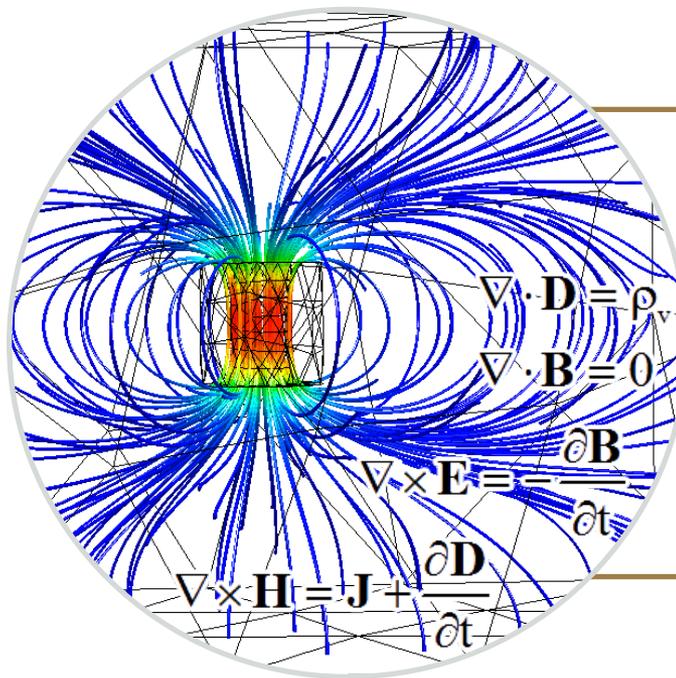


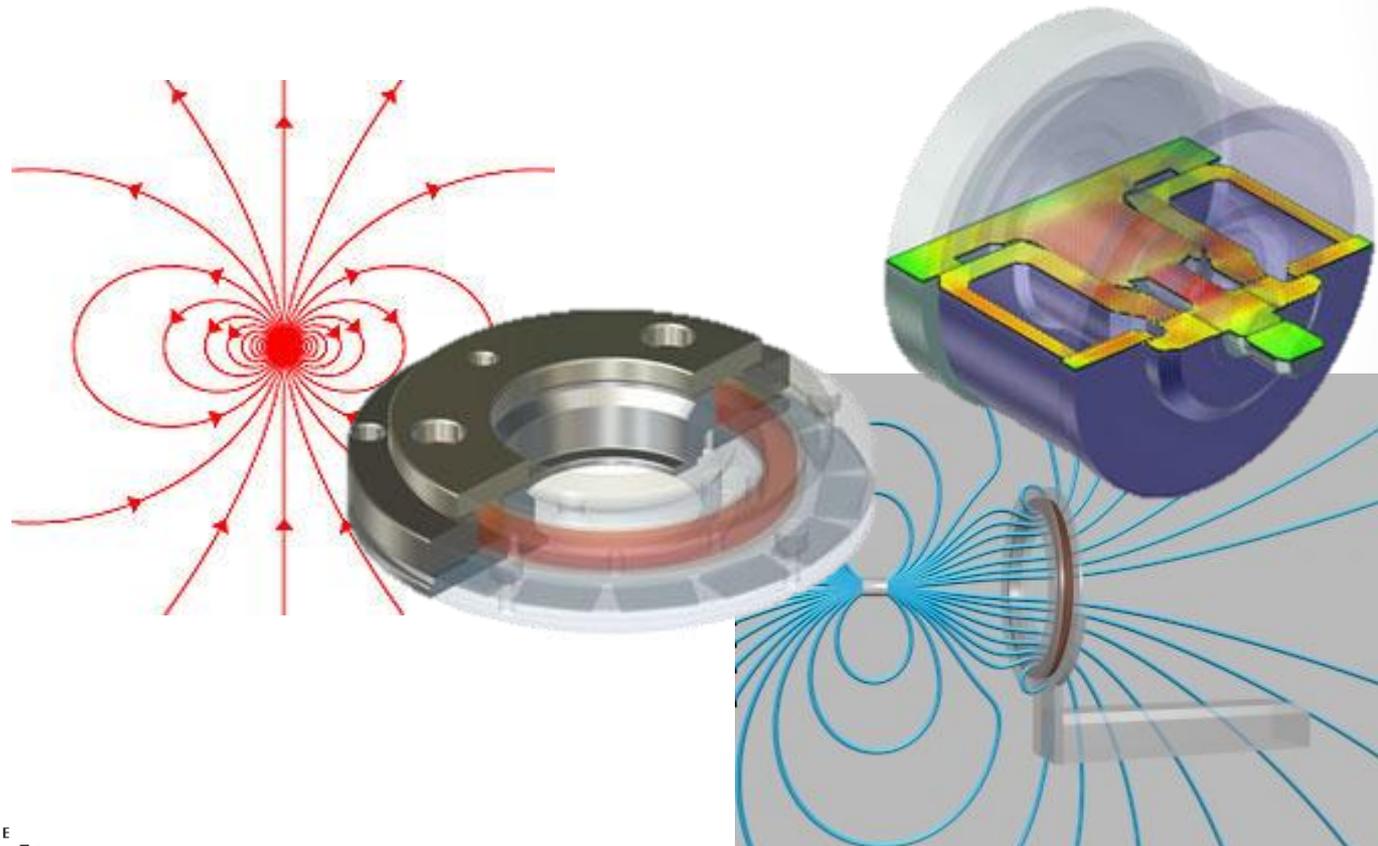
# ELETROMAGNETISMO

## CEL065

Prof. Pedro S. Almeida  
pedro.almeida@ufjf.edu.br



# Magnetostática



# Conteúdo

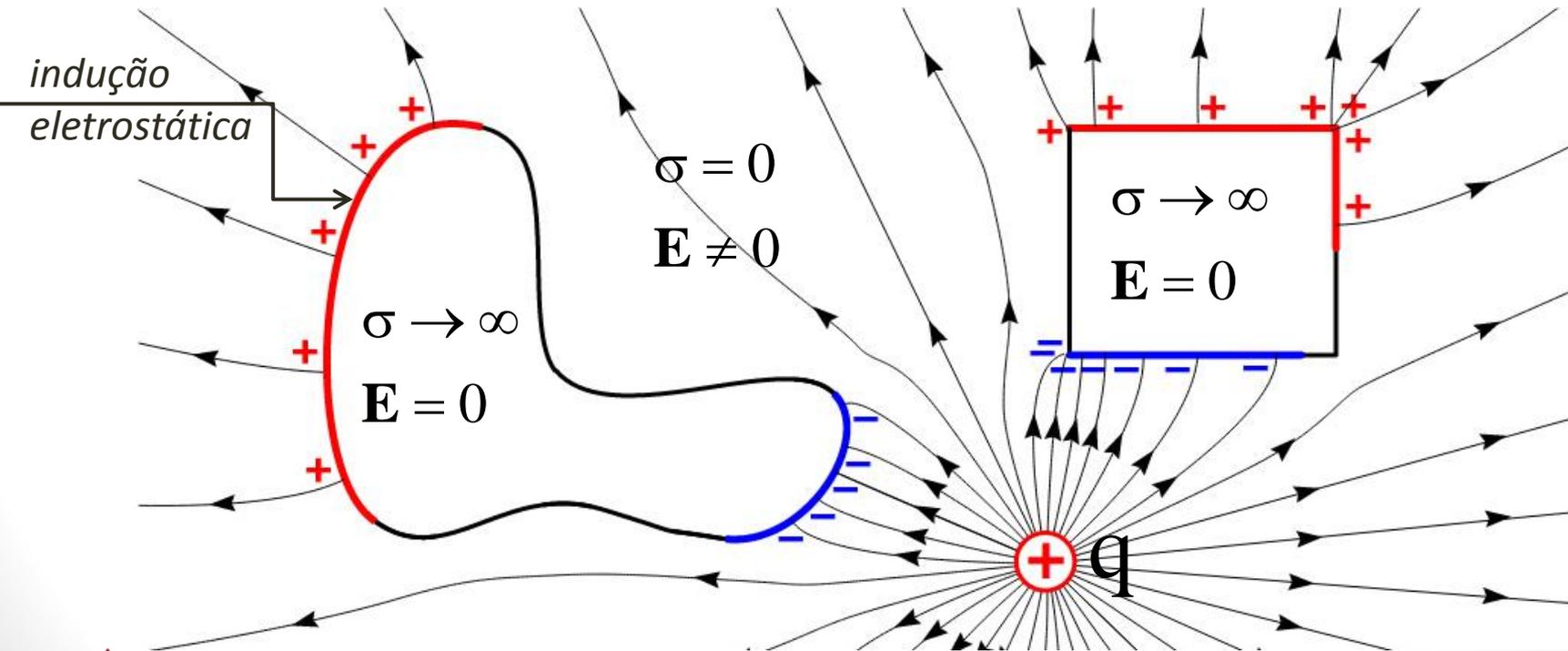
## MAGNETOSTÁTICA

- Intensidade de corrente elétrica, condutividade e vetor densidade de corrente de condução ( $J$ )
- Campo magnético estacionário, Lei de Biot-Savart e vetor intensidade de campo magnético ( $H$ )
- Lei Circuital de Ampère
- Fluxo magnético e vetor densidade de fluxo magnético ( $B$ )
- Lei de Gauss para o Magnetismo
- Potencial magnético vetorial
- Circuitos magnéticos, indutância própria e indutância mútua
- Energia magnética, materiais magnéticos e permeabilidade
- Força magnética

# A origem do campo magnético

Qual a origem do campo magnético?

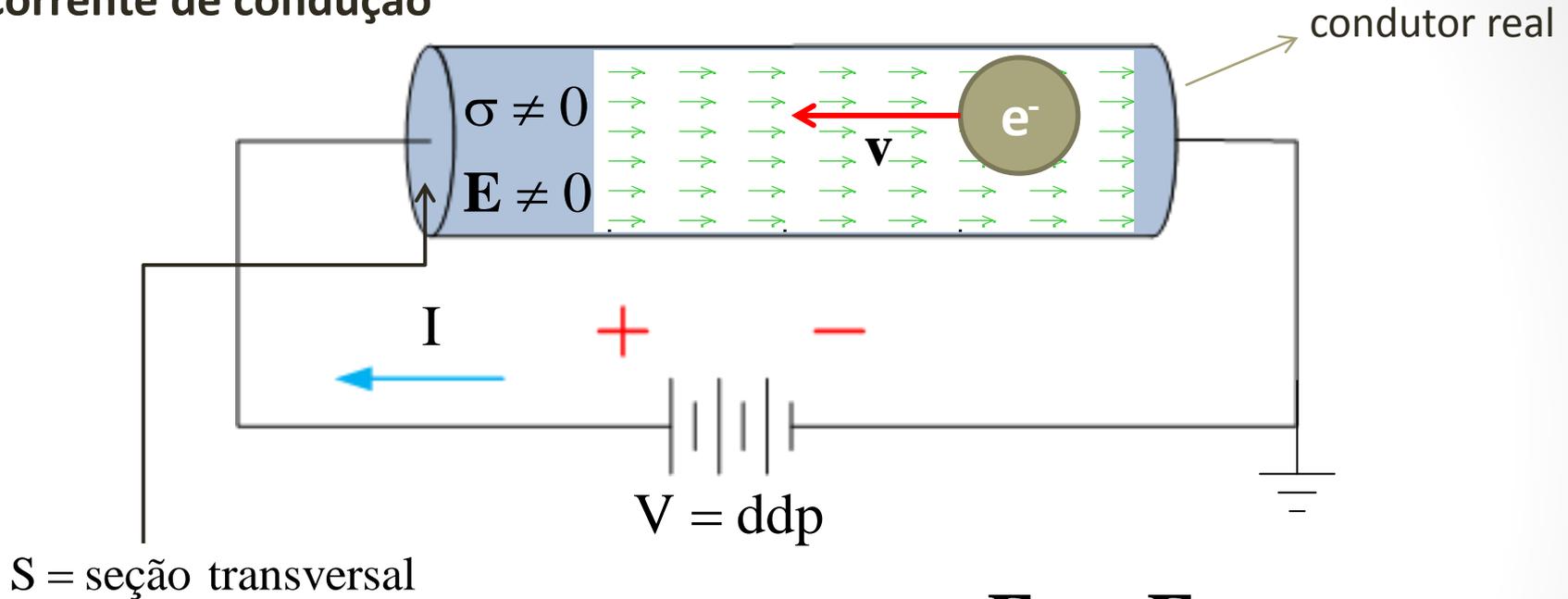
- **Campo elétrico** → cargas elétricas em repouso ( $v = 0$ )
- **Campo magnético** → cargas elétricas movendo-se em velocidade constante ( $v = cte$ )



Condutor perfeito submetido a um campo elétrico

# A origem do campo magnético

## Corrente de condução

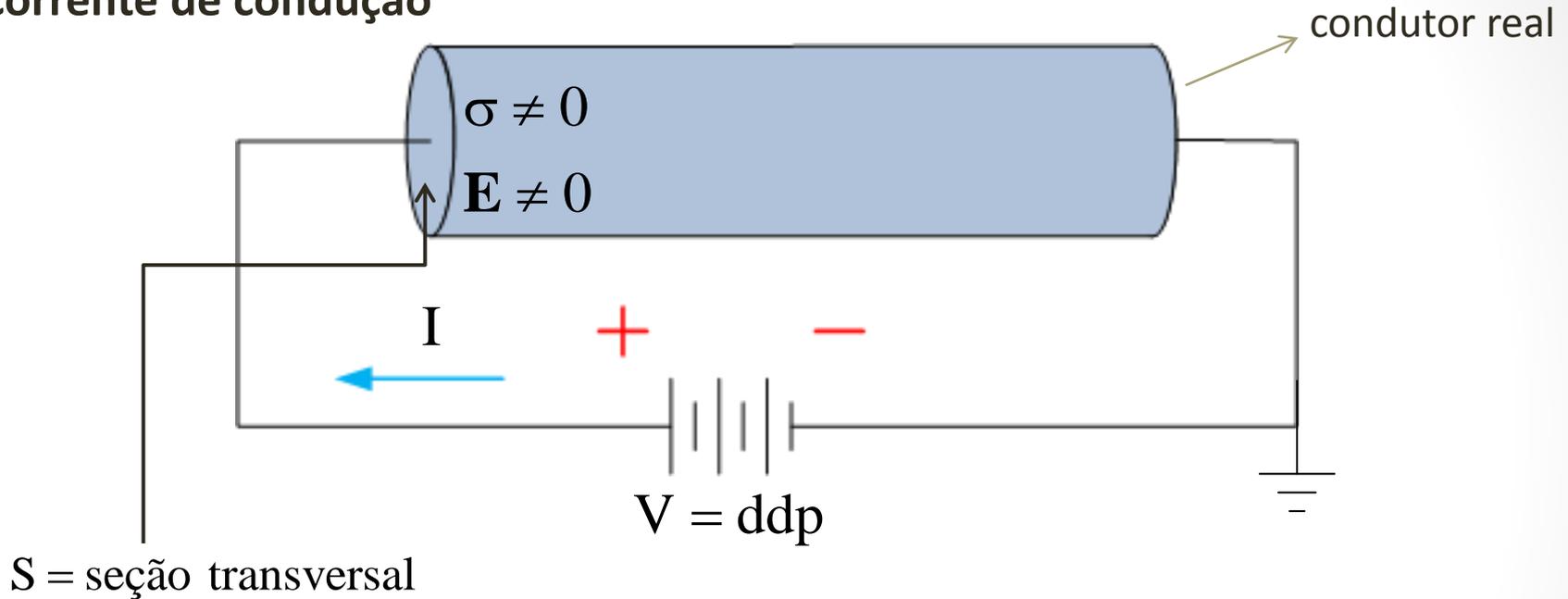


$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

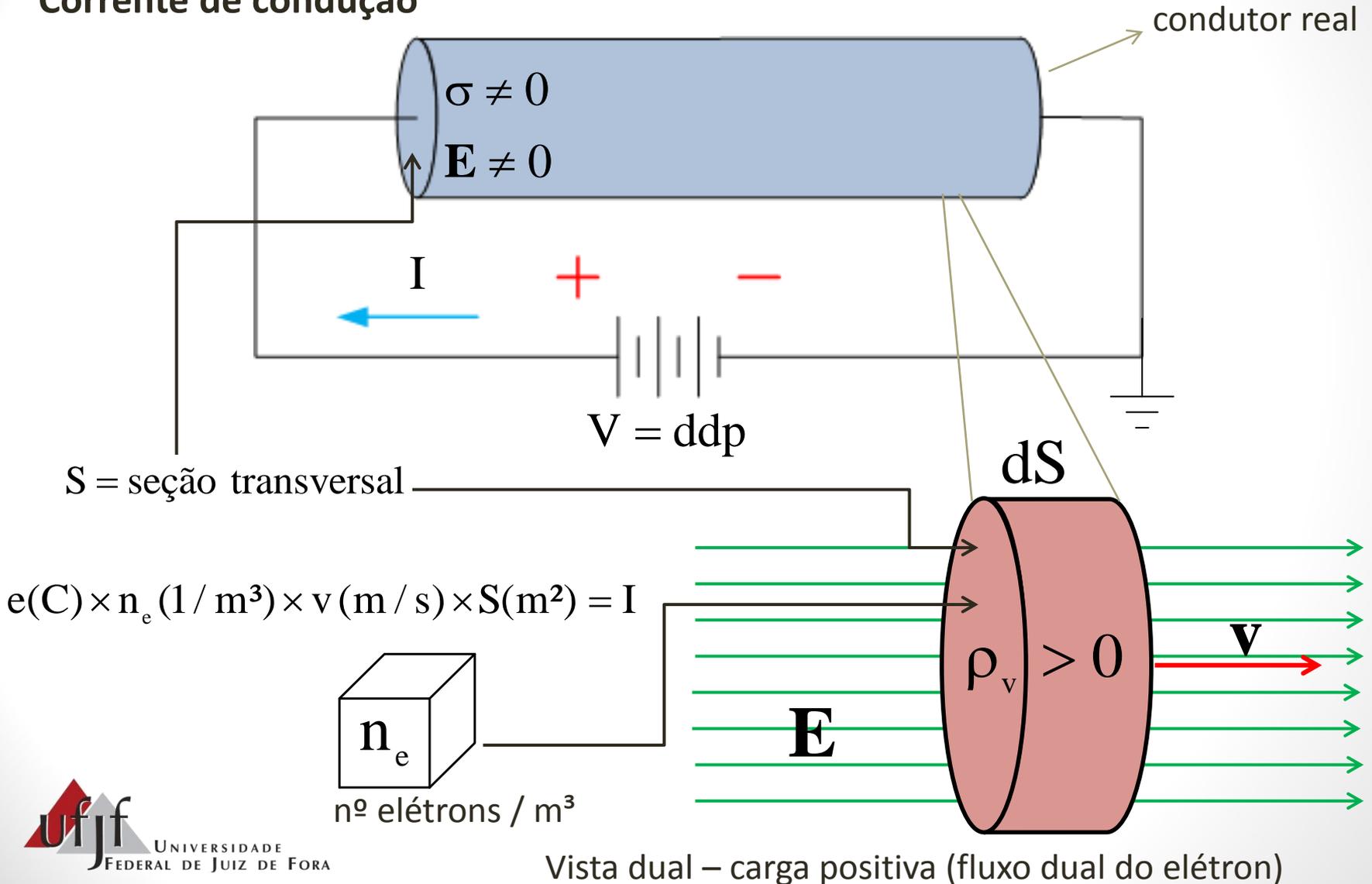
# A origem do campo magnético

## Corrente de condução



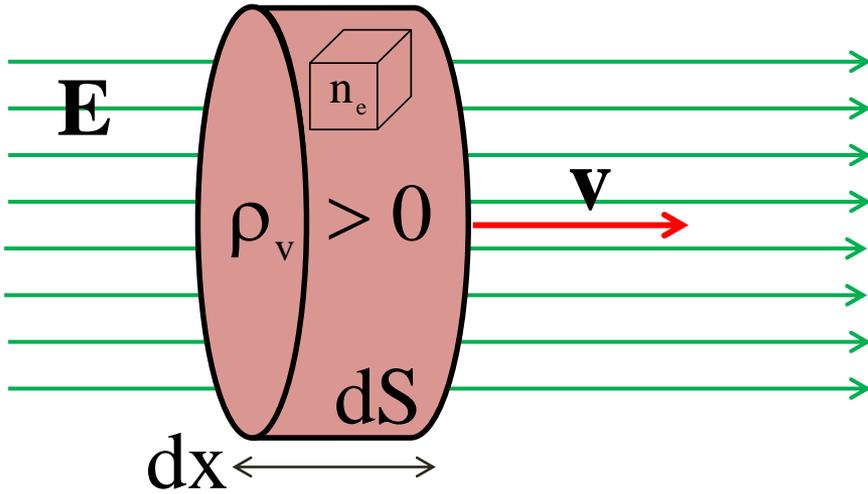
# A origem do campo magnético

## Corrente de condução



# A origem do campo magnético

Corrente de condução



$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$dQ = \rho_v dx dS$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{F} = -q_e \mathbf{E} = m_e \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$I dx \mathbf{a}_x = \rho_v \mathbf{v} dS = \mathbf{J} dS \quad \Rightarrow \quad I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} \triangleq \rho_v \mathbf{v}$$

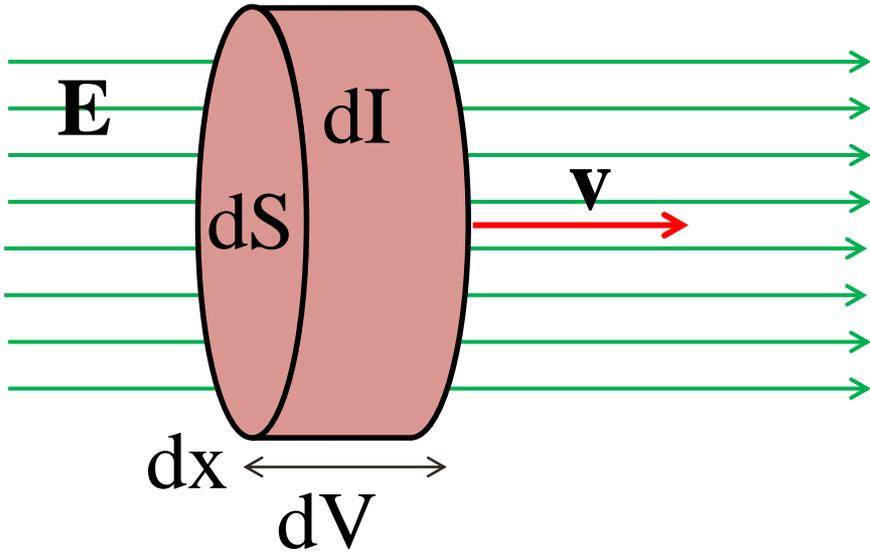
Velocidade  $v$  (média) é limitada pela mobilidade dos elétrons no material:  $\mathbf{v} = \mu_e \mathbf{E}$

A condutividade, então, é definida como:  $\sigma = \rho_e \mu_e$  (S/m)

Lei de Ohm vetorial:  $\mathbf{J} \triangleq \rho_v \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{J} = \rho_e \mu_e \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$

# A origem do campo magnético

Corrente de condução



Lei de Ohm vetorial:

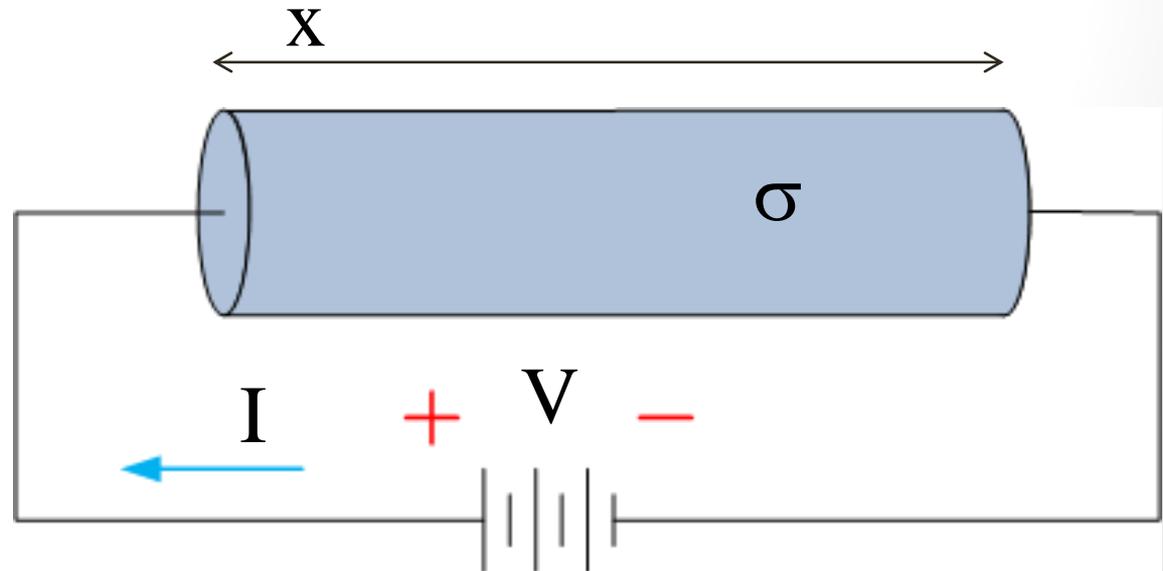
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$dV = |\mathbf{E}| dx$$

$$dI = |\mathbf{J}| dS = \sigma |\mathbf{E}| dS$$

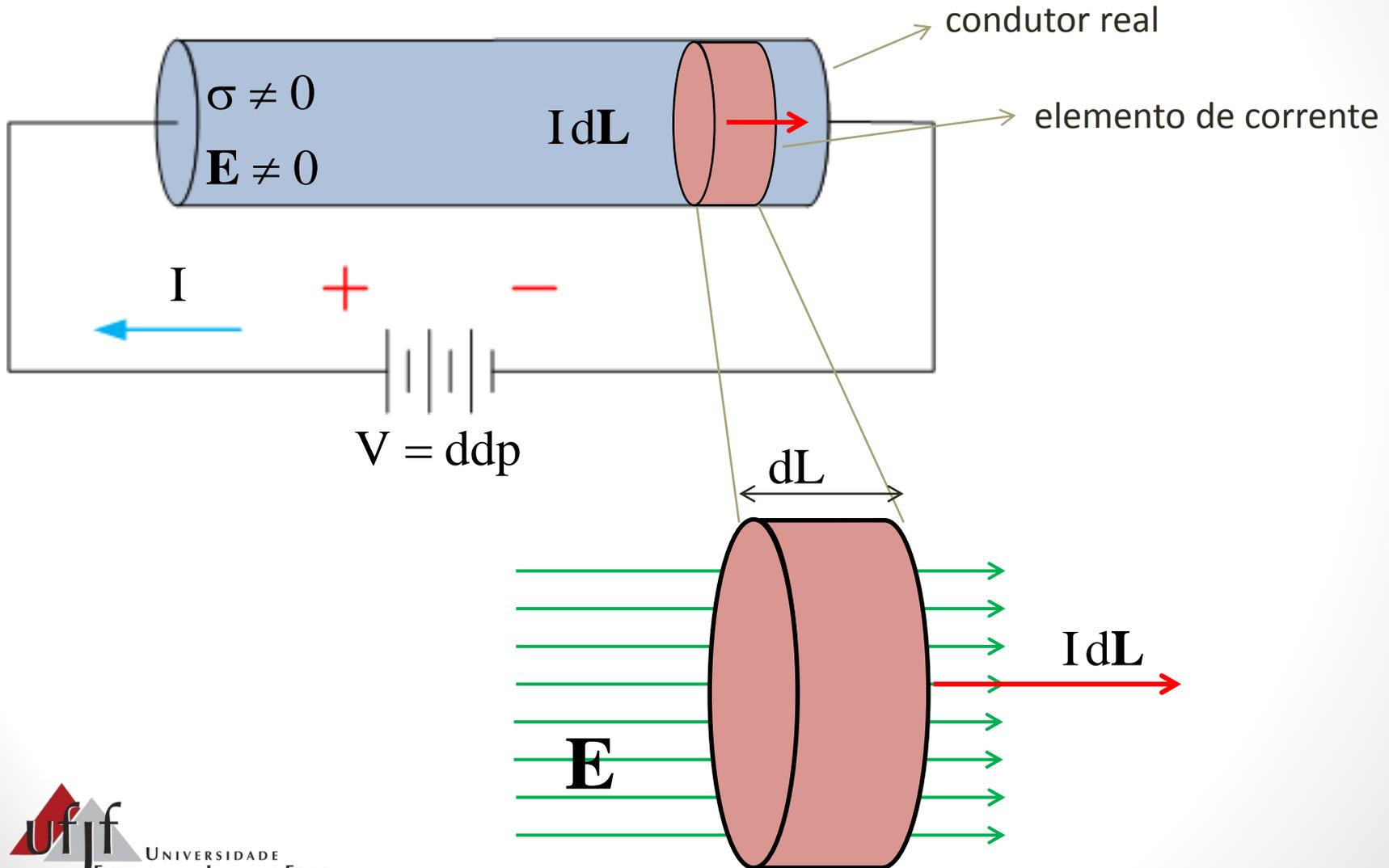
$$\therefore \frac{dV}{dI} = \frac{dx}{\sigma dS} \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{x}{\sigma S}$$

$$R \triangleq \frac{x}{\sigma S} \Rightarrow V = R I$$



# A origem do campo magnético

Elementos de corrente  $\rightarrow$  campos magnéticos



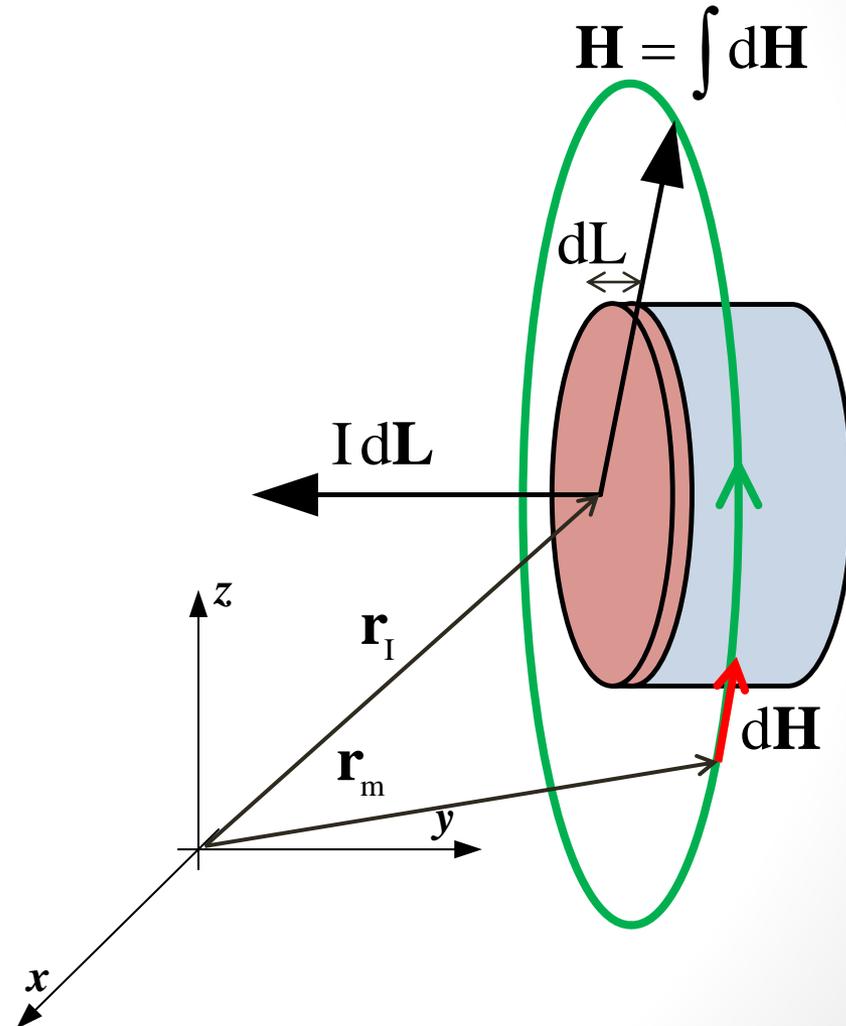
# A origem do campo magnético

Elementos de corrente  $\rightarrow$  campos magnéticos

Elementos de corrente,  $I dL$ , têm o mesmo papel em criar **campos magnéticos** que as **cargas** têm em criar **campos elétricos**!

Lei de Biot-Savart (geral):

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I)}{4\pi |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I|^3}$$



# A origem do campo magnético

Elementos de corrente  $\rightarrow$  campos magnéticos

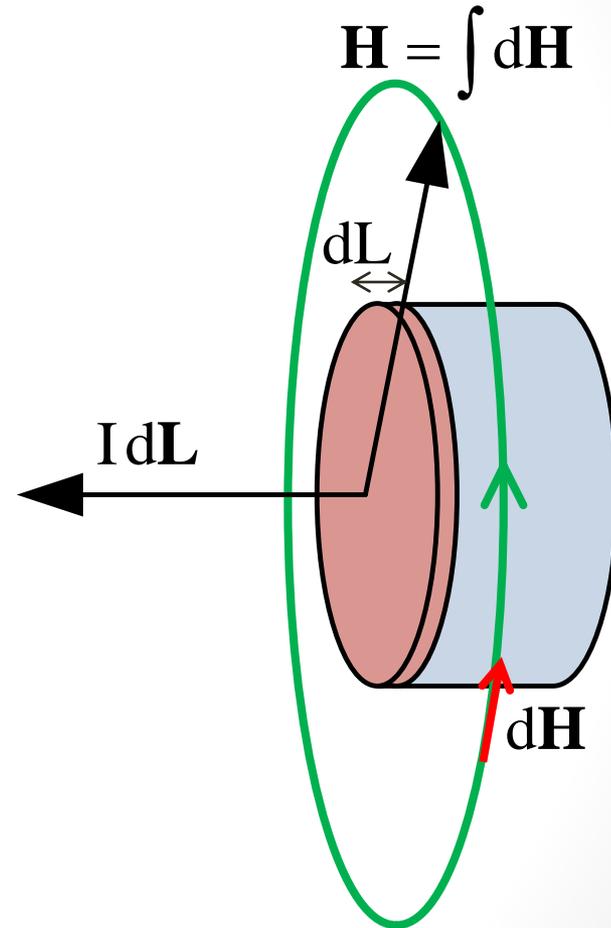
Elementos de corrente,  $I dL$ , têm o mesmo papel em criar **campos magnéticos** que as **cargas** têm em criar **campos elétricos**!

Lei de Biot-Savart

(elemento de corrente centrado na origem):

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I)}{4\pi |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I|^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{r}_I &= 0 \\ \mathbf{r}_m &= \mathbf{R} \end{aligned}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}$$



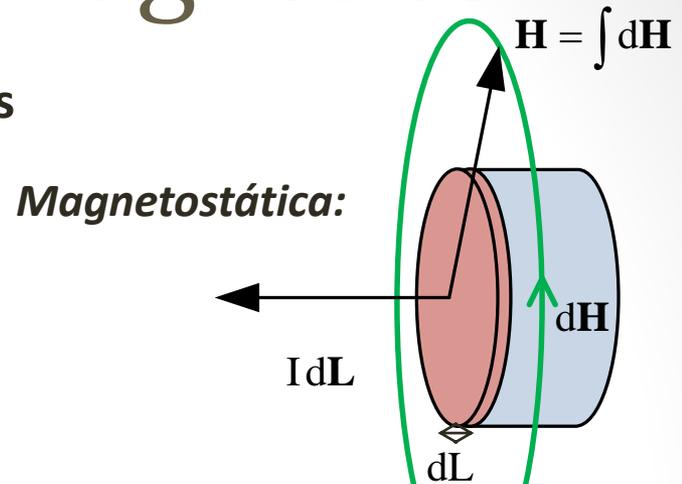
# A origem do campo magnético

Elementos de corrente  $\rightarrow$  campos magnéticos

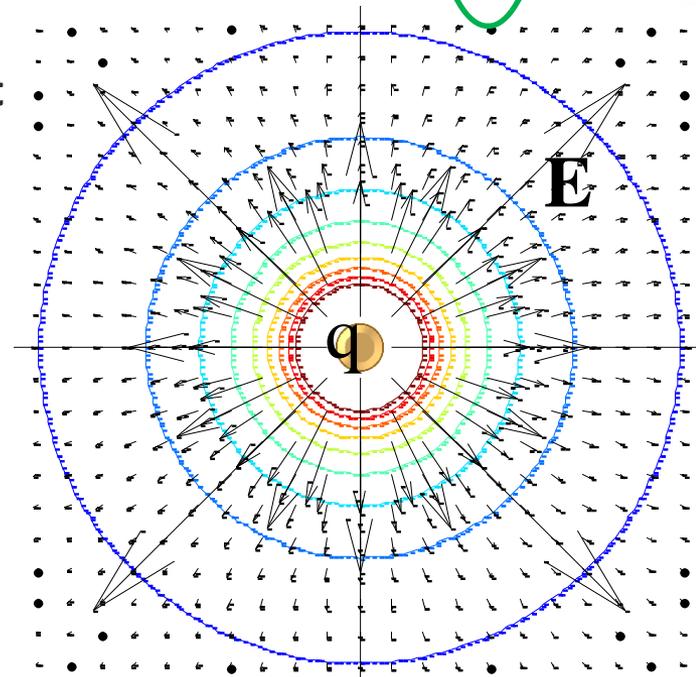
Elementos de corrente,  $I dL$ , têm o mesmo papel em criar **campos magnéticos** que as **cargas** têm em criar **campos elétricos**!

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I)}{4\pi |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I|^3} \rightarrow \text{Lei de Biot-Savart}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_q|^3} \rightarrow \text{Lei de Coulomb}$$



*Eletrostática:*



# Campo magnético estacionário

Vetor intensidade de campo magnético:

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

Produto vetorial  $\rightarrow$   $d\mathbf{H}$  sempre perpendicular a  $d\mathbf{L}$  e  $\mathbf{a}_R$

Portanto o campo total (**integral**) de um elemento de corrente é tomado em torno do **caminho fechado** deste elemento:

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

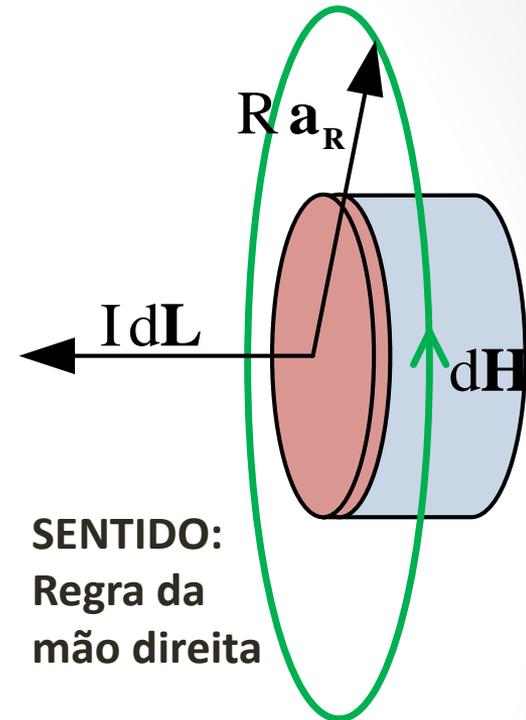
Corrente contínua:

Corrente total que atravessa qualquer superfície fechada:

$$\mathbf{J} \triangleq \rho_v \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV = 0$$



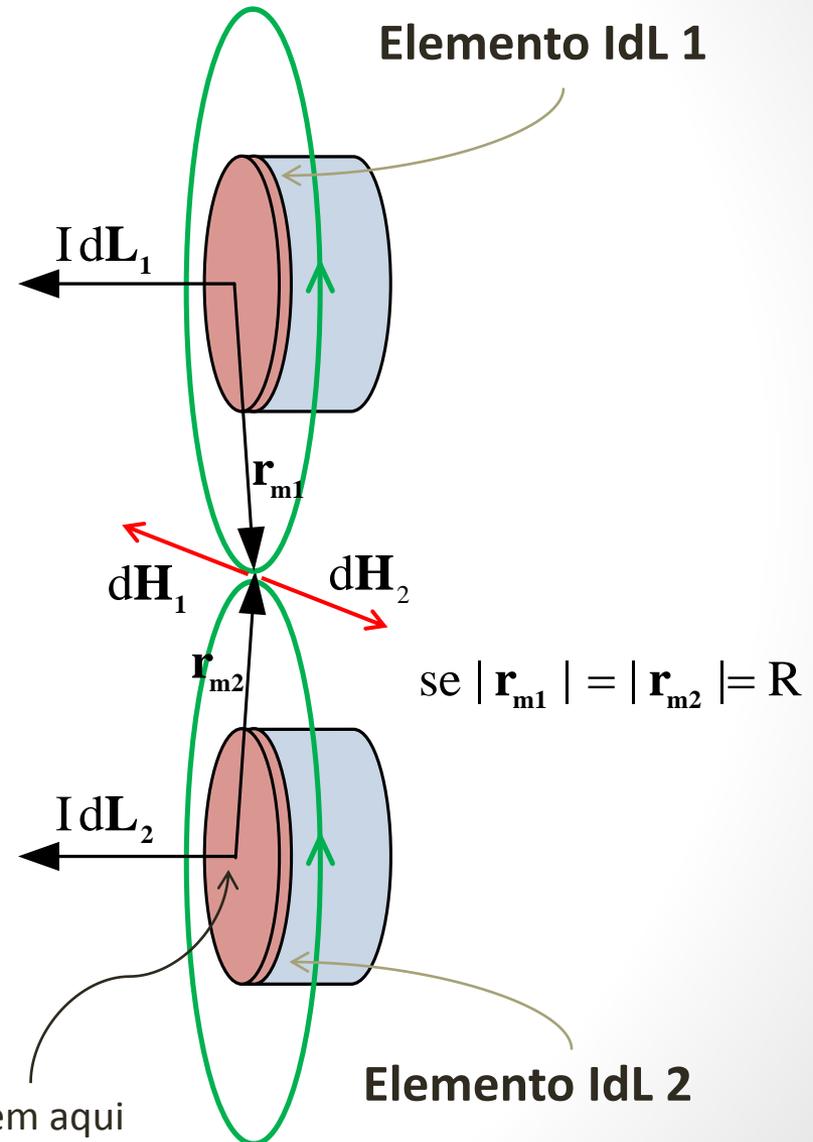
# Campo magnético estacionário

O princípio da superposição se aplica ao campo magnético estacionário:

$$d\mathbf{H}_1 = \frac{I d\mathbf{L}_1 \times (\mathbf{r}_{m1} - \mathbf{r}_{I1})}{4\pi |\mathbf{r}_{m1} - \mathbf{r}_{I1}|^3}$$

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I d\mathbf{L}_2 \times (\mathbf{r}_{m2} - \mathbf{r}_{I2})}{4\pi |\mathbf{r}_{m1} - \mathbf{r}_{I1}|^3}$$

$$d\mathbf{H} = \sum d\mathbf{H}_n = ?$$



# Campo magnético estacionário

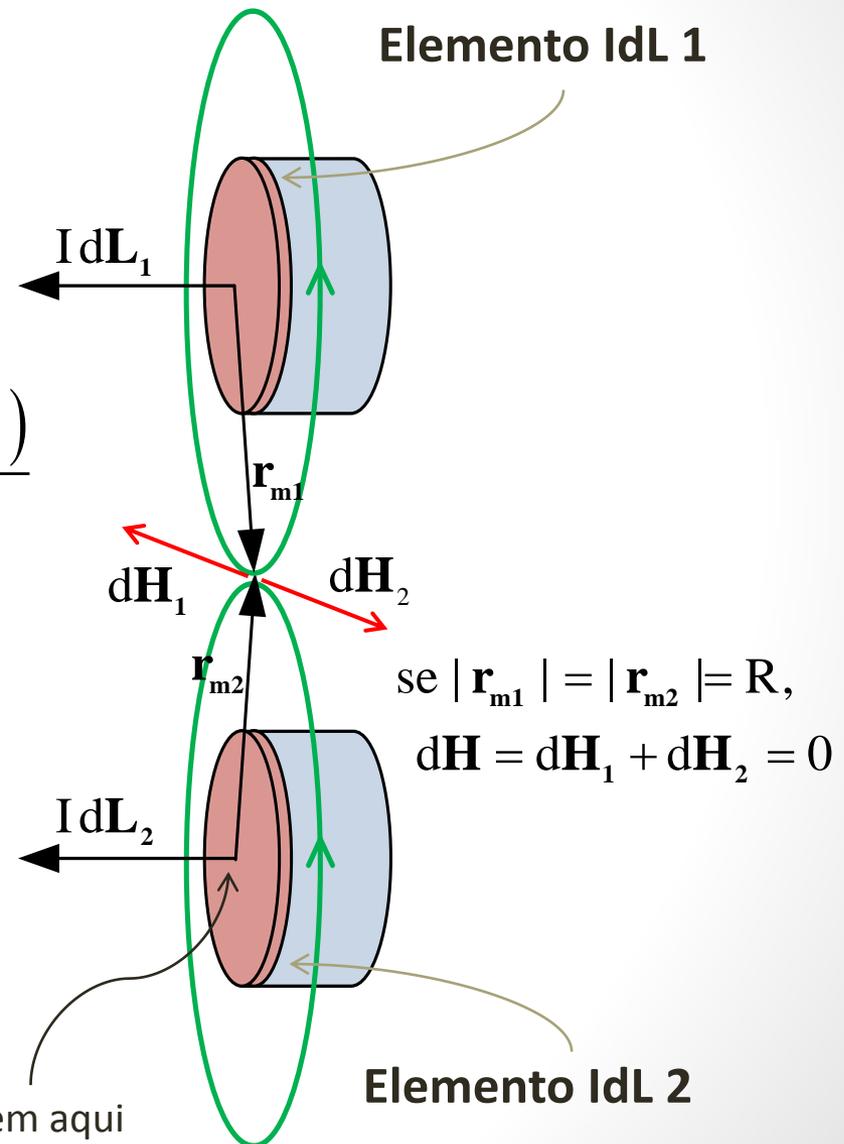
O princípio da superposição se aplica ao campo magnético estacionário:

$$Id\mathbf{L} = -Ia_y$$

$$d\mathbf{H}_1 = \frac{(-Idy \mathbf{a}_y) \times (-R\mathbf{a}_z)}{4\pi R^3} = \frac{Idy (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z)}{4\pi R^2}$$

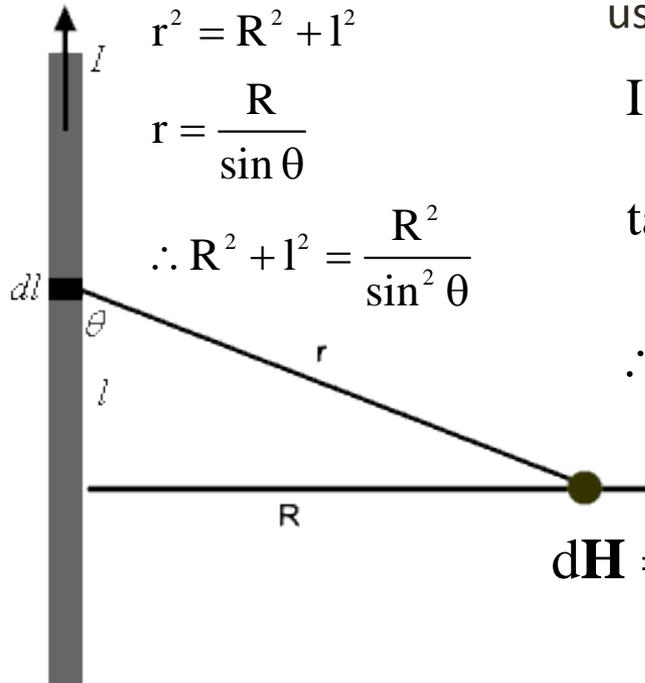
$$d\mathbf{H}_2 = \frac{-Idy (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z)}{4\pi R^2} = -d\mathbf{H}_1$$

$$d\mathbf{H} = \sum d\mathbf{H}_n = 0$$



# Campo magnético estacionário

Campo de um filamento retilíneo infinito no plano  $z=0$ :



usando a geometria:

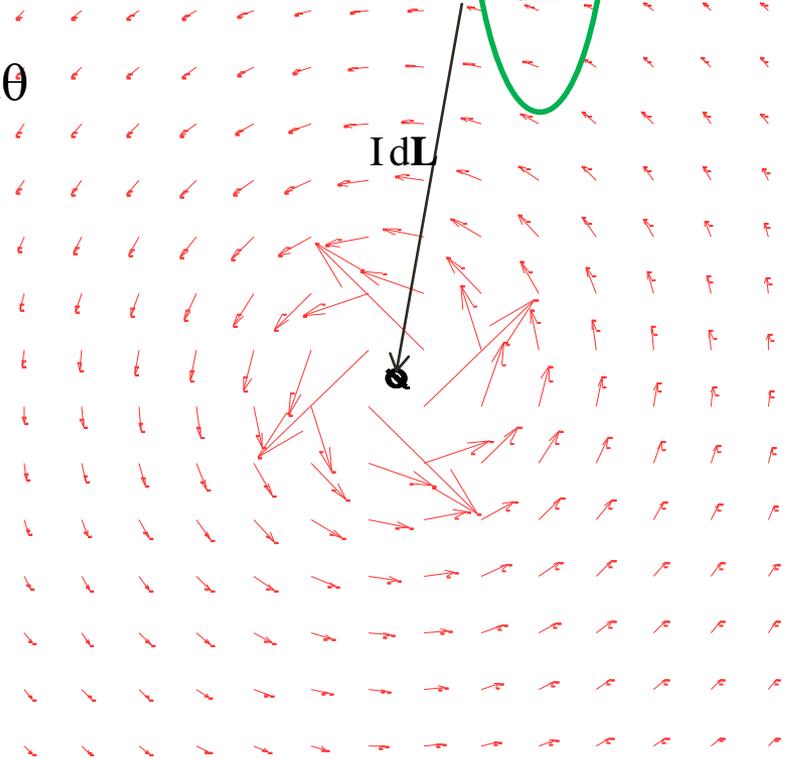
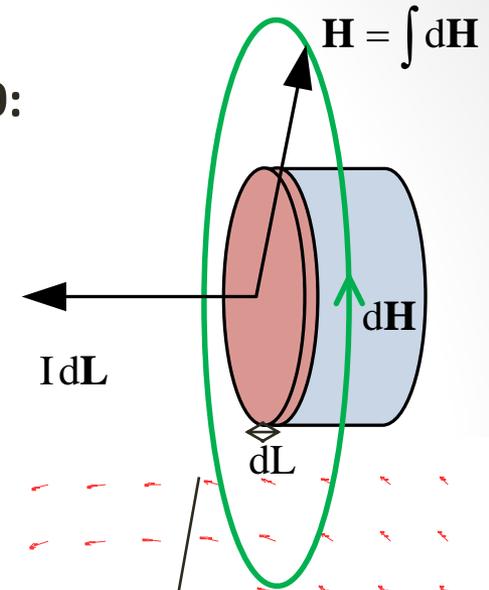
$$I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R = I dl \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

$$\tan \theta = \frac{R}{l} \Rightarrow l = R \cot \theta$$

$$\therefore dl = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

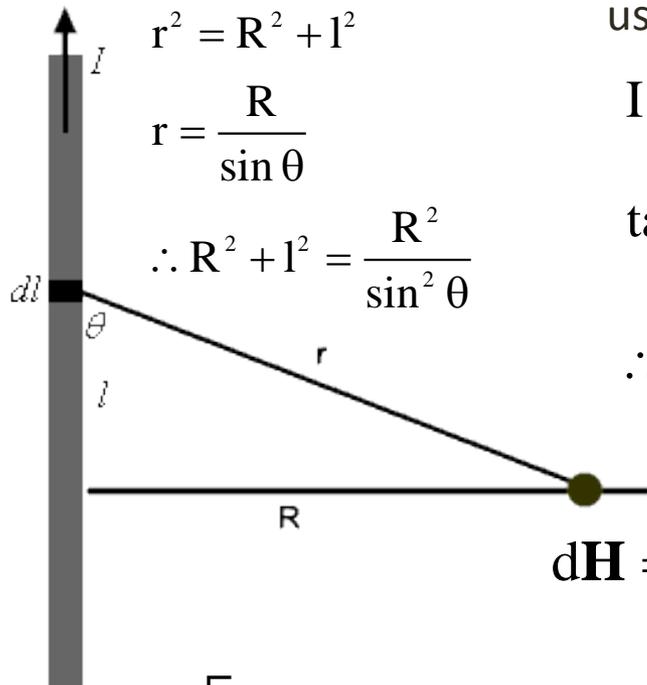
$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{2I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dl \sin \theta}{r^2} \mathbf{a}_\phi$$



# Campo magnético estacionário

Campo de um filamento retilíneo infinito no plano  $z=0$ :



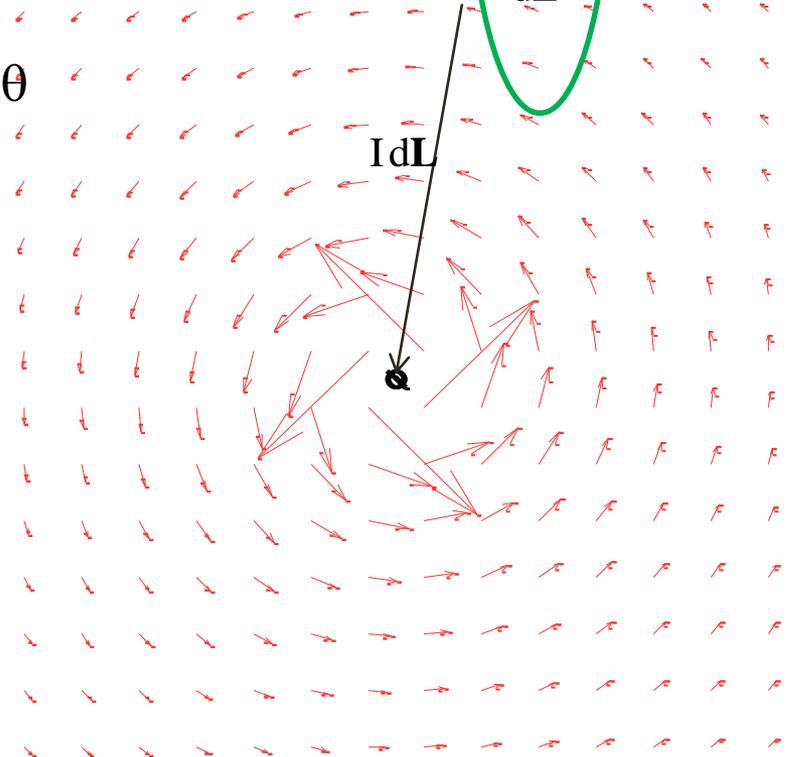
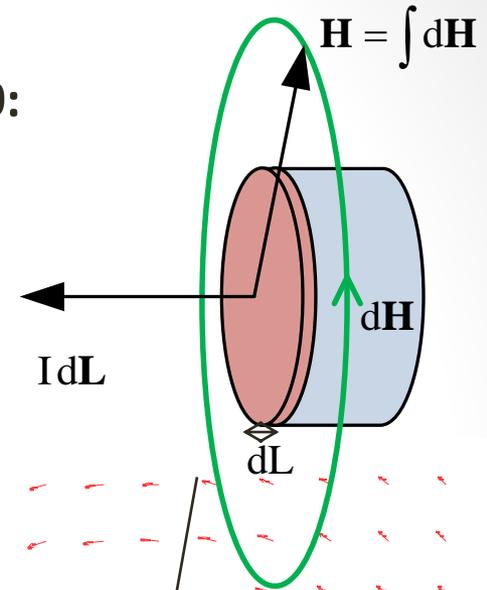
usando a geometria:

$$I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R = I dl \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

$$\tan \theta = \frac{R}{l} \Rightarrow l = R \cot \theta$$

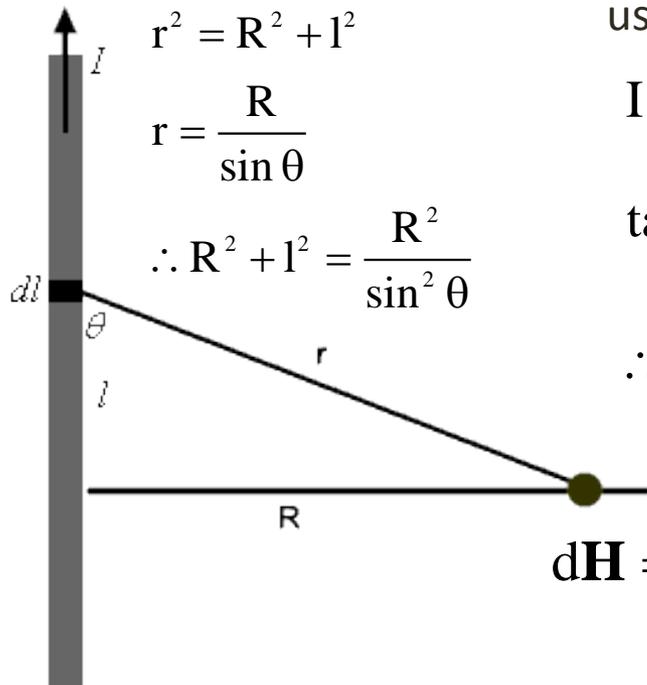
$$\therefore dl = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$\mathbf{H} = 2 \left[ \frac{I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta}{\left( \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \right)} dl \right] \mathbf{a}_\phi =$$



# Campo magnético estacionário

Campo de um filamento retilíneo infinito no plano  $z=0$ :



$$r^2 = R^2 + l^2$$

$$r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$$\therefore R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \theta}$$

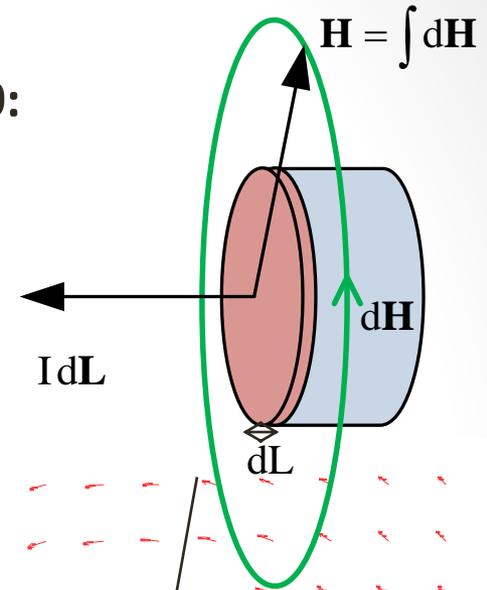
usando a geometria:

$$I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R = I dl \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

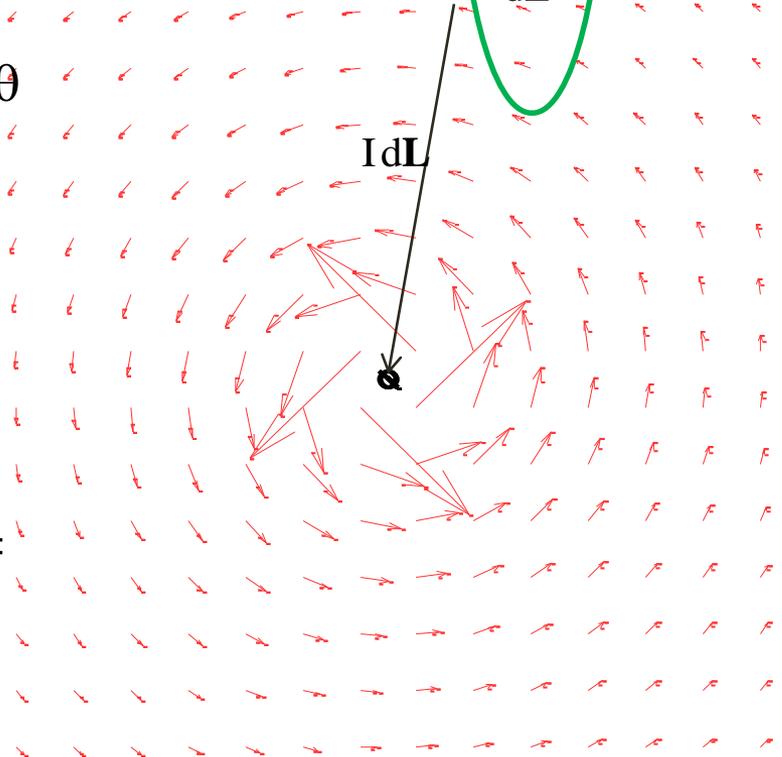
$$\tan \theta = \frac{R}{l} \Rightarrow l = R \cot \theta$$

$$\therefore dl = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

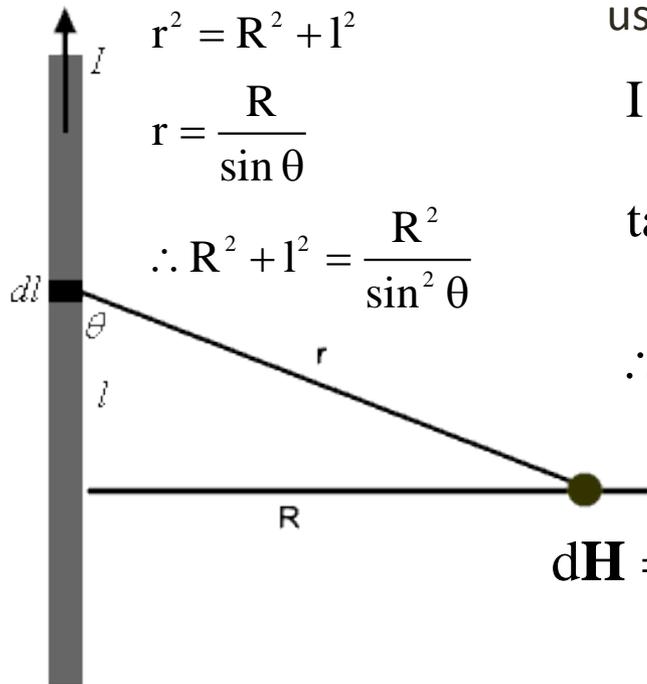


$$\mathbf{H} = 2 \left[ -\frac{I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^3 \theta}{R^2} \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \right] \mathbf{a}_\phi =$$



# Campo magnético estacionário

Campo de um filamento retilíneo infinito no plano  $z=0$ :



$$r^2 = R^2 + l^2$$

$$r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$$\therefore R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \theta}$$

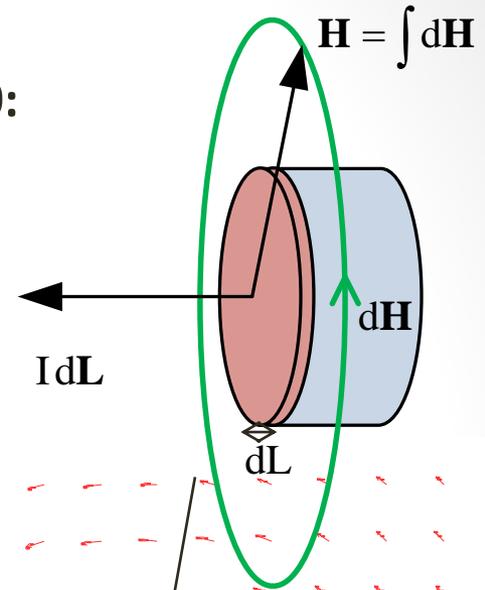
usando a geometria:

$$I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R = I dl \sin \theta \mathbf{a}_\phi$$

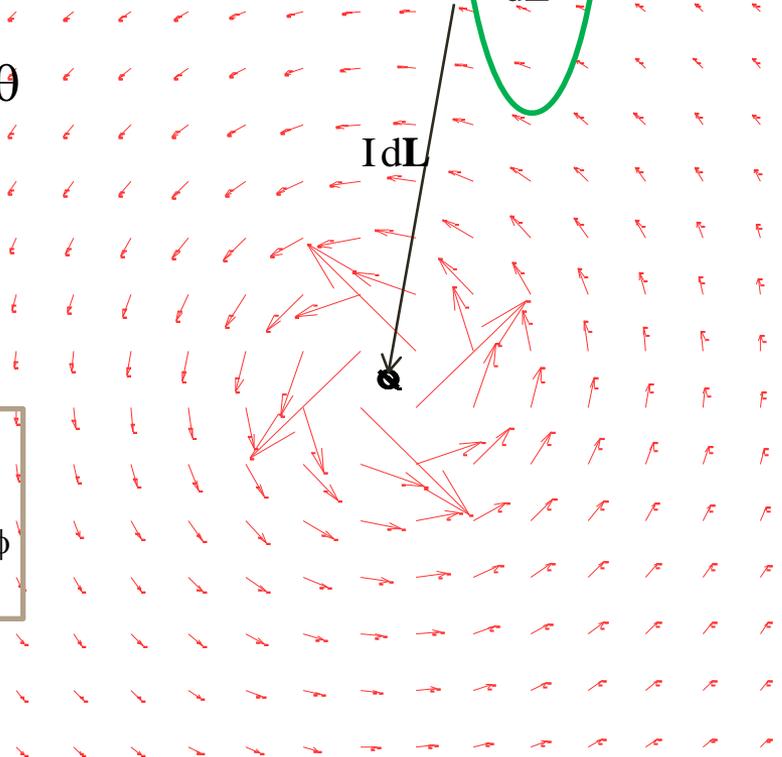
$$\tan \theta = \frac{R}{l} \Rightarrow l = R \cot \theta$$

$$\therefore dl = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

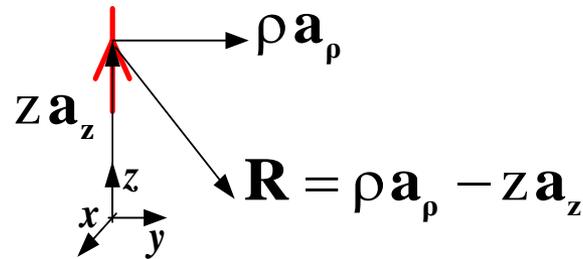
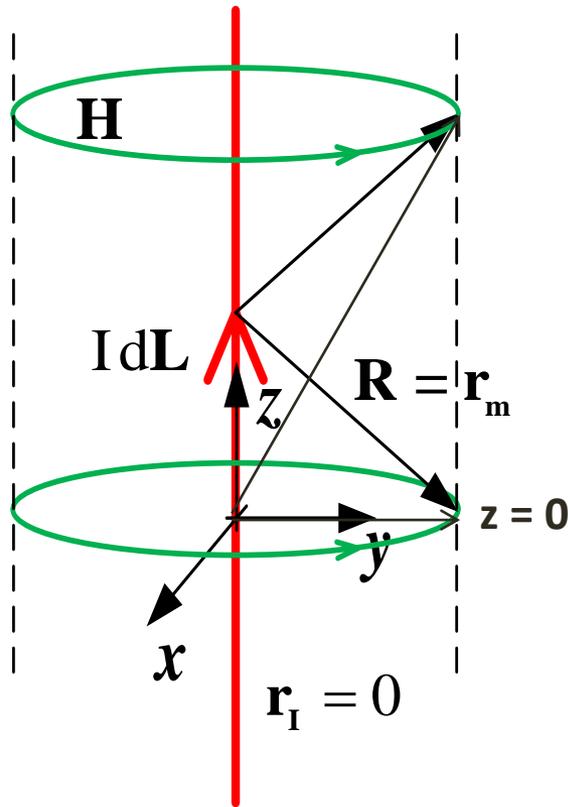


$$\mathbf{H} = \left[ 2 \frac{I}{4\pi R} [\cos \theta]_0^{\pi/2} \right] \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi R} \mathbf{a}_\phi$$

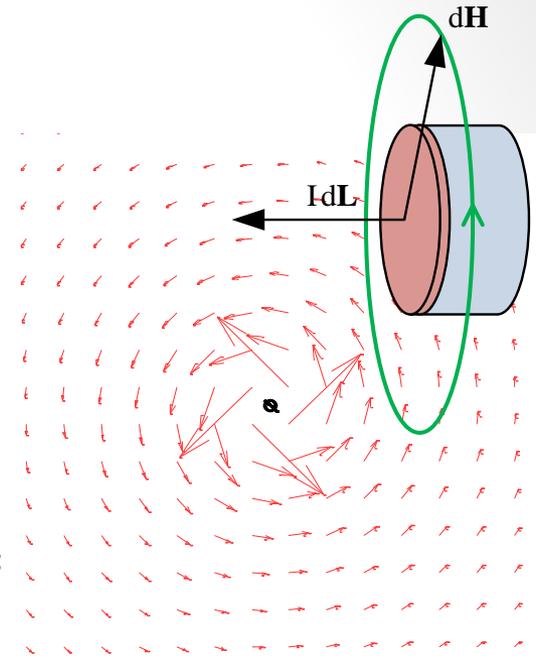


# Campo magnético estacionário

Solução usando coordenadas cilíndricas e simetria:



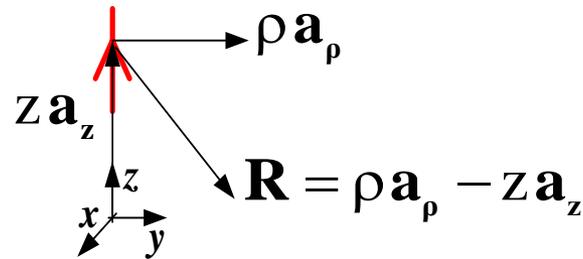
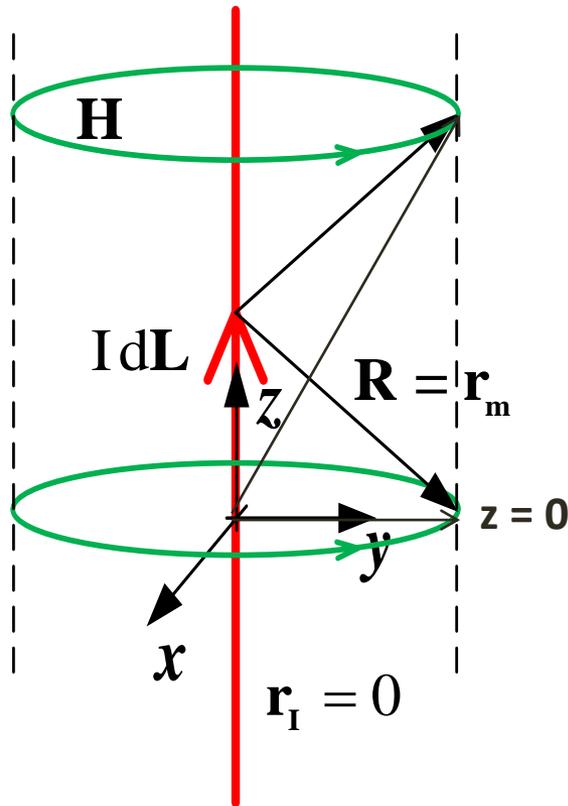
$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \\ &= \frac{I}{4\pi} \frac{(dz \mathbf{a}_z) \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right)^3} \end{aligned}$$



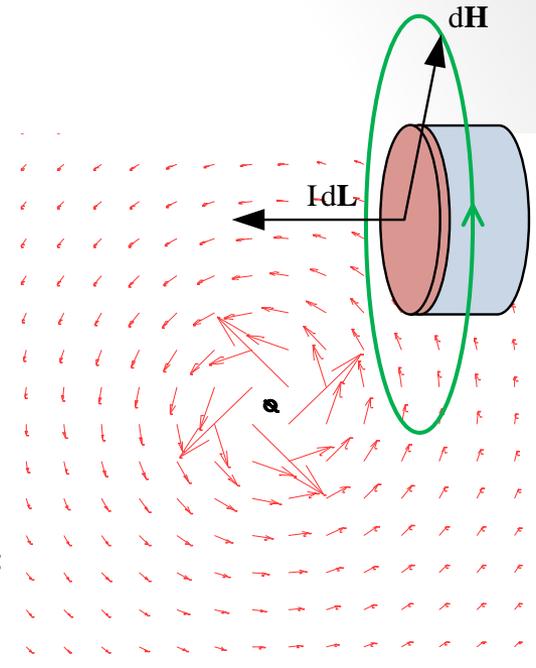
$$\mathbf{H} = \frac{2I}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\mathbf{a}_z \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\phi$$

# Campo magnético estacionário

Solução usando coordenadas cilíndricas e simetria:



$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{(dz \mathbf{a}_z) \times (\rho \mathbf{a}_\rho - z \mathbf{a}_z)}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3}$$



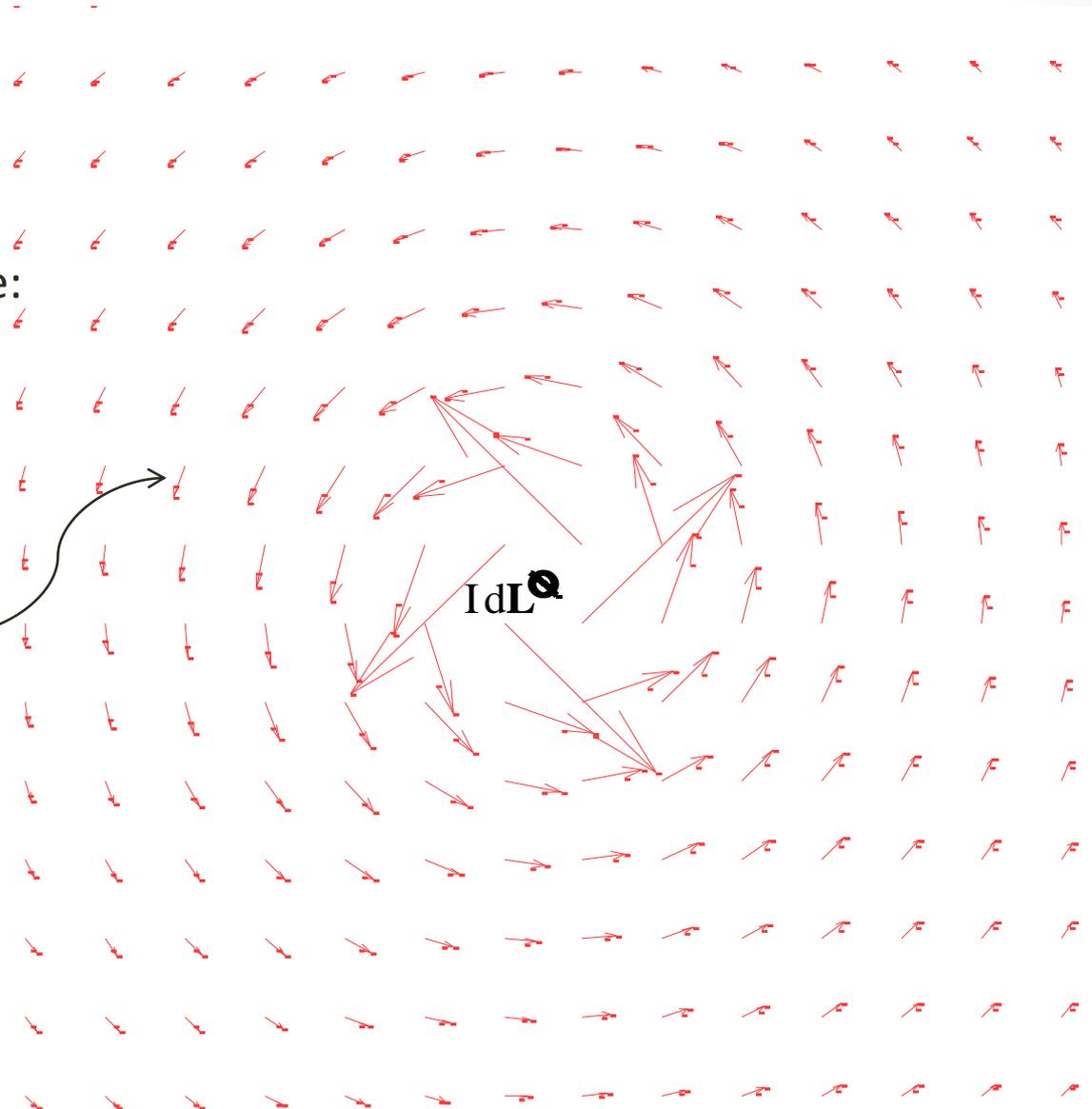
$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \left[ \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right]_0^\infty \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

# Campo magnético estacionário

Solução:

em um plano  $z = \text{cte}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$



$$\nabla \times \mathbf{H} \neq 0 \quad ?$$

onde ?

