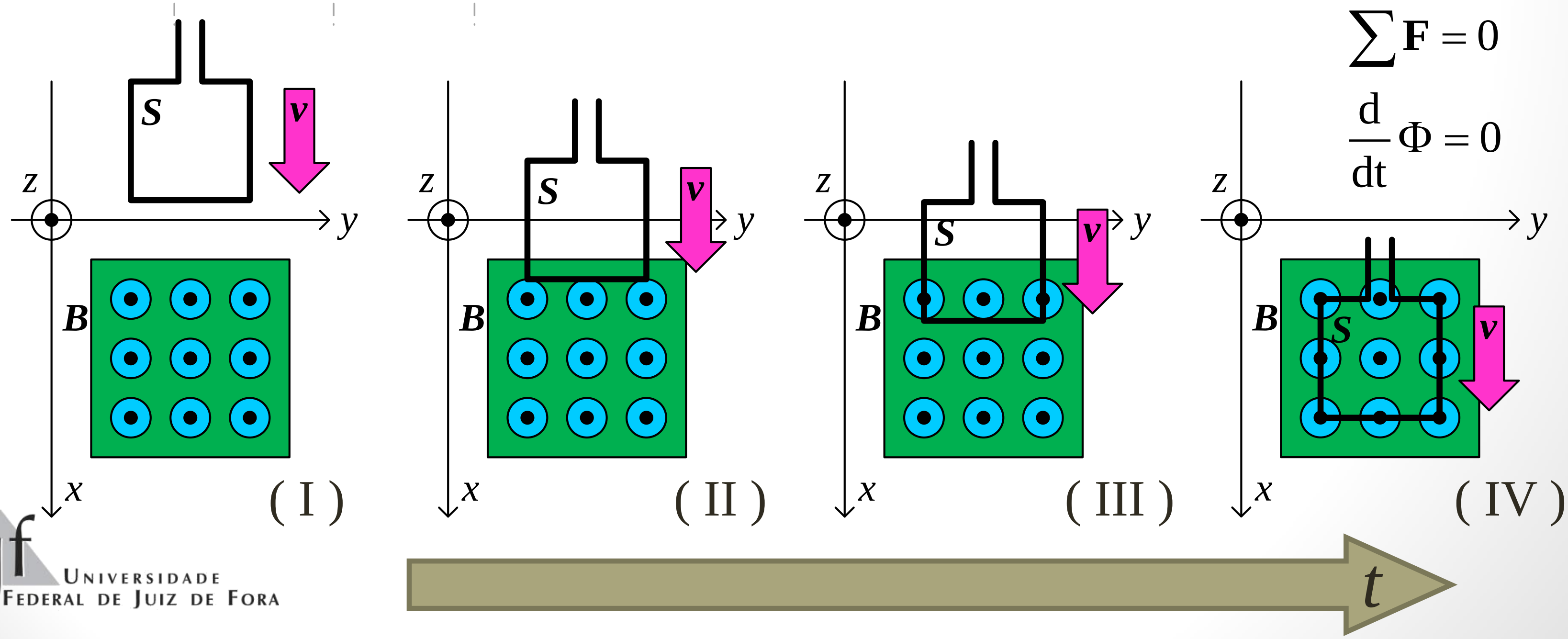
Lorentz:



$$\sum \mathbf{F} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Phi = 0$$

Espira entrando



UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

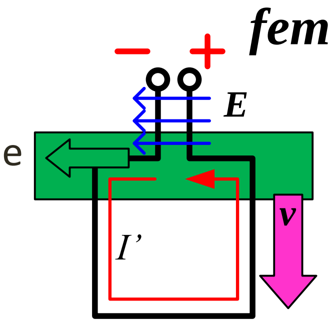
Lei de Faraday-Lenz

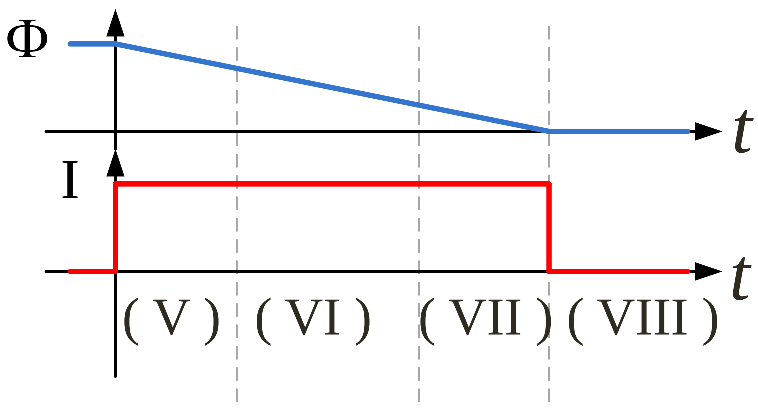
$$\text{f.e.m.} = -N\frac{d}{dt}\Phi$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{F} = q_e \mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

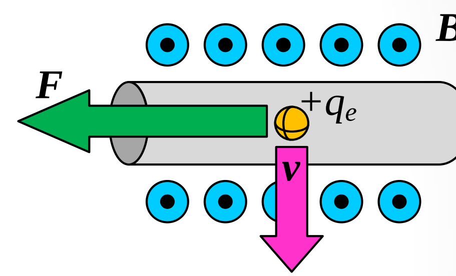
Experimento mental:
uma espira condutora penetrando uma região do espaço que contêm um campo magnético uniforme





I → referenciada no sentido positivo (anti-horário)

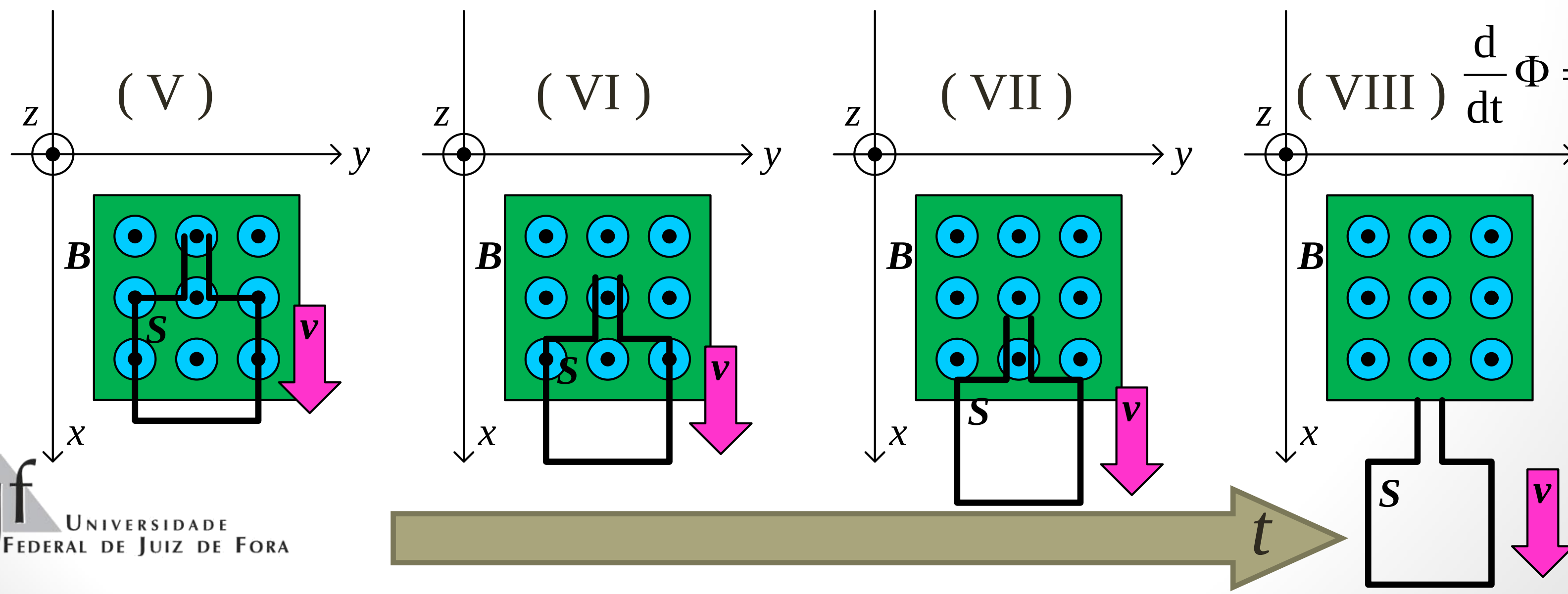
Lorentz:



$$\sum \mathbf{F} = 0$$

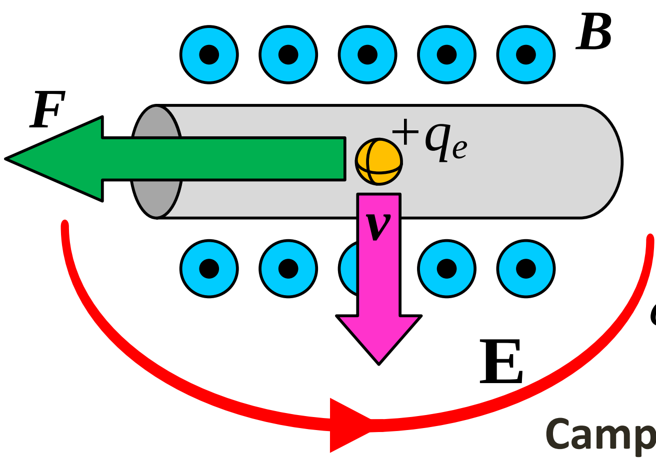
$$\frac{d}{dt}\Phi = 0$$

Espira saindo



Lei de Faraday-Lenz

Neste caso, podemos notar que a indução é, de certa forma, uma consequência da força de Lorentz atuando sobre os portadores de carga no condutor



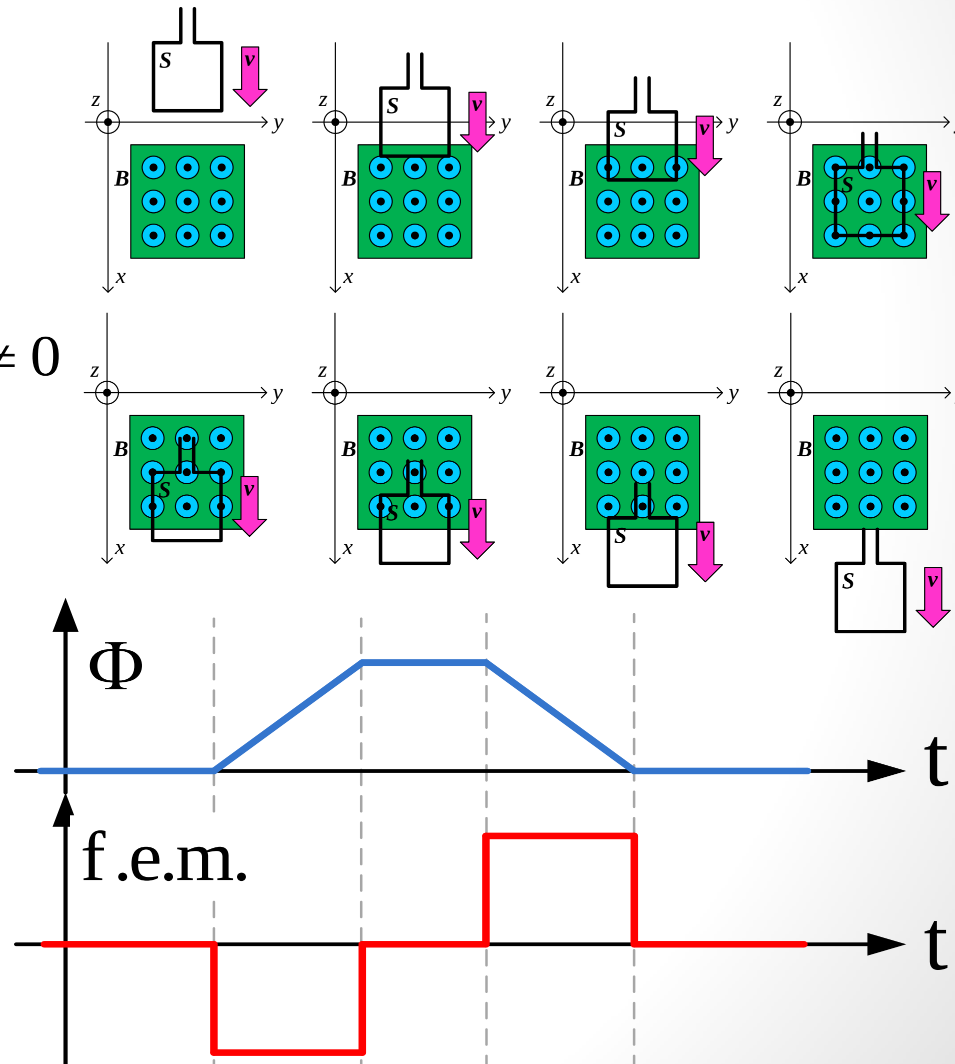
$$\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$$

Campo elétrico induzido (resulta da migração de carga)

Faraday & Lorentz:

$$f.e.m. = -N \frac{d}{dt} \Phi$$

$$\mathbf{F} = q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

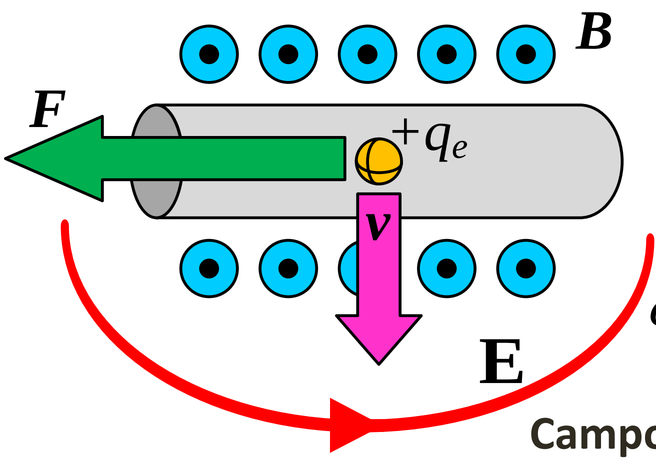


Universidade Federal de Juiz de Fora

Lei de Faraday-Lenz

Uma vez que temos uma situação dinâmica como esta...

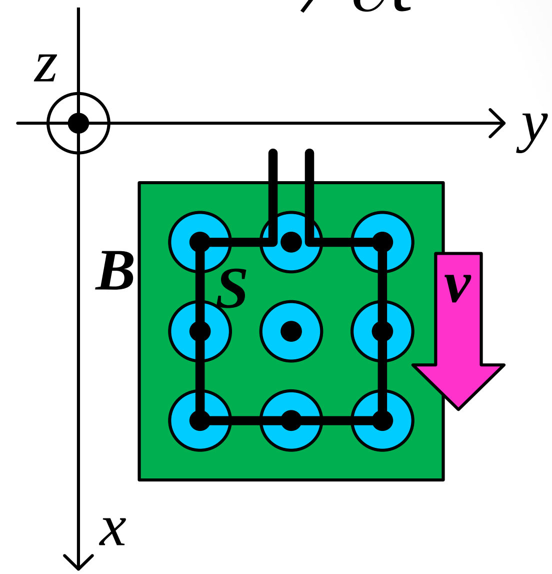
$$\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$$



$$\nabla \times \mathbf{E} \neq 0 \,,$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$$

Campo elétrico induzido



~~Condição eletrostática~~

$$\cancel{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0}$$

~~(conservativo)~~

Veremos que:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

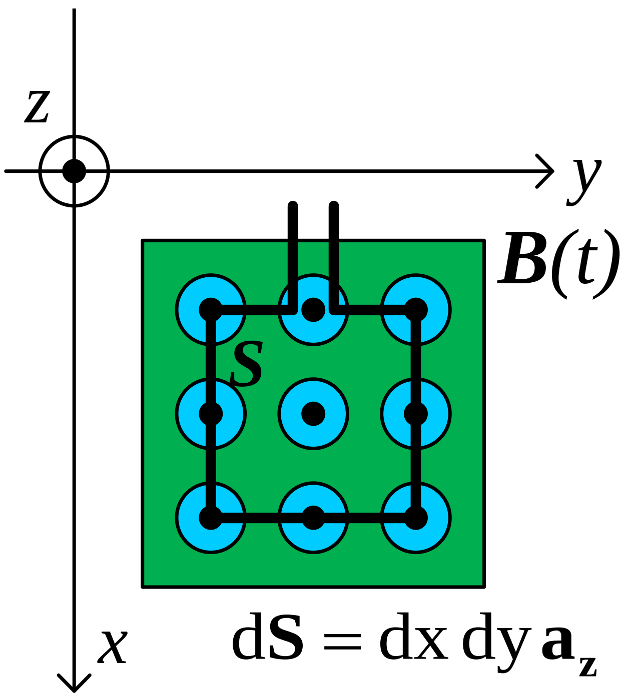
ou

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

ufjf Universidade Federal de Juiz de Fora

Lei de Faraday-Lenz

Mesmo **sem haver movimento**, teremos uma tensão induzida se o fluxo variar. Se, ao invés de penetrar a espira no campo, a mantivermos fixa no espaço e **variarmos o campo B *continuamente* no tempo**:



$$d\mathbf{S} = dx\,dy\,\mathbf{a_z}$$

Exemplo: $\mathbf{B}(t) = B_0 \operatorname{sen}(\omega t)\,\mathbf{a_z}$

Como: $\Phi(t) = \iint_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S}$

$$\Phi(t) = B_0 \operatorname{sen}(\omega t) \iint_S |d\mathbf{S}| =$$

$$= B_0 S \operatorname{sen}(\omega t)$$

Aplicando Faraday-Lenz:

$$v_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = -B_0 S \omega \cos(\omega t)$$

Há uma **tensão senoidal induzida** na espira, cuja amplitude depende da **amplitude do campo magnético**, da **área da espira** e da **frequência de variação do campo**!

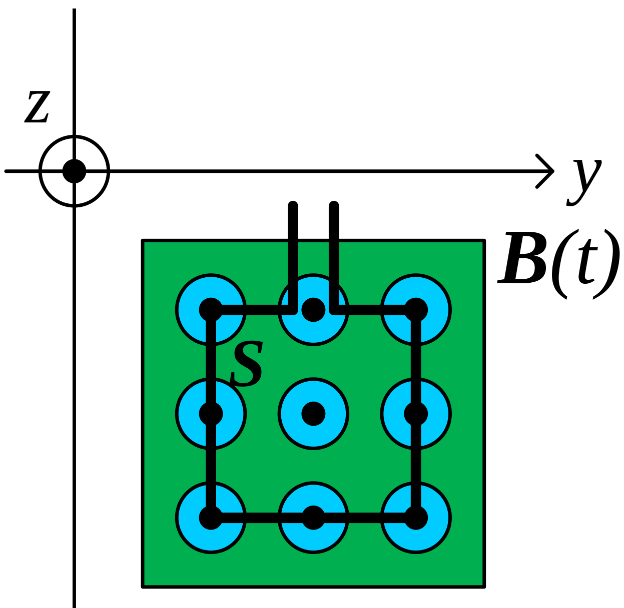
Lei de Faraday-Lenz

Mesmo **sem haver movimento**, teremos uma tensão induzida se o fluxo variar. Se, ao invés de penetrar a espira no campo, a mantivermos fixa no espaço e **variarmos o campo B *continuamente* no tempo**:

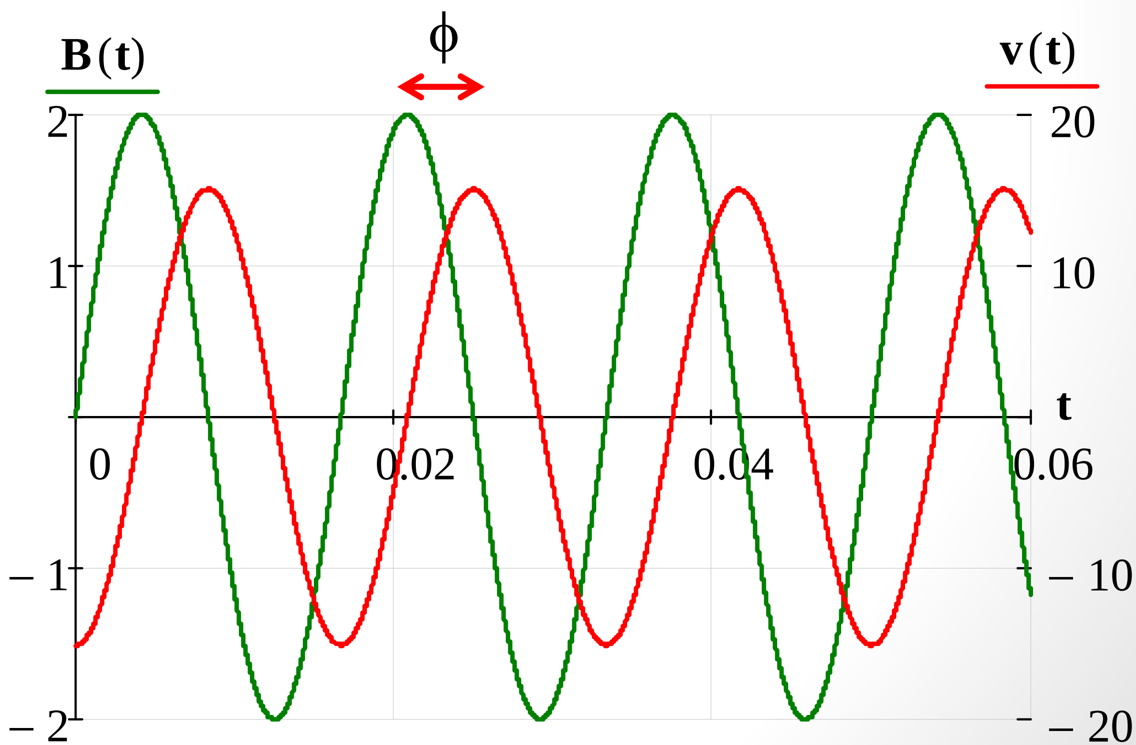
$$\mathbf{B}(t) = B_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)\,\mathbf{a_z}$$

$$v_{ind}(t) = -B_0 S \omega \cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} B_0 = 2\,\mathrm{T} \\ S = 0{,}02\ \mathrm{m}^2 \\ \omega = 2\pi 60\ \mathrm{rad/s} \end{cases}$$



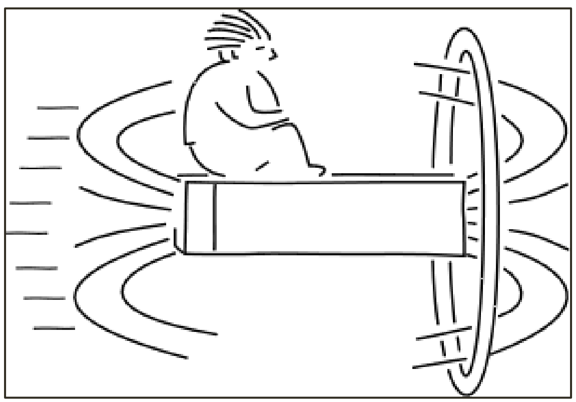
$$d\mathbf{S} = dx\,dy\,\mathbf{a_z}$$

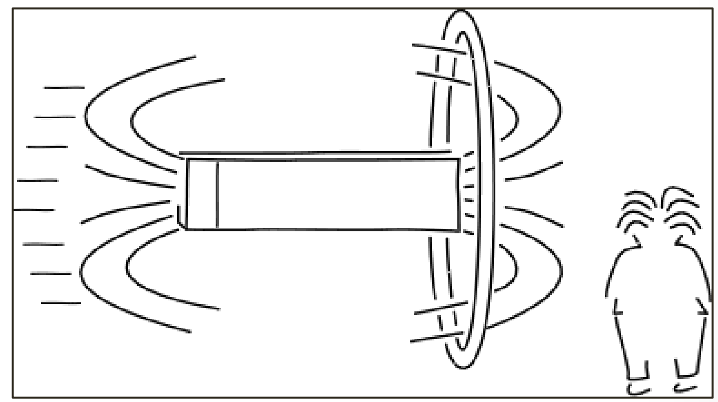


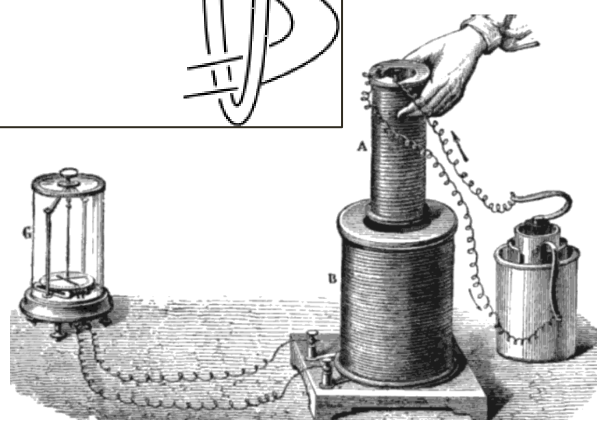
Generalizando a Lei de Faraday

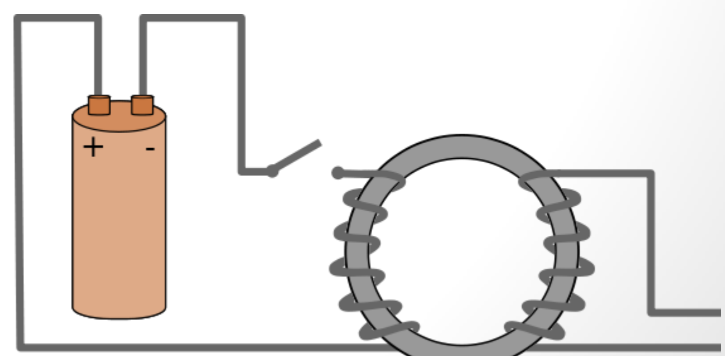
Historicamente, a partir das descobertas de Faraday e os experimentos mostrados, acreditava-se que a "**força eletromotriz – f.e.m.**" era divida em dois tipos (antes da explicação que a ***relatividade especial*** nos fornece):

- a força eletromotriz de **movimento** ("motional emf")
- a força eletromotriz **induzida** ("induced emf")





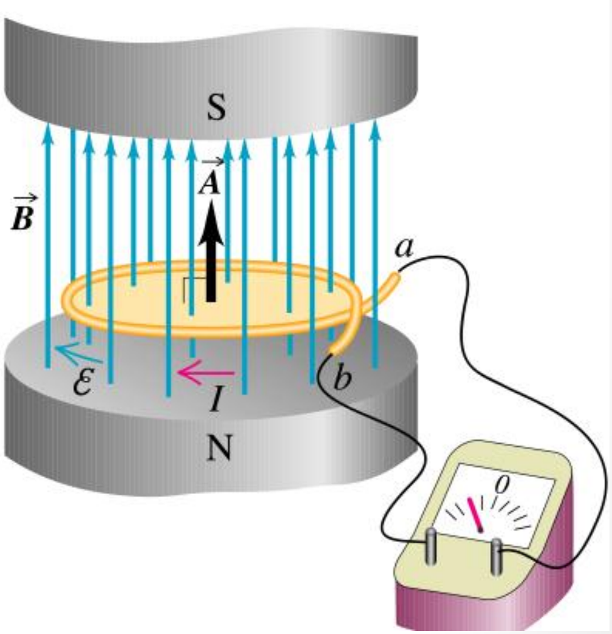




Generalizando a Lei de Faraday

Historicamente, a partir das descobertas de Faraday e os experimentos mostrados, acreditava-se que a "**força eletromotriz – f.e.m.**" era divida em dois tipos (antes da explicação que a ***relatividade especial*** nos forneceu):

- a força eletromotriz de **movimento** ("motional emf")
- a força eletromotriz **induzida** ("induced emf")



A **forma escalar** como a lei foi explicada por Faraday & Lenz (através da mudança temporal do fluxo magnético, $d\Phi/dt$) pode ser inclusive **inválida** em alguns contextos, chegando a prever **paradoxos**.

$$v_{ind}(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t)$$

Estritamente falando, só é válida para um circuito fechado, composto por laço(s) de fio(s) infinitamente fino(s) – elementos infinitesimais de corrente!

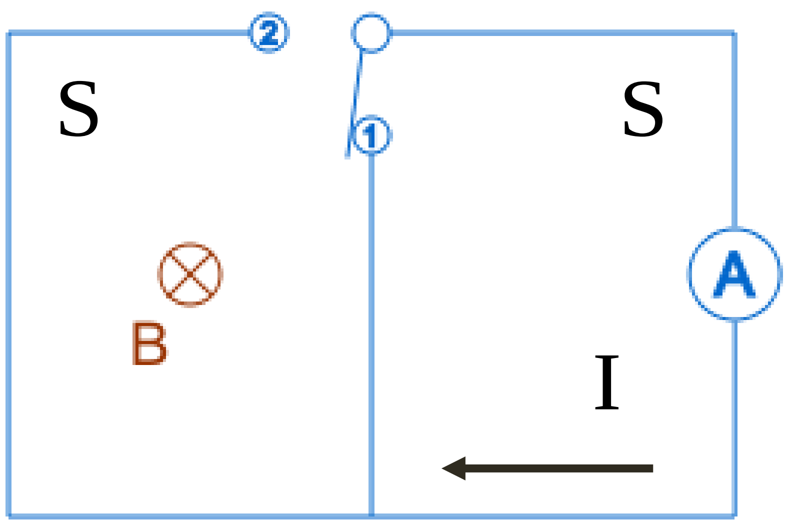
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Generalizando a Lei de Faraday

Alguns paradoxos de Faraday:

- quando a lei escalar **prevê que existirá uma f.e.m.** induzida, mas **é observada uma f.e.m. nula** na prática.
- quando a lei escalar **prevê que não existirá uma f.e.m.** induzida, mas **é observada uma f.e.m.** induzida.

Exemplo: experimento de Tilley
(circuito de 2 malhas de áreas idênticas)



1. O campo **B** é uniforme em todo o circuito.
2. A chave muda da posição 1 para a posição 2.
3. Observa-se o galvanômetro.

O fluxo muda:
$$\begin{cases}\Phi_1 = BS \\ \Phi_2 = 2BS\end{cases}$$

Faraday prevê:

$$f.e.m. = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} \Rightarrow I \neq 0$$

Mas o experimento não observou deflexão no galvanômetro!

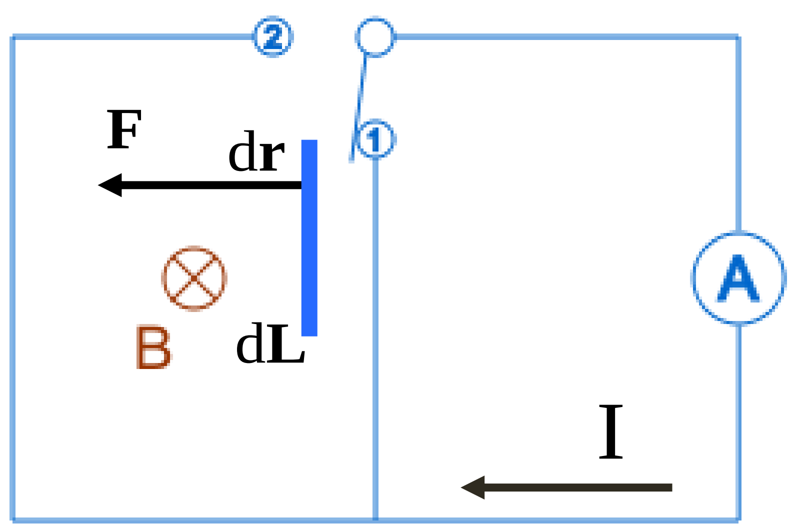
Generalizando a Lei de Faraday

Alguns paradoxos de Faraday:

- quando a lei escalar **prevê que existirá uma f.e.m.** induzida, mas **é observada uma f.e.m. nula** na prática.
- quando a lei escalar **prevê que não existirá uma f.e.m.** induzida, mas **é observada uma f.e.m.** induzida.

$$\text{f.e.m.} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\Phi = ?$$

Exemplo: experimento de Tilley
(circuito de 2 malhas de áreas idênticas)



Para a lei de Faraday ser válida, algum tipo de trabalho tem de ser realizado na produção de um fluxo variante → ***não é o caso.***

$$\mathbf{F_{2,1}} = I \oint_{C1} d\mathbf{L_1} \times \mathbf{B_2}$$

força sobre o fio 1

$$dW = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = I\,\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = I\,d\Phi$$

$$(d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times d\mathbf{L})$$

*trabalho realizado em um segmento d**L** deslocado por d**r** em **B***

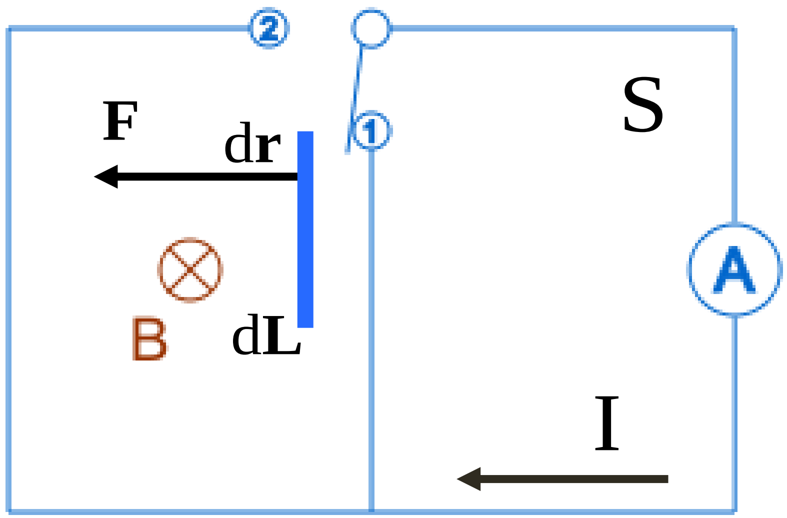
Generalizando a Lei de Faraday

Alguns paradoxos de Faraday:

- quando a lei escalar **prevê que existirá uma f.e.m.** induzida, mas **é observada uma f.e.m. nula** na prática.
- quando a lei escalar **prevê que não existirá uma f.e.m.** induzida, mas **é observada uma f.e.m.** induzida.

Exemplo: experimento de Tilley
(circuito de 2 malhas de áreas idênticas)

$$\text{f.e.m.} = $$
$$= \oint_C \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot d\mathrm{L}$$

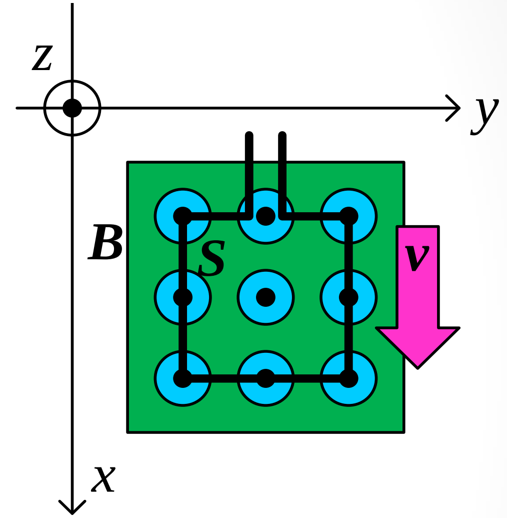


O galvanômetro só mede o primeiro termo

(não dá pra medir uma f.e.m. onde não tem condutor!)

Generalizando a Lei de Faraday

Maxwell corrigiu a distorção generalizando a lei de Faraday de uma forma escalar para uma forma vetorial, que dá a variação temporal do vetor densidade de fluxo magnético.



Como:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Lembrando que não estamos mais numa condição eletrostática, portanto:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \neq 0$$

A tensão num circuito fechado C, então, pode ser diferente de zero → ou seja, pode haver tensão induzida (isto é reulstado dos experimentos de Farady em si):

$$V = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = f.e.m.$$

Universidade Federal de Juiz de Fora

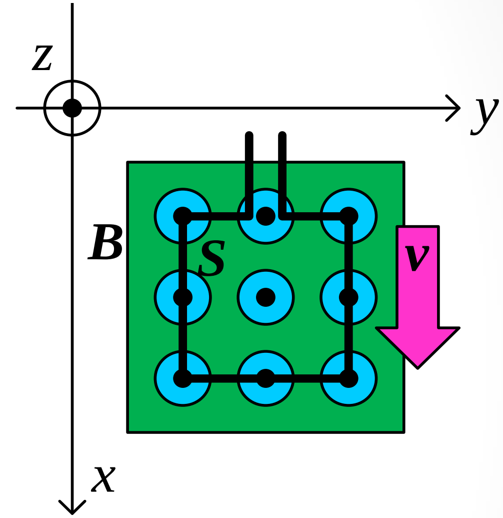
Generalizando a Lei de Faraday

Maxwell corrigiu a distorção generalizando a lei de Faraday de uma forma escalar para uma forma vetorial, que dá a variação temporal do vetor densidade de fluxo magnético.

Temos então:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

$$V = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L}$$



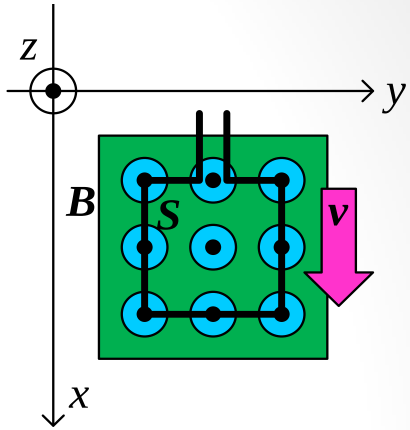
A Lei de Faraday iguala ambos os termos (observe o sinal da Lei de Lenz):

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \neq 0$$

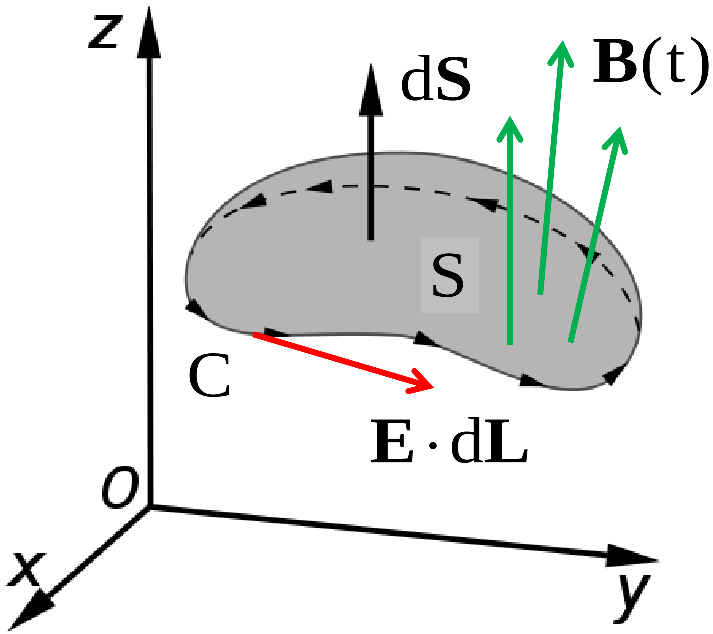
Faraday torna o campo elétrico **não conservativo** → pode ser inserida energia através de indução eletromagnética no campo elétrico!

Generalizando a Lei de Faraday

Maxwell corrigiu a distorção generalizando a lei de Faraday de uma forma escalar para uma forma vetorial, que dá a variação temporal do vetor densidade de fluxo magnético.



$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \neq 0}$$



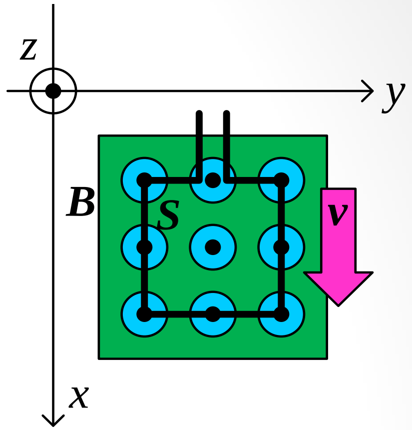
Usando o teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = \iint_S \left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\cdot d\mathbf{S}$$

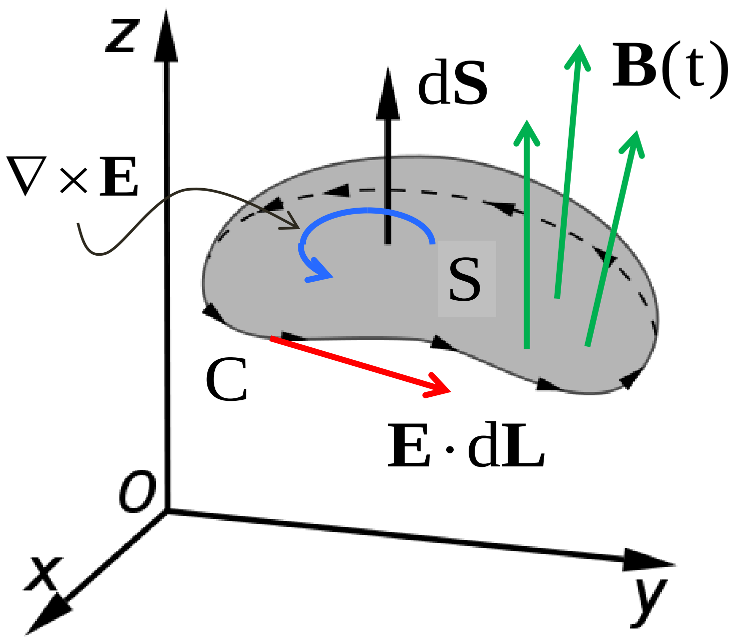
onde C é o **circuito fechado** limítrofe (fronteira) da **superfície aberta** S (através da qual há um vetor de densidade de fluxo magnético)

Generalizando a Lei de Faraday

Maxwell corrigiu a distorção generalizando a lei de Faraday de uma forma escalar para uma forma vetorial, que dá a variação temporal do vetor densidade de fluxo magnético.



$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$$



Se o integrando tem que ser igual nas duas integrais de fluxo:

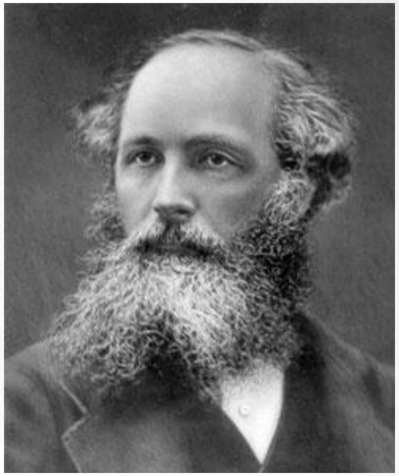
$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}}$$

Forma pontual da Lei de Faraday
(Lei de Faraday-Maxwell)

"Um campo magnético variante no tempo está sempre acompanhado de um campo elétrico não conservativo variante no espaço e vice-versa"

Observe o contraste c/ o caso eletrostático, mais uma vez.

Lei de Faraday-Maxwell



Generalização feita por Maxwell

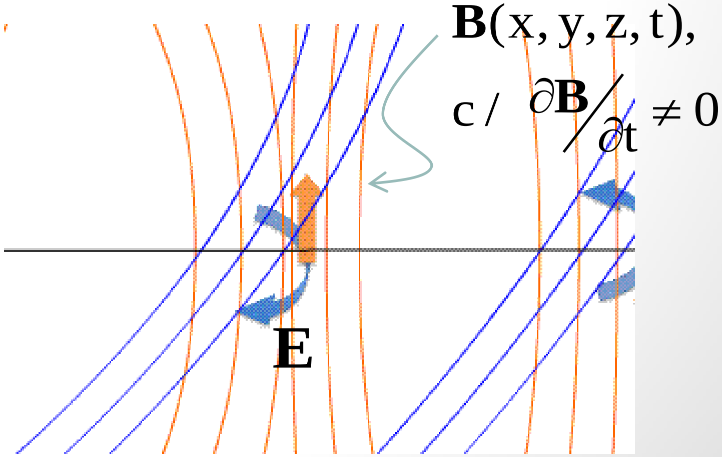
$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}}$$

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \neq 0}$$

"Um campo magnético variante no tempo está sempre acompanhado de um campo elétrico não conservativo variante no espaço e vice-versa"

Observe que a conclusão de Maxwell leva a crer que existe um campo elétrico **E** definido para todos os pontos do espaço, independente de haver um circuito fechado (condutor) por onde uma corrente induzida possa fluir.

Desde que **B** varie no tempo, haverá um **E** definido em todo ponto do espaço, resultante desta variação



Universidade Federal de Juiz de Fora

Revisitando a Lei de Ampère

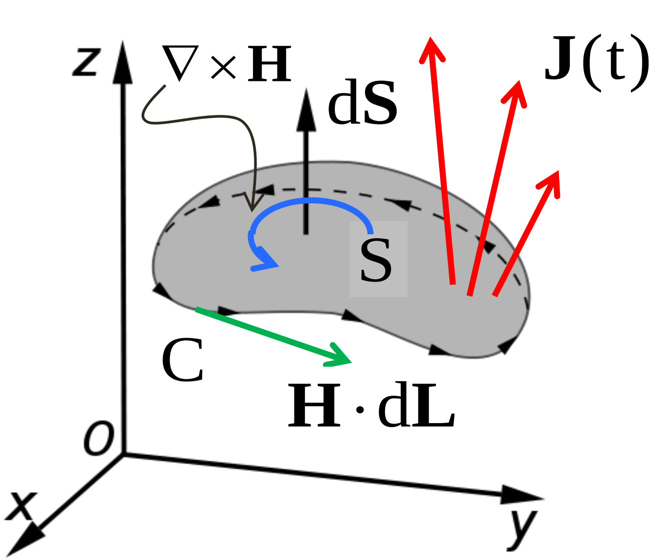
A Lei de Ampère, como declarada para campos magnetostáticos (H gerado por I), também levava a alguns paradoxos quando são consideradas as variações temporais:

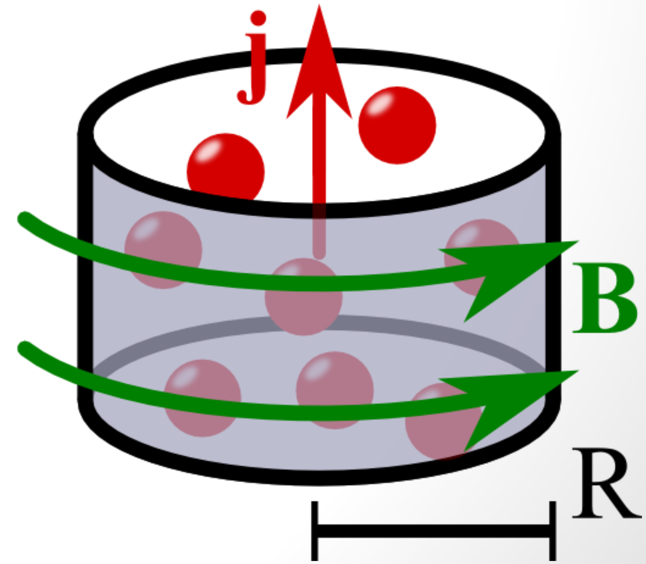
$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}$$

onde C é a **curva fechado** limítrofe (fronteira) da **superfície aberta** S (através da qual há um vetor de densidade de corrente de condução)

No caso magnetostático
(também vem do Teorema de Stokes)

Teorema de Stokes: a integral independe tanto do caminho quanto da superfície escolhida!





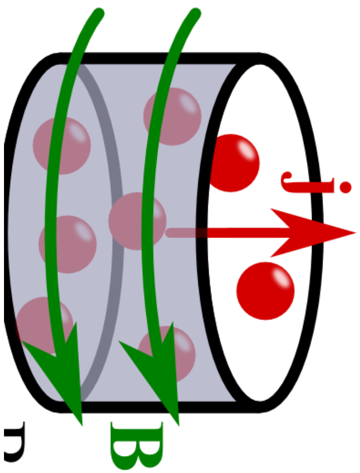
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Revisitando a Lei de Ampère

A Lei de Ampère, como declarada para campos magnetostáticos (H gerado por I), também levava a alguns paradoxos quando são consideradas as variações temporais:

Se considerarmos este resultado da magnetostática:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$



Usando a identidade vetorial de que o divergente de um rotacional é sempre nulo:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

A divergência da densidade de corrente é dada pela equação da continuidade:
(princípio da conservação de carga)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_v$$

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

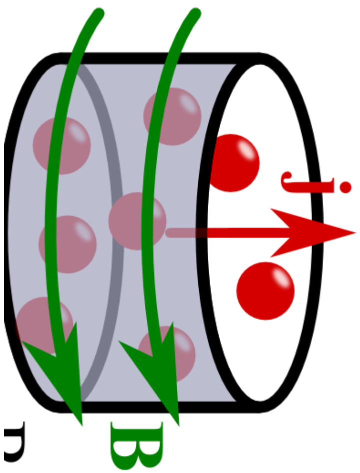
Revisitando a Lei de Ampère

A Lei de Ampère, como declarada para campos magnetostáticos (H gerado por I), também levava a alguns paradoxos quando são consideradas as variações temporais:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

No caso magnetostático → $$\frac{\partial}{\partial t}\rho_v = 0$$

(correntes contínuas)



$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_v = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H}\right) = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

A identidade vetorial é satisfeita! → OK

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A}\right) = 0$$

No caso magnetostático, a expressão da Lei de Ampère está correta.

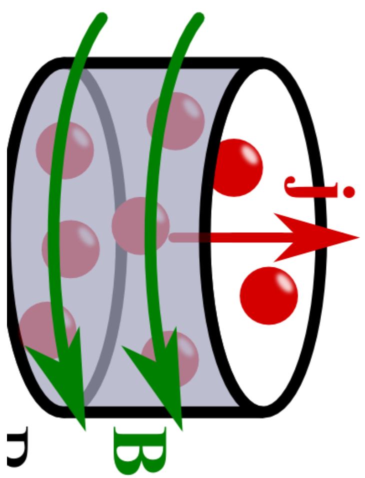
Revisitando a Lei de Ampère

A Lei de Ampère, como declarada para campos magnetostáticos (H gerado por I), também levava a alguns paradoxos quando são consideradas as variações temporais:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

E no caso eletrodinâmico? → $$\frac{\partial}{\partial t}\rho_v \neq 0$$

(correntes variantes no tempo → campos variantes no tempo)



$$\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H}\right) = \nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$$

A identidade vetorial NÃO é satisfeita! → ???????

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A}\right) = 0$$

No caso ELETRODINÂMICO, a expressão da Lei de Ampère está ERRADA!

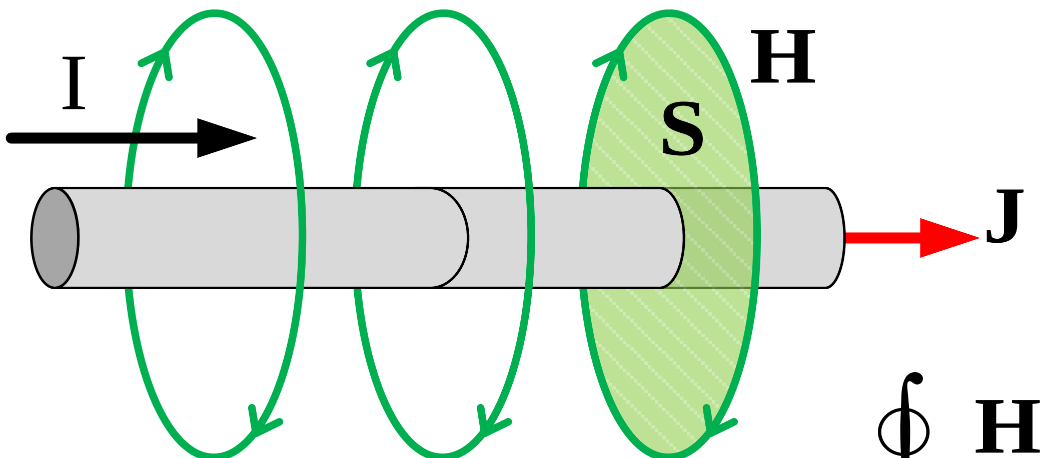
Revisitando a Lei de Ampère

A Lei de Ampère, como declarada para campos magnetostáticos (H gerado por I), também levava a alguns paradoxos quando são consideradas as variações temporais:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = ?}$$

Mesmo numa situação no mundo real, é também evidente o paradoxo, mesmo se a corrente é contínua.

Consideremos um condutor **contíguo** percorrido por uma corrente:



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$$

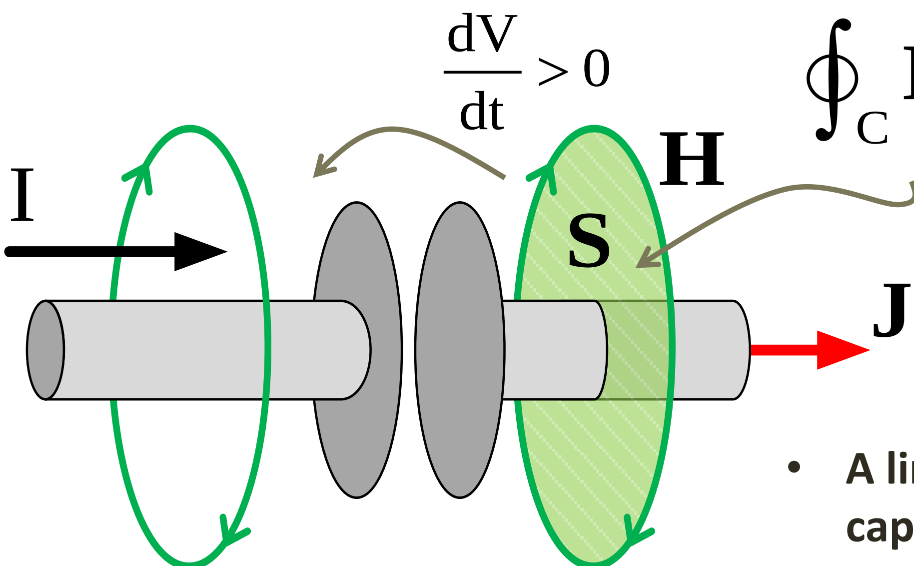
OK!

Revisitando a Lei de Ampère

A Lei de Ampère, como declarada para campos magnetostáticos (H gerado por I), também levava a alguns paradoxos quando são consideradas as variações temporais:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = ?}$$

Se abrirmos o condutor, formando um capacitor de placas paralelas:
*A corrente contínua atua como se estivesse **carregando o capacitor**.*



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$$

nesta superfície de integração continua

OK!

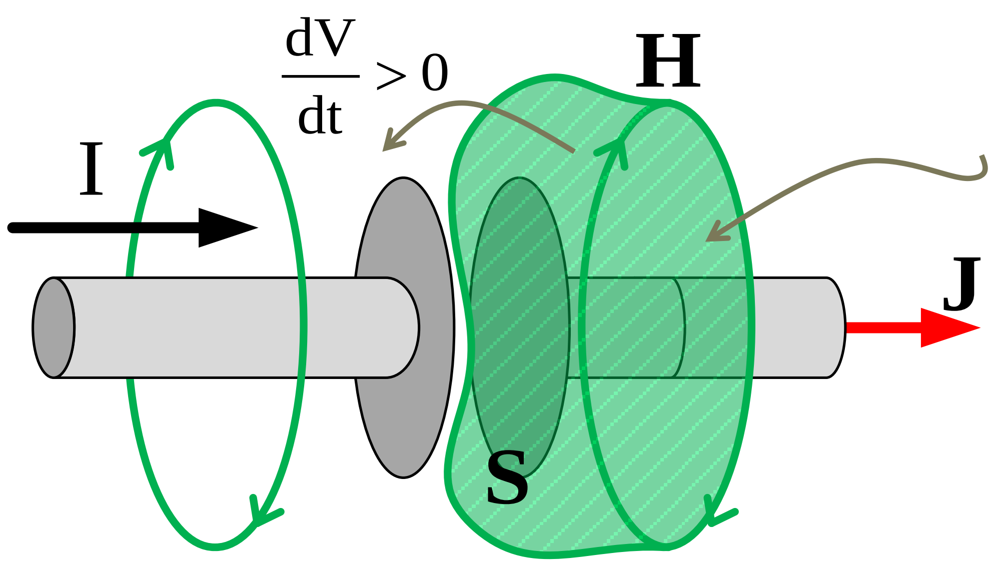
- **A linha de campo magnético sobre o capacitor pode sumir?**
- **Stokes diz que a integral não depende de S... e se trocarmos S para envolver uma das placas?**

Revisitando a Lei de Ampère

A Lei de Ampère, como declarada para campos magnetostáticos (H gerado por I), também levava a alguns paradoxos quando são consideradas as variações temporais:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = ?}$$

Se abrirmos o condutor, formando um capacitor de placas paralelas:
A corrente contínua atua como se estivesse ***carregando o capacitor***.