# Campo magnético estacionário

O campo tende a rodar em torno de IdL...

em um plano  $z = \text{cte}$ :

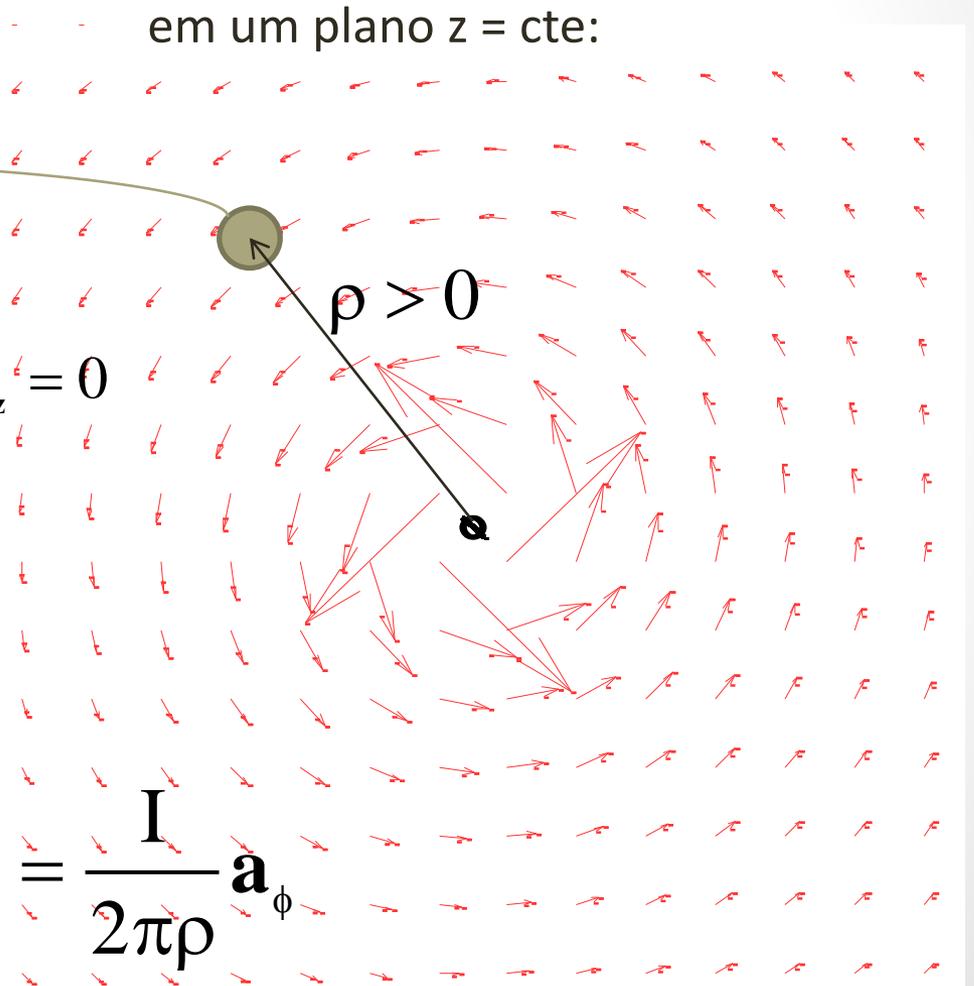
$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times \left( \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{I}{2\pi R} \right) \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho I}{2\pi\rho} \right) \mathbf{a}_z = 0\end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

em qualquer lugar fora da origem ( $\rho \neq 0$ ).

Em  $\rho = 0$  existe uma **singularidade**.

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

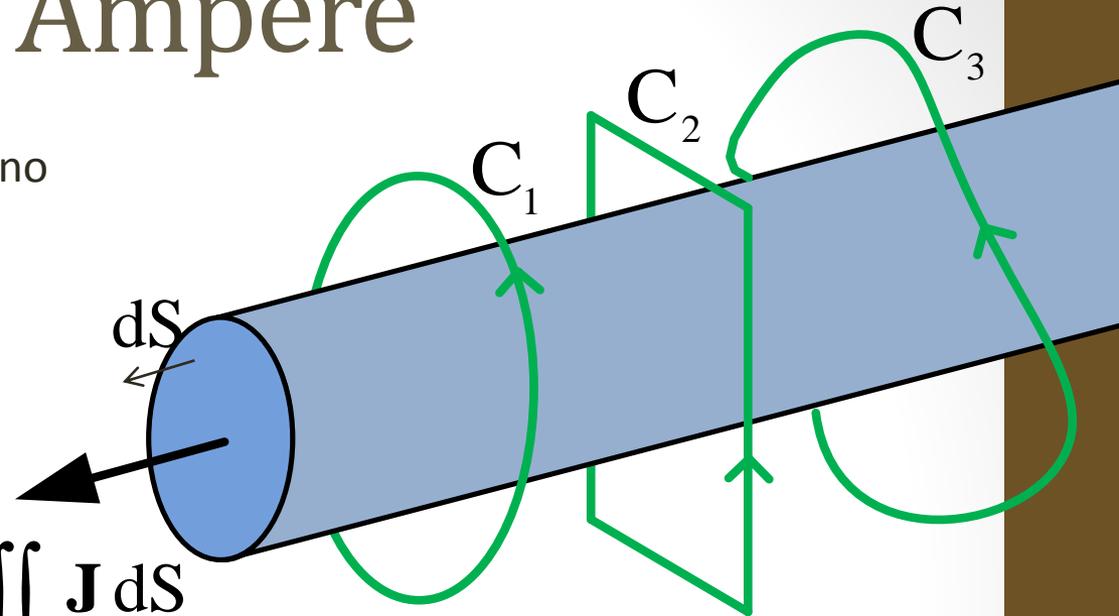


# Lei Circuital de Ampère

- Mas por que o campo “gira” em torno da corrente?
- Onde o rotacional não é nulo?

“O campo magnético em torno de um fio é gerado pela corrente que percorre este fio; a corrente envolvida pelo campo é o valor integral deste campo”

$$I = \iint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$



**Lei de Ampère** → *como correntes elétricas geram campos magnéticos*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

3 caminhos fechados orientados no sentido positivo:

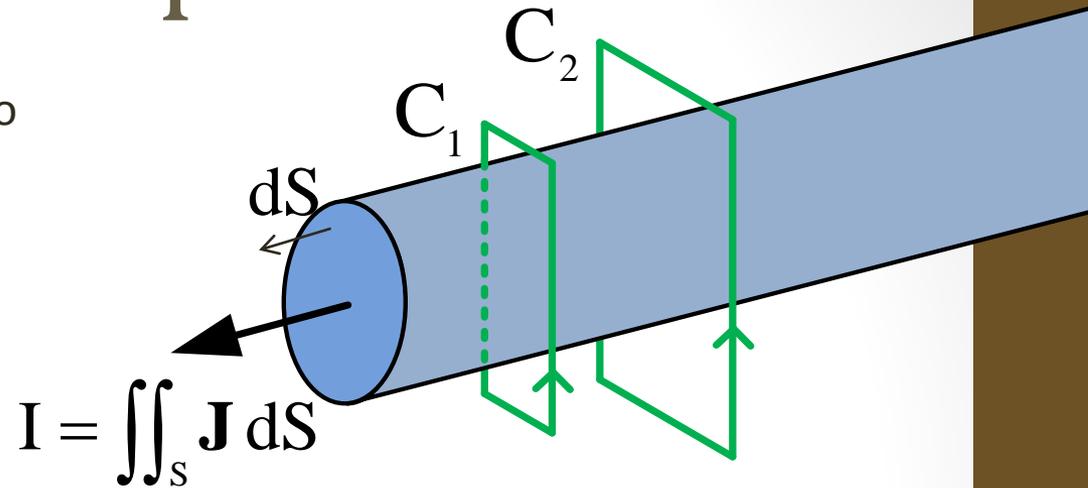
$$\oint_{C_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{C_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{C_3} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

# Lei Circuital de Ampère

- Mas por que o campo “gira” em torno da corrente?
- Onde o rotacional não é nulo?

**Lei de Ampère** → *como correntes elétricas geram campos magnéticos*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$



$$\mathbf{I} = \iint_S \mathbf{J} d\mathbf{S}$$

2 caminhos diferentes:

- C2 envolve toda a corrente
- C1 envolve parte da corrente

$$\oint_{C_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} > \oint_{C_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

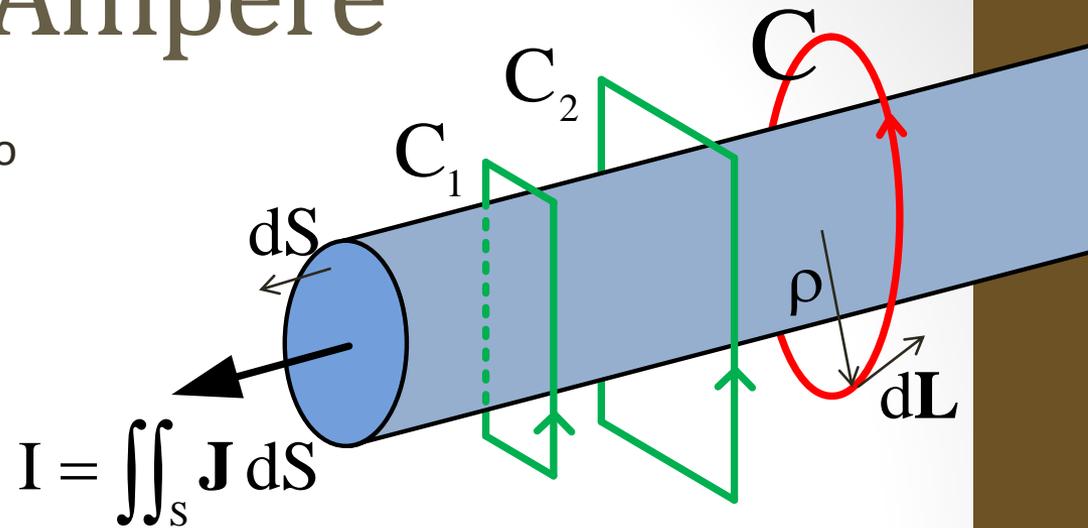
pois C1 não envolve menos que o valor integral de J (ou seja, menos que I)

# Lei Circuital de Ampère

- Mas por que o campo “gira” em torno da corrente?
- Onde o rotacional não é nulo?

Lei de Ampère → como correntes elétricas geram campos magnéticos

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$



Supondo o filamento do desenho infinitamente longo e infinitamente fino, e escolhendo uma circunferência C de raio  $\rho$  orientada no sentido  $\mathbf{a}_\phi$ :

$$d\mathbf{L} = \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$$

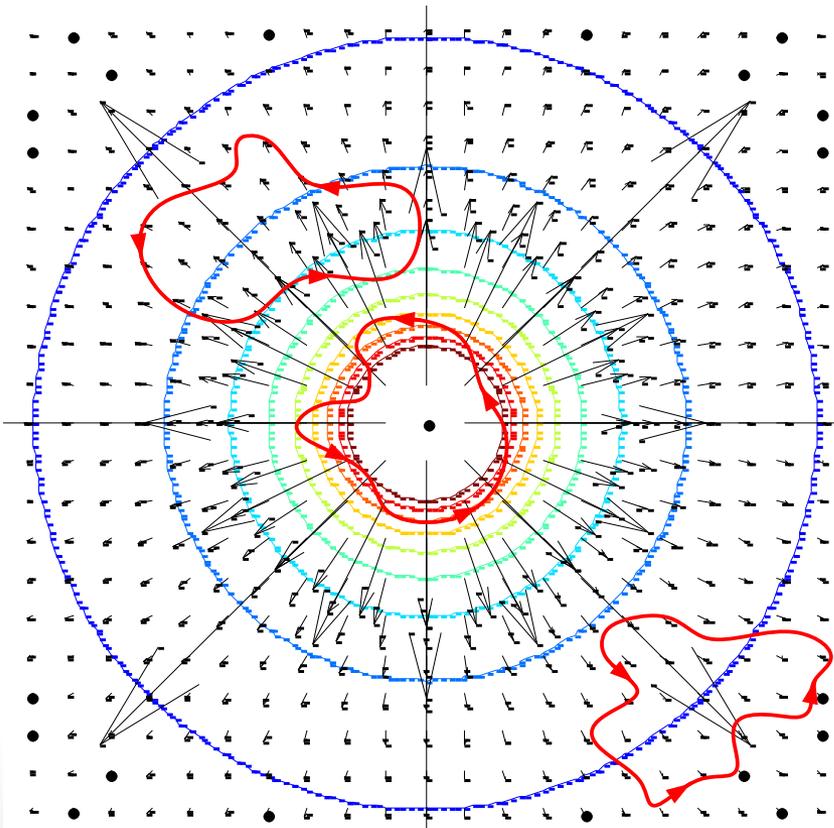
Segundo a Lei de Ampère:  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = I$

$$\int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = 2\pi H_\phi \rho = I \quad \Rightarrow$$

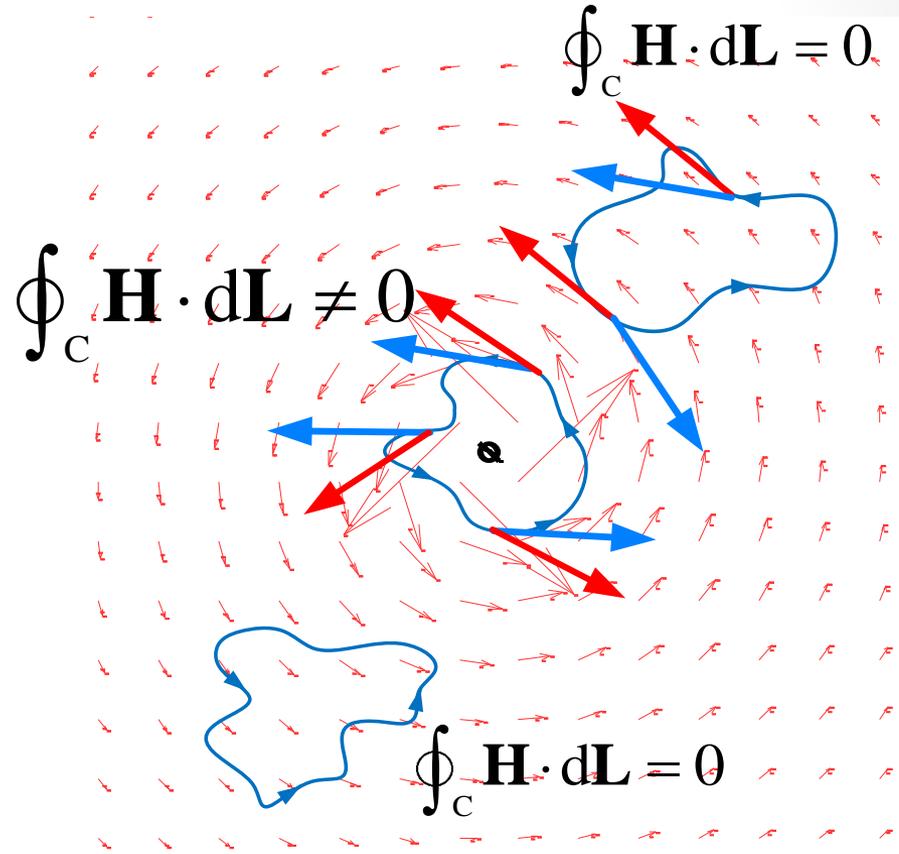
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

# Lei de Ampère – forma pontual

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$



Eletrostática:



Magnetostática:

# Lei de Ampère – forma pontual

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} \neq 0$$

Lei de Ampère  $\rightarrow$  a rotacional não é nulo onde há corrente.

Forma pontual:  
comportamento em cada ponto do campo

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

# Lei de Ampère – forma pontual

Lei de Ampère → como correntes elétricas geram campos magnéticos

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

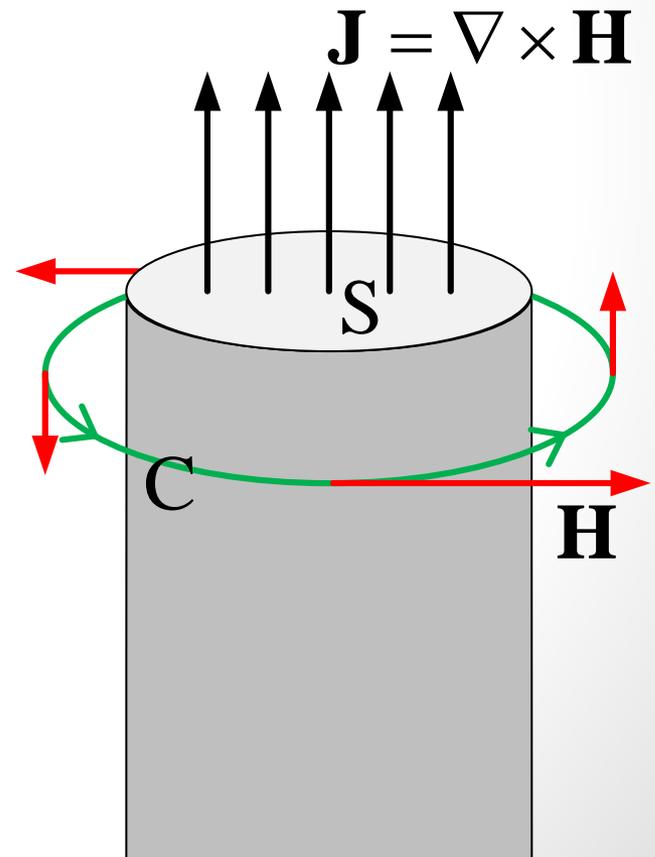
Podemos derivar a versão diferencial (pontual) da lei utilizando o Teorema de Stokes:

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = I$$

Como 
$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Fica evidente que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

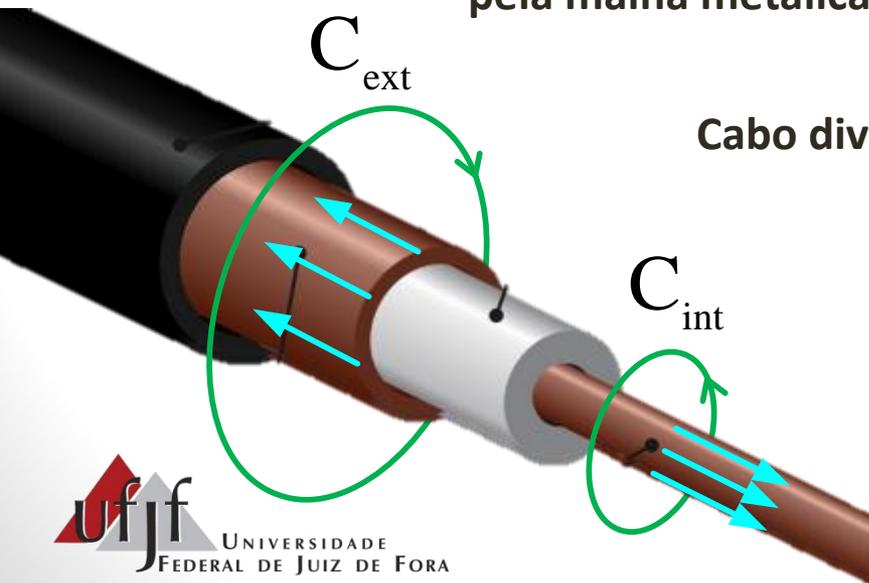
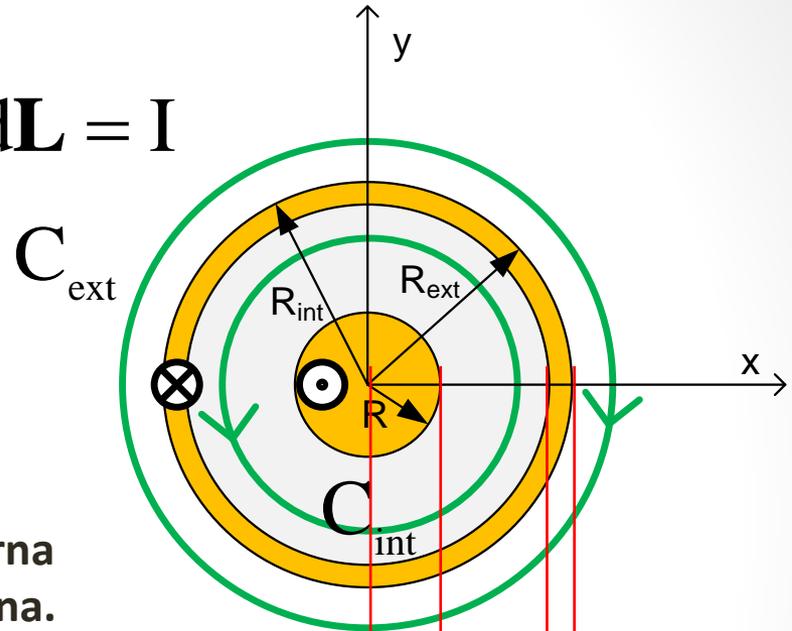


# Lei Circuital de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \longleftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

**Exemplo de aplicação:**  
cálculo do campo  
magnético de um cabo  
coaxial

Toda a corrente que passa  
pelo interior do cabo retorna  
pela malha metálica externa.