$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

nesta superfície de integração

Mas é evidente que:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \neq 0$$

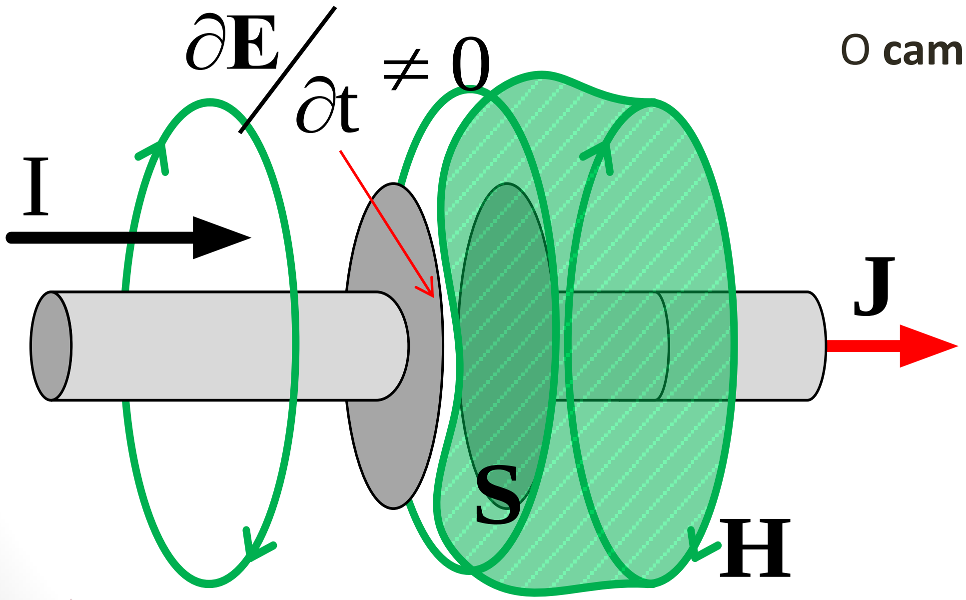
Como resolver este aparente paradoxo?
O que mudou na situação eletrodinâmica?

Universidade Federal de Juiz de Fora

A corrente de deslocamento

Maxwell também endereçou este paradoxo. Em seu artigo seminal *“On Physical Lines of Force”* e, mais tarde, em *“A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”*, Maxwell propõe que a Lei de Ampère seja modificada (generalizada) para incluir um termo devido à variação do campo elétrico.

Sabemos que a corrente “atravessa” o capacitor de fato → cargas positivas acumulam de um lado, equanto cargas negativas acumulam-se de outro lado.



O **campo elétrico** aumenta com o tempo:

$$\partial \mathbf{E}/\partial t > 0 \;\Rightarrow\; \partial \mathbf{D}/\partial t > 0$$

$$(\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E})$$

Temos, portanto, um fluxo elétrico variante:

$$\partial \Psi/\partial t > 0$$

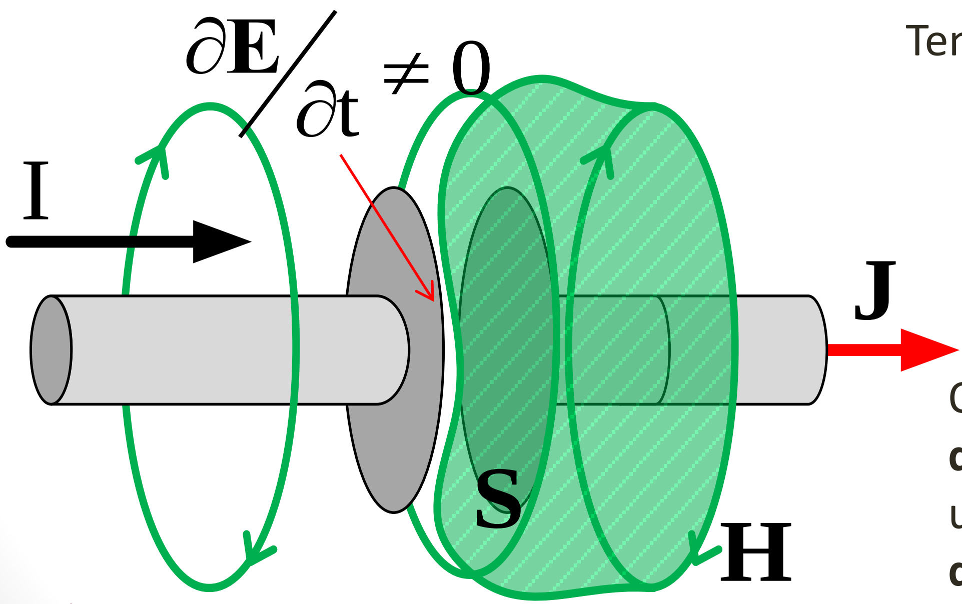
A **lei de Gauss** dita: $\Psi = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

A corrente de deslocamento

Maxwell também endereçou este paradoxo. Em seu artigo seminal *"On Physical Lines of Force"* e, mais tarde, em *"A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field",* Maxwell propõe que a Lei de Ampère seja modificada (generalizada) para incluir um termo devido à variação do campo elétrico.

Sabemos que a corrente "atravessa" o capacitor de fato → cargas positivas acumulam de um lado, equanto cargas negativas acumulam-se de outro lado.



Temos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} Q$$

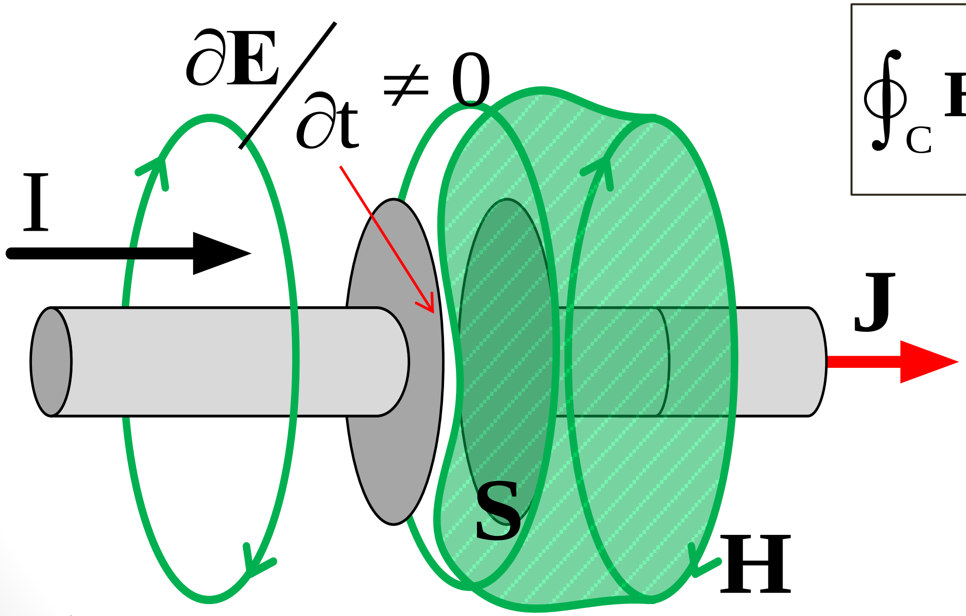
O que sugere que a **variação temporal do fluxo elétrico** atua como se fosse uma corrente → **a corrente de deslocamento**

(pois **D** é chamado de vetor **deslocamento elétrico**)

A corrente de deslocamento

Maxwell também endereçou este paradoxo. Em seu artigo seminal *"On Physical Lines of Force"* e, mais tarde, em *"A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field"*, Maxwell propõe que a Lei de Ampère seja modificada (generalizada) para incluir um termo devido à variação do campo elétrico.

Se jogarmos este termo na Lei de Ampère, o paradoxo desaparece e o campo magnético volta a estar definido INCLUSIVE em torno do capacitor:



$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \right)\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

fora do capacitor

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

dentro do capacitor

(onde **J** = 0, mas nem **D** nem d**D**/dt são nulos!)

Universidade Federal de Juiz de Fora

A corrente de deslocamento

Maxwell também endereçou este paradoxo. Em seu artigo seminal *"On Physical Lines of Force"* e, mais tarde, em *"A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field",* Maxwell propõe que a Lei de Ampère seja modificada (generalizada) para incluir um termo devido à variação do campo elétrico.

Será agora a identidade vetorial satisfeita? $\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} \right) = 0$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}$$

Aplicando o divergente do rotacional: $\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{D} \right)$

Segundo a Lei de Gauss: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$

e a Equação da Continudade: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_v$

Agora a expressão da Lei de Ampère está 100% CORRETA → inclusive no caso ELETRODINÂMICO!

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{D} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_v + \frac{\partial}{\partial t}\rho_v = 0$$

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

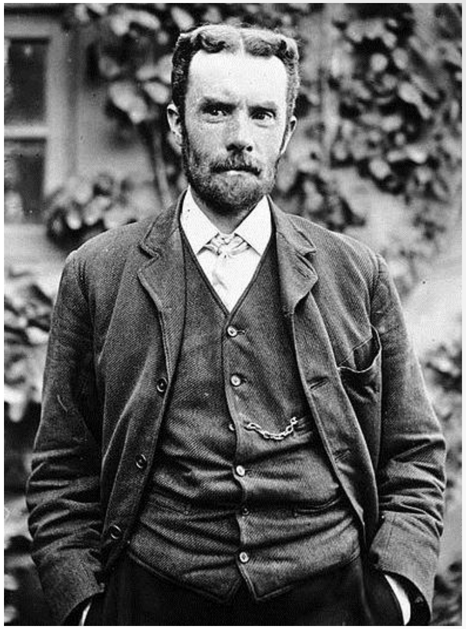
Equações de Maxwell

James Clerk Maxwell (1831-1879) escreveu, em meados do Século XIX, 3 artigos seminais tentando traçar um paralelo entre eletricidade e magnetismo, que progrediram em complexidade até a Teoria Eletromagnética Clássica que conhecemos hoje:

- ***On Faraday's Lines of Force*** (1855) – Maxwell buscou resgatar a idéia de "linhas de força" de Faraday – conhecidos hoje como campos vetoriais – e formalizou suas idéias num conjunto conexo de 20 EDOs e 20 variáveis.
- ***On Physical Lines of Force*** (1861-1862) – Maxwell apresentou, em 4 partes, uma teoria refinada conectando eletricidade e magnetismo baseada em campos vetoriais ("vórtices moleculares") e demostrou a necessidade da existência da *corrente de deslocamento*, introduzindo, desta forma, este termo na Lei de Ampère.
- ***On a Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*** (1865) – Maxwell apresenta o conjunto original daquelas que, hoje, são conhecidas como as *quatro Equações de Maxwell*, prevendo a existência de uma *onda eletromagnética* que se propagaria no tempo e no espaço com a velocidade da luz. Maxwell unificou, desta forma, eletricidade, magnetismo e a luz como manifestações do mesmo fenômeno – o fenômeno eletromagnético.

"A segunda maior unificação da física"

Equações de Maxwell



Oliver Heaviside (1850-1925) reformulou as 20 equações originais de Maxwell utilizando a notação vetorial moderna (que ele ajudou a criar). Das equações originais, 18 poderiam ser vetorizadas em 6, cada uma representando 3 equações originais (cada componente). O conjunto de 8 equações resultantes, em notação moderna era:

Lei das correntes totais:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{tot}} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Definição do potencial magnético vetorial:

$$\mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Lei Circuital de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathbf{tot}}$$

A Força Eletromotriz: (por convecção, indução & estática – Lorentz + Faraday + Coulomb)

$$\mathbf{f} = \mu\left(\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

Equação da elasticidade elétrica:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}$$

Lei de Ohm:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{J}$$

Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Equação da continuidade de carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Força Eletromotriz: $\mathbf{f} \rightarrow \mathrm{N/C}$

Equações de Maxwell

A forma moderna destaca somente quatro equações (as demais são restrições e relações constitutivas dos campos), utiliza campos em detrimento de potenciais e substitui “força por unidade de carga” pelo campo elétrico:

E Deus disse:

Lei de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	***Cargas produzem fluxo elétrico, com linhas de campo elétrico que divergem destas***
Lei de Gauss para o magnetismo	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	***Não existem monopolos magnéticos isolados; as linhas de campo magnético sempre se fecham***
Lei de Ampère-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	***Campos magnéticos podem ser produzidos de duas formas: por correntes elétricas ou campos elétricos variantes no tempo***
Lei de Faraday-Maxwell	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	***Campos magnéticos variantes no tempo induzem campos elétricos no espaço***

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

e só então fez-se a Luz...

Equações de Maxwell

Estas quatro equações vetoriais formam um conjunto compacto de 12 equações diferenciais parciais (EDPs) relacionando 3 componentes espaciais e 1 componente temporal dos campos.

A forma diferencial é conhecida como
FORMA PONTUAL:
(útil para geometrias distribuídas)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Em conjunto às relações constitutivas...

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases}$$

... e à Força de Lorentz & à Equação da Continuidade...

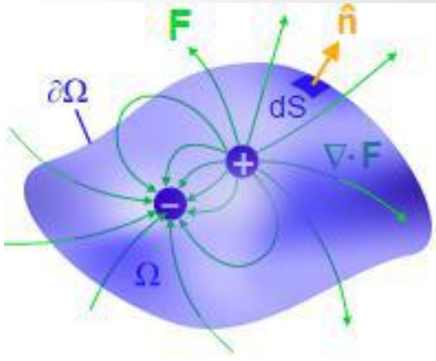
$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

PREVÊEM TODA E QUALQUER INTERAÇÃO ELETROMAGNÉTICA CLÁSSICA

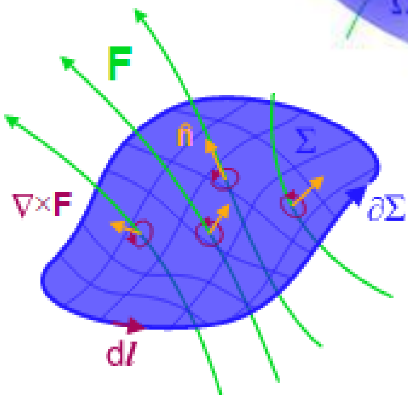
ufjf Universidade Federal de Juiz de Fora

Equações de Maxwell



A FORMA INTEGRAL é possível de derivar a partir dos teoremas de cálculo vetorial:

(útil para geometrias simétricas)



$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \rho_v \, dV = Q$$

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = \iint_{\Sigma} \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = I + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

Nas quais:

Ω *é um volume fechado de fronteira* $\partial\Omega$

Σ *é uma superfície aberta de fronteira* $\partial\Sigma$

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Equações de Maxwell

Uma outra formulação bastante popular é em termos dos potenciais (escalar e vetorial):

$$\left[V(x,y,z,t) \;\;\&\;\; \mathbf{A}(x,y,z,t)\right]$$

tal que

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases}$$

consequência da Lei de Gauss p/ o magnetismo

consequência da Lei de Fadaray

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \\ &\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu \mathbf{J} \end{aligned}\right\}$$

As 2 primeiras eq. somem (identidades) (não parece, mas é bastante compacta, só 4 componentes – 1 do potencial escalar e 3 do potencial vetorial)

*Como potenciais podem ser "livremente" arbitrados, podemos usar o **calibre (gauge) de Lorenz**, tal que:*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} V \to V - {\partial \psi}/{\partial t} \\ \mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla \psi \end{cases}$$

(mudança de potenciais)

ψ satisfaz:

$$\nabla^2 \psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

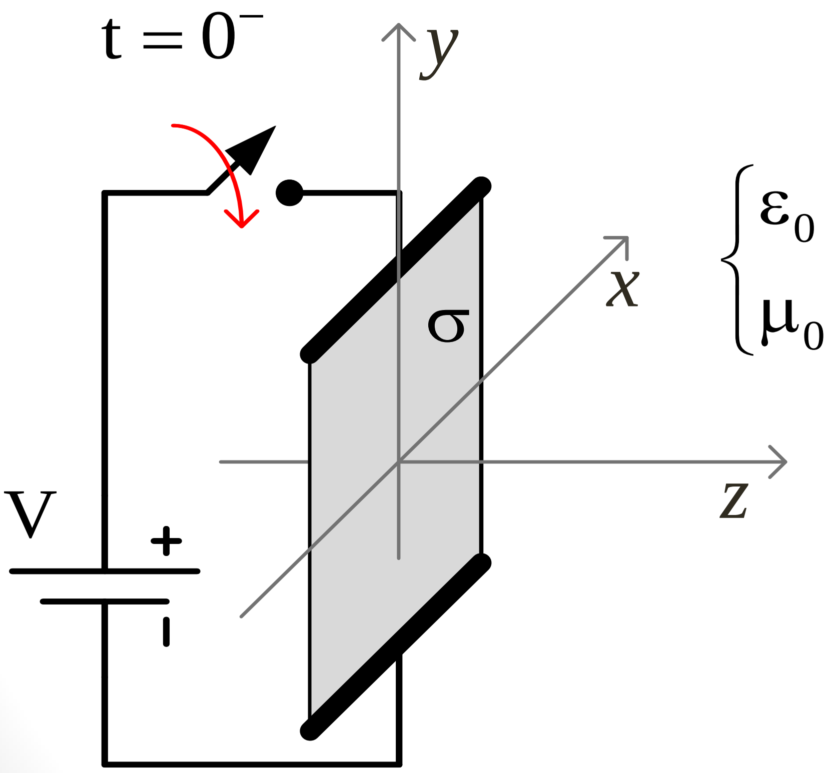
Similares à Eq. de Poisson
Resultam na Eq. de Onda não homogênea
Solução: potenciais avançados & retardados
Formulação em consoância c/ a Relatividade Especial

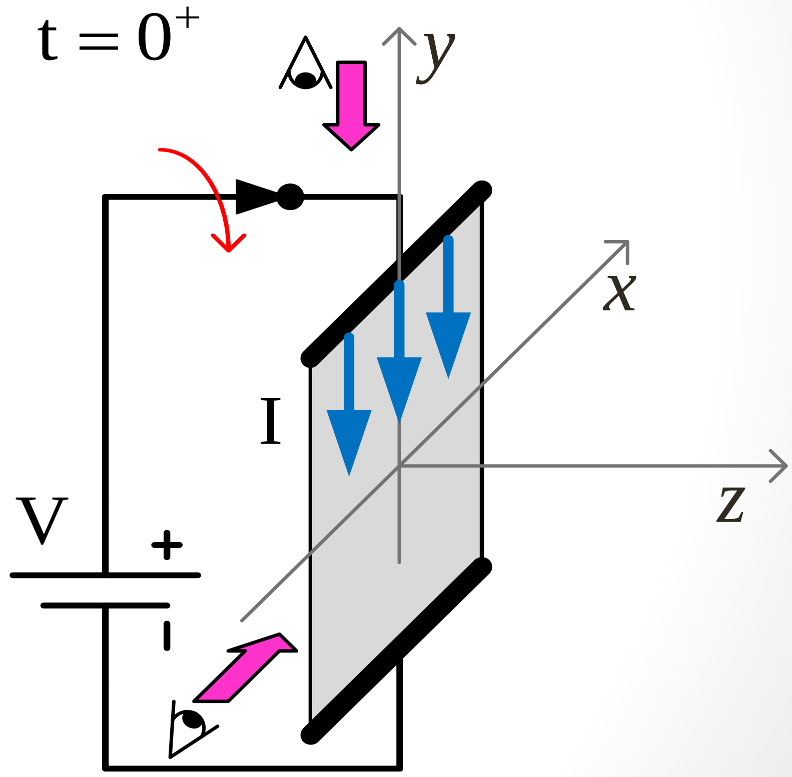
$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \\ &\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \end{aligned}}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Gauge_fixing
https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_gauge_condition

O que as Equações de Maxwell nos dizem?

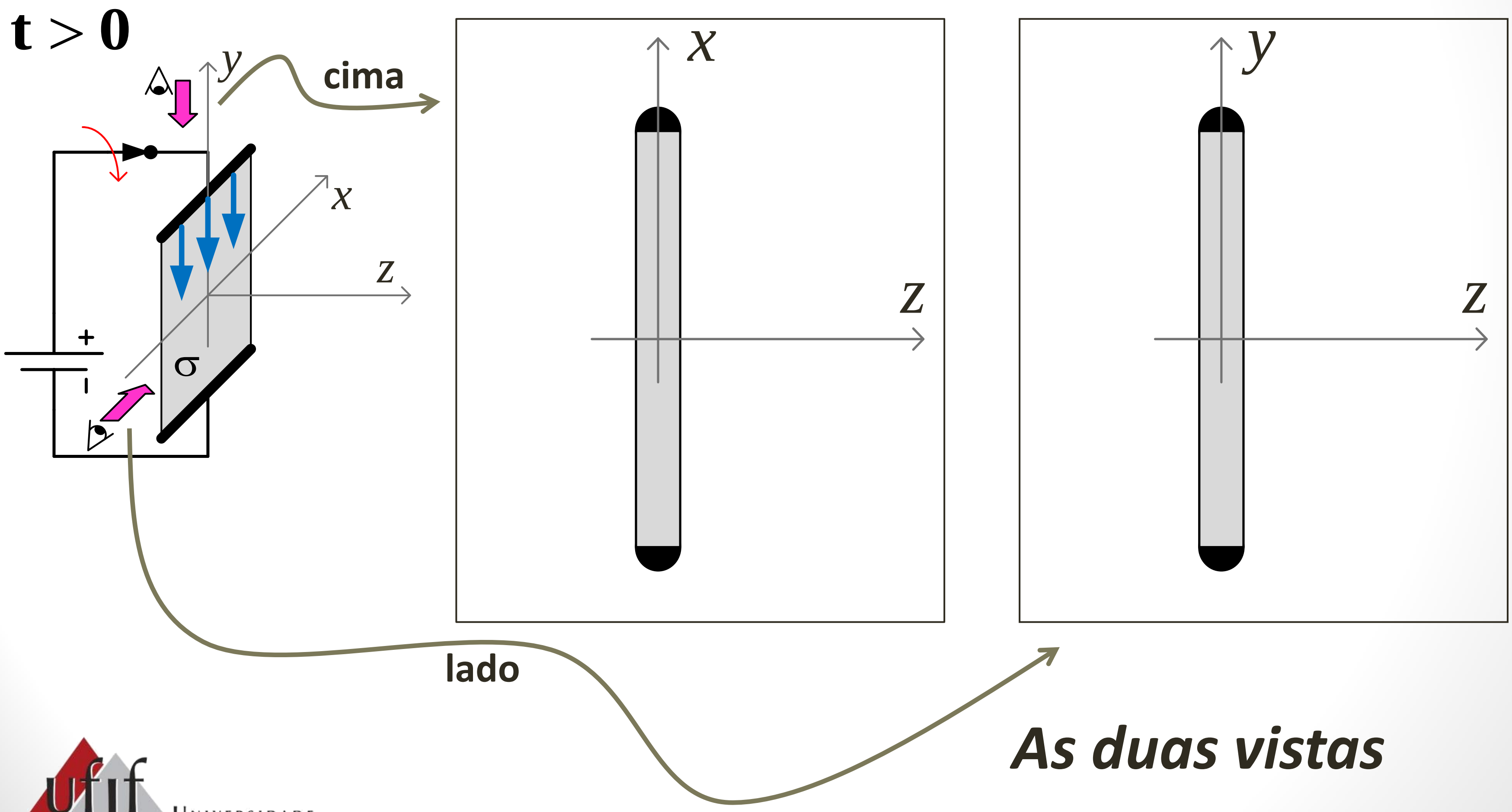
Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:





O que as Equações de Maxwell nos dizem?