Cabo dividido em seções:

$$0 < \rho < R$$

$$R < \rho < R_{int}$$

$$R_{int} < \rho < R_{ext}$$

$$\rho \geq R_{ext}$$

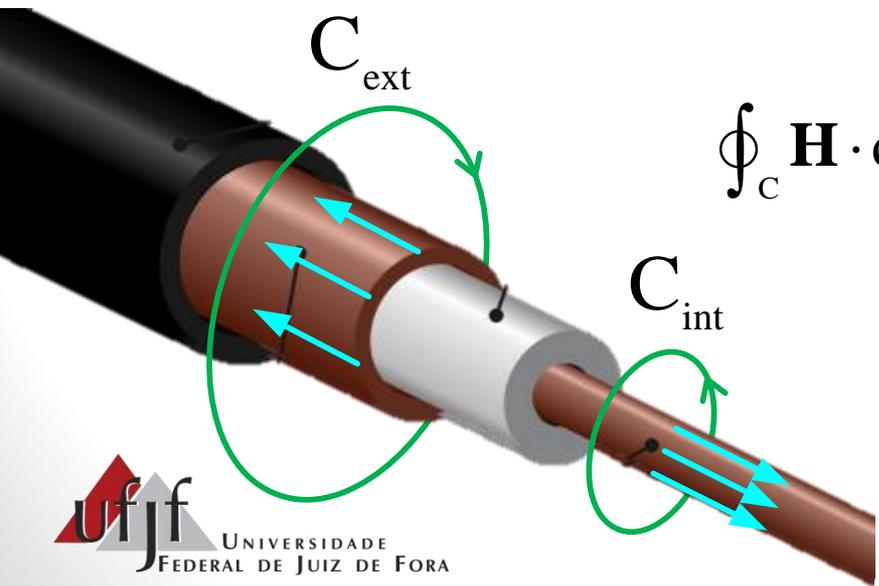
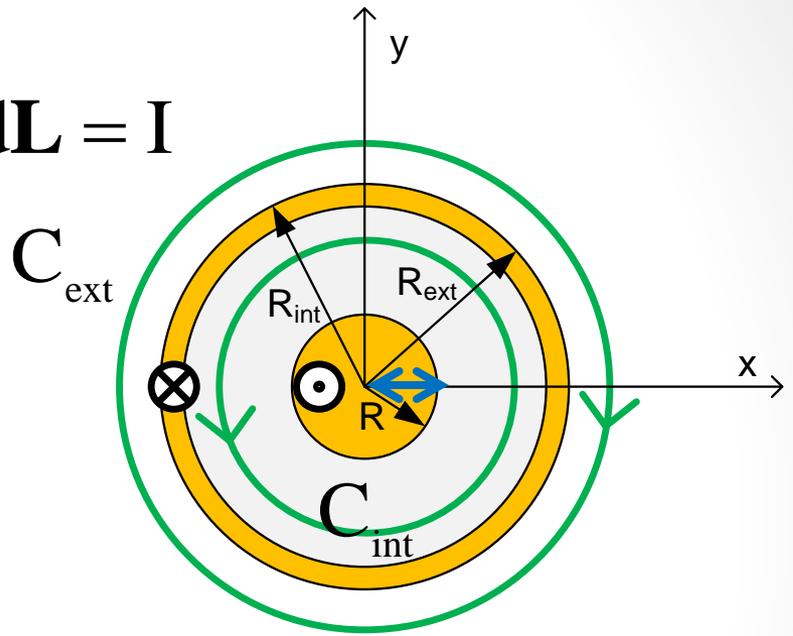
# Lei Circuital de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \longleftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

**Exemplo de aplicação:**  
 cálculo do campo  
 magnético de um cabo  
 coaxial

$$d\mathbf{L} = \mathbf{a}_\phi \rho d\phi$$

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi \rho d\phi$$



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = 2\pi H_\phi \rho = I \frac{\pi \rho^2}{\pi R^2}$$

$$\therefore H_\phi = \frac{I \rho}{2\pi R^2} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I \rho}{2\pi R^2} \mathbf{a}_\phi$$

$$0 < \rho < R$$

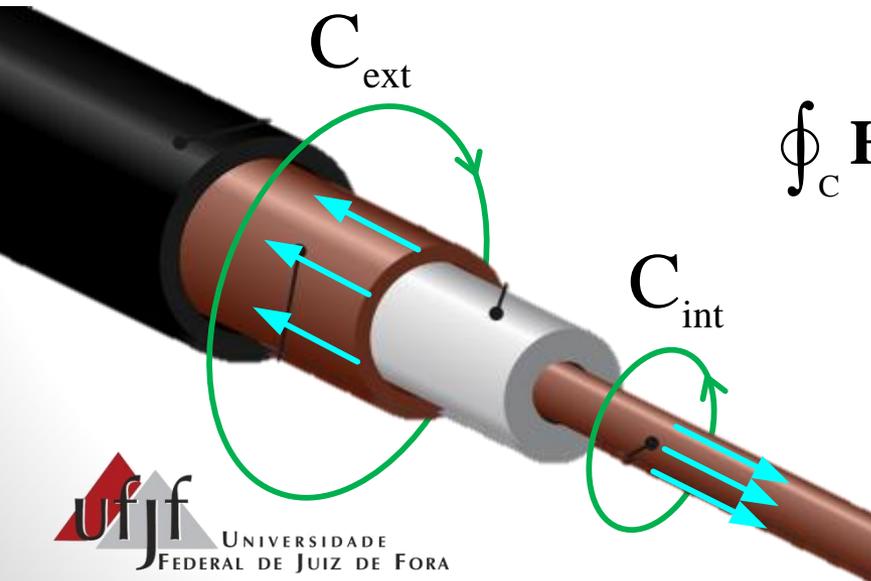
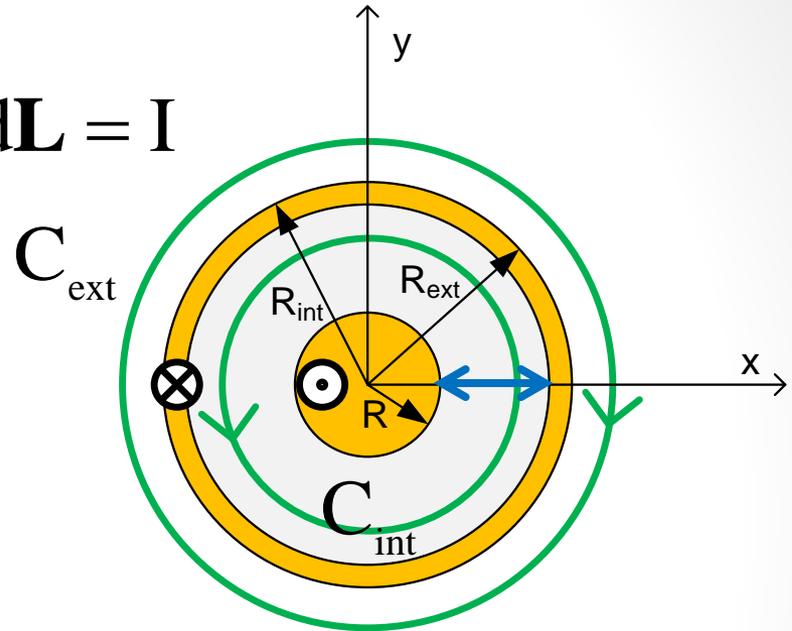
# Lei Circuital de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \longleftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

**Exemplo de aplicação:**  
cálculo do campo  
magnético de um cabo  
coaxial

$$d\mathbf{L} = \mathbf{a}_\phi \rho d\phi$$

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi \rho d\phi$$



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = 2\pi H_\phi \rho = I$$

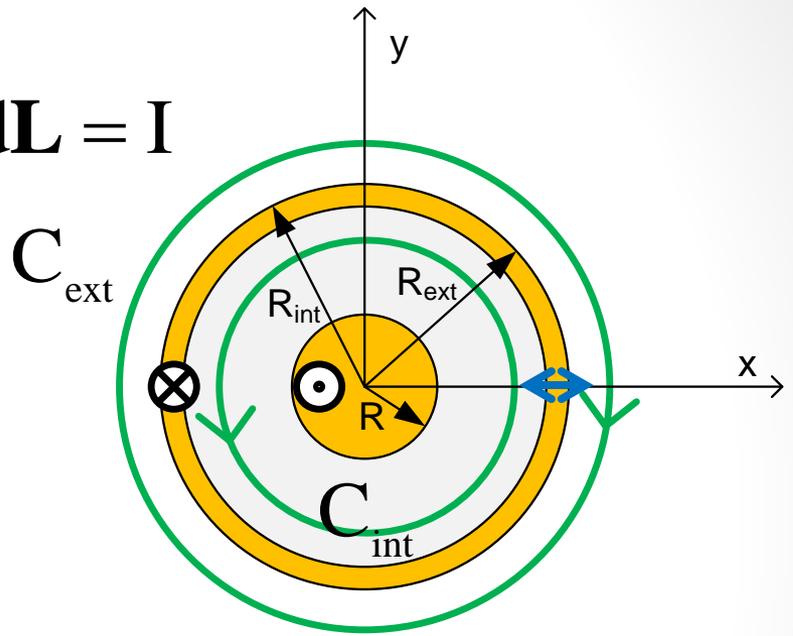
$$\therefore H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

$$R < \rho < R_{int}$$

# Lei Circuital de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \longleftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

**Exemplo de aplicação:**  
 cálculo do campo  
 magnético de um cabo  
 coaxial



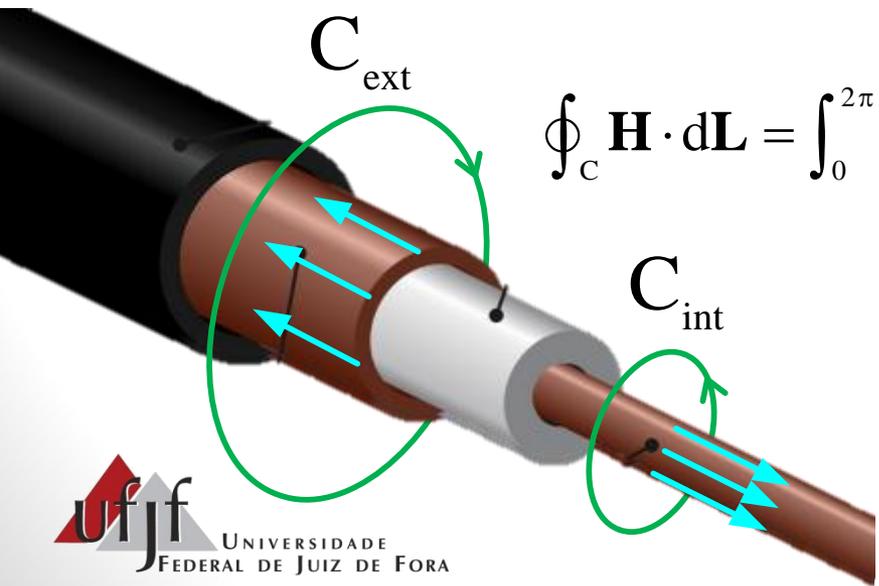
$$d\mathbf{L} = \mathbf{a}_\phi \rho d\phi$$

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi \rho d\phi$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = 2\pi H_\phi \rho = I \left( 1 - \frac{\pi(\rho^2 - R_{int}^2)}{\pi(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \right)$$

$$\therefore \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{(R_{ext}^2 - \rho^2)}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \mathbf{a}_\phi$$

$$R_{int} < \rho < R_{ext}$$



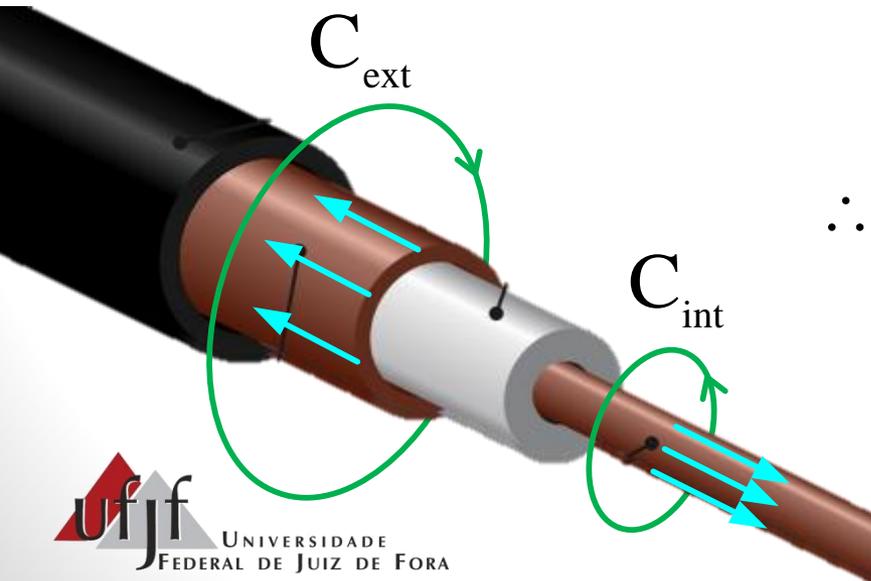
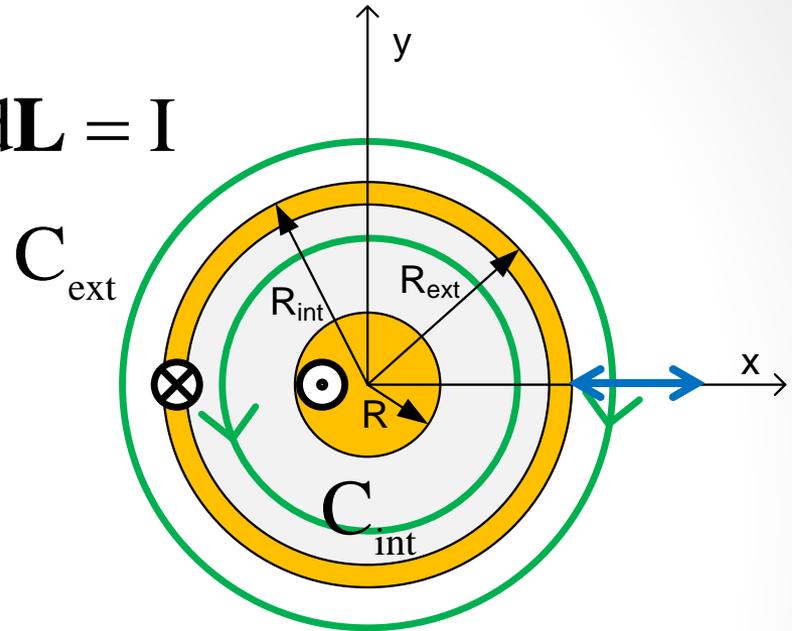
# Lei Circuital de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \longleftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

**Exemplo de aplicação:**  
cálculo do campo  
magnético de um cabo  
coaxial

$$d\mathbf{L} = \mathbf{a}_\phi \rho d\phi$$

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = H_\phi \rho d\phi$$



$$\therefore \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{ext}}^2)}{(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)} \mathbf{a}_\phi = 0$$

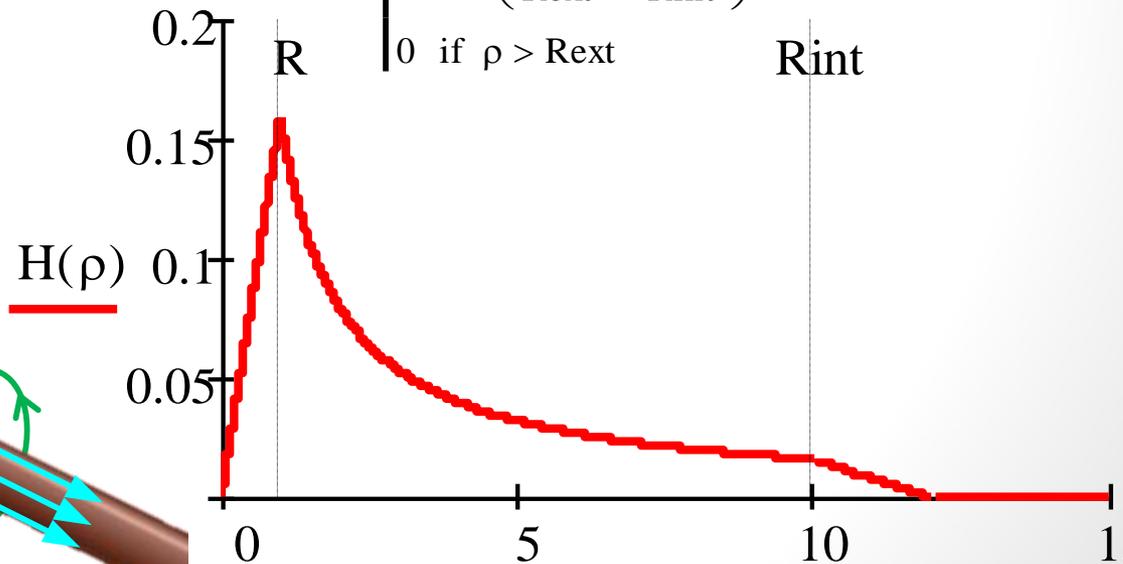
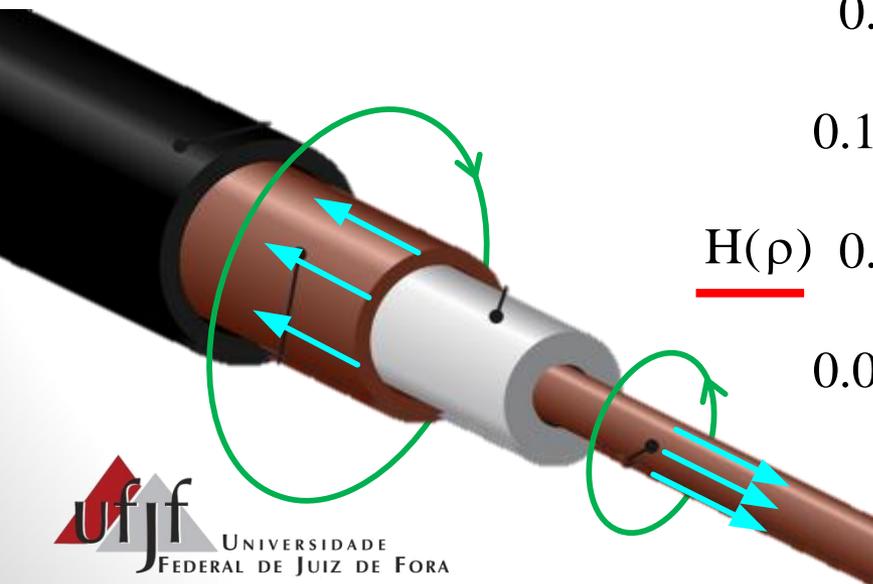
$$\rho \geq R_{\text{ext}}$$

# Lei Circuital de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \longleftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

**Exemplo de aplicação:**  
cálculo do campo  
magnético de um cabo  
coaxial

$$H(\rho) := \begin{cases} \frac{I \cdot \rho}{2\pi R^2} & \text{if } 0 < \rho < R \\ \frac{I}{2\pi \rho} & \text{if } R < \rho < R_{int} \\ \frac{I}{2\pi \cdot \rho} \cdot \left( \frac{R_{ext}^2 - \rho^2}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} \right) & \text{if } R_{int} < \rho < R_{ext} \\ 0 & \text{if } \rho > R_{ext} \end{cases}$$



# Lei de Ampère – forma pontual

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \mathbf{a}_z = \mathbf{J}$$

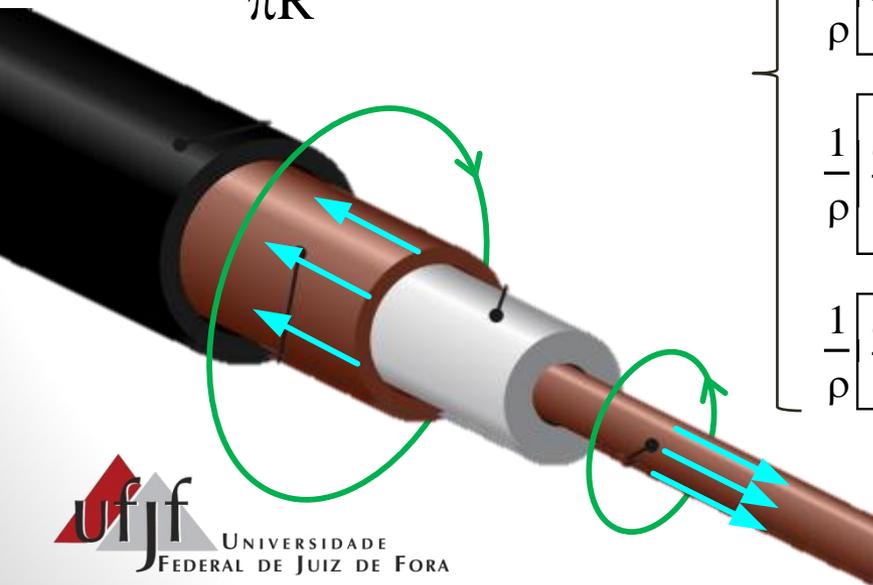
Ambos C orientados positivamente com relação a J

$$\mathbf{J}_{\text{ext}} = \frac{I}{\pi(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{J}_{\text{int}} = \frac{I}{\pi R^2} \mathbf{a}_z$$

Rotacional dentro e fora do cabo (na direção  $\mathbf{a}_z$ ):

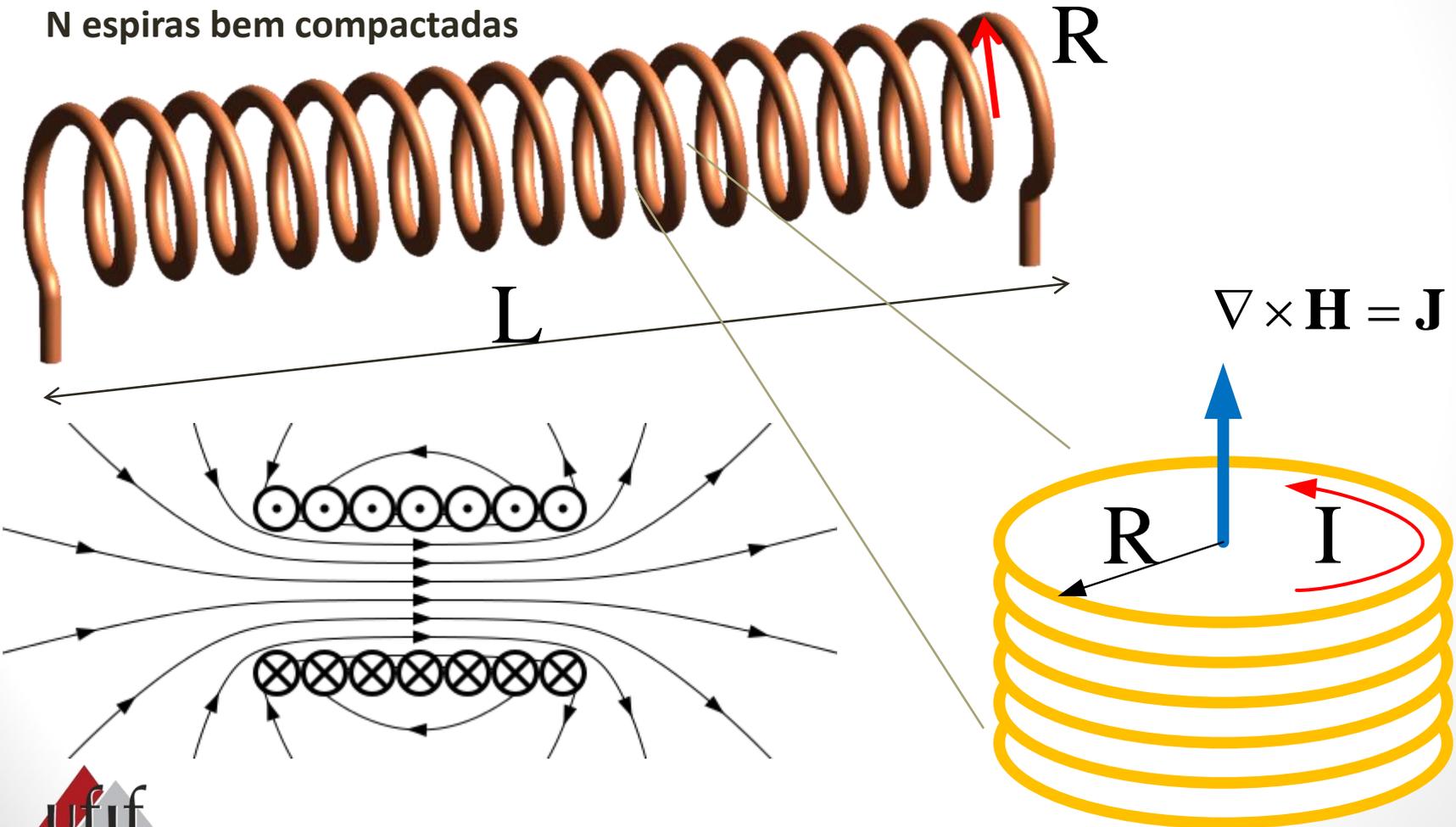
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{I \cdot \rho}{2\pi R^2} \right) \right] \rightarrow \frac{I}{\pi \cdot R^2} \quad \mathbf{J}_{\text{int}} \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{I}{2\pi \rho} \right) \right] \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \left[ \frac{I}{2\pi \cdot \rho} \cdot \left( \frac{R_{\text{ext}}^2 - \rho^2}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \right) \right] \right] \right] \rightarrow \frac{\mathbf{J}_{\text{ext}}}{\pi \cdot (R_{\text{int}}^2 - R_{\text{ext}}^2)} \\ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{d}{d\rho} (\rho 0) \right] \rightarrow 0 \end{array} \right.$$



# Lei de Ampère

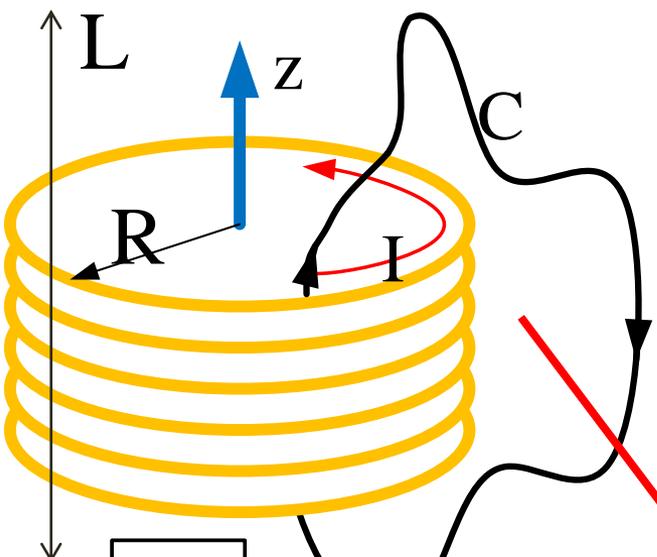
Exemplo de aplicação: cálculo do campo de um solenoide longo (L x raio R)

N espiras bem compactadas



# Lei de Ampère

Exemplo de aplicação: cálculo do campo de um solenoide longo (L x raio R)



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_\phi \frac{NI}{d\rho L}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI$$

$$d\mathbf{L} = \mathbf{a}_z dz$$

(dentro)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \mathbf{a}_\phi$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} =$$

$$\int_0^L H_z dz = H_z L$$

$$\int \frac{NI}{d\rho L} = \int \frac{dH_z}{d\rho} \Rightarrow \frac{NI}{L} = H_z$$

$$H_z = \frac{NI}{L}$$

MARRETA - forma pontual não se aplica

# Campo magnético estacionário

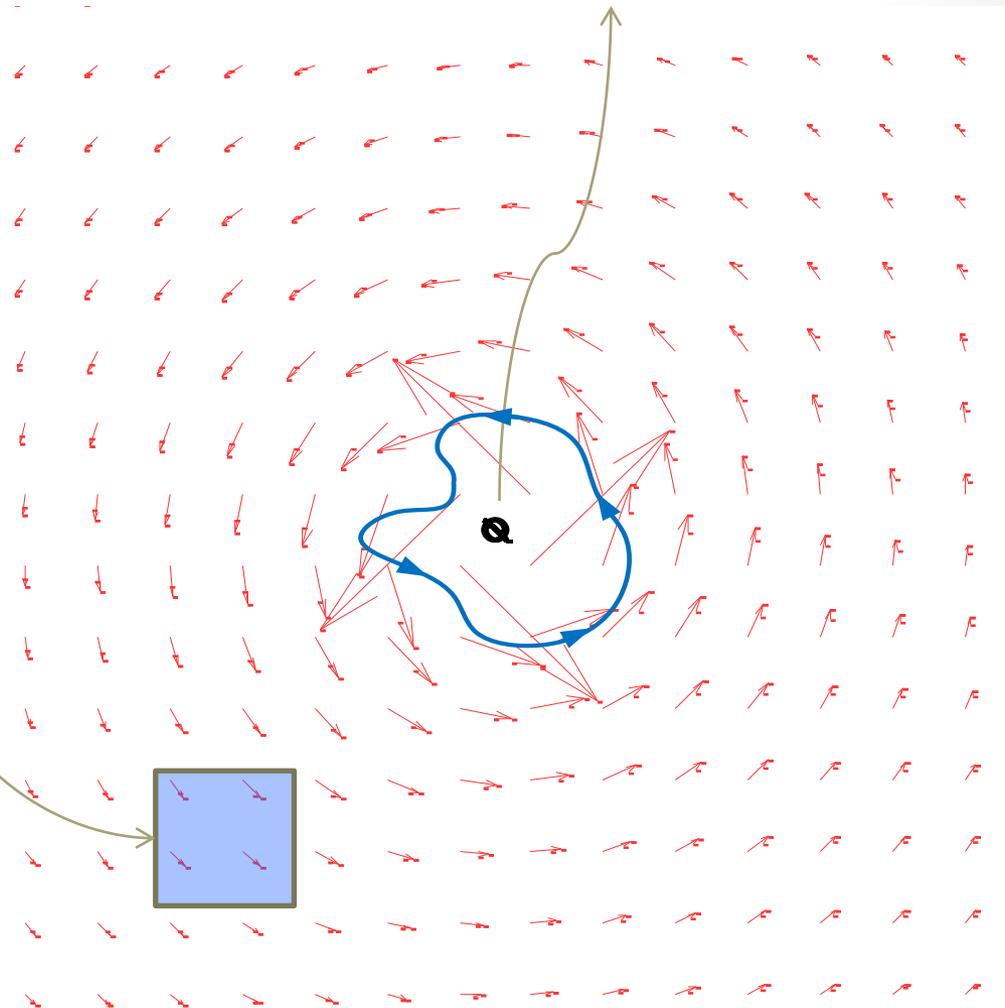
Já sabemos que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Assim como na eletrostática, para caracterizar o campo precisamos também saber como se comporta o divergente do campo:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = ?$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

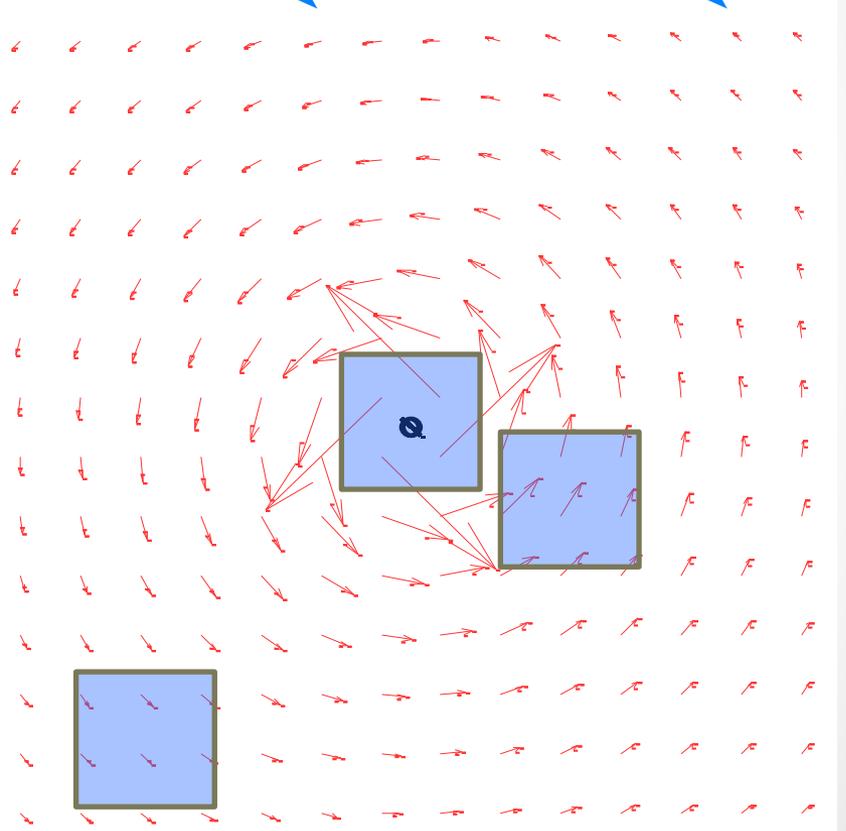
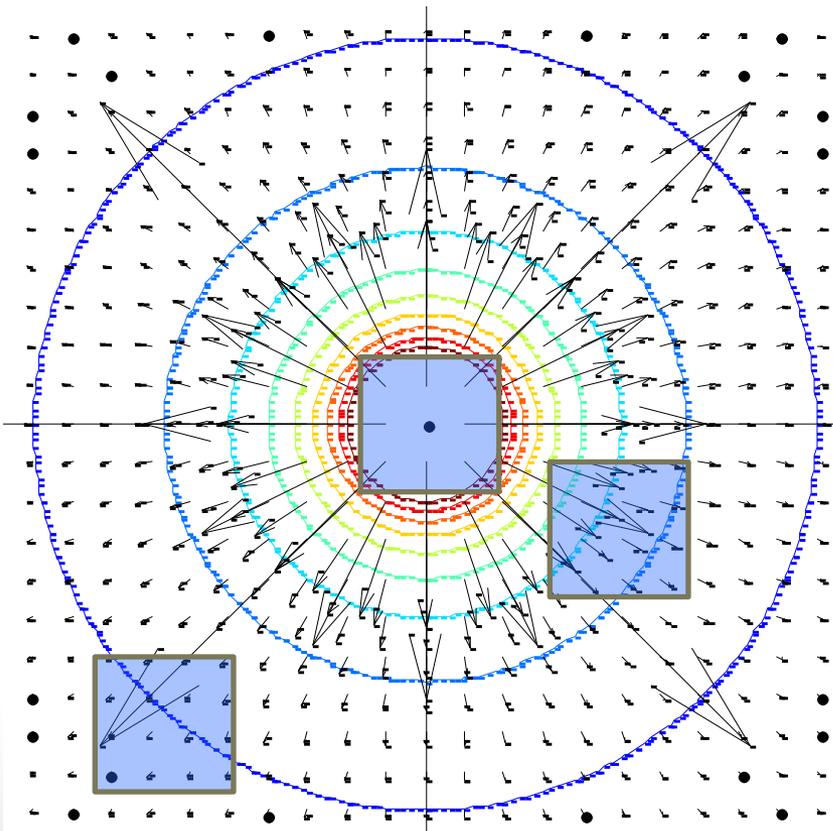


# Divergência

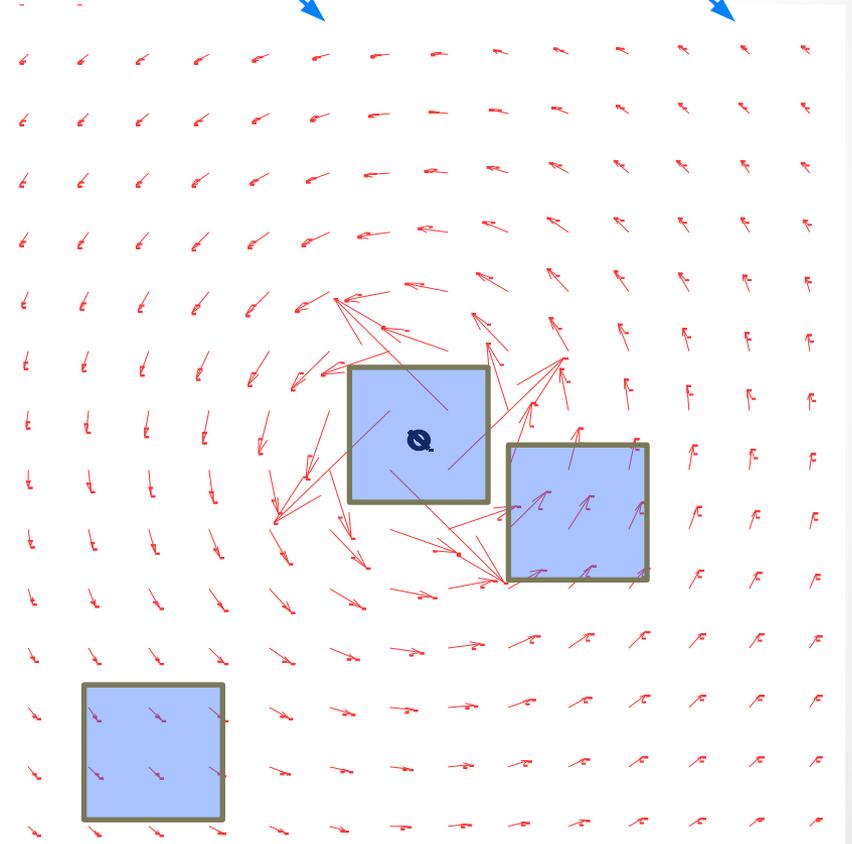
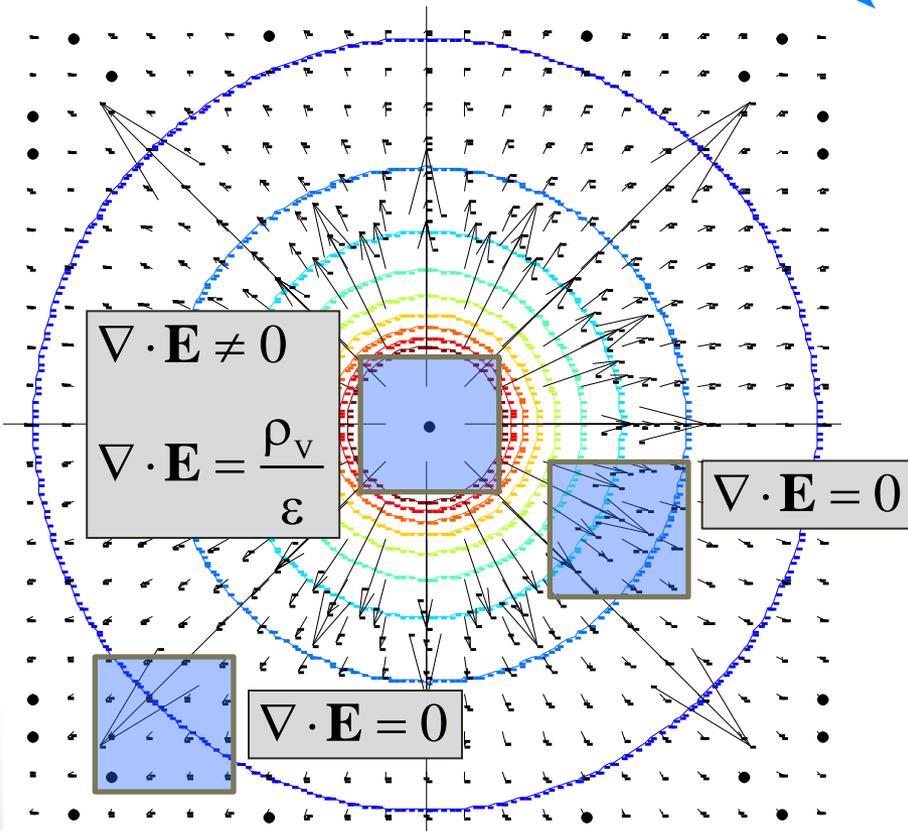
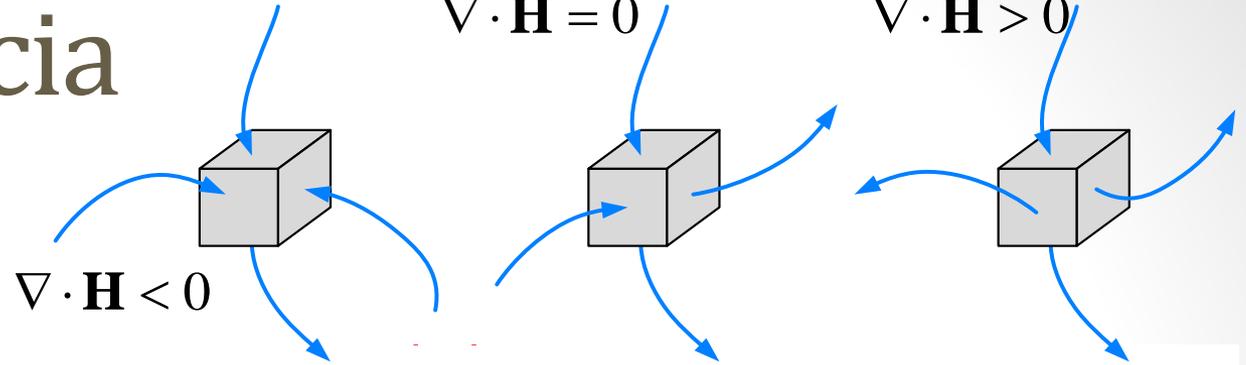
$$\nabla \cdot \mathbf{H} < 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

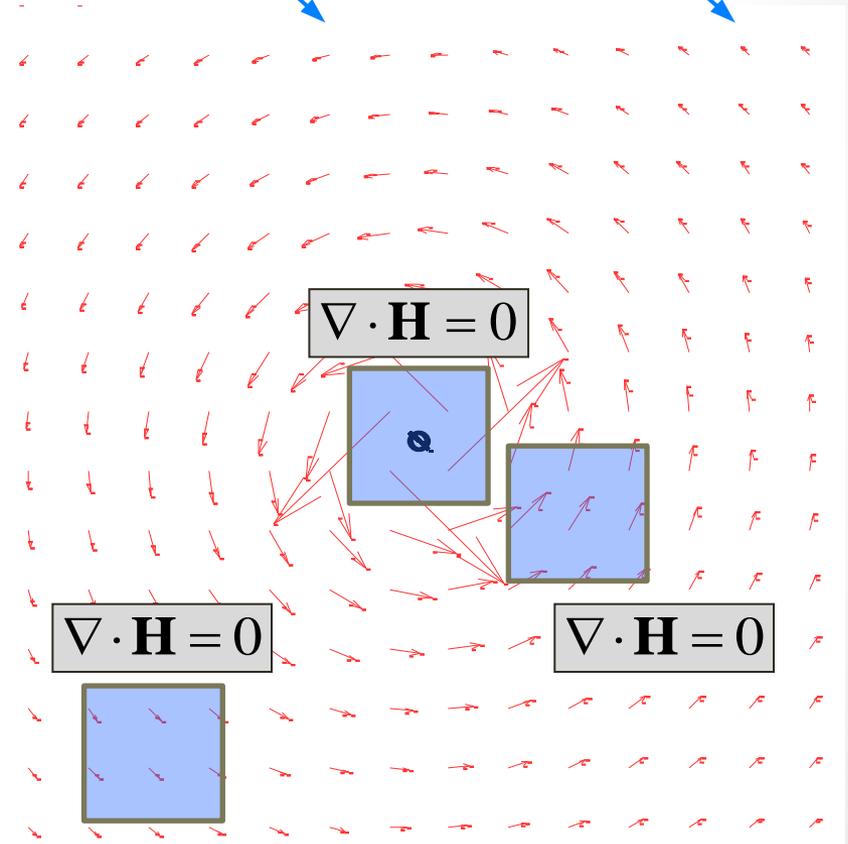
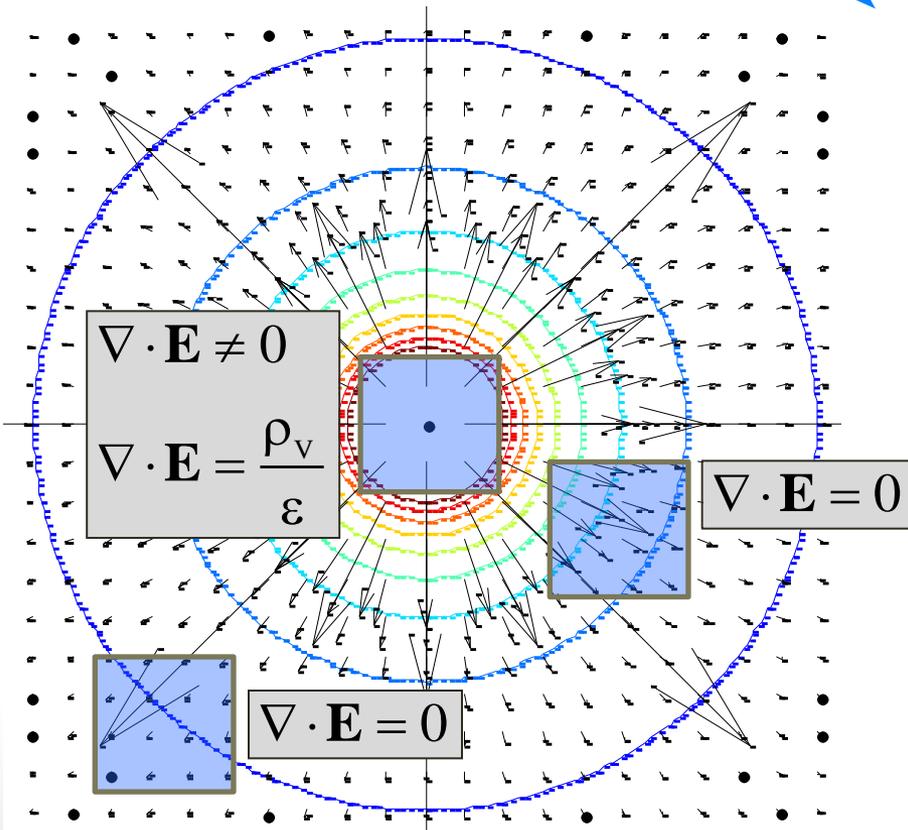
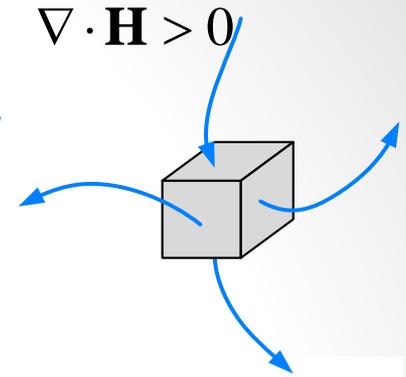
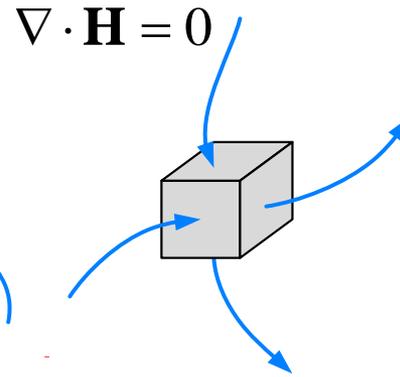
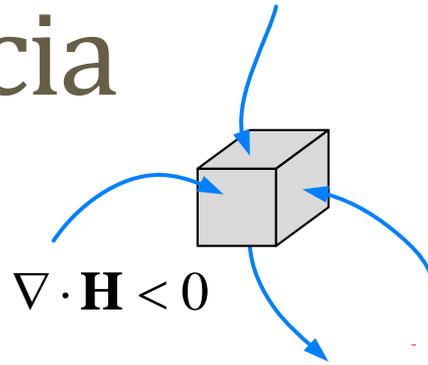
$$\nabla \cdot \mathbf{H} > 0$$



# Divergência



# Divergência



# Lei de Gauss para o magnetismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Não existe um lugar no espaço a partir de onde linhas de fluxo magnético divergem; não existe algo tal qual uma “carga magnética” – monopolo magnético.

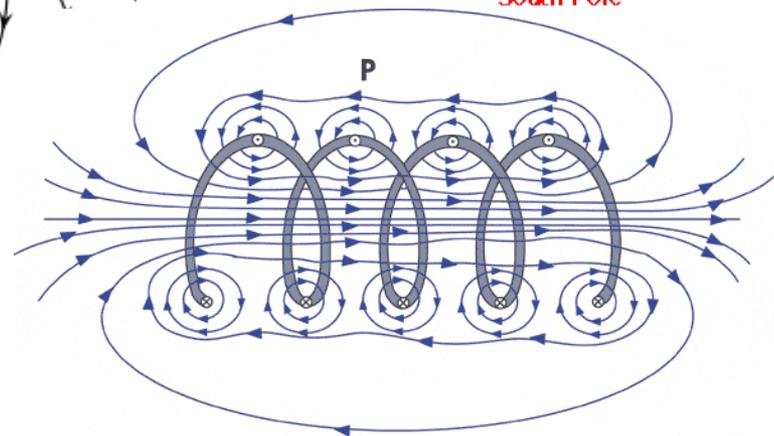
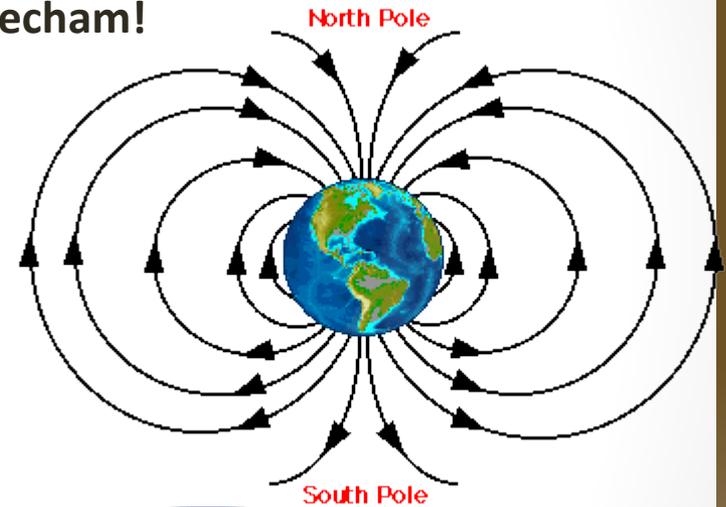
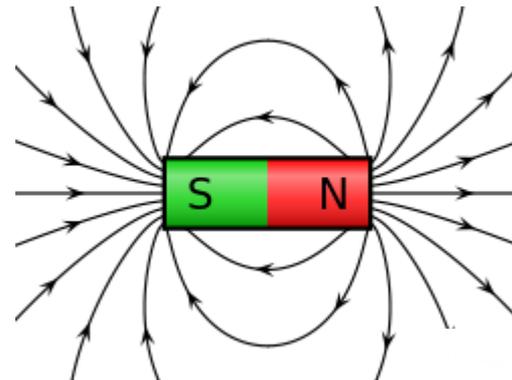
As linhas sempre se fecham!