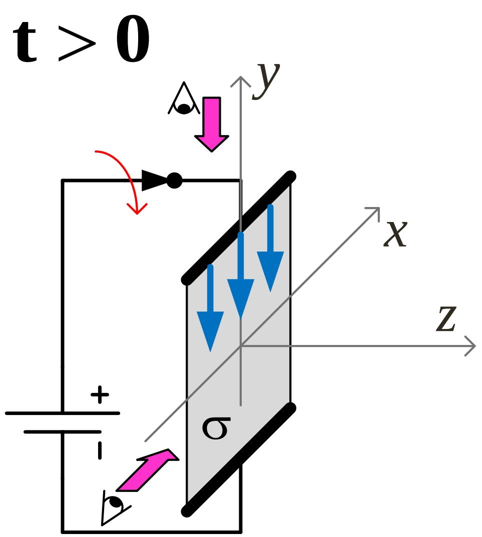
Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:

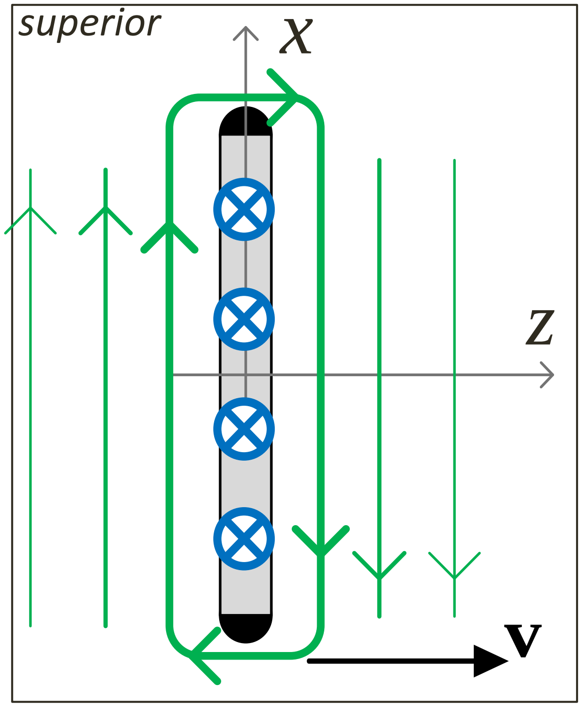


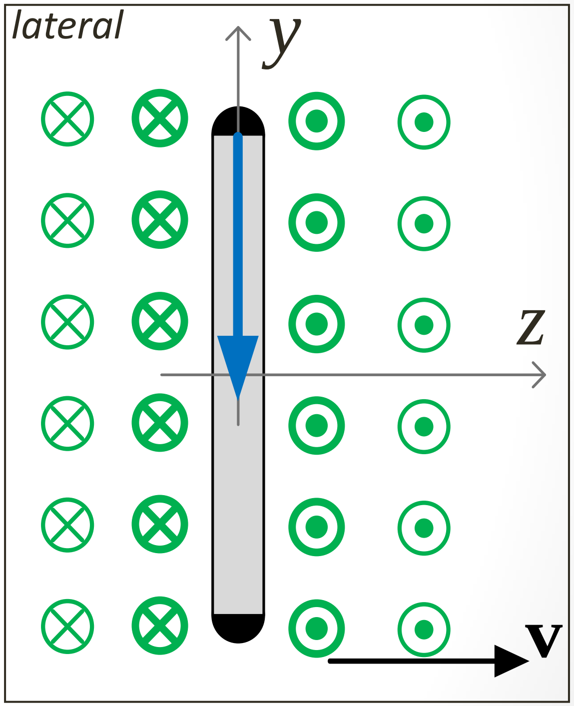
As duas vistas

O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:







Campos:

→ ***H***, ***B***

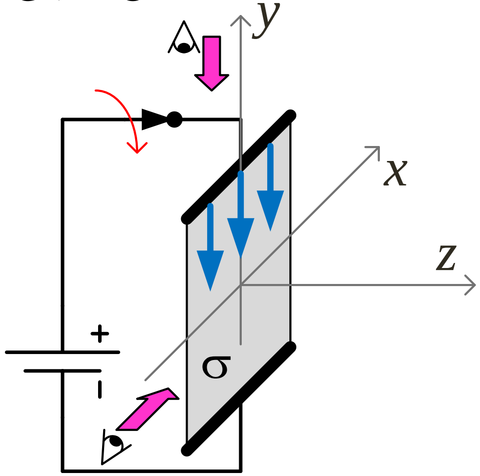
→ ***E***, ***D***

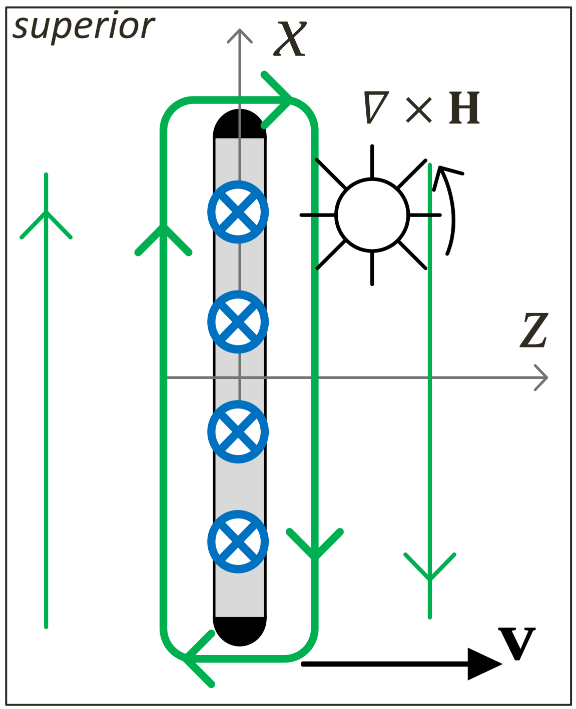
→ ***J***

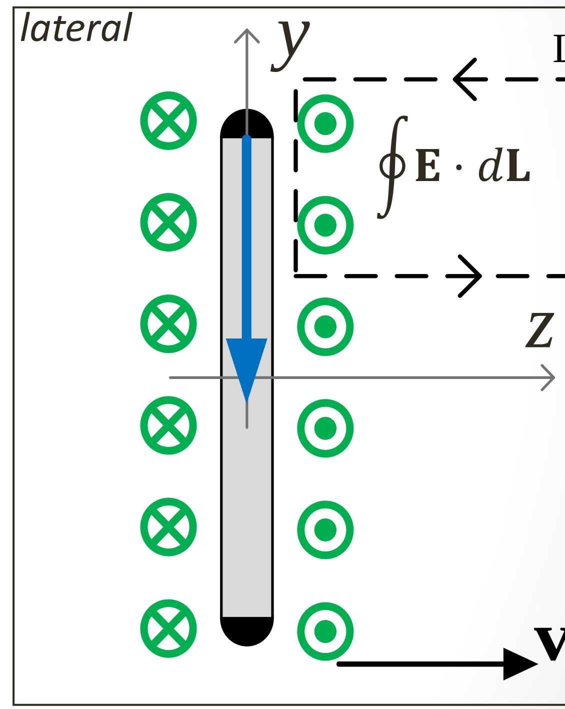
O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:

$\mathbf{t > 0}$







Campos:

- → $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}$
- → $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$
- → $\boldsymbol{J}$

Universidade Federal de Juiz de Fora

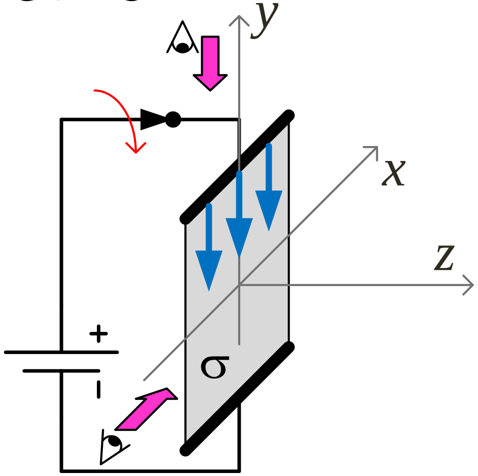
$$\nabla \times \mathbf{H} = \cancel{\sigma \mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:

$\mathbf{t > 0}$

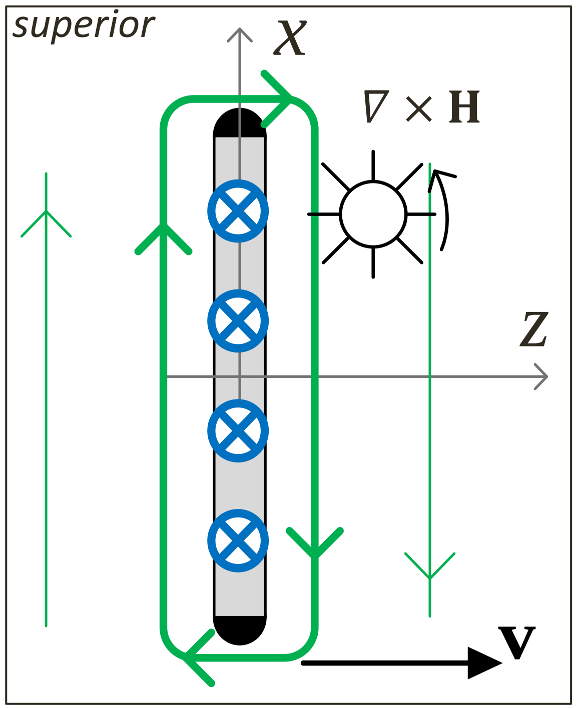


Campos:

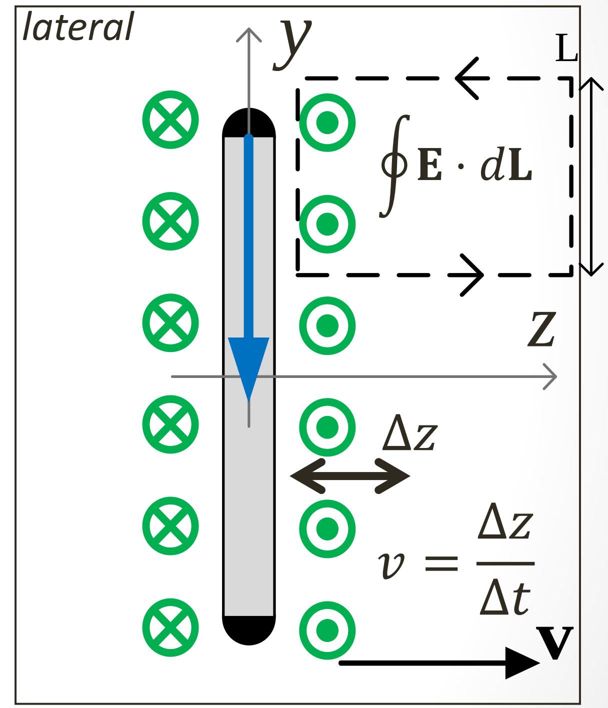
→ $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$

→ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$

→ $\boldsymbol{J}$



$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$



$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \mathrm{BLv}$$

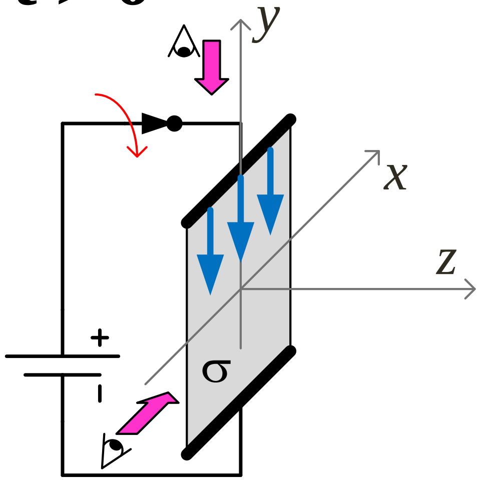
$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \mathrm{EL}$$

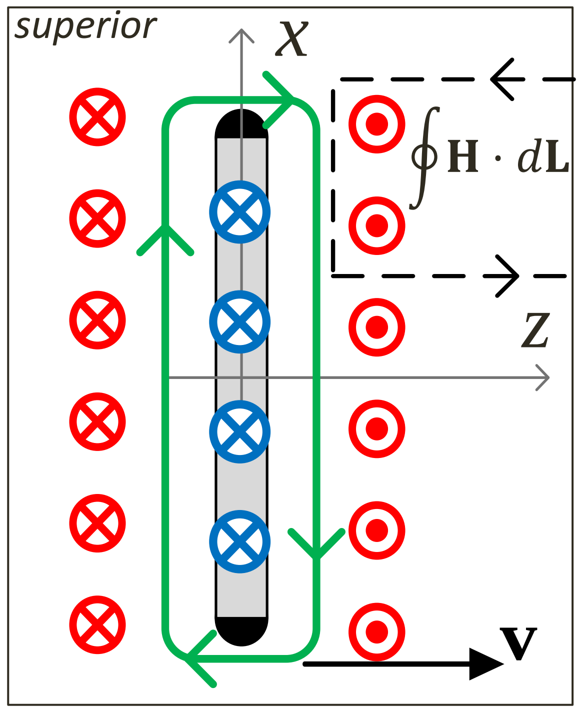
Universidade Federal de Juiz de Fora

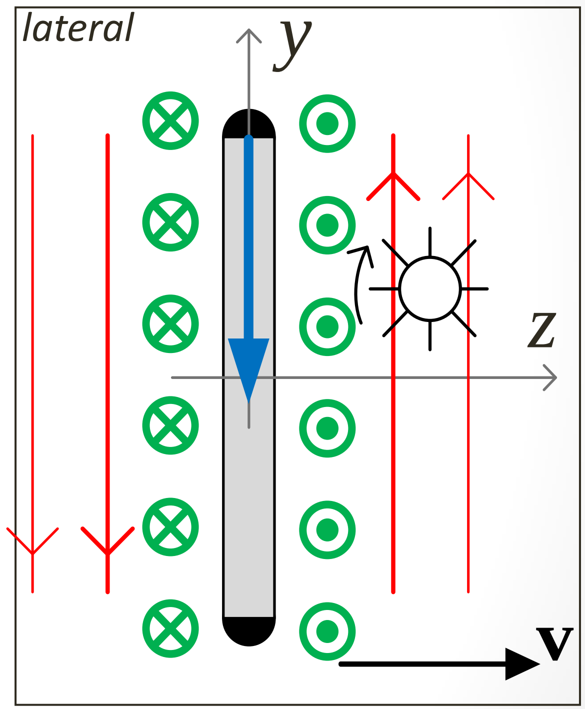
O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:

t > 0







Campos:

- → $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$
- → $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$
- → $\boldsymbol{J}$

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \cancel{\mathbf{I}} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

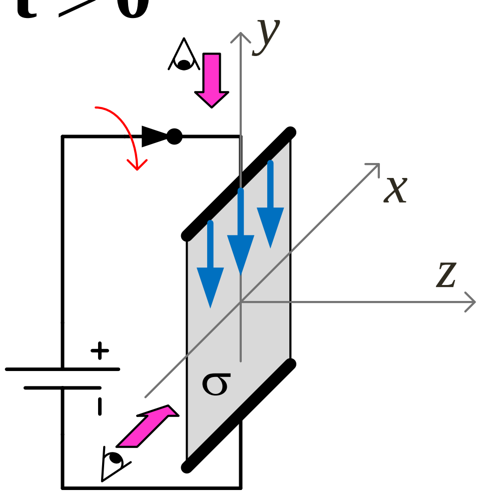
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

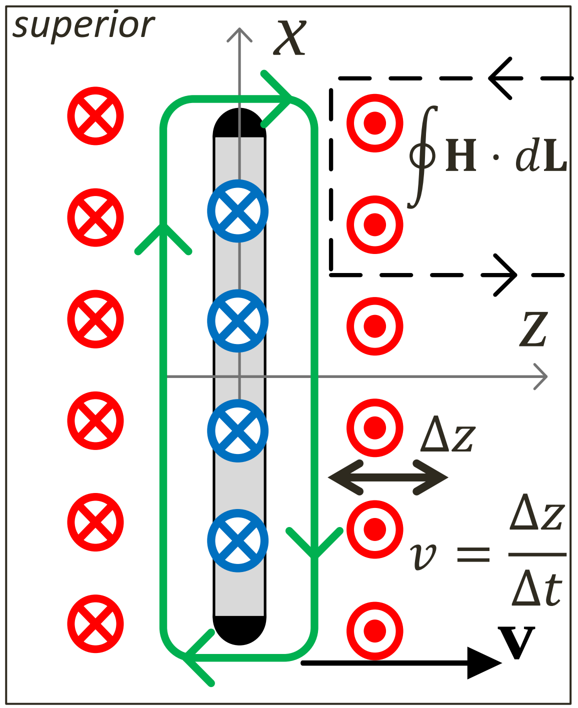
Universidade Federal de Juiz de Fora

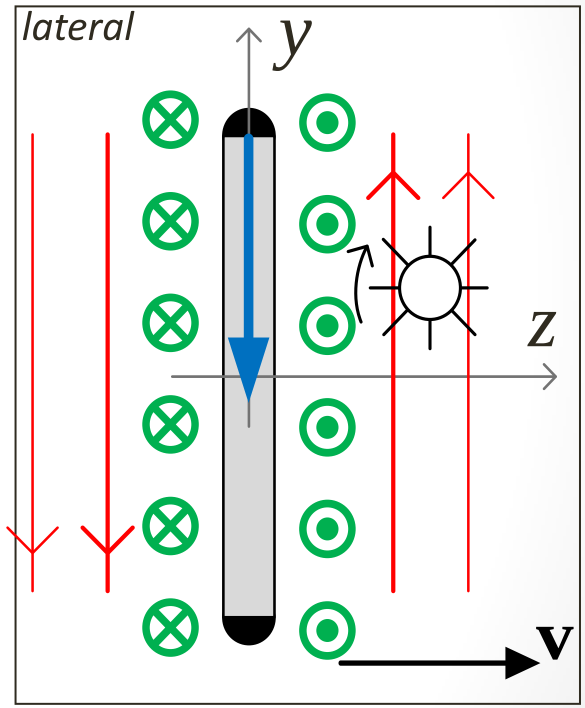
O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:

t > 0







Campos:

→ ***H*, *B***

→ ***E*, *D***

→ ***J***

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = DLv$$

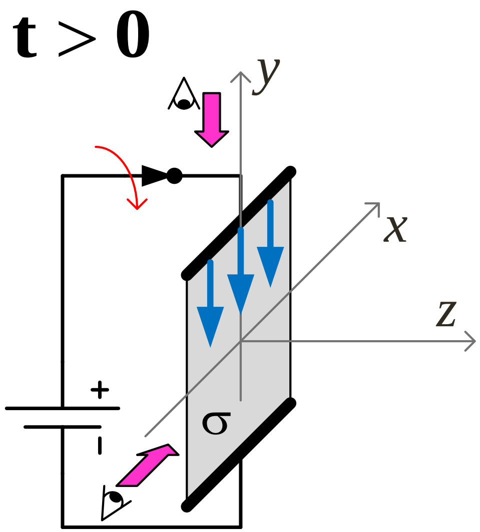
$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = HL$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:

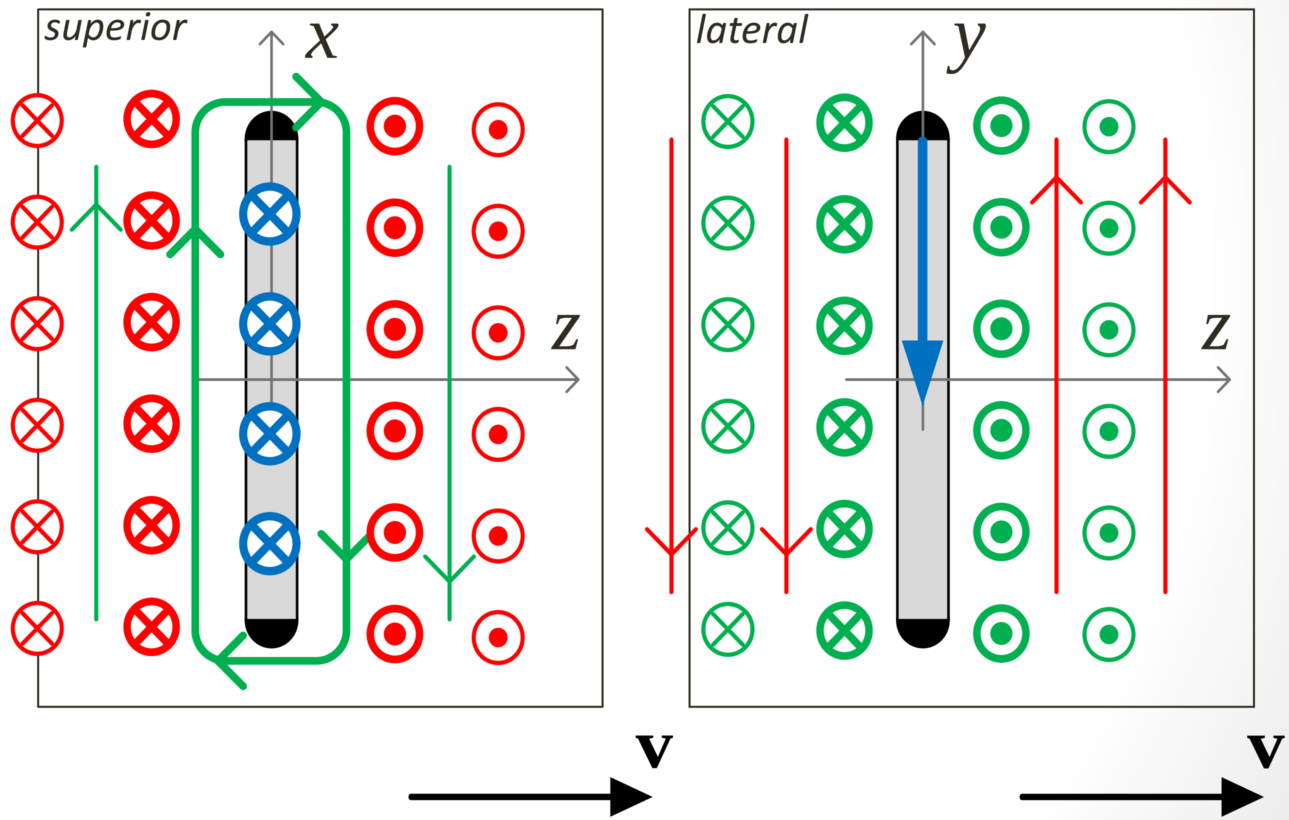


Campos:

→ ***H***, ***B***

→ ***E***, ***D***

→ ***J***



em todo o espaço!

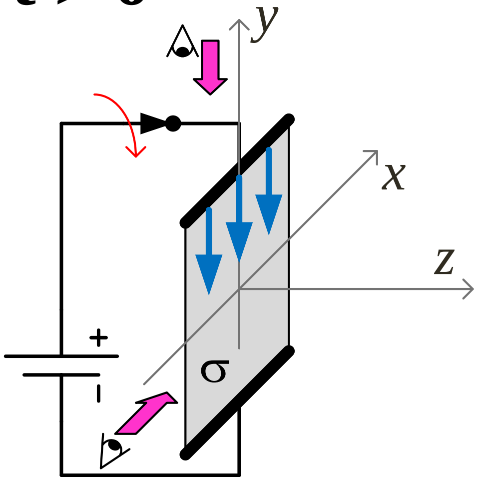
(pulso eletromagnético - PEM)

Universidade Federal de Juiz de Fora

O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Imaginemos o seguinte experimento com uma folha condutora num circuito:

$\mathbf{t > 0}$



Das duas últimas equações de Maxwell resultou que:

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = BLv \qquad \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = EL$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = DLv \qquad \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = HL$$

Campos:

→ ***H***, ***B***

→ ***E***, ***D***

→ ***J***

Como:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\begin{cases} \mu_0 H \cancel{L} v = E \cancel{L} \\ \varepsilon_0 E \cancel{L} v = H \cancel{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_0 v = \dfrac{E}{H} \\ \varepsilon_0 v = \dfrac{H}{E} \end{cases}$$

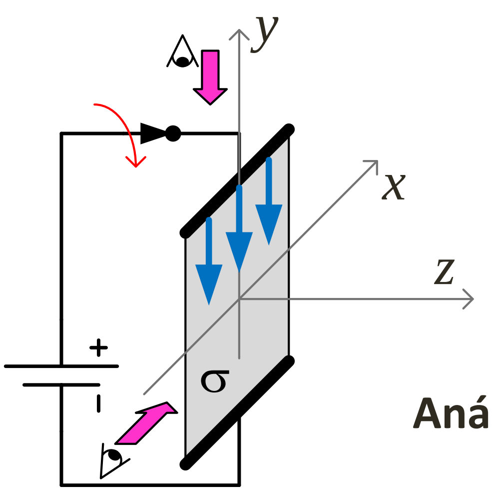
$$\therefore v^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

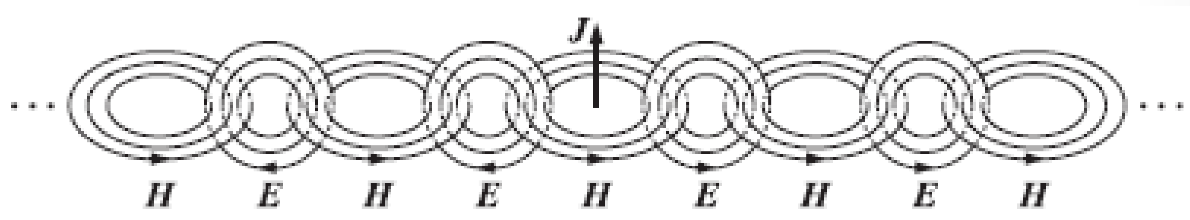
$\varepsilon_0 = 8,85418 \times 10^{-12}$ *F/m* (C^2/Nm^2)
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ *H/m* (N/A^2)
$v = ?$

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

O que as Equações de Maxwell nos dizem?

Um campo elétrico variante produz um campo magnético variante e vice-versa… estes campos se propagam no espaço com a velocidade da luz.





Análise dimensional:

$$\varepsilon_0 = \frac{D}{E} = \frac{C/m^2}{V/m} = \frac{F}{m} = \frac{A.s}{V.m}$$

$$\mu_0 = \frac{B}{H} = \frac{Wb/m^2}{A/m} = \frac{H}{m} = \frac{V.s}{A.m}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}}$$

$\varepsilon_0 = 8{,}85418 \times 10^{-12}$ F/m (C²/Nm²)

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m (N/A²)

$v = c = 2{,}998 \times 10^{8}$ m/s

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

A onda eletromagnética

A solução das Equações de Maxwell nos leva a crer que E e H propagam-se no espaço e no tempo, com a velocidade da luz, mesmo na ausência de condutores e cargas.

Equações no espaço livre (vácuo):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Para colocar tudo em função de E e H, as duas últimas equações podem ser manipuladas usando a identidade vetorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \left(\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Universidade Federal de Juiz de Fora

A onda eletromagnética

A solução das Equações de Maxwell nos leva a crer que E e H propagam-se no espaço e no tempo, com a velocidade da luz, mesmo na ausência de condutores e cargas.

Equações no espaço livre (vácuo):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Aplicando a Lei de Ampère & a Lei de Faraday:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \left(\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \dfrac{\partial (\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} \\ -\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \dfrac{\partial (\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} \end{cases}$$

A onda eletromagnética

A solução das Equações de Maxwell nos leva a crer que E e H propagam-se no espaço e no tempo, com a velocidade da luz, mesmo na ausência de condutores e cargas.

Equações no espaço livre (vácuo):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Resulta em:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \mathbf{H} = -\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}\right) \\ -\nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right) \end{cases}$$

Essas equações podem ser rearranjadas na conhecida equação de onda:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = 0} \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0}$$

A onda eletromagnética

A solução das Equações de Maxwell nos leva a crer que E e H propagam-se no espaço e no tempo, com a velocidade da luz, mesmo na ausência de condutores e cargas.

Equações no espaço livre (vácuo):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Equações homogêneas da onda eletromagnética:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0}$$

Que significam (p/ o campo elétrico):

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} E_x \mathbf{a_x} + \frac{d^2}{dy^2} E_y \mathbf{a_y} + \frac{d^2}{dz^2} E_z \mathbf{a_z}\right] =$$

$$= \mu_0 \varepsilon_0 \left[\frac{d^2}{dt^2} E_x \mathbf{a_x} + \frac{d^2}{dt^2} E_x \mathbf{a_y} + \frac{d^2}{dt^2} E_z \mathbf{a_z}\right]$$

variações espaciais associadas a variações temporais

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

A onda eletromagnética

Eq. de onda em 1 dimensão (por ex., em x):

$$c^2\nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

variações espaciais associadas a variações temporais

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{H} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = 0}$$

onde c é a velocidade de propagação no espaço (c relaciona tempo e espaço).

Soluções possíveis para a equação de onda são quaisquer umas do tipo:

$$u(x,t) = f(x \pm ct)$$

(provar usando regra da cadeia)

pois outra forma de escrever a eq. é:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right]u = 0$$

ou $\square u = 0 \quad \rightarrow \quad \square = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)$ *operador d'Alembertiano*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

A onda eletromagnética

Eq. de onda em 1 dimensão:

$$c^2\nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

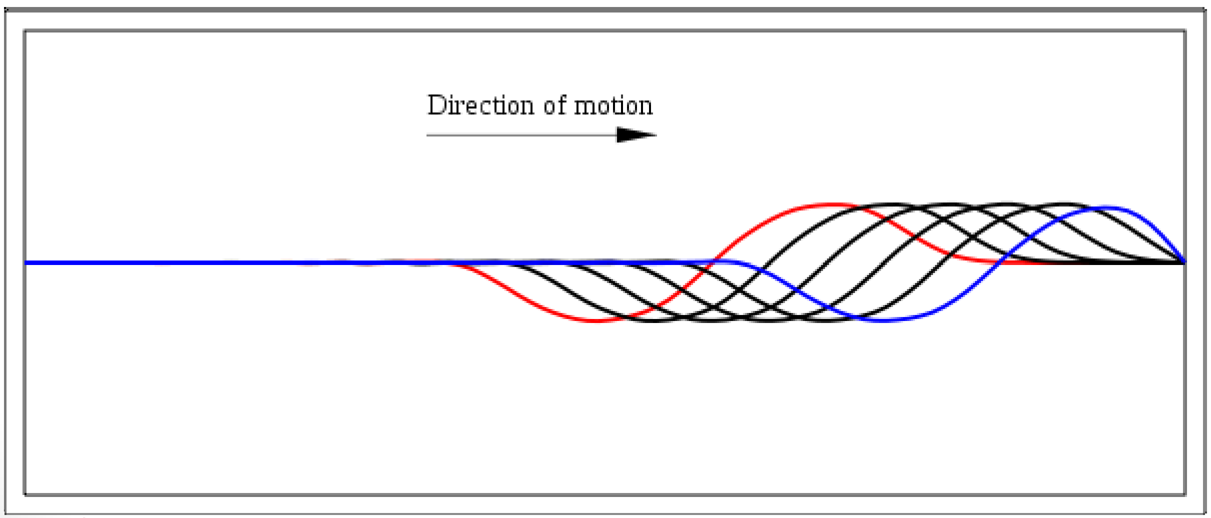
$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0$$

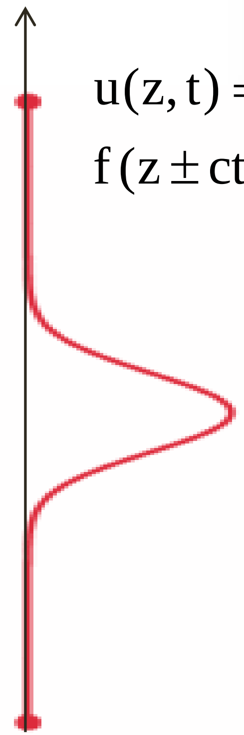
$$\nabla^2\mathbf{H} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = 0$$

é uma EDP linear

(i.e., a combinação linear de soluções também forma uma solução)

$$u(x,t) = f(x \pm ct)$$





$$u(z,t) = f(z \pm ct)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

A onda eletromagnética

$$\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)}_{\square}u=0$$

d'Alembartiano

Exemplo de uma solução unidimensional específica (senoidal, propagando só em z, como o exemplo):

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}=0}$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{H}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}=0}$$

$$\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E_0}e^{j(\omega t-kz)}$$

fase (φ), $\omega = \partial\varphi/\partial t$

1. **Se esta onda eletromagnética existe, qual a velocidade de propagação dela?**
2. **Qual deve ser a relação entre k, ω e c com μ_0 e ε_0 para ser uma solução da eq. de onda?**
3. **Qual deve ser a relação entre E e H para satisfazer a todas as equações de Maxwell?**

velocidade de propagação

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{\left[\partial\varphi/\partial t\right]}{\left[\partial\varphi/\partial z\right]}=\frac{\omega}{k}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

velocidade fasorial (ou número de onda ou frequência espacial) – m^{-1}

$$\eta_0=\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\frac{1}{\varepsilon_0 c}=\mu_0 c$$

impedância do espaço livre (vácuo) – Ω

ufjf Universidade Federal de Juiz de Fora

A onda eletromagnética plana

Onda eletromagnética plana senoidal é uma solução específica, na qual os campos são constante no plano x-y (z = cte) para cada instante de tempo t, e se propaga no sentido z (por exemplo):

$$\begin{cases} E_y(z,t) = E_m e^{j(\omega t - kz)} \\ H_x(z,t) = -H_m e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

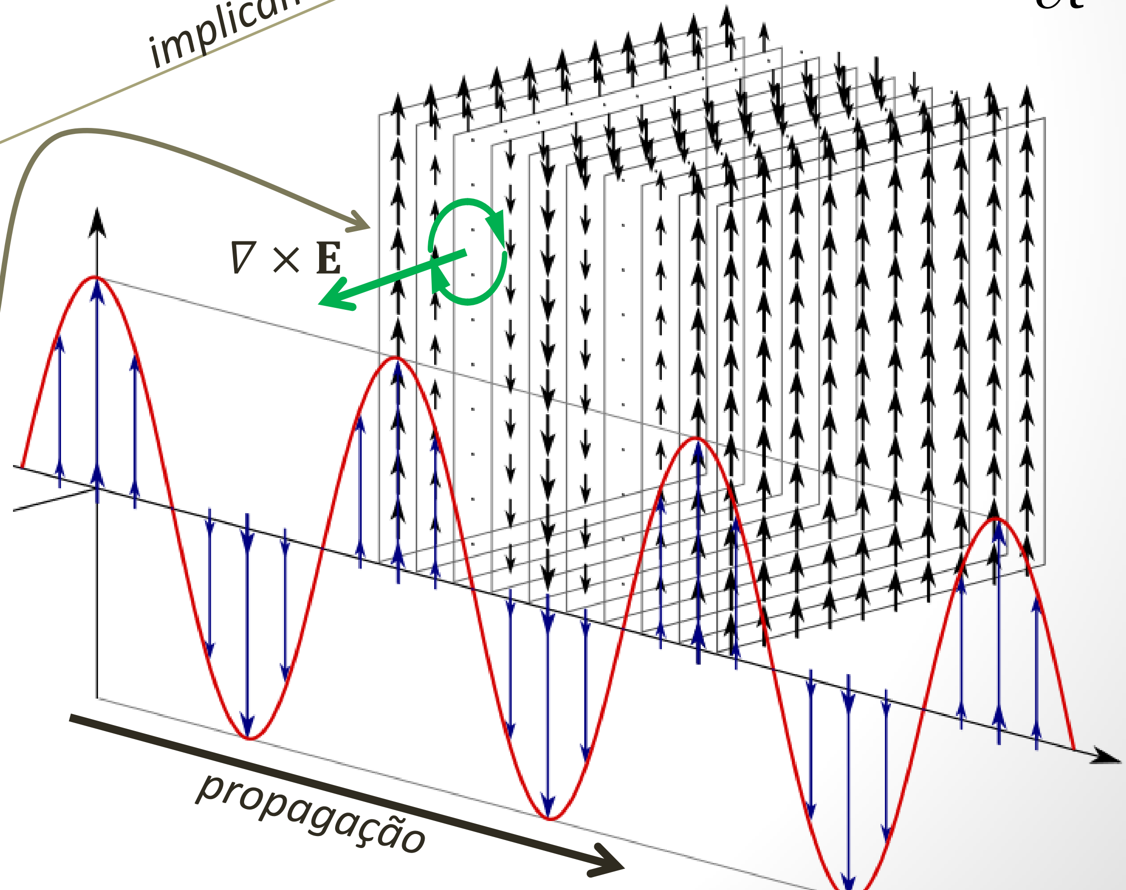
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

implicam que

***E** e **H** têm de ser obrigatoriamente perpendiculares um ao outro e ambos perpendiculares à direção de propagação!*

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

A onda eletromagnética plana

Onda eletromagnética plana senoidal é uma solução específica, na qual os campos são constante no plano x-y (z = cte) para cada instante de tempo t, e se propaga no sentido z (por exemplo):

$$\begin{cases} E_y(z,t) = E_m e^{j(\omega t - kz)} \\ H_x(z,t) = -H_m e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

outra forma de escrever:

$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = 0}$$

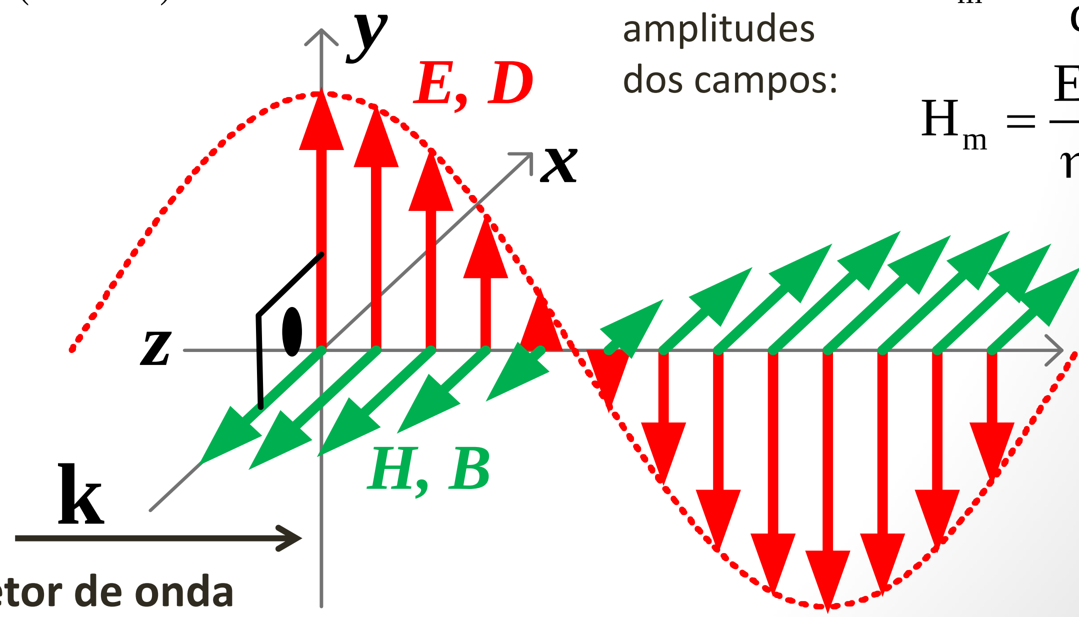
relações entre amplitudes dos campos:

$$B_m = \frac{E_m}{c}$$

$$H_m = \frac{E_m}{\eta_0}$$

Direção & sentido da propagação é dada pelo vetor de Poyinting:

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

A onda eletromagnética plana

Onda eletromagnética plana senoidal é uma solução específica, na qual os campos são constante no plano x-y (z = cte) para cada instante de tempo t, e se propaga no sentido z (por exemplo):

$$\begin{cases} E_y(z,t) = E_m e^{j(\omega t - kz)} \\ H_x(z,t) = -H_m e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

outra forma de escrever:

$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = 0}$$

Vetor de onda: k, tal que:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \;\Rightarrow\; S = \mu_0 c = \frac{E_m B_m}{\mu_0} = E_m H_m$$ *(pico)*

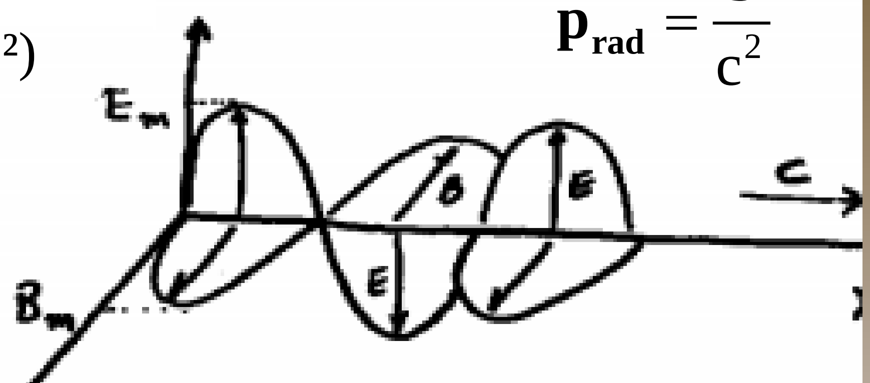
Dá o **vetor de fluxo de energia eletromagnética atravessando** **o espaço, por unidade de área por unidade de tempo – W/m².**

A onda possui momento!

Intensidade da radiação: $I_{rad} = \langle S \rangle \quad (W/m^2)$ *média temporal*

Pressão da radiação: $P_{rad} = \dfrac{\langle S \rangle}{c} \quad (Pa)$

$$\mathbf{p}_{\mathbf{rad}} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$



UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

A onda eletromagnética plana

Algumas (tentativas de) visualização de uma
onda plana senoidal

outra forma de escrever:

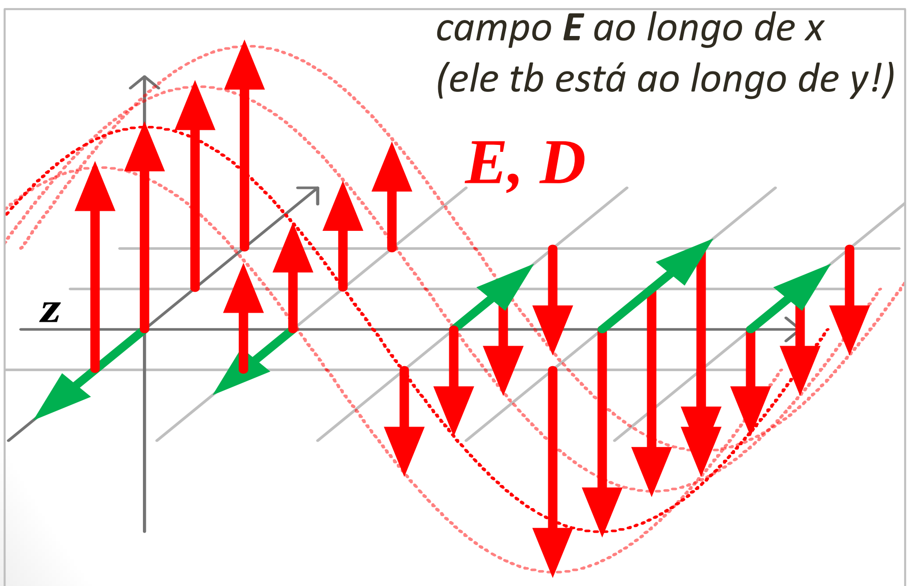
$$B_m = \frac{E_m}{c}$$

$$H_m = \frac{E_m}{\eta_0}$$

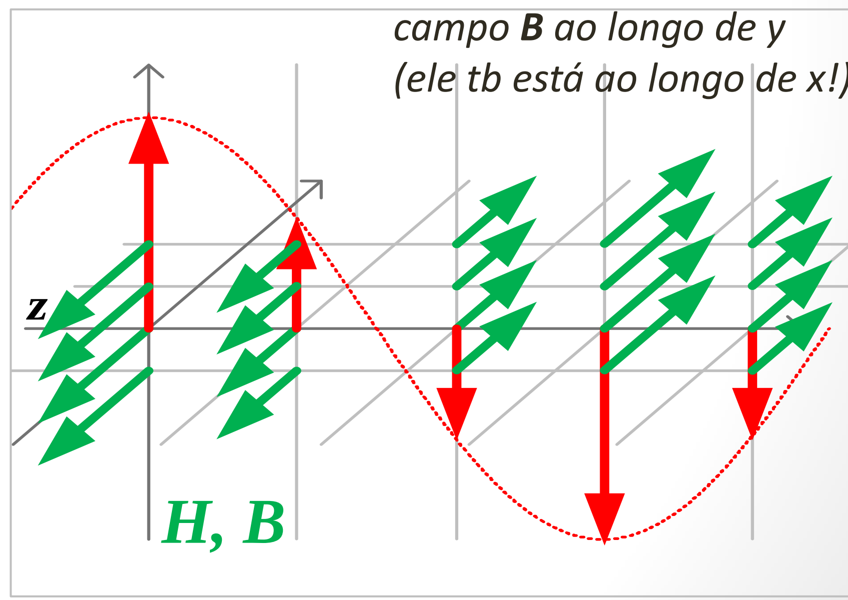
$$\begin{cases} E_y(z,t) = E_m e^{j(\omega t - kz)} \\ H_x(z,t) = -H_m e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$$

$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = 0}$$



*campo **E** ao longo de x*
(ele tb está ao longo de y!)



*campo **B** ao longo de y*
(ele tb está ao longo de x!)

Universidade Federal de Juiz de Fora

A onda eletromagnética é um tipo de ***onda transversal*** *– por que?*

A onda eletromagnética plana

Algumas (tentativas de) visualização de uma
onda plana senoidal

outra forma de escrever:

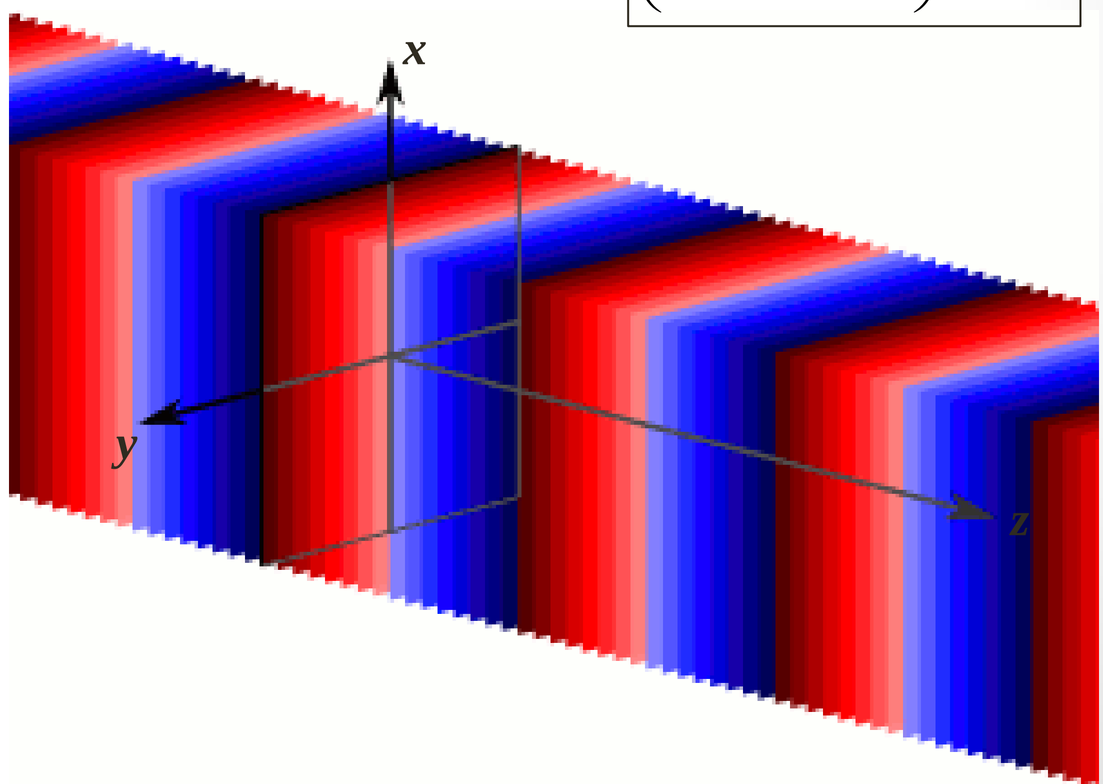
$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0}$$

$$\boxed{\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = 0}$$

$$\begin{cases} E_y(z,t) = E_m e^{j(\omega t - kz)} \\ H_x(z,t) = -H_m e^{j(\omega t - kz)} \end{cases}$$

são ambos "planos" se propagando

Por que estudar a "onda plana"?



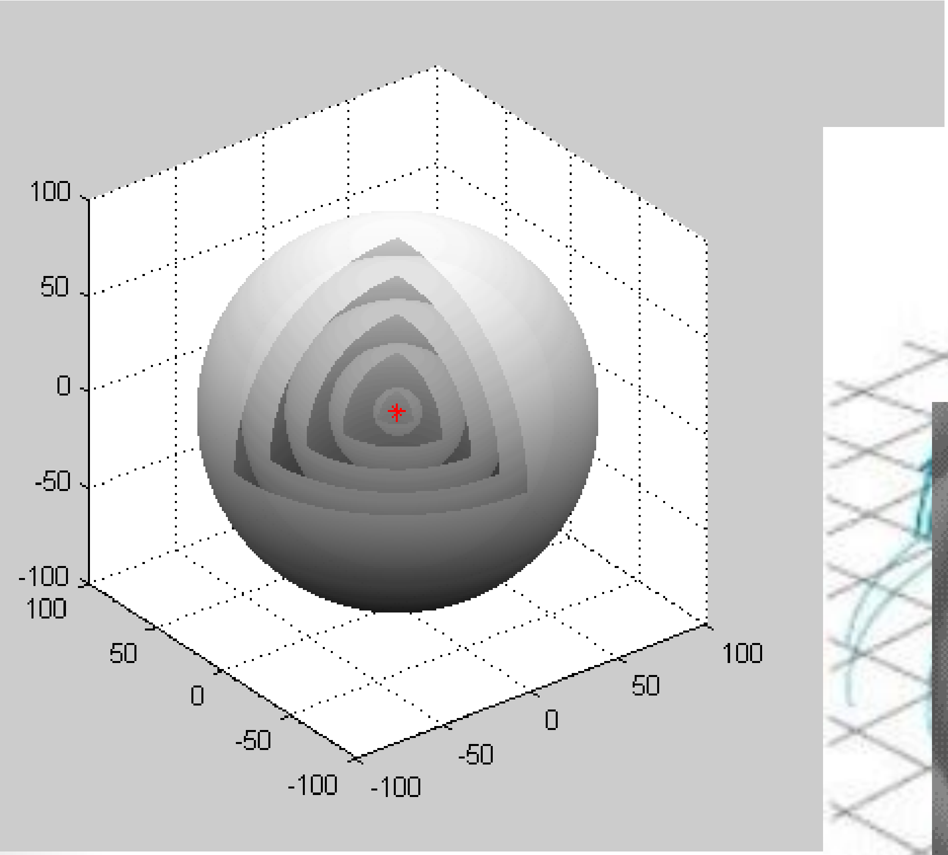
Universidade Federal de Juiz de Fora

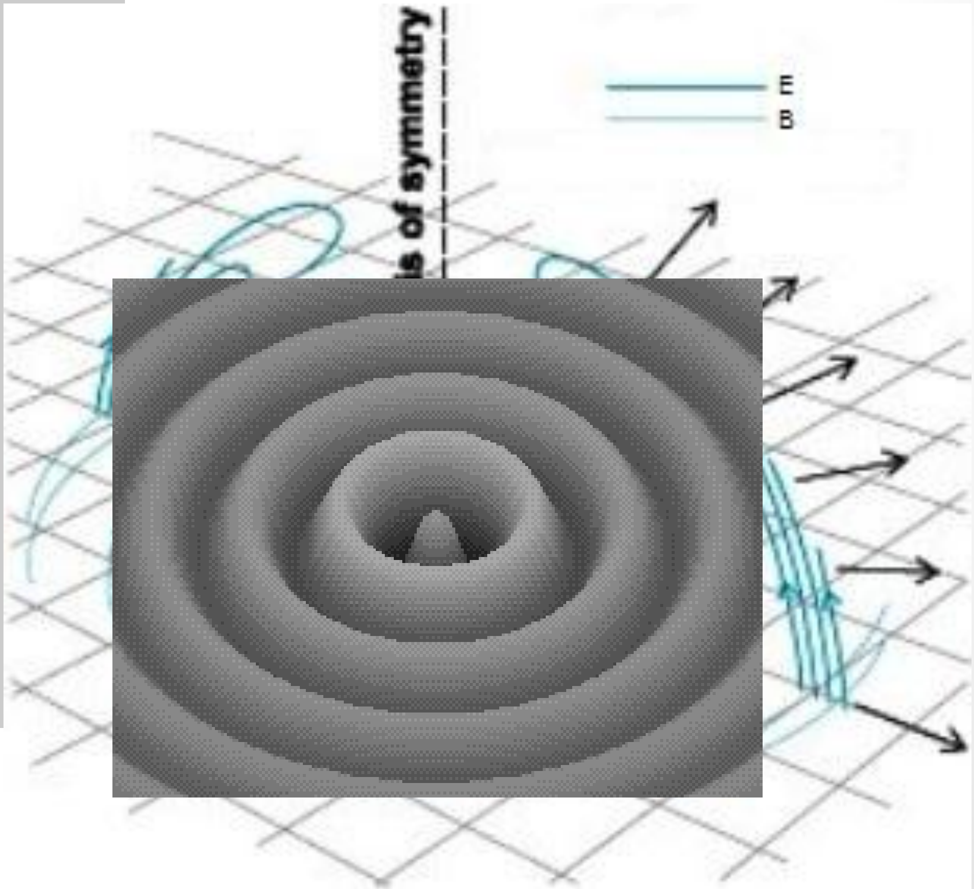
Ondas eletromagnéticas esféricas

$$\mathbf{E}(z,t) = \frac{E_m}{r} e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{a_r}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E_r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E_r}$$

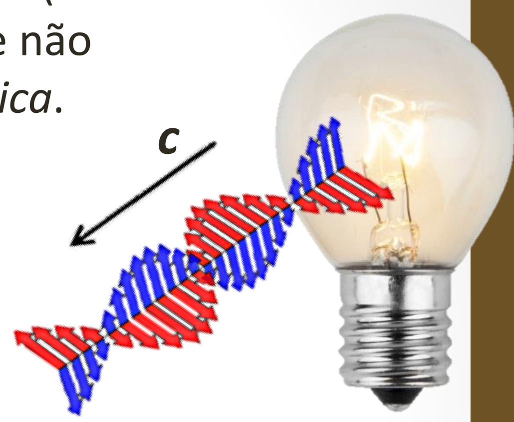
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE_r) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rE_r)$$





A luz como onda eletromagnética

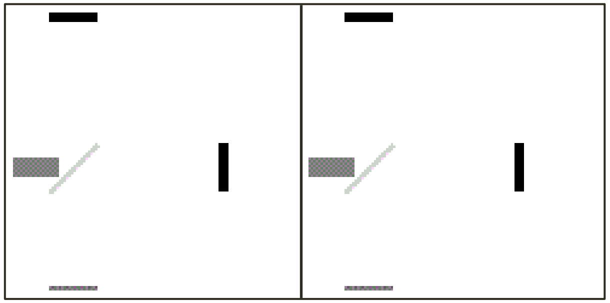
A conclusão imediata de Maxwell era de que estava correta a teoria (ainda não dominante na época) de que a luz propagava-se como onda, e não como partícula – sendo, portanto, uma *perturbação eletromagnética*.



Após um experimento para determinar as constantes de permissividade e de permeabilidade (balanceando forças elétricas & forças magnéticas), Maxwell comparou o resultado para "c" obtido com a já conhecida velocidade da luz e comentou em seu artigo "***A Dynamical Theory of the Electromagnetic FIeld***":

"A concordância entre os resultados parece mostrar que a luz e o magnetismo são afecções da mesma substância, e que a luz é um distúrbio eletromagnético propagado através do campo de acordo com leis eletromagnéticas."

Se eu sou um cientista do final do Sec. XIX, a primeira pergunta que vem na minha cabeça é:
"Mas… se toda onda se propaga por um meio, qual o meio de propagação da luz?"



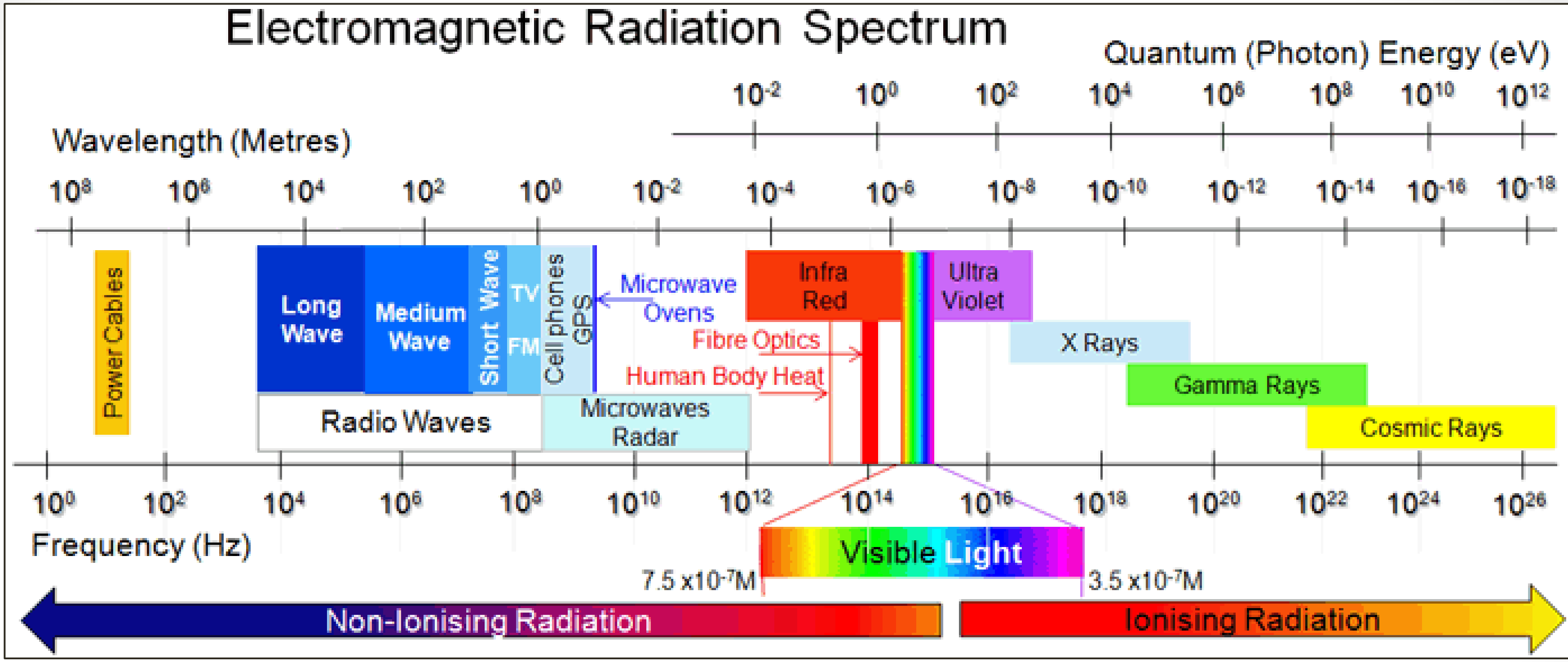
Experimento de Michelson-Morley

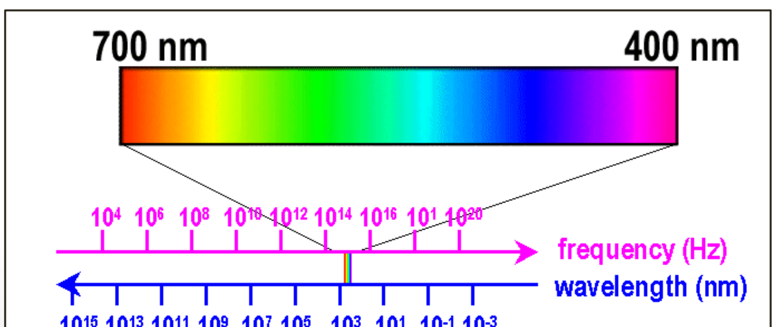
As equações de Maxwell também levavam a acreditar que a velocidade da luz não dependia da velocidade da fonte…

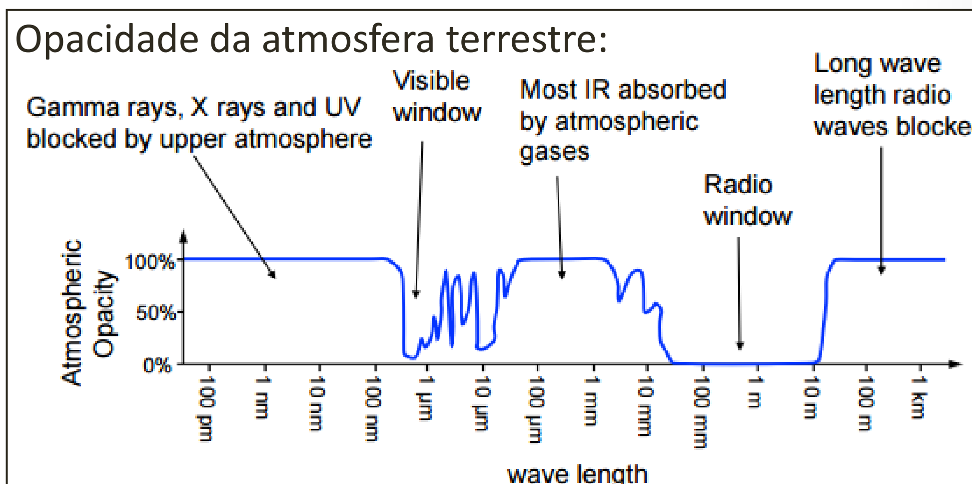
Um meio de propagação era desnecessário – como mostrou Einstein em "Zur Elektrodynamik bewegter Körper".