Onde a densidade de fluxo magnético é definida como:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

B em teslas (T)

permeabilidade magnética do meio



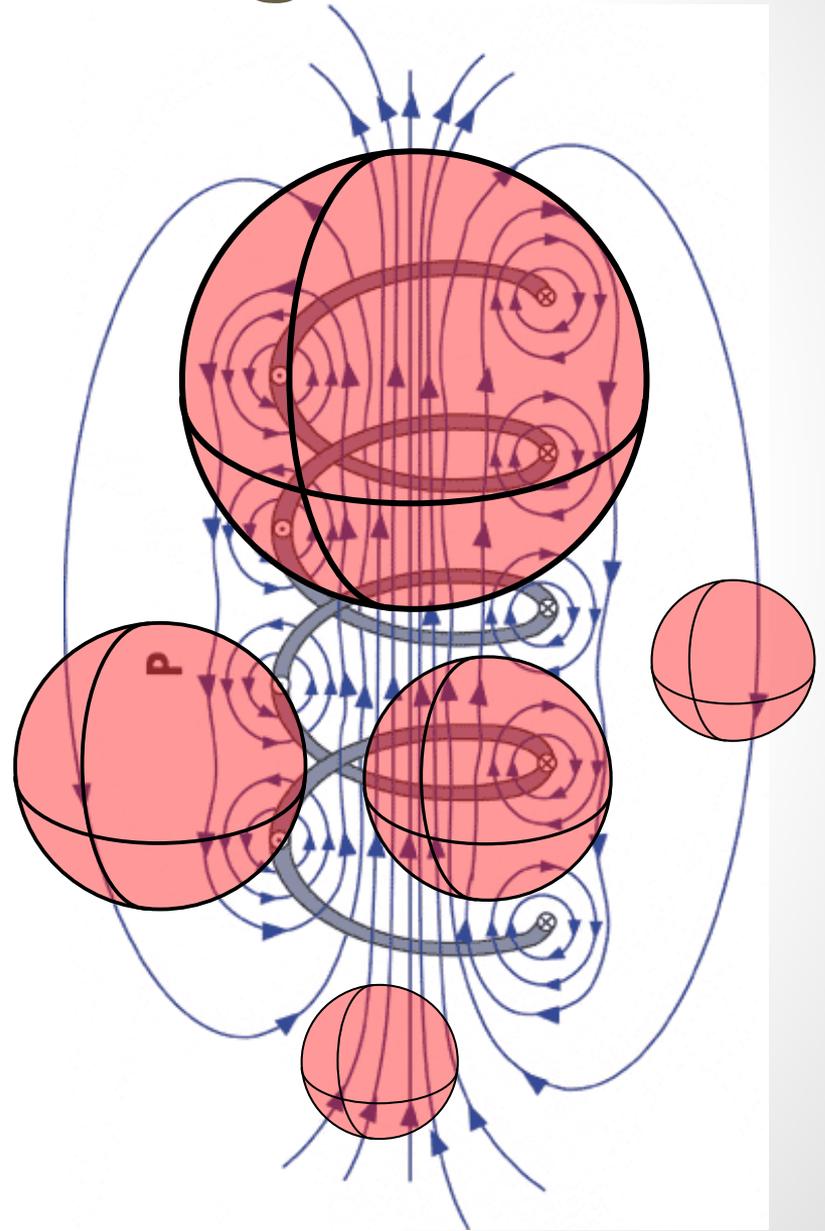
# Lei de Gauss para o magnetismo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Usando o Teorema da Divergência:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Qtd e linhas que entram =  
qtd de linhas que saem



# Lei de Gauss para o magnetismo

Se fizermos a integral de fluxo sobre uma superfície aberta, no entanto, obtemos o fluxo magnético, em webers (Wb):

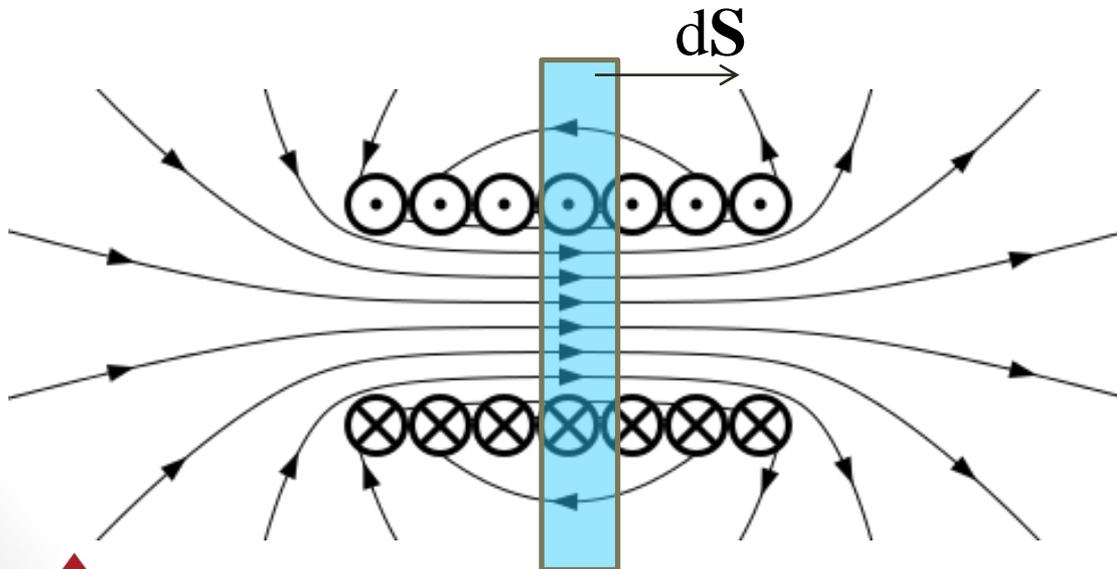
$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Onde o  $\mathbf{B}$  for paralelo a  $d\mathbf{S}$ :

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

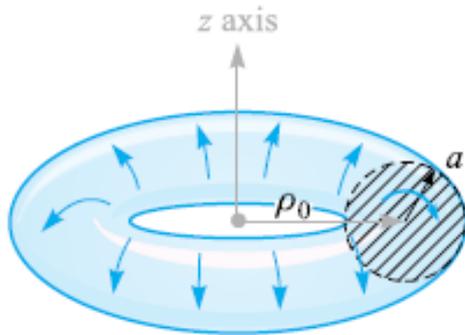
fluxo magnético através da superfície  $S$

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$$



# Fluxo Magnético

Vamos calcular o **campo magnético** e o **fluxo magnético** dentro de um **toróide** de raio “a”, com um enrolamento compactado de N espiras em seu entorno:



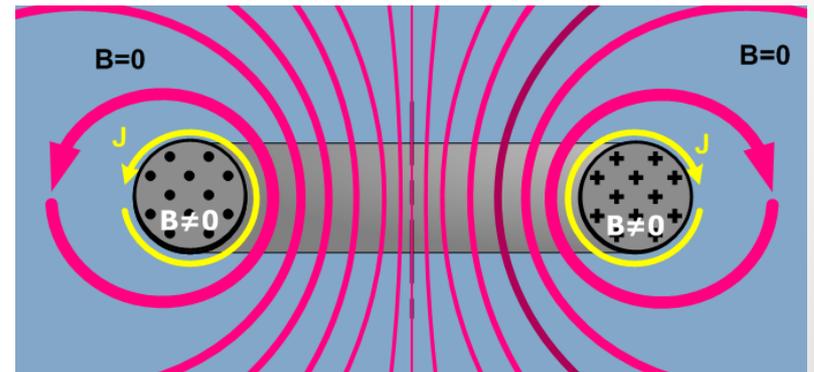
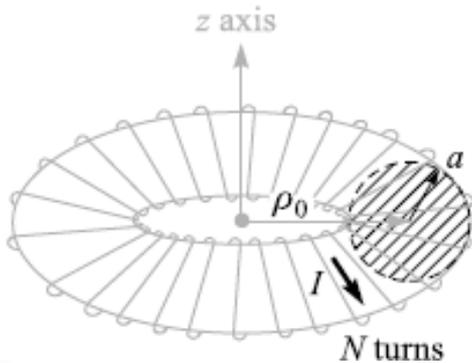
*Caso do solenóide fechado sobre si mesmo!*

$$H_{\phi} = \frac{NI}{L}$$

$$L = 2\pi a$$

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi a} \mathbf{a}_{\phi}$$

*dentro;*  
*Fora = 0*



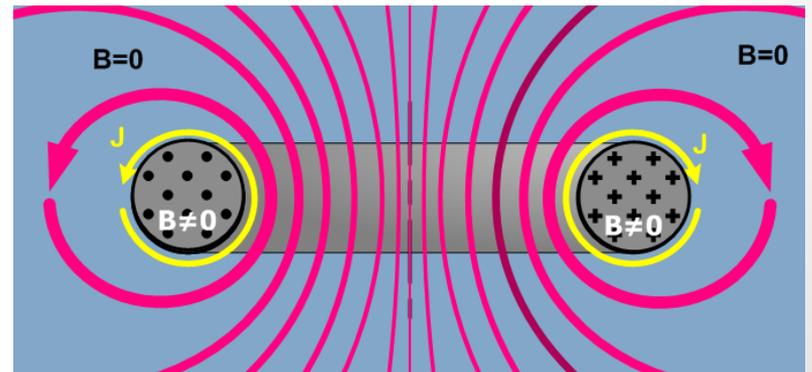
# Fluxo Magnético

Vamos calcular o **campo magnético** e o **fluxo magnético** dentro de um **toróide** de raio “a”, com um enrolamento compactado de N espiras em seu entorno:

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi a} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{A / m}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \mu \frac{NI}{2\pi a} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{T} = \text{Wb} / \text{m}^2)$$

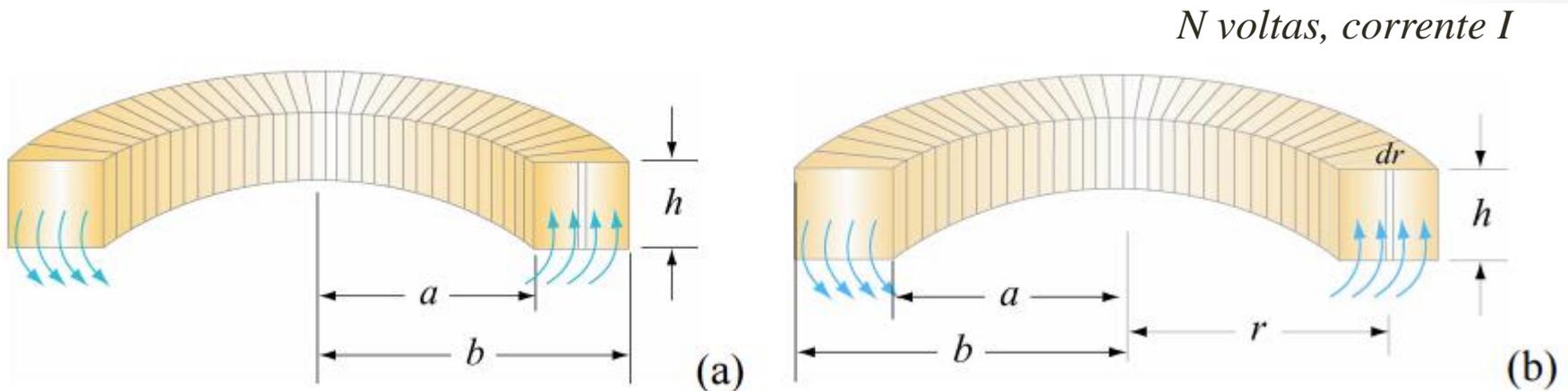
$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{B}| \cdot S = \mu \frac{NIa}{2} \quad (\text{Wb}) \quad \text{qtd escalar}$$

O fluxo está relacionado com a magnetização do núcleo. Quanto maior a permeabilidade, maior o fluxo, para um mesmo campo aplicado  $\mathbf{H}$ .



# Fluxo Magnético

Se a seção transversal for retangular:



De acordo com a lei de Ampère (integrando em algum caminho entre “a” e “b”:

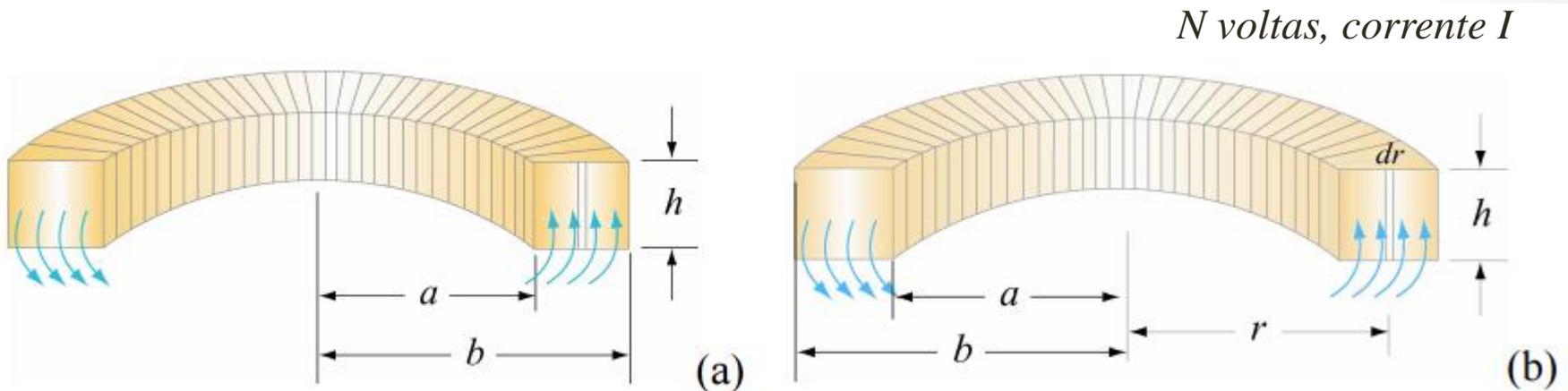
$$\mu \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu N I$$

C pode ser uma circunferência de raio entre “a” e “b”, por exemplo “r”:

$$2\pi r \mathbf{B} = \mu N I \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu N I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

# Fluxo Magnético

Se a seção transversal for retangular:



Para calcular o fluxo, lembremos que a seção é retangular e usaremos coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu N I}{2\pi \rho} \mathbf{a}_\phi$$

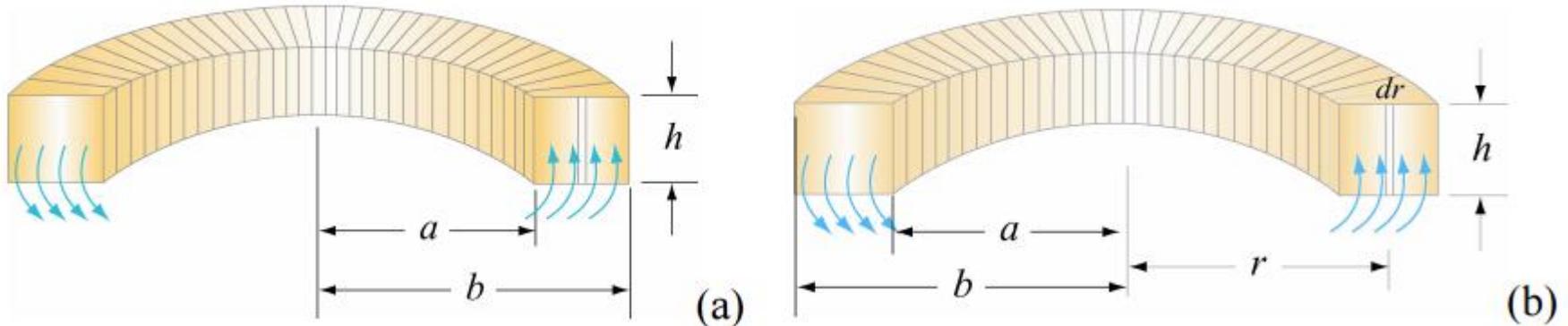
$$d\mathbf{S} = d\rho dz \mathbf{a}_\phi$$

$$\Phi = \iint_S \left[ \frac{\mu N I}{2\pi \rho} \mathbf{a}_\phi \right] \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu N I}{2\pi} \int_0^h \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho dz$$

# Fluxo Magnético

Se a seção transversal for retangular:

*N* voltas, corrente *I*



$$\Phi = \frac{\mu h N I}{2\pi} [\ln(\rho)]_a^b = \frac{\mu h N I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

# Potencial Magnético Vetorial

Assim como foi definido que, devido a  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  (campo conservativo) na situação eletrostática, deveria existir uma função potencial escalar  $V$  tal que  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , podemos tentar encontrar também uma **função potencial** para o campo magnético.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

→ Consequência da Lei de Gauss para o magnetismo: existe um **campo potencial vetorial  $\mathbf{A}$**  tal que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Origem: identidade

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

A diferença é que neste caso o potencial é um campo vetorial.

$\mathbf{A}$  é uma ferramenta para se calcular campos magnéticos!

# Potencial Magnético Vetorial

Compare as expressões:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$$

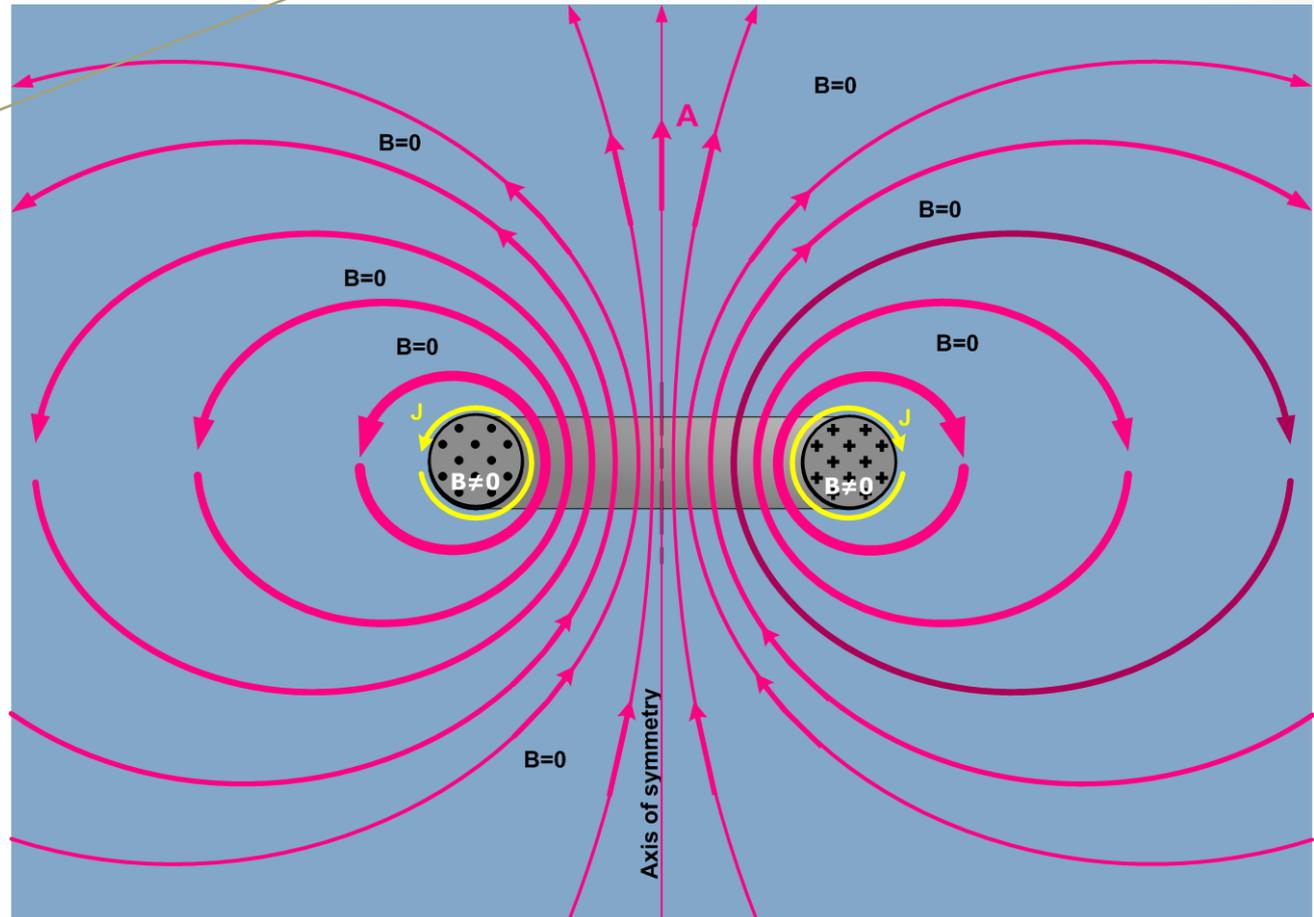
lembrando que

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mu \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$$

Consequência da Lei de Gauss p/ mag.

Lei de Ampère (magnetostática)

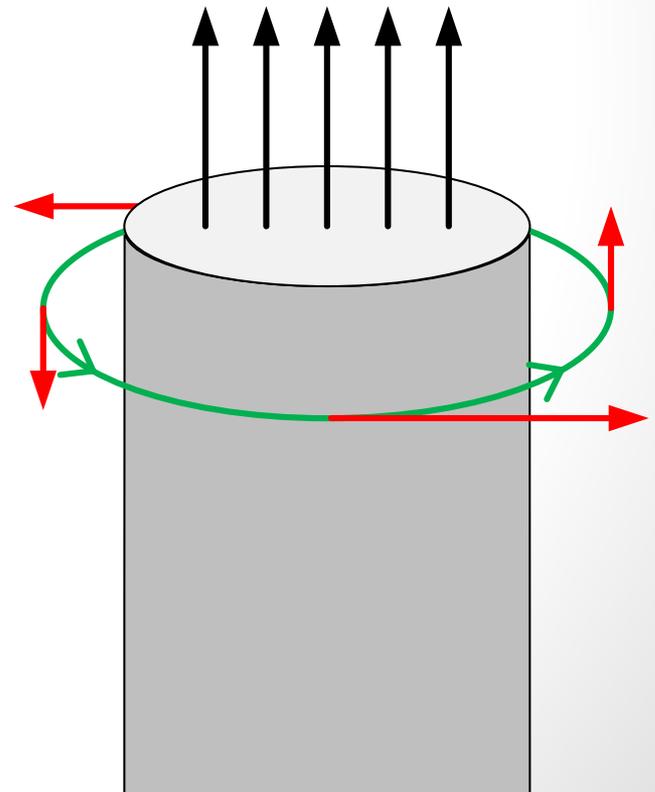


# Potencial Magnético Vetorial

Aonde leva?

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mu\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$$



# Potencial Magnético Vetorial

Aonde leva?

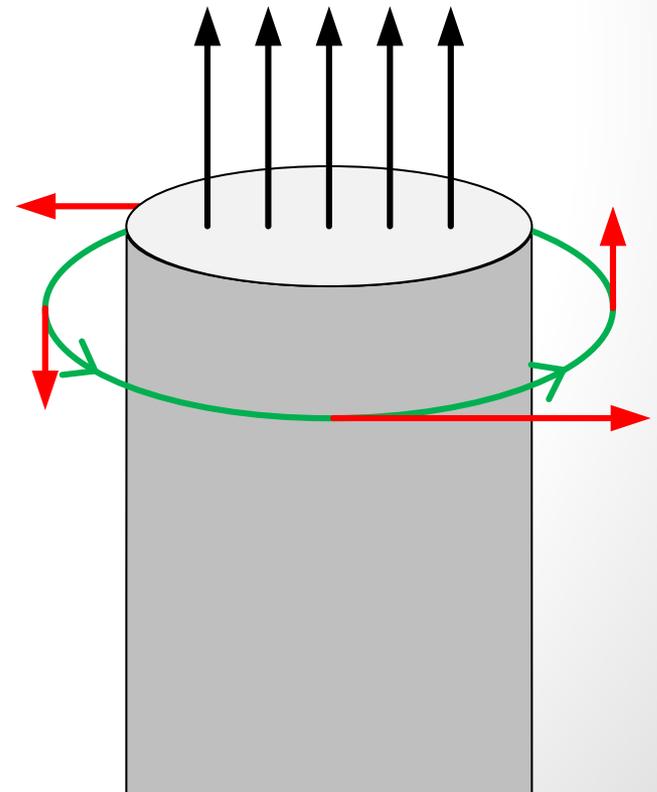
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mu \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\mu \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$



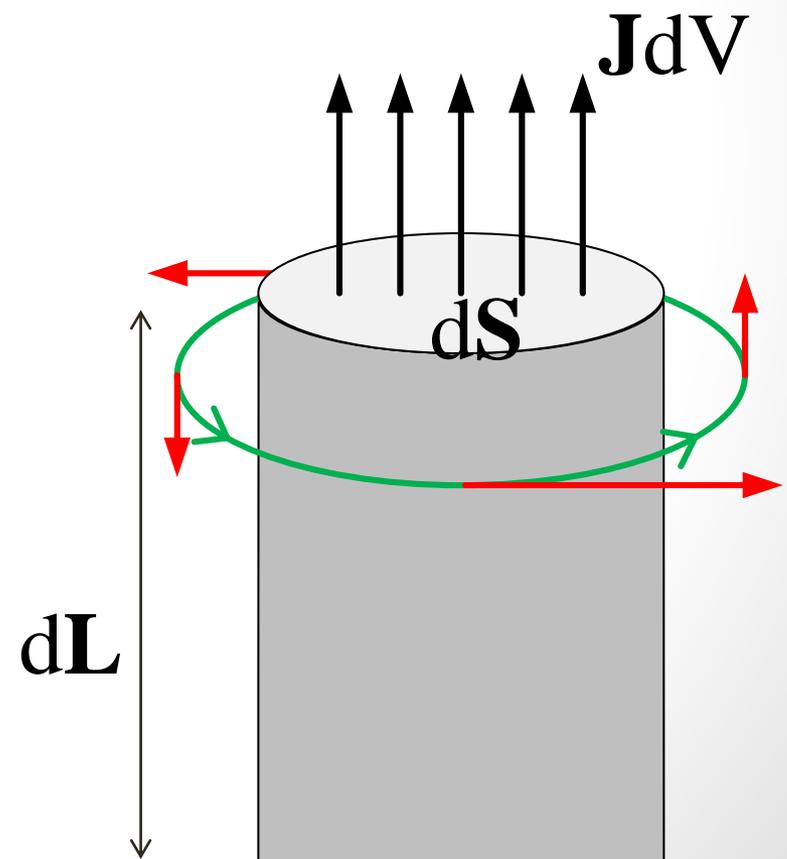
# Potencial Magnético Vetorial

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x}{r} dV$$

$$A_y = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y}{r} dV$$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z}{r} dV$$