Universidade Federal de Juiz de Fora

A luz como onda eletromagnética







UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

$$\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

Polarização

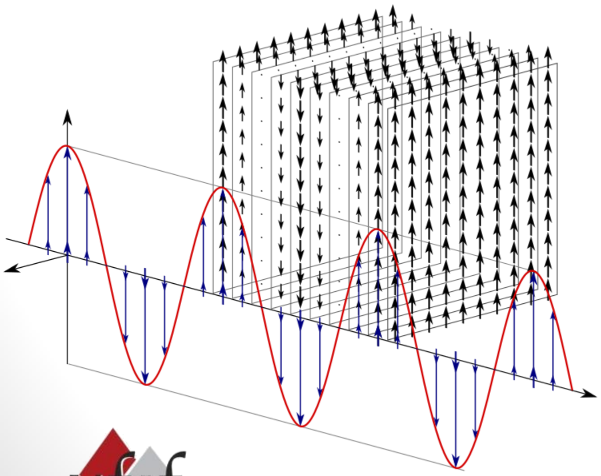
A solução que encontramos para a equação da onda eletromagnética é uma onda plana senoidal linearmente polarizada (solução bastante específica). Existem outras formas para o campo elétrico com as quais a onda eletromagnética plana também pode se propagar.

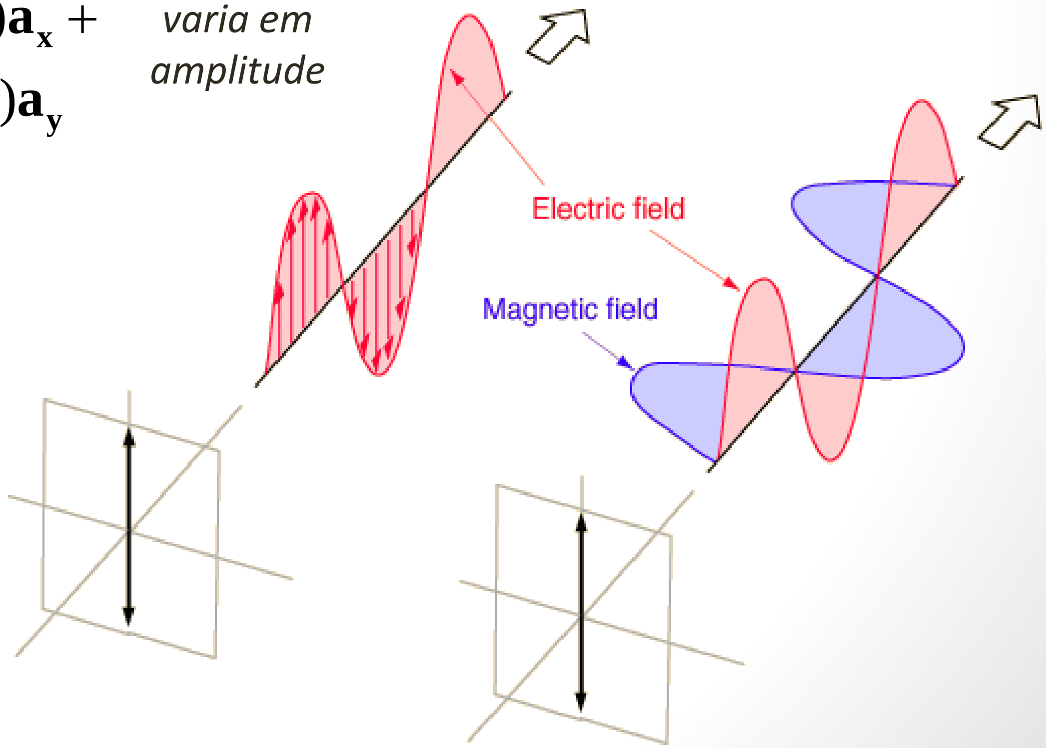
A polarização dita a forma como E varia no tempo e espaço.

Polarização linear:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_x \,\mathrm{sen}(\omega t - kz + \alpha_x)\mathbf{a_x} + \\ + E_y \,\mathrm{sen}(\omega t - kz + \alpha_y)\mathbf{a_y}$$

campo ***E*** *varia em amplitude*





Polarização

$$\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

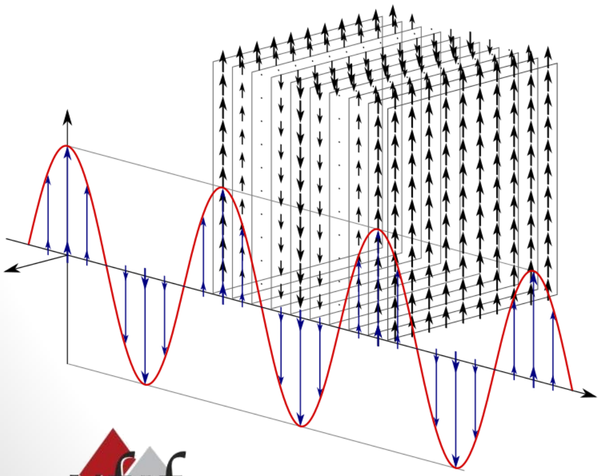
A solução que encontramos para a equação da onda eletromagnética é uma onda plana senoidal linearmente polarizada (solução bastante específica). Existem outras formas para o campo elétrico com as quais a onda eletromagnética plana também pode se propagar.

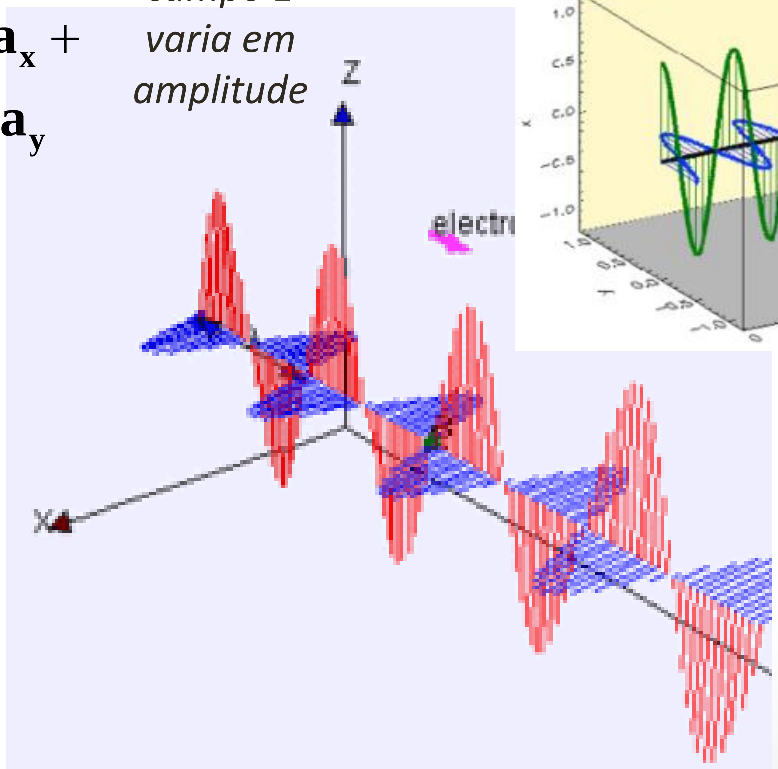
A polarização dita a forma como E varia no tempo e espaço.

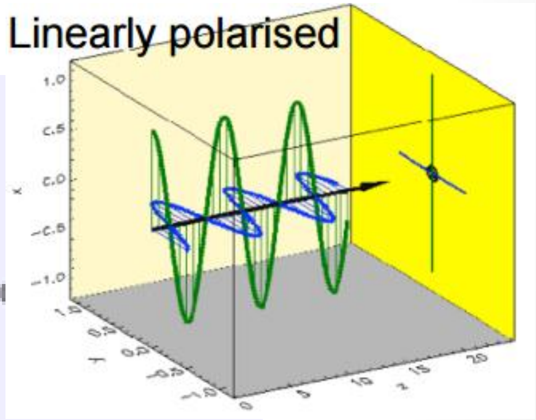
Polarização linear:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_x\,\mathrm{sen}(\omega t - kz + \alpha_x)\mathbf{a_x} + E_y\,\mathrm{sen}(\omega t - kz + \alpha_y)\mathbf{a_y}$$

*campo **E** varia em amplitude*







UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Polarização

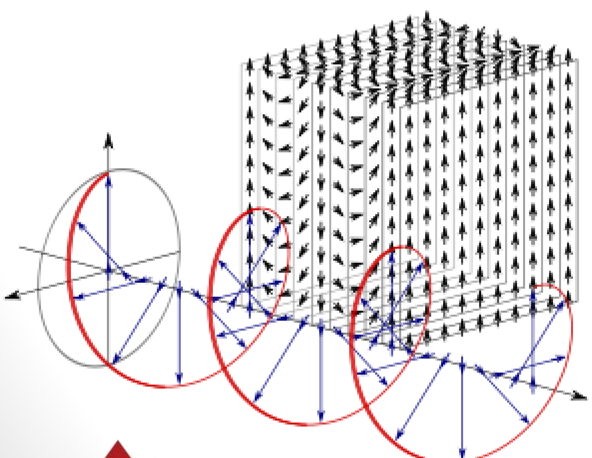
$$\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

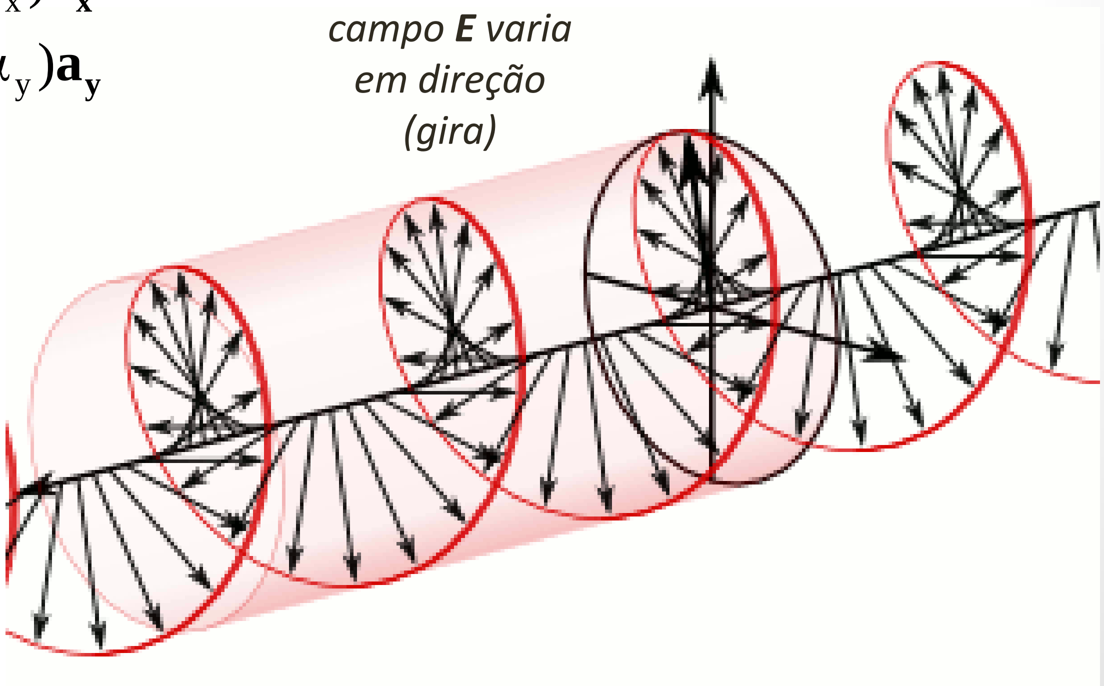
A solução que encontramos para a equação da onda eletromagnética é uma onda plana senoidal linearmente polarizada (solução bastante específica). Existem outras formas para o campo elétrico com as quais a onda eletromagnética plana também pode se propagar.

A polarização dita a forma como E varia no tempo e espaço.

Polarização circular ("right-handed" – ou sentido "horário" do pto. de vista da fonte):

$$\mathbf{E}(z,t) = E_x\cos(\omega t - kz + \alpha_x)\mathbf{a_x} +$$
$$+ E_y\,\mathrm{sen}(\omega t - kz + \alpha_y)\mathbf{a_y}$$





$$\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

Polarização

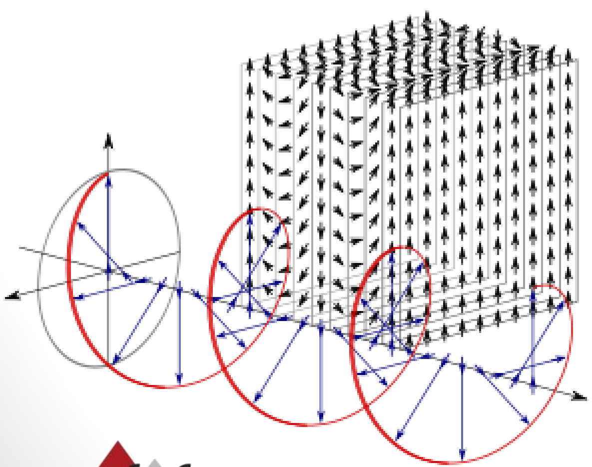
A solução que encontramos para a equação da onda eletromagnética é uma onda plana senoidal linearmente polarizada (solução bastante específica). Existem outras formas para o campo elétrico com as quais a onda eletromagnética plana também pode se propagar.

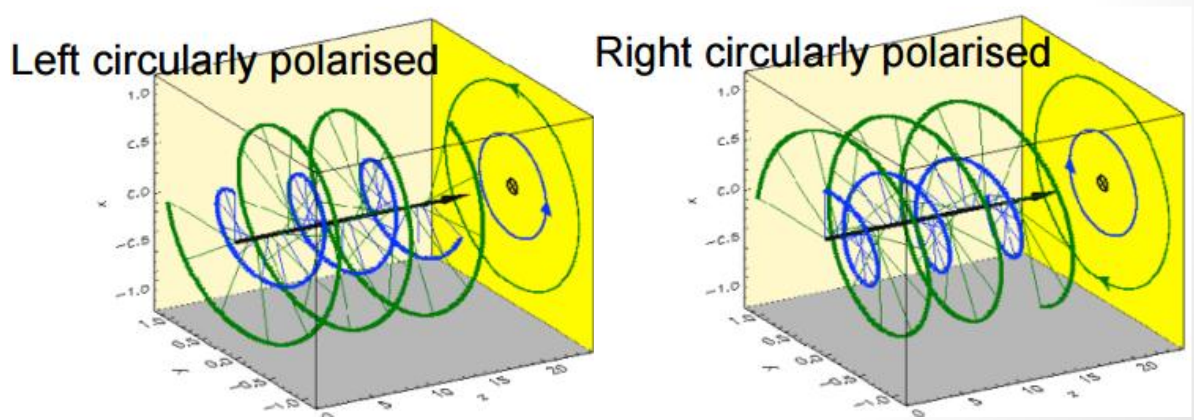
A polarização dita a forma como E varia no tempo e espaço.

Polarização circular ("right-handed" – ou sentido "horário" do pto. de vista da fonte):

$$\mathbf{E}(z,t) = E_x\cos(\omega t - kz + \alpha_x)\mathbf{a_x} + \\ + E_y\,\mathrm{sen}(\omega t - kz + \alpha_y)\mathbf{a_y}$$

*campo **E** varia em direção (gira)*



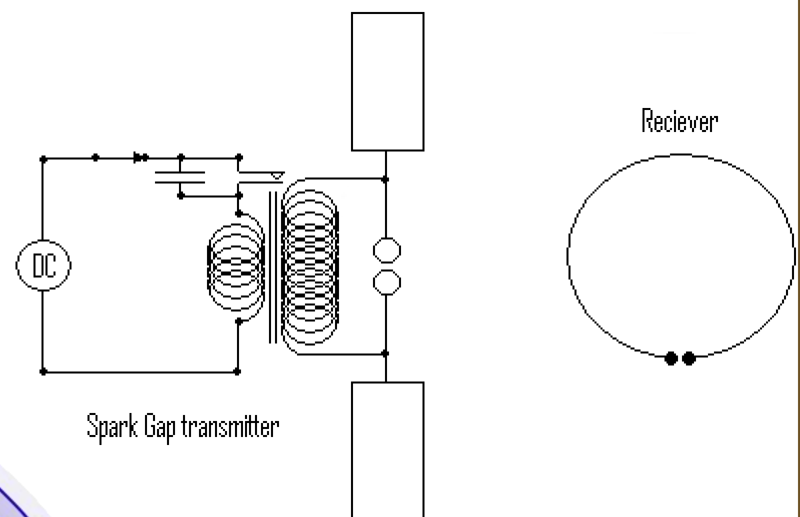


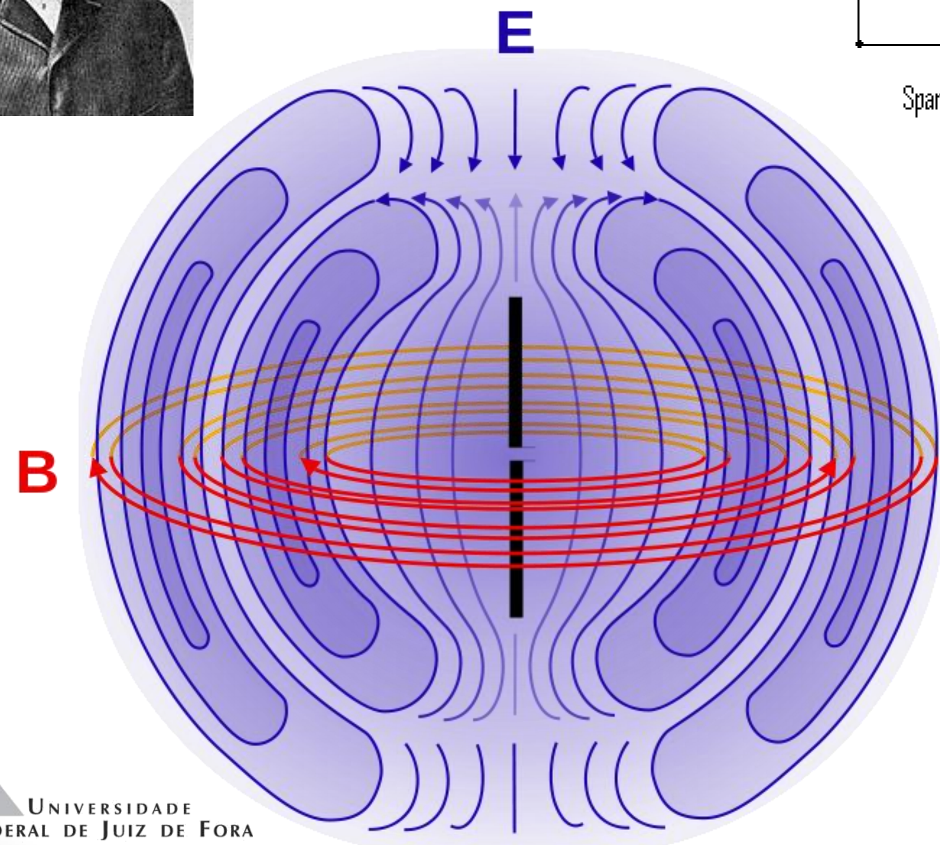
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Antenas - o Dipolo Hertziano

Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894)

Provou, em 1888, a existência das ondas previstas por Maxwell em 1865

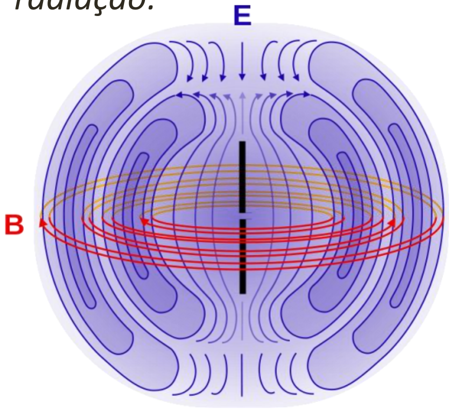


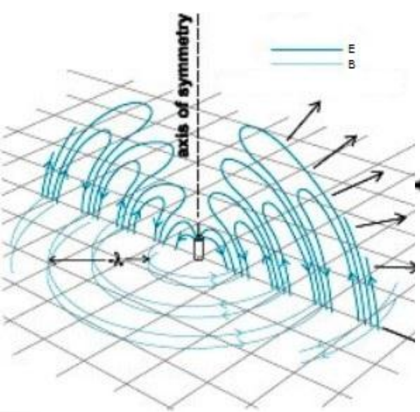


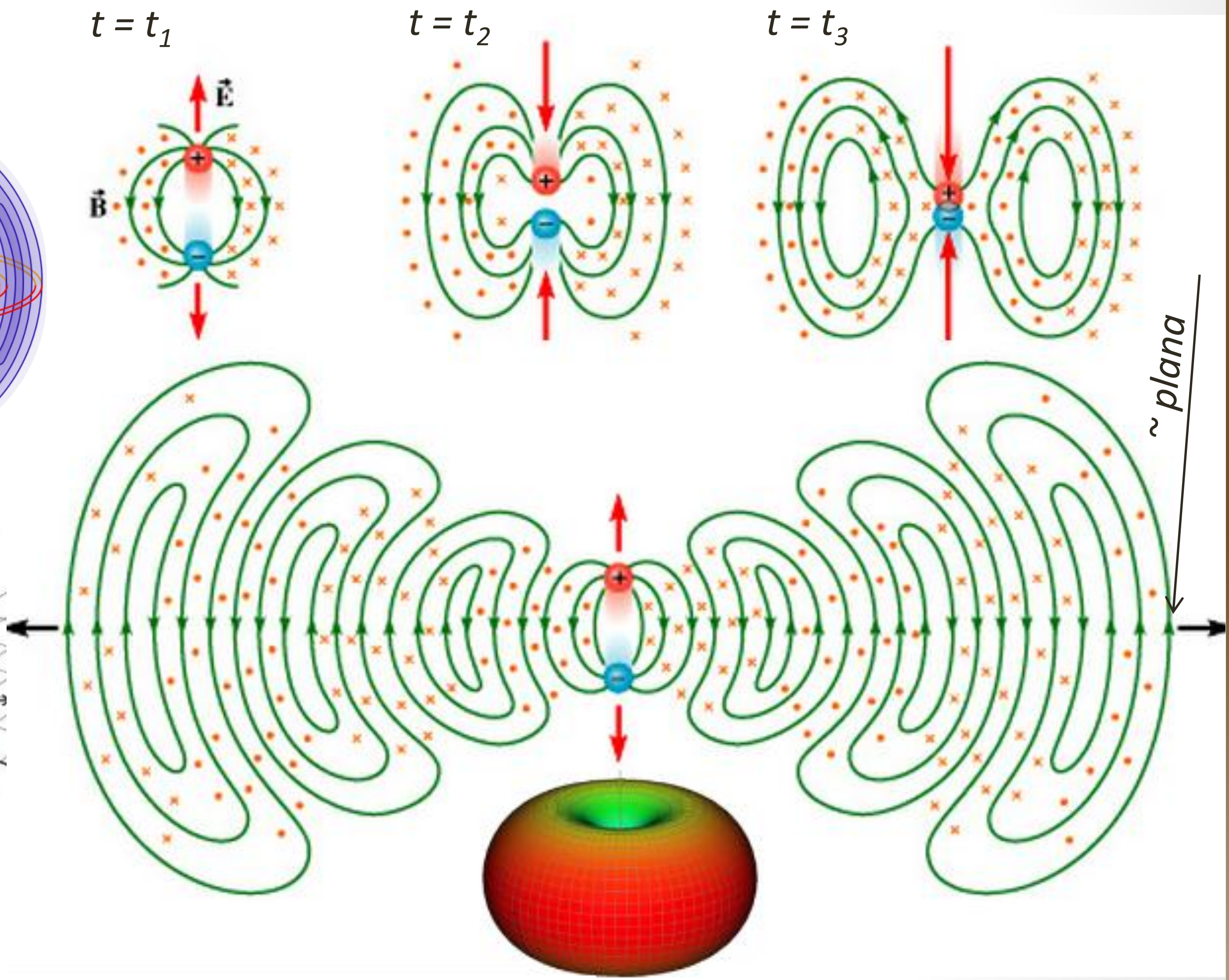
Universidade Federal de Juiz de Fora

Antenas - o Dipolo Hertziano

padrão de radiação:



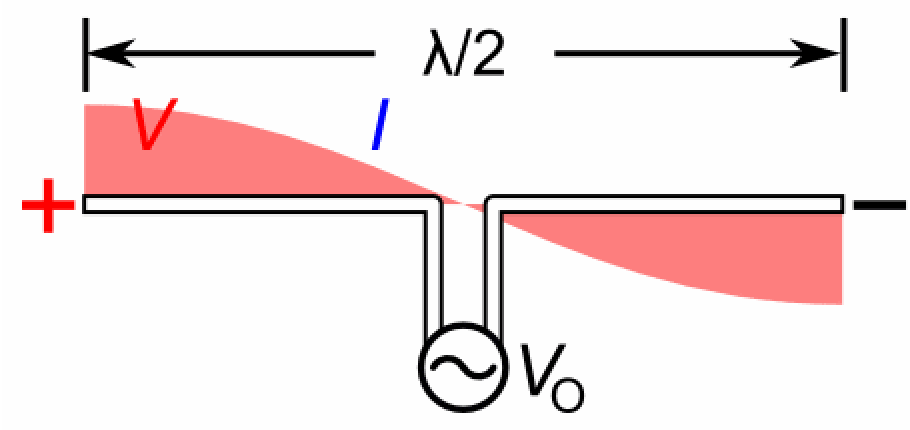




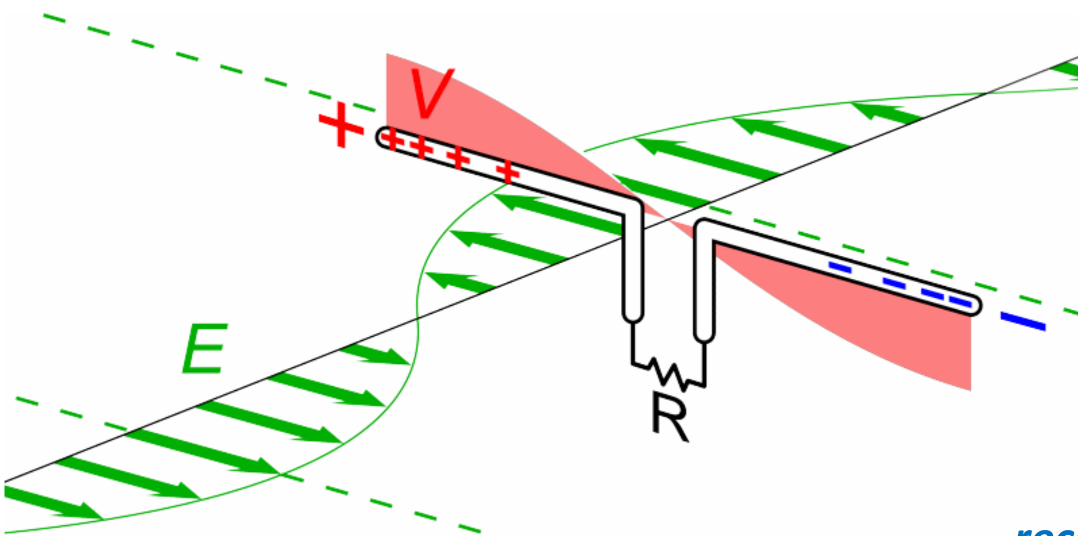
Electromagnetic Radiation from Oscillating Dipole

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

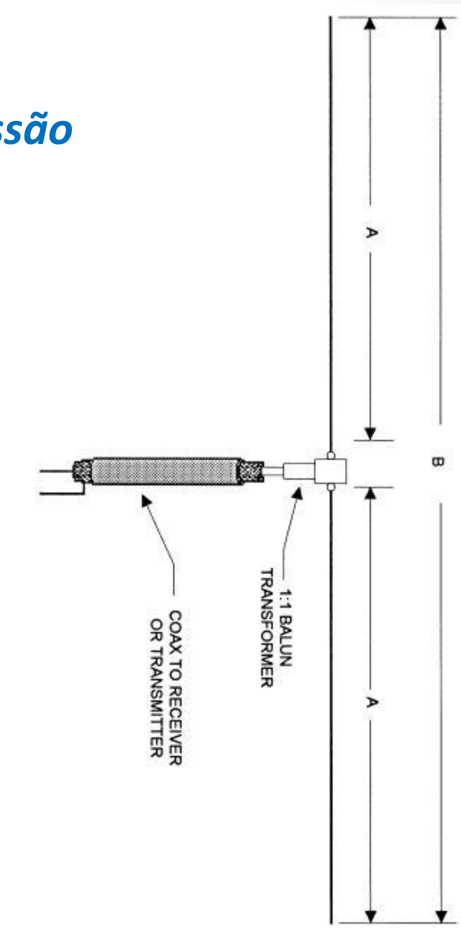
Uma antena dipolo irradiando



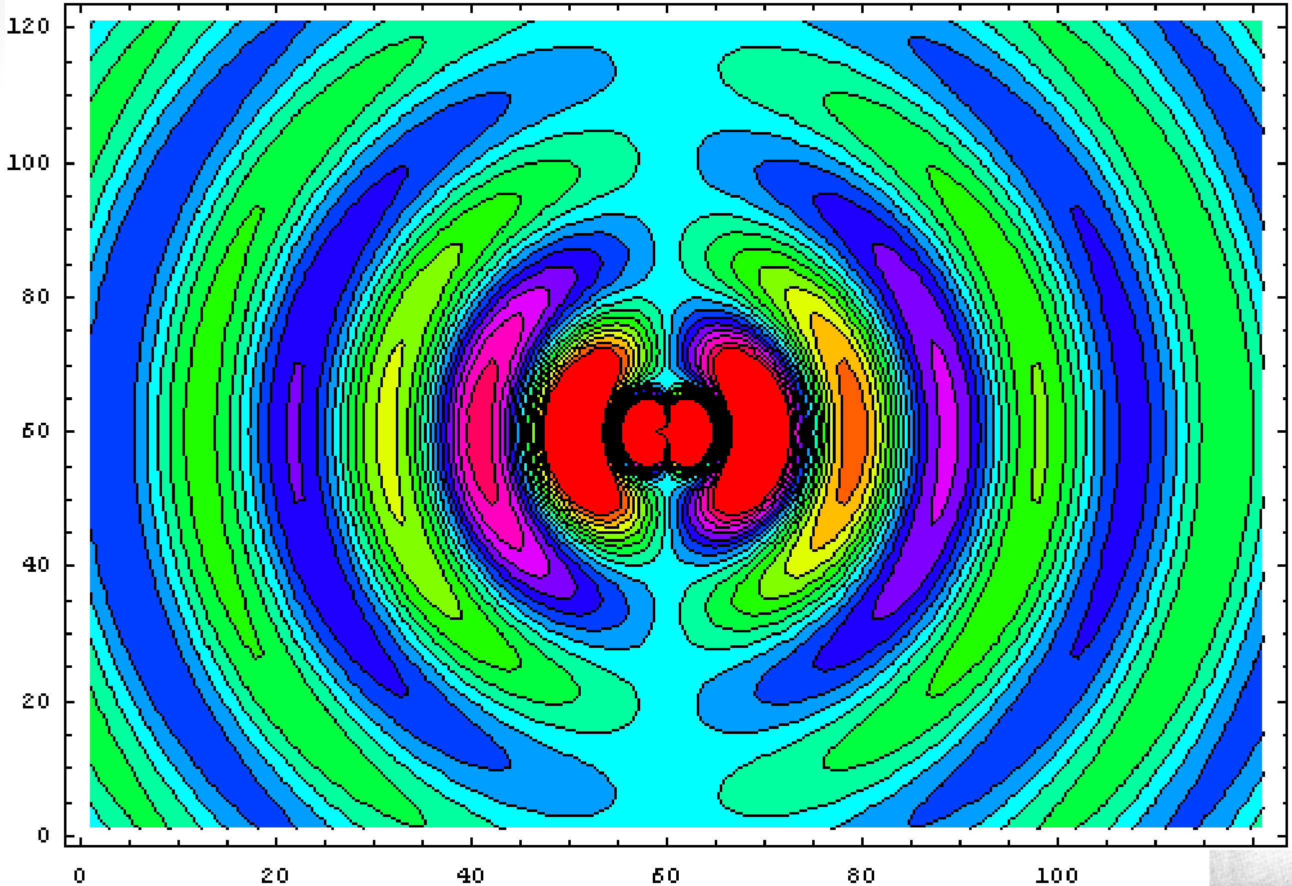
transmissão

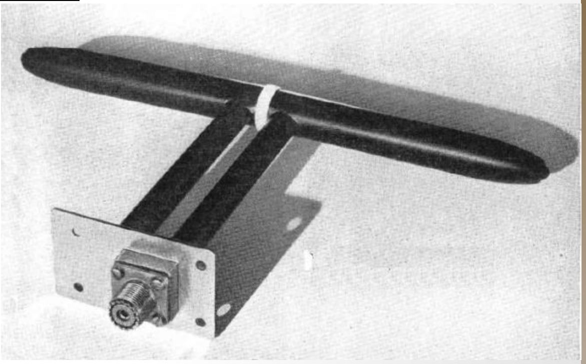


recepção



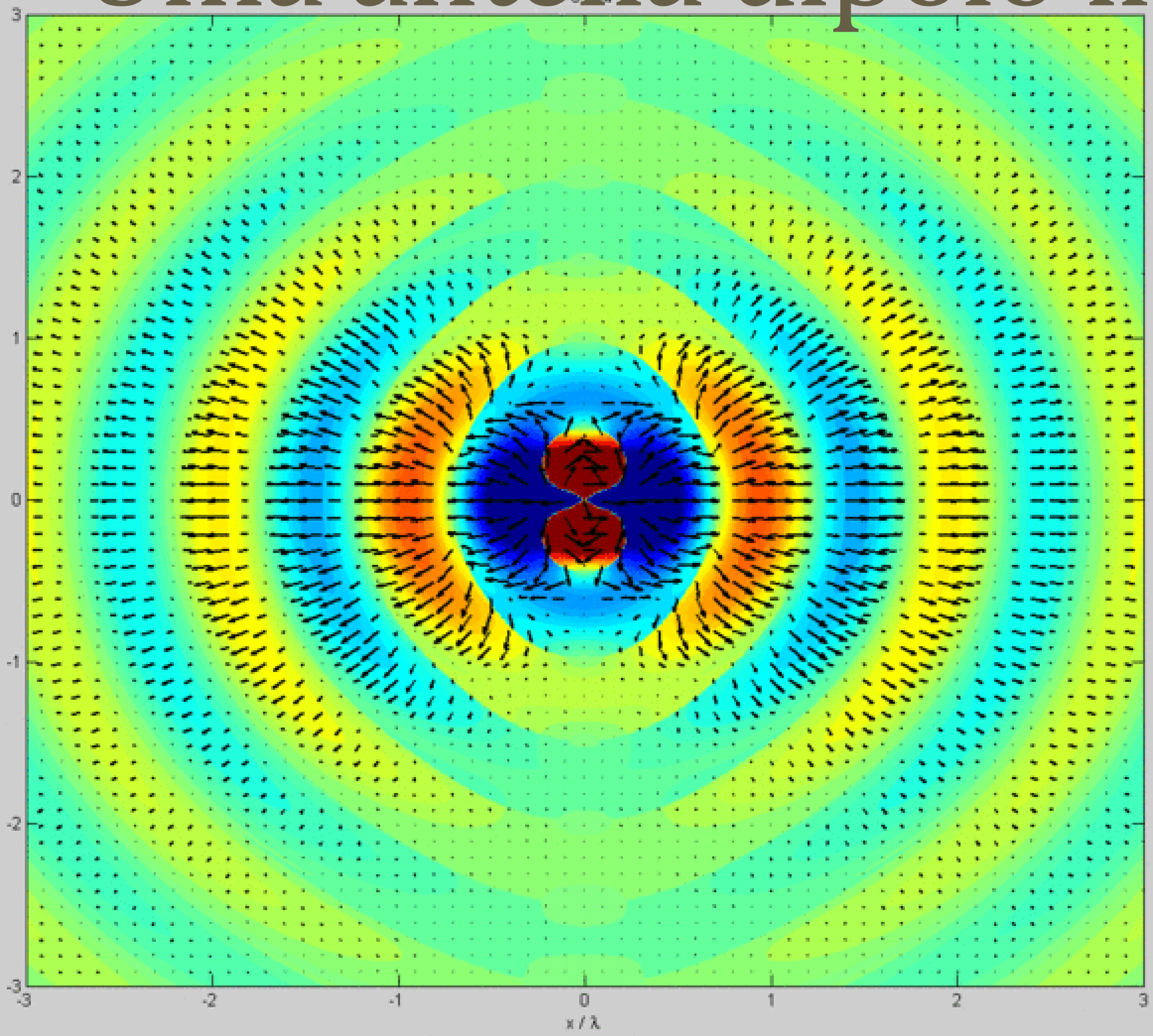
Uma antena dipolo irradiando

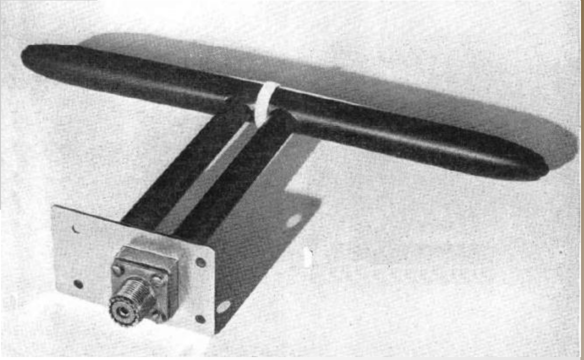




$$E_\theta = j\frac{I\,d\,k^2}{4\pi k r}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}e^{-jkr}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Uma antena dipolo irradiando





$$E_\theta = j\frac{I\,d\,k^2}{4\pi\,k\,r}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}e^{-jkr}\,\text{sen}\,\theta$$

Universidade Federal de Juiz de Fora

Reflexão e Transmissão de OEM

Propagação em meios lineares não condutores, isotrópicos & homogêneos

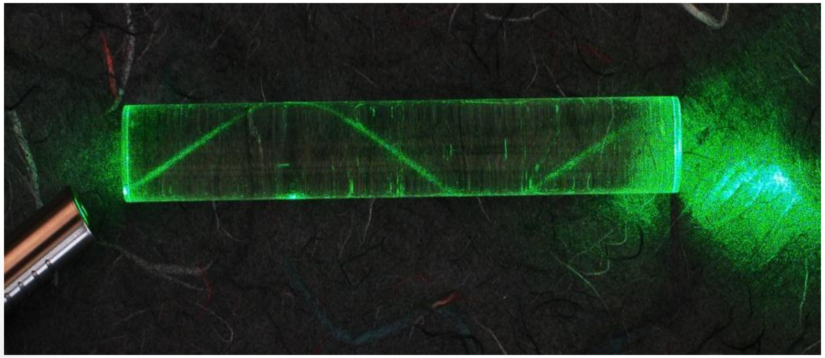
$$\left.\begin{array}{ll}\nabla\cdot\mathbf{E}=0 & \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\[2ex] \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & \nabla\times\mathbf{B}=\mu\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\end{array}\right\}\ \left\{\begin{array}{l}\mathrm{v}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\dfrac{c}{n}\\[2ex] n=\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}\cong\sqrt{\varepsilon_r}\end{array}\right.$$

velocidade (sempre menor que c)

índice de refração

$$\mathbf{S}=\frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\ \Rightarrow\ I=\frac{1}{2}\varepsilon\mathrm{v}E_0^{\ 2}$$

para uma onda plana monocromática (ω = kv = cte)



Pode ser matematicamente trivial, mas as implicações físicas são bastante interessantes: à medida em que a onda atravessa o material, os campos polarizam (E) e magnetizam (B) as moléculas, que se tornam dipolos oscilantes criando seus próprios campos E e B. Estes se combinam com a onda incidente, criando uma onda de mesma frequência porém de velocidade diferente. Este é o fenômeno da ***transparência***!

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Reflexão e Transmissão de OEM

Propagação em meios lineares não condutores, isotrópicos & homogêneos

$$\begin{cases} v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{c}{n} \\ n = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \cong \sqrt{\varepsilon_r} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_1 \mathbf{E_1}^{\perp} = \varepsilon_2 \mathbf{E_2}^{\perp} & \mathbf{E_1}^{\parallel} = \mathbf{E_2}^{\parallel} \\ \mathbf{B_1}^{\perp} = \mathbf{E_2}^{\perp} & \dfrac{1}{\mu_1}\mathbf{B_1}^{\parallel} = \dfrac{1}{\mu_2}\mathbf{B_1}^{\parallel} \end{array} \right\}$$

Condições de fronteira de campos elétricos e magnéticos

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}/v$$

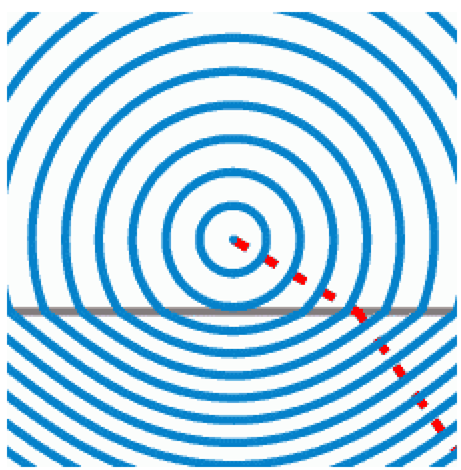
$$\frac{1}{\mu_1} B_1 \,\mathrm{sen}\,\theta_1 = \frac{1}{\mu_2} B_2 \,\mathrm{sen}\,\theta_2 \rightarrow \mathbf{B}^{\parallel}$$

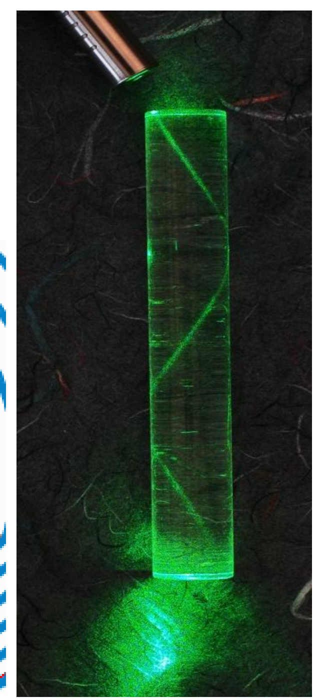
(componentes paralelos)

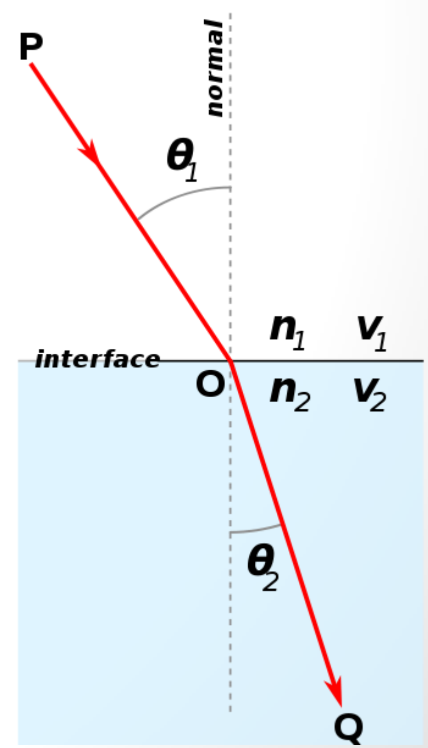
É possível provar que:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\theta_1}{\mathrm{sen}\,\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{v_1}{v_2} \cong \frac{n_2}{n_1}$$

(Lei de Snell)







UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Reflexão e Transmissão de OEM

Propagação em meios condutores → absorção & dispersão

$$\left.\begin{array}{ll} \nabla\cdot\mathbf{E}=\dfrac{1}{\varepsilon}\rho_v & \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 & \nabla\times\mathbf{B}=\mu\sigma\mathbf{E}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{array}\right\}$$

Sabemos da continuidade de carga:

$$\nabla\cdot\mathbf{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=\sigma\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)$$

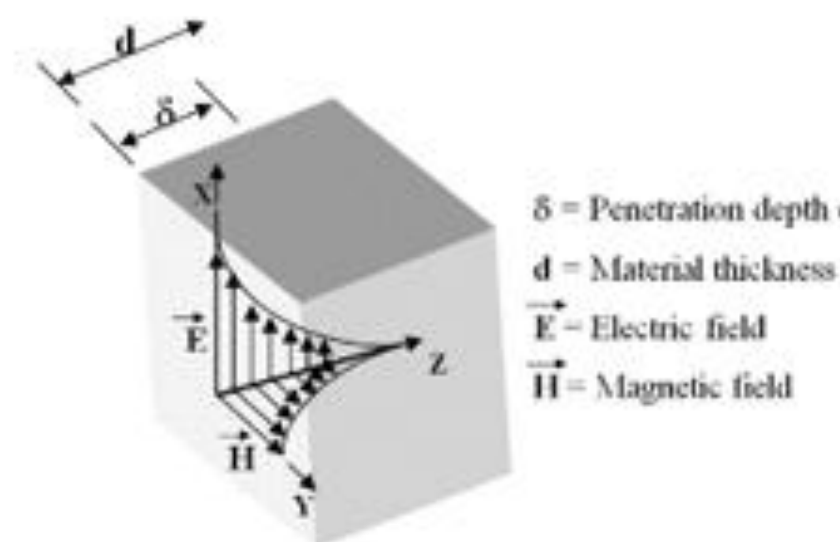
$$\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v$$

Solução da EDO: $\rho_v(t)=e^{-\left(\sigma/\varepsilon\right)t}\rho_v(0)$

A carga livre se dissipa no espaço com o tempo com uma taxa exponencial $\tau=\left(\sigma/\varepsilon\right)$

A solução da equação de onda (não homogênea) neste caso resulta em:

$$\begin{cases}\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E_0}e^{-kz}e^{j(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}(z,t)=\mathbf{B_0}e^{-kz}e^{j(kz-\omega t)}\end{cases}$$



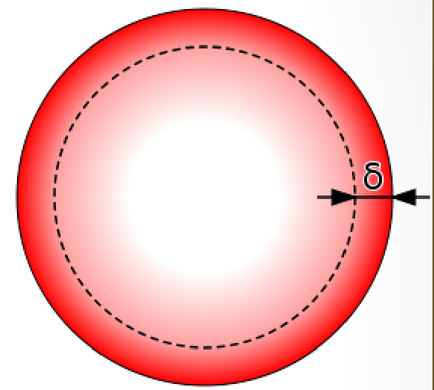
Reflexão e Transmissão de OEM

Propagação em meios condutores → absorção & dispersão

$$\begin{cases} \mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E_0} e^{-kz} e^{j(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B_0} e^{-kz} e^{j(kz-\omega t)} \end{cases}$$

Leva a uma densidade de corrente não uniforme num condutor:

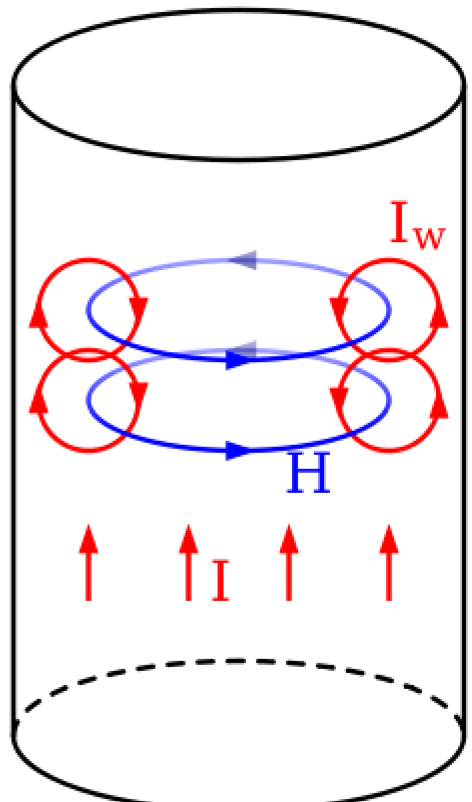
$$\boxed{\mathbf{J}(d) = \mathbf{J_0} e^{-d/\delta}}$$



Nas quais (k = complexo → propag. dispersiva):

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + j\mu\sigma\omega = k_1 + jk_2$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$



Efeito "skin" (pelicular)

$$\delta = \frac{1}{k_2} \cong \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}}$$

Velocidade, refração:

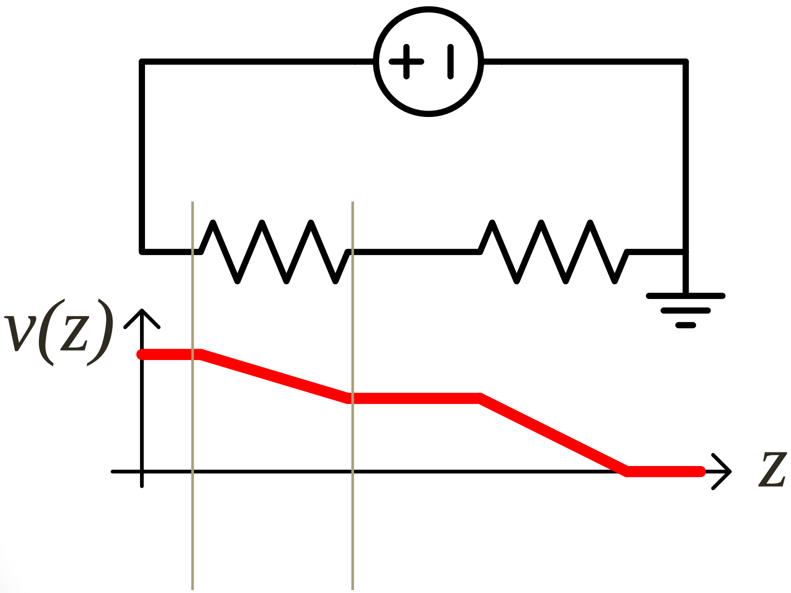
$$n = \frac{ck_1}{\omega}, \ v = \frac{\omega}{k_1}$$

Universidade Federal de Juiz de Fora

Linhas de Transmissão

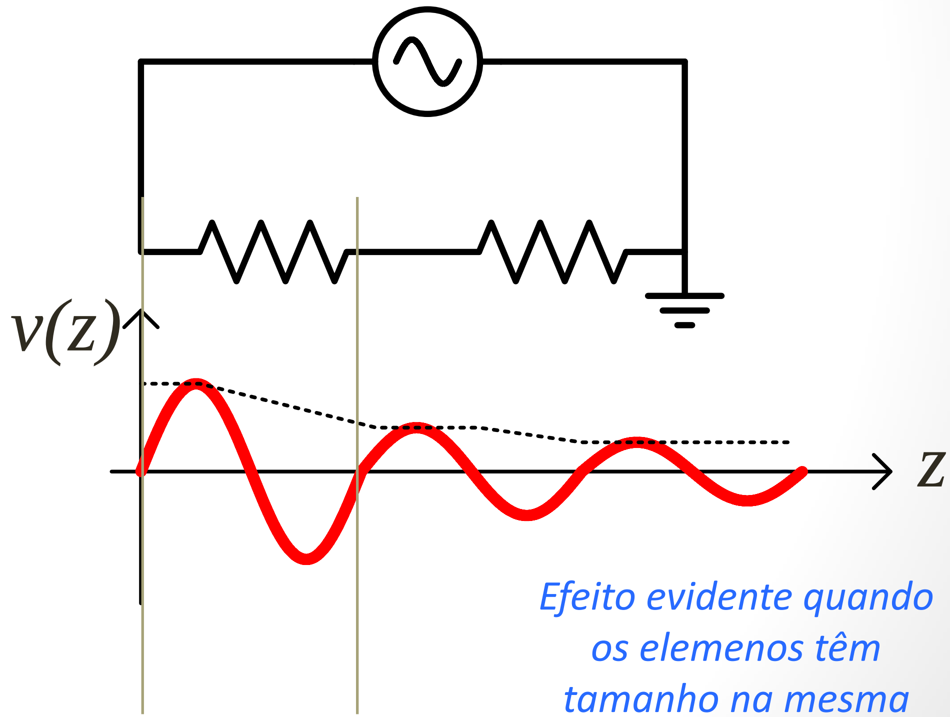
Quando fios não se comportam mais como fios

Caso de corrente contínua ou baixa frequência ou curtas distâncias:



$$V = RI$$ OK!

Caso eletrodinâmico (considerando a propagação do sinal como onda):

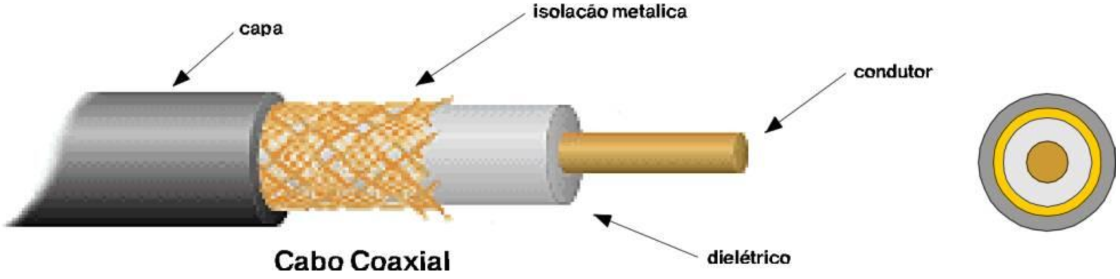


$$V = RI = 0 \quad ???$$

Efeito evidente quando os elemenos têm tamanho na mesma ordem de grandeza do comprimento de onda

Linhas de Transmissão

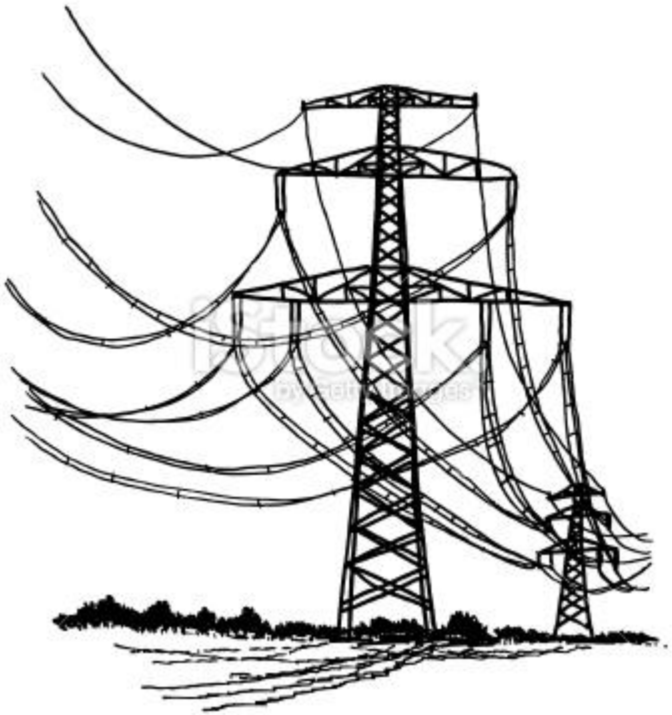
Quando fios não se comportam mais como fios



Efeito evidente quando os elemenos têm tamanho na mesma ordem de grandeza do comprimento de onda:

- *Ou distâncias muito grandes (d ~ λ)*
- *Ou frequências muito altas (λ pequeno)*

(ou os dois)

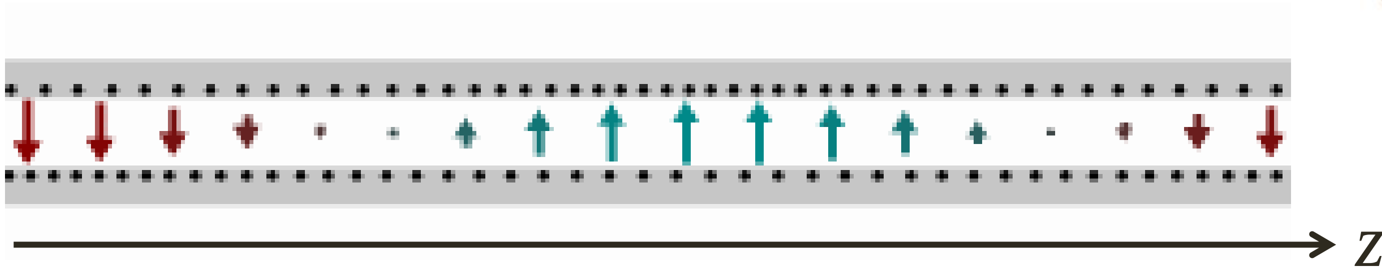


Exemplos onde se aplicam (considerando v = c):

- *freq. de WiFi – 2,4 GHz → λ = 125 mm*
- *freq. da rede – 60 Hz → λ = 5000 km*

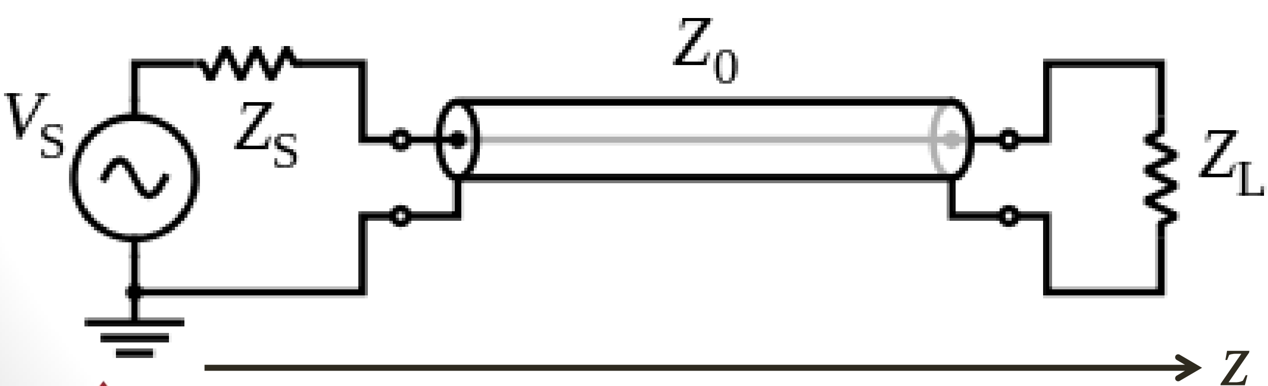
Linhas de Transmissão

Quando fios não se comportam mais como fios



Representações:

Sabemos que não existe ação eletromagnética instantânea; ela se propaga ao longo do espaço e tempo como se fosse (e é) uma onda (eletromagnética)!



Como prever

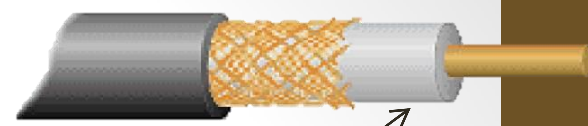
$$v(z,t) = ?$$

E na carga?

E a potência entregue?

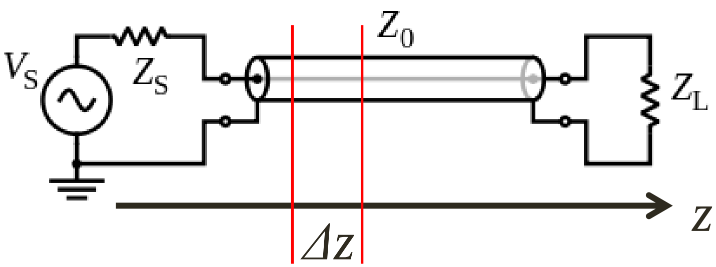
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Linhas de Transmissão

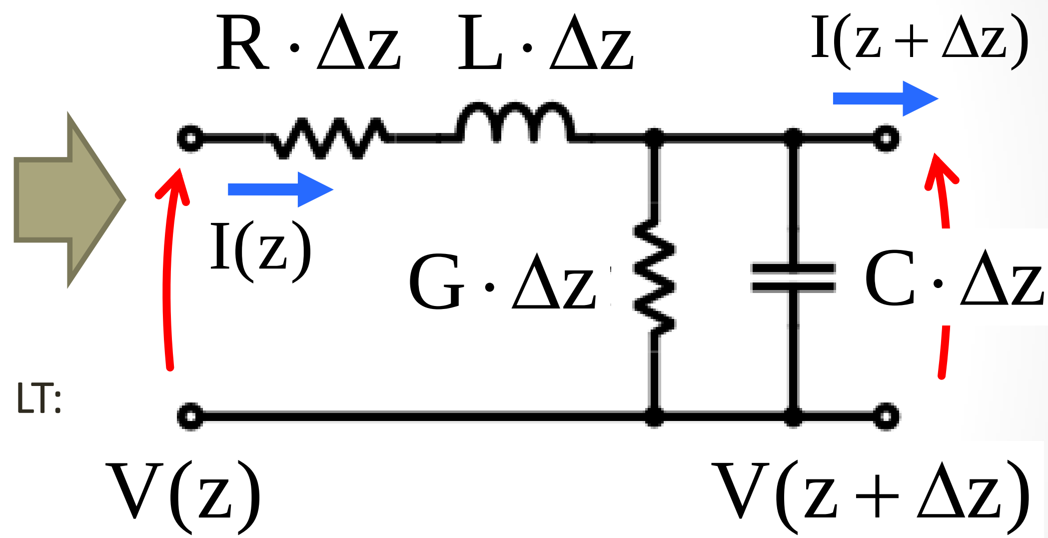


Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)

L (H/m)
C (F/m)



Um pedaço de tamanho Δz da nossa LT:

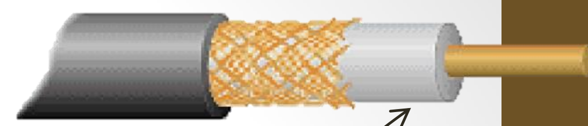


$$V(z) = R\Delta z I(z) + L\Delta z \frac{d}{dt} I(z) + V(z + \Delta z)$$

$$I(z) = V(z + \Delta z) G\Delta z + C\Delta z \frac{d}{dt} V(z + \Delta z) + I(z + \Delta z)$$

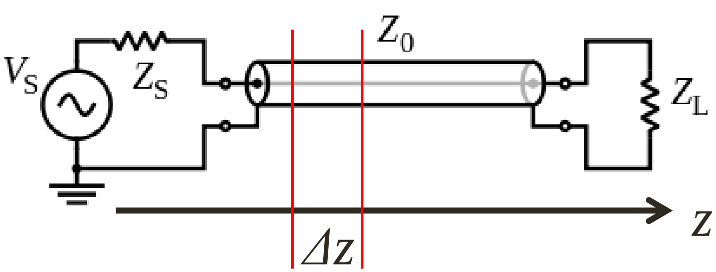
UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Linhas de Transmissão

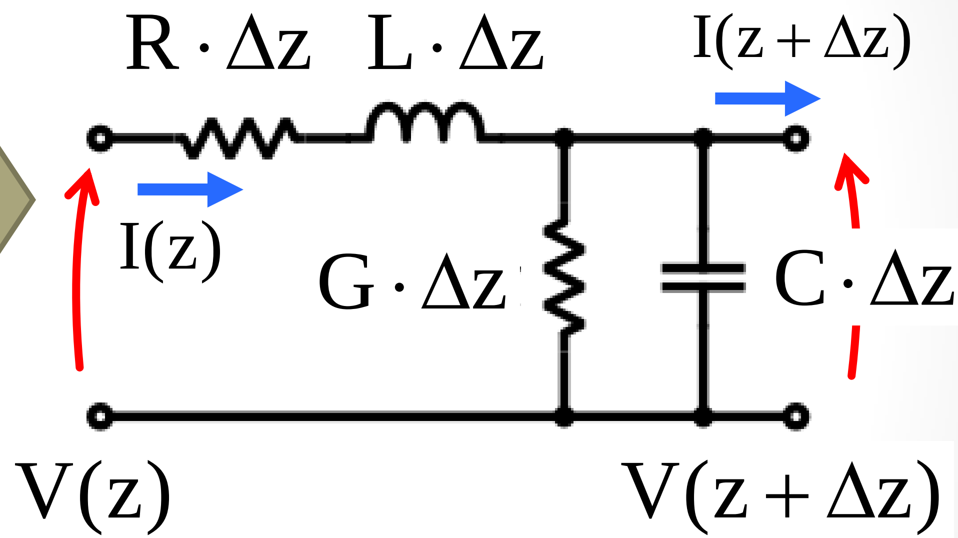


L (H/m)
C (F/m)

Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)



Um pedaço de tamanho Δz da nossa LT:

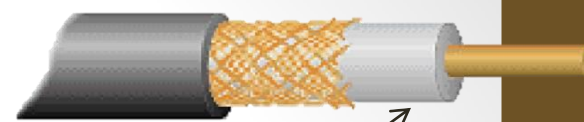


Que podemos reescrever da forma:

$$\frac{V(z) - V(z+\Delta z)}{\Delta z} = \left[RI(z) + L\frac{d}{dt}I(z) \right]$$

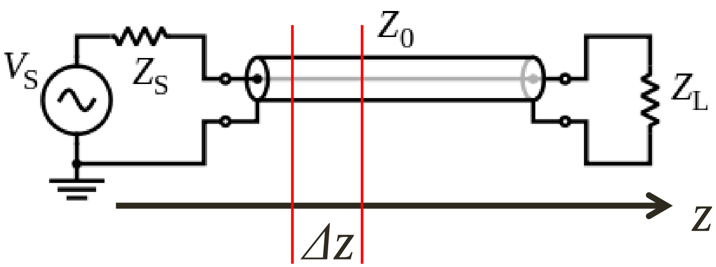
$$\frac{I(z) - I(z+\Delta z)}{\Delta z} = \left[GV(z+\Delta z) + C\frac{d}{dt}V(z+\Delta z) \right]$$

Linhas de Transmissão

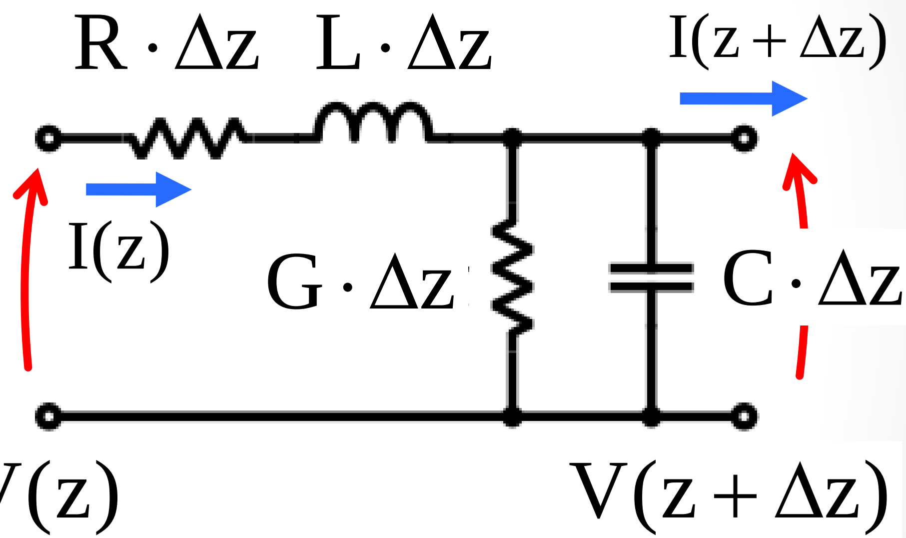


L (H/m)
C (F/m)

Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)



Um pedaço de tamanho Δz da nossa LT:



Pela mágica do cálculo:

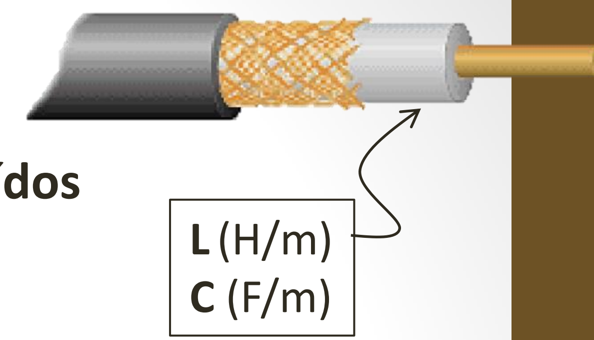
Δz → 0

Equações do Telégrafo

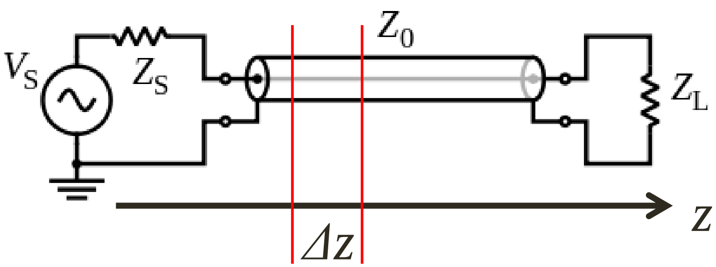
$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t) = \left[RI(z,t) + L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z,t) = \left[GV(z,t) + C\frac{\partial}{\partial t}V(z,t) \right]$$

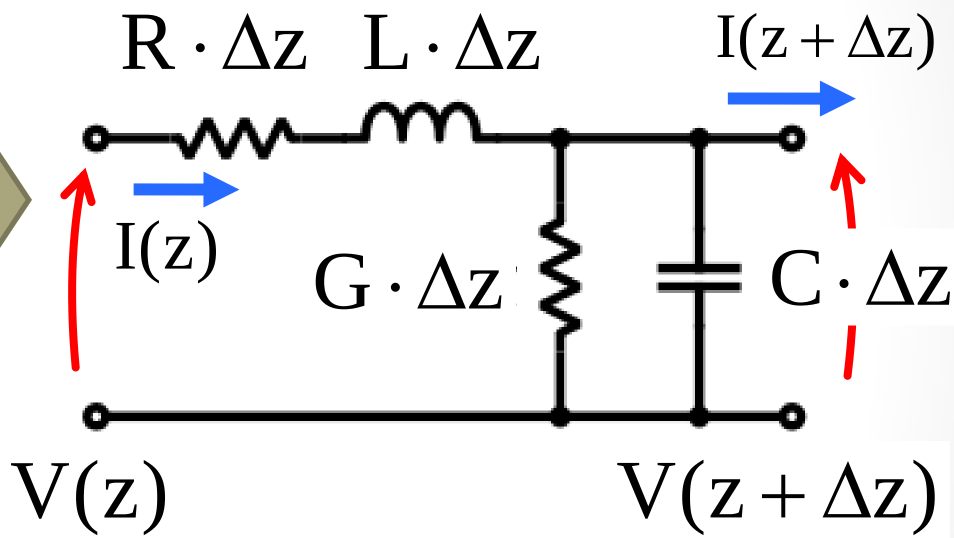
Linhas de Transmissão



Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)



Um pedaço de tamanho Δz da nossa LT:

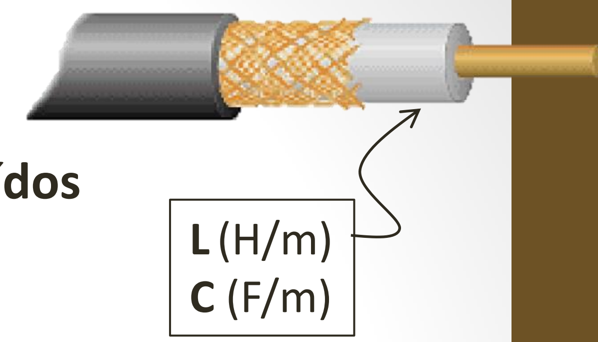


Diferenciando ambas equações em relação a z:

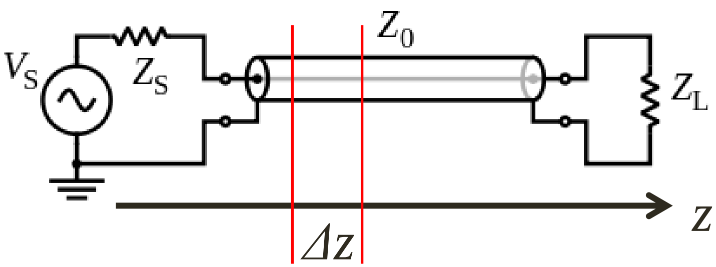
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z,t) = \left[R \frac{\partial}{\partial z} I(z,t) + L \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} I(z,t) \right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z,t) = \left[G \frac{\partial}{\partial z} V(z,t) + C \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} V(z,t) \right]$$

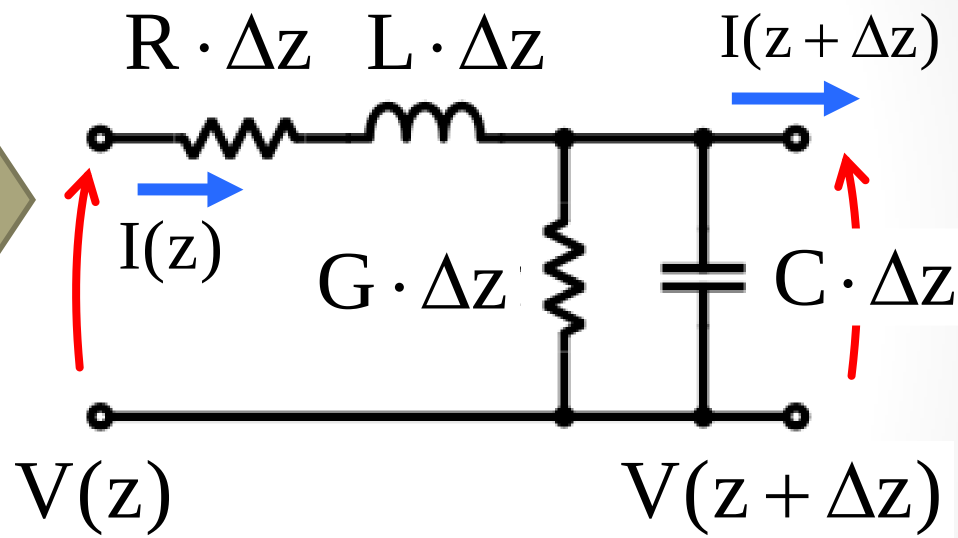
Linhas de Transmissão



Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)



Um pedaço de tamanho Δz da nossa LT:

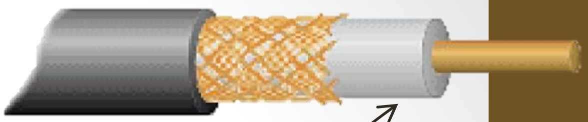


Que podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V(z,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(z,t) + (RC+GL) \frac{\partial}{\partial t} V(z,t) + GRV(z,t)$$

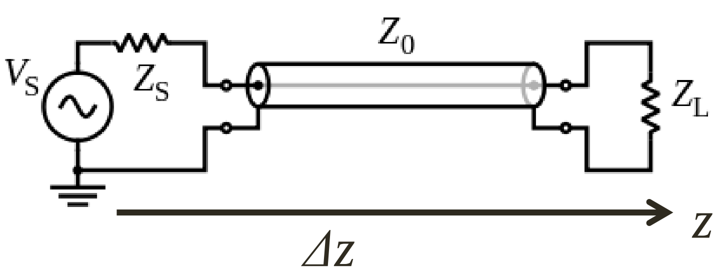
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} I(z,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(z,t) + (RC+GL) \frac{\partial}{\partial t} I(z,t) + GRI(z,t)$$

Linhas de Transmissão



L (H/m)
C (F/m)

Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)



Assumindo estado permanente senoidal e usando representação complexa:

$$\begin{cases} V(z,t) = V(z)e^{j\omega t} \\ I(z,t) = I(z)e^{j\omega t} \end{cases}$$

retira a dependência temporal das eqs!

Simplifica as derivadas no tempo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(z,t) = -\omega^2 X(z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}X(z,t) = j\omega X(z,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}X(z) = \nabla^2 X(z)$$

$$\nabla^2 V(z) = \left(-\omega^2 LC\right)V(z) + j\omega(RC + GL + GR)V(z)$$

$$\nabla^2 I(z) = \left(-\omega^2 LC\right)I(z) + j\omega(RC + GL + GR)I(z)$$

É uma eq. de onda!

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla^2 V(z) = \gamma^2 V(z) \\ \nabla^2 I(z) = \gamma^2 I(z)\end{gathered}}$$

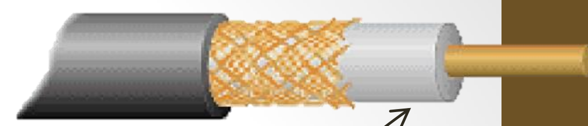
Coeficiente de propagação:

$$\gamma^2 = \left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right)$$

Qual velocidade de propag.?

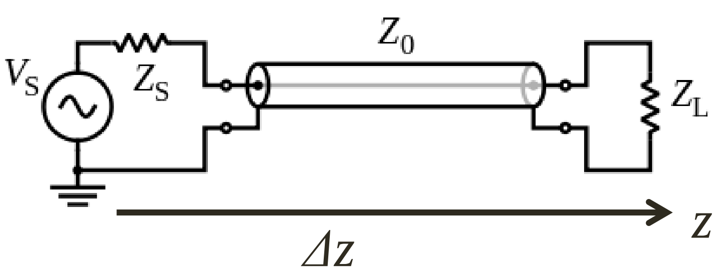
UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Linhas de Transmissão



Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)

L (H/m)
C (F/m)



Assumindo estado permanente senoidal e usando representação complexa:

$$\begin{cases} V(z,t) = V(z)e^{j\omega t} \\ I(z,t) = I(z)e^{j\omega t} \end{cases}$$

retira a dependência temporal das eqs!

Da outra forma:

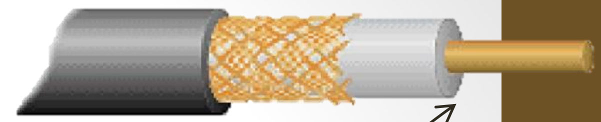
$$\frac{\partial}{\partial z}V(z,t) = \left[RI(z,t) + L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}I(z,t) = \left[GV(z,t) + C\frac{\partial}{\partial t}V(z,t)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}V(z) &= \left(R + j\omega L\right)I(z) \\ \frac{\partial}{\partial z}I(z) &= \left(G + j\omega C\right)V(z) \end{aligned}}$$

Impedância característica da LT: $Z_0 = \dfrac{|V(z)|}{|I(z)|} = \sqrt{\dfrac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}$

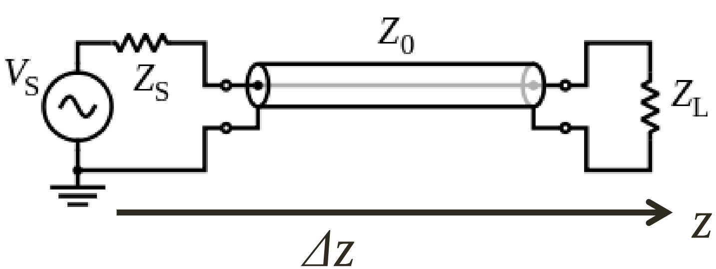
Linhas de Transmissão



Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(R/r\right)}$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(R/r\right)$$



Assumindo estado permanente senoidal e usando representação complexa:

$$\begin{cases} V(z,t) = V(z)e^{j\omega t} \\ I(z,t) = I(z)e^{j\omega t} \end{cases}$$

retira a dependência temporal das eqs!

Se a linha é considerada sem perdas (lossless line) → R = 0, G = 0:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}V(z) &= (j\omega L)I(z) \\ \frac{\partial}{\partial z}I(z) &= (j\omega C)V(z) \end{aligned}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

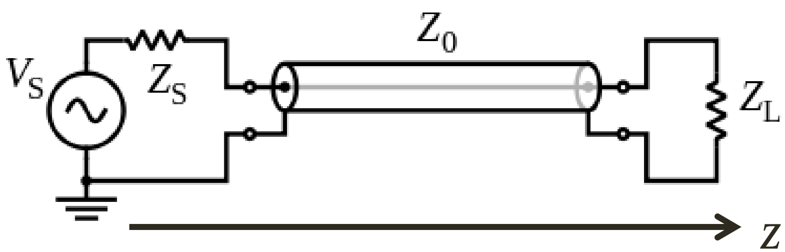
Solução das equações de onda da LT:

$$\boxed{\begin{cases} V(z) = V^{+}e^{-\gamma z} + V^{-}e^{\gamma z} \\ I(z) = \dfrac{1}{Z_0}\left[V^{+}e^{-\gamma z} + V^{-}e^{\gamma z}\right] \end{cases}}$$

UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora

Linhas de Transmissão

Toda LT pode ser representada por parâmetros distribuídos (indutância série, capacitância paralela, resistência do condutor e condutância do dielétrico *por unidade de comprimento*)



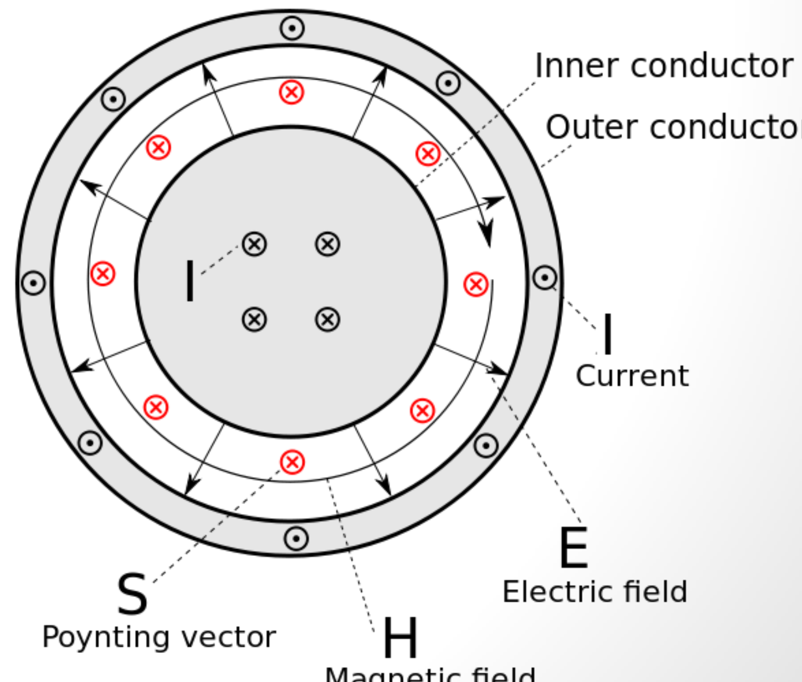
Exemplo com um cabo coaxial s/ perdas:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(R/r\right)} \qquad L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(R/r\right)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{4\pi^2\varepsilon}\ln\left(2\frac{R}{r}\right)}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$



Universidade Federal de Juiz de Fora