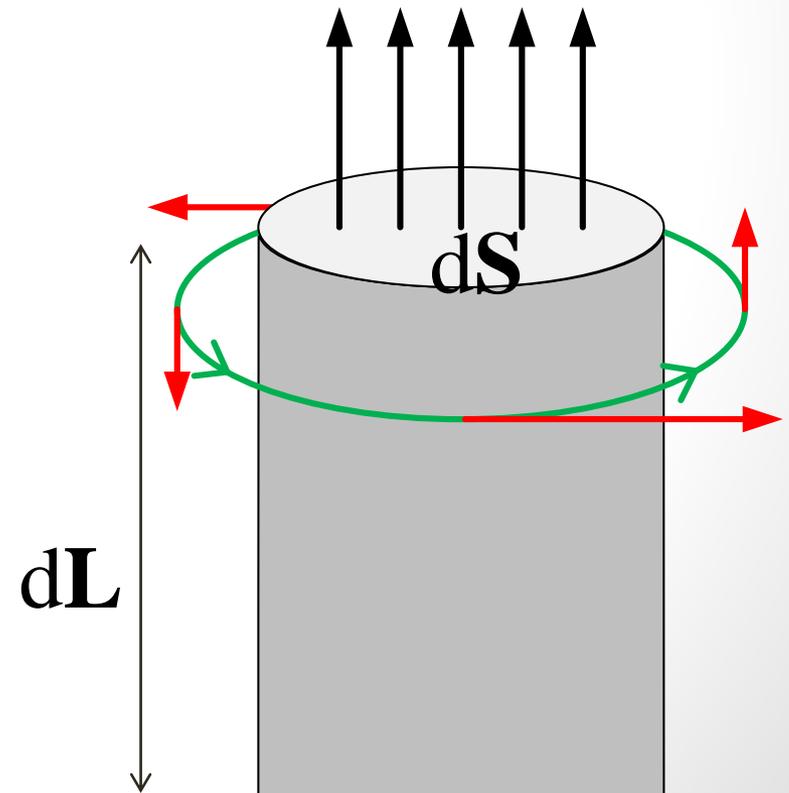
# Potencial Magnético Vetorial

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{L}}{r}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{L}}{r} \mathbf{a}_z \Rightarrow \mathbf{B}$$

$$\mathbf{J} dV = \mathbf{J} d\mathbf{S} d\mathbf{L} = I d\mathbf{L}$$



# Potencial Magnético Vetorial

Do toróide:

$$\mathbf{B} = \mu \frac{NI}{2\pi a} \mathbf{a}_\phi$$

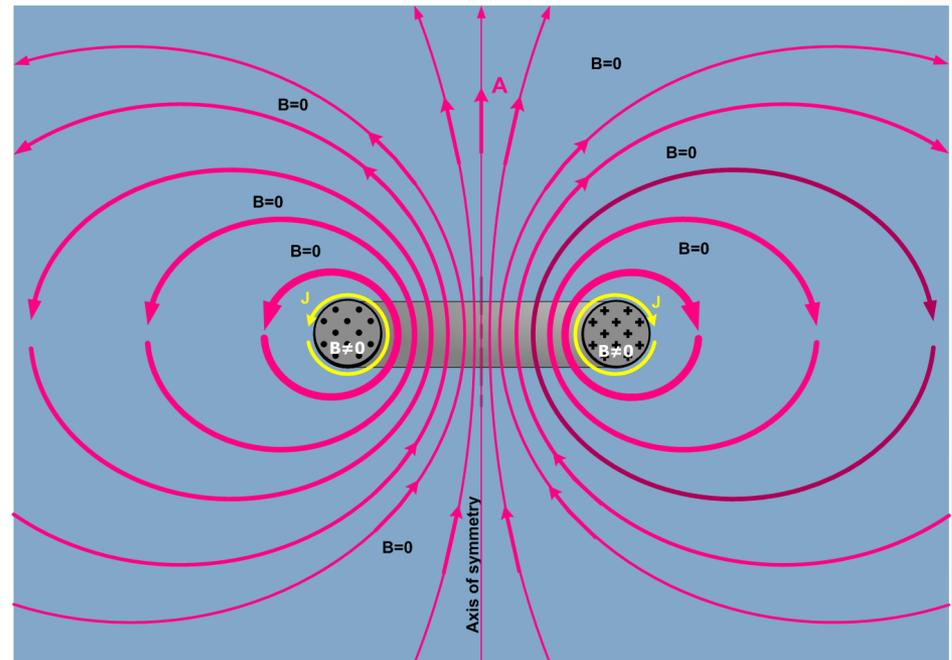
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi$$

$$\mu \frac{NI}{2\pi a} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$

Componentes em z e  $\rho$

Não é trivial (nem útil) para calcular B neste caso, pois há 2 derivadas.

Análise puramente qualitativa



# Potencial Magnético Vetorial

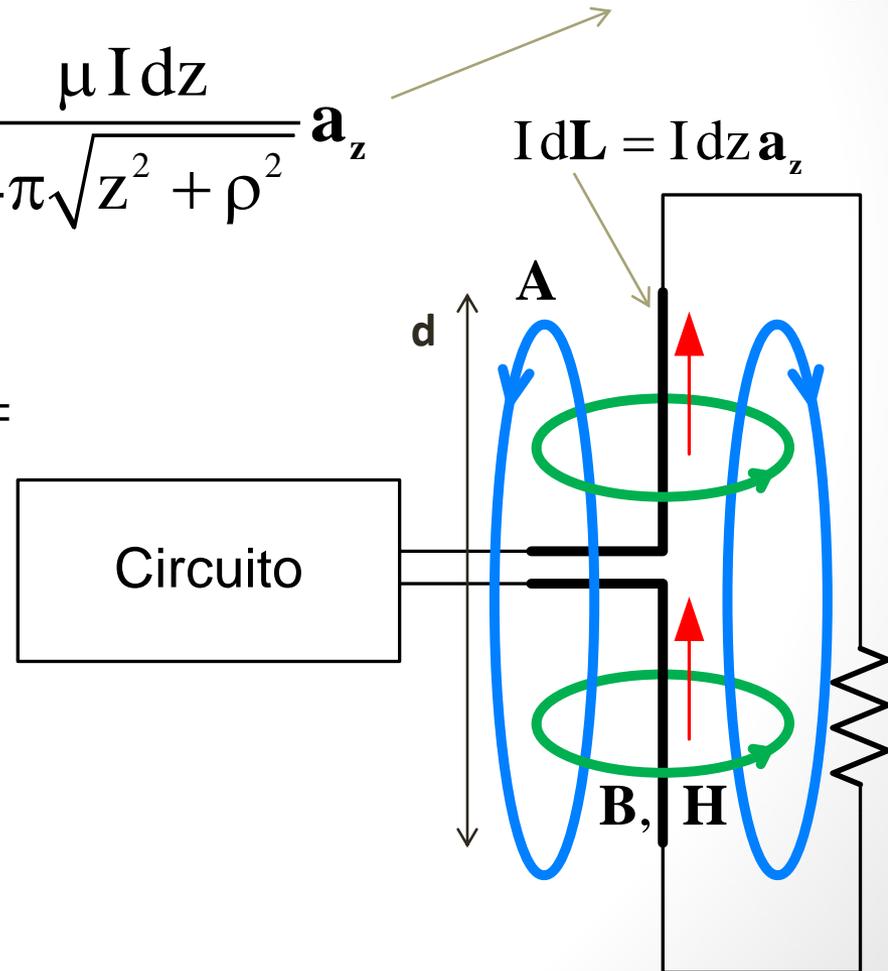
Expressão do potencial vetorial para um elemento de corrente:

$$\mathbf{A} = \int_c \frac{\mu}{4\pi R} I d\mathbf{L} \Rightarrow d\mathbf{A} = \frac{\mu I dz}{4\pi\sqrt{z^2 + \rho^2}} \mathbf{a}_z$$

Só componente em z ( $A_z$ )

$$d\mathbf{B} = \nabla \times (d\mathbf{A}) = \frac{\partial (dA_z)}{\partial \rho} \mathbf{a}_\phi =$$

$$= \left[ \frac{\mu I}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} dz \right] \mathbf{a}_\phi$$



# Potencial Magnético Vetorial

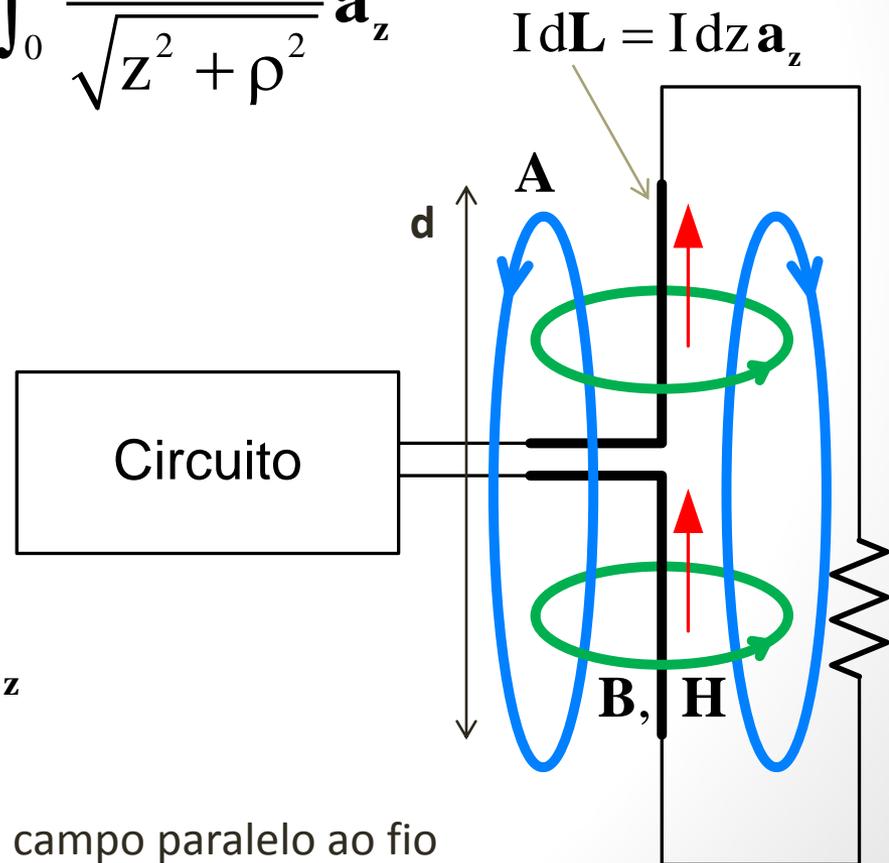
Se estendemos o elemento para formar um filamento finito de comprimento  $d$ :

$$\mathbf{A} = 2 \int_0^d \frac{\mu I dz}{4\pi \sqrt{z^2 + \rho^2}} \mathbf{a}_z = \frac{\mu I}{2\pi} \int_0^d \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{d^2 + \rho^2} + d}{\rho} \right) \mathbf{a}_z$$

Se  $d \gg \rho$  (filamento infinito)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \left( \frac{2d}{\rho} \right) \mathbf{a}_z$$



A perto do fio = campo paralelo ao fio

# Potencial Magnético Vetorial

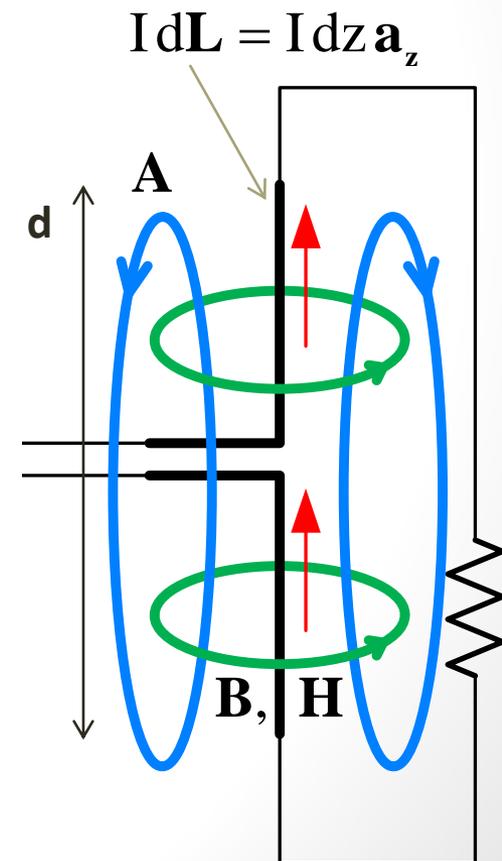
Se estendemos o elemento para formar um filamento finito de comprimento  $d$ :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{2d}{\rho}\right) \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[ \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{2d}{\rho}\right) \mathbf{a}_z \right]$$

$$B_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \ln\left(\frac{2d}{\rho}\right) \right] = \frac{\mu I}{2\pi \rho}$$

$$\therefore \mathbf{B} = \frac{\mu I}{2\pi \rho} \mathbf{a}_\phi$$



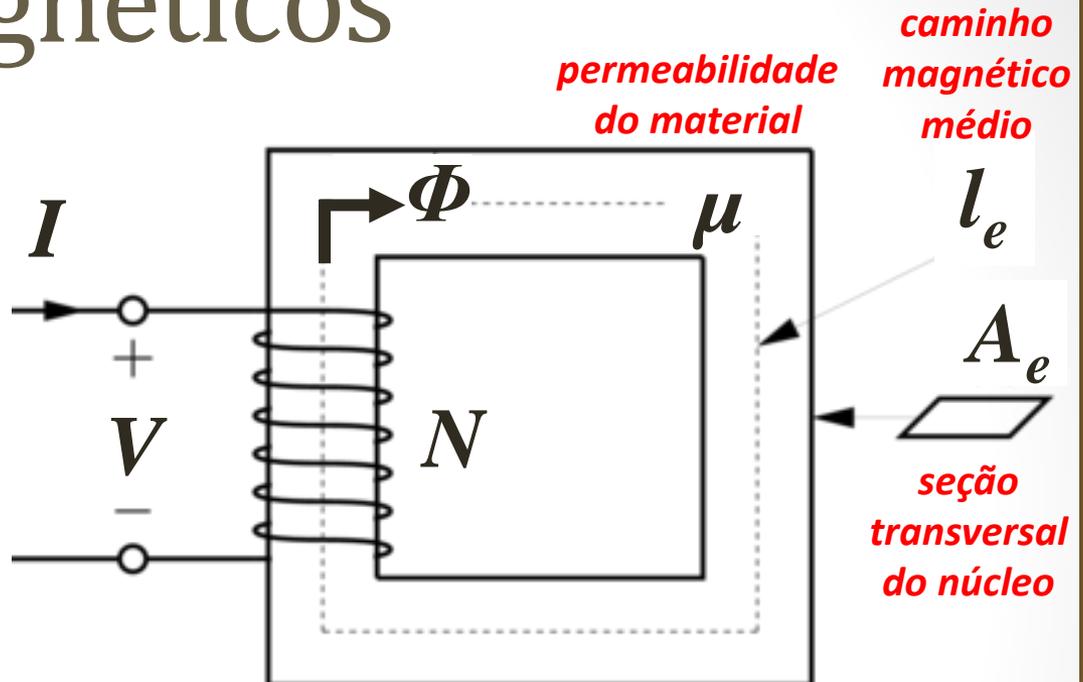
# Circuitos Magnéticos

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



Se  $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{S}$  e  $\mathbf{H} \parallel d\mathbf{L}$ :

Relacionando  
somente  
grandezas  
escalares

$$\mu \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \mu NI = B l_e$$

$$\Phi = B A_e$$

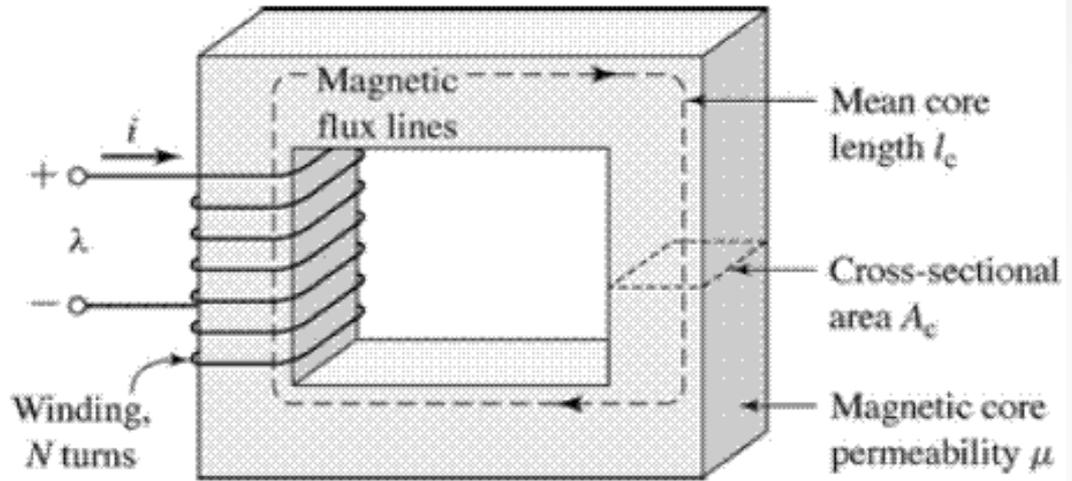
# Circuitos Magnéticos - definições

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$



*Força magnetomotriz:*

*Fluxo magnético:*

*Relutância:*

$$f.m.m. = NI = R_e \Phi$$

$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$

# Circuitos Magnéticos – analogias com a teoria de circuitos elétricos

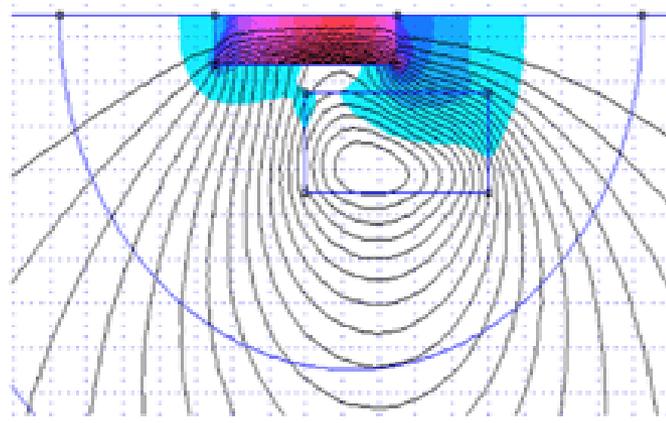
$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$

$$\text{f.m.m.} = NI$$

$$\Phi = \frac{\text{f.m.m.}}{R_e}$$

## Força magnetomotriz

- É a “força” que causa o campo magnético no núcleo
- O campo aplicado só depende da densidade de corrente (como dita a lei de Ampère)  $\rightarrow NI$
- Unidade: ampère-espira (A-esp) = A

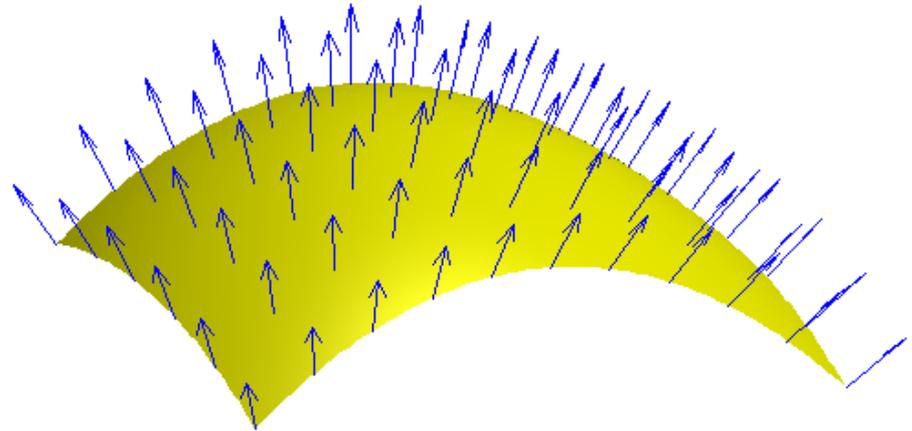


# Circuitos Magnéticos – analogias com a teoria de circuitos elétricos

$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$

$$\text{f.m.m.} = NI$$

$$\Phi = \frac{\text{f.m.m.}}{R_e}$$



## Fluxo magnético

- Quantidade do fluxo magnético que atravessa determinada área
- Densidade de fluxo magnético: a concentração de “linhas de força” (campo magnético) num circuito magnético  $\rightarrow B = \Phi/A_e$
- Unidade: weber (Wb)

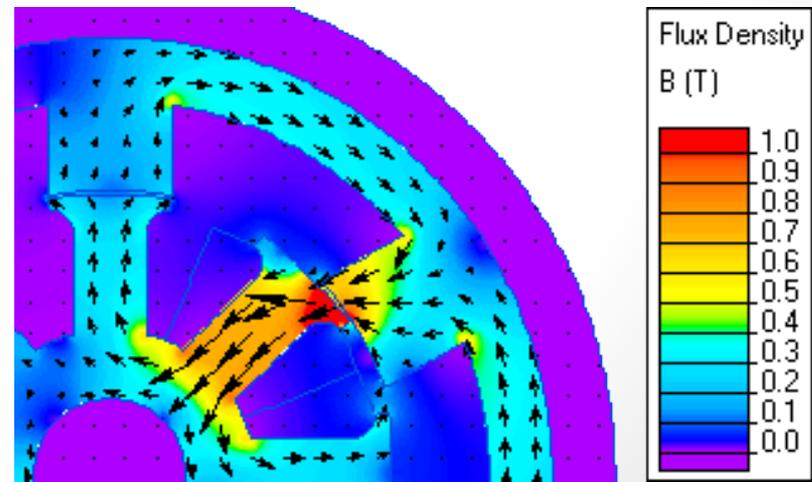
# Circuitos Magnéticos – analogias com a teoria de circuitos elétricos

$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$
$$\text{f.m.m.} = NI$$
$$\Phi = \frac{\text{f.m.m.}}{R_e}$$



## Relutância magnética

- É uma medida da oposição do circuito magnético ao estabelecimento de fluxo magnético
- Só depende da geometria e do material
- Unidade: ampère-espira por weber (A-esp/Wb) = A/Wb



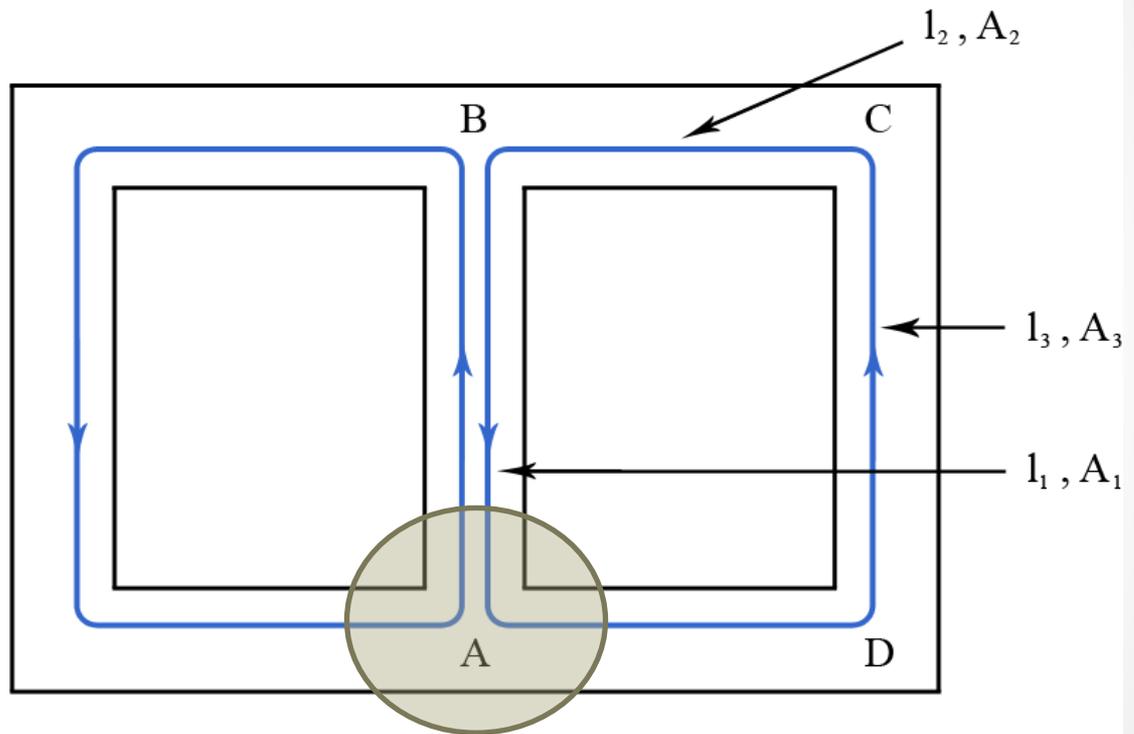
# Circuitos Magnéticos – analogias com a teoria de circuitos elétricos

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

*Relutância:*

$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$



$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \Phi = 0$$

Lei de Kirchhoff das Correntes (LKC) → nós!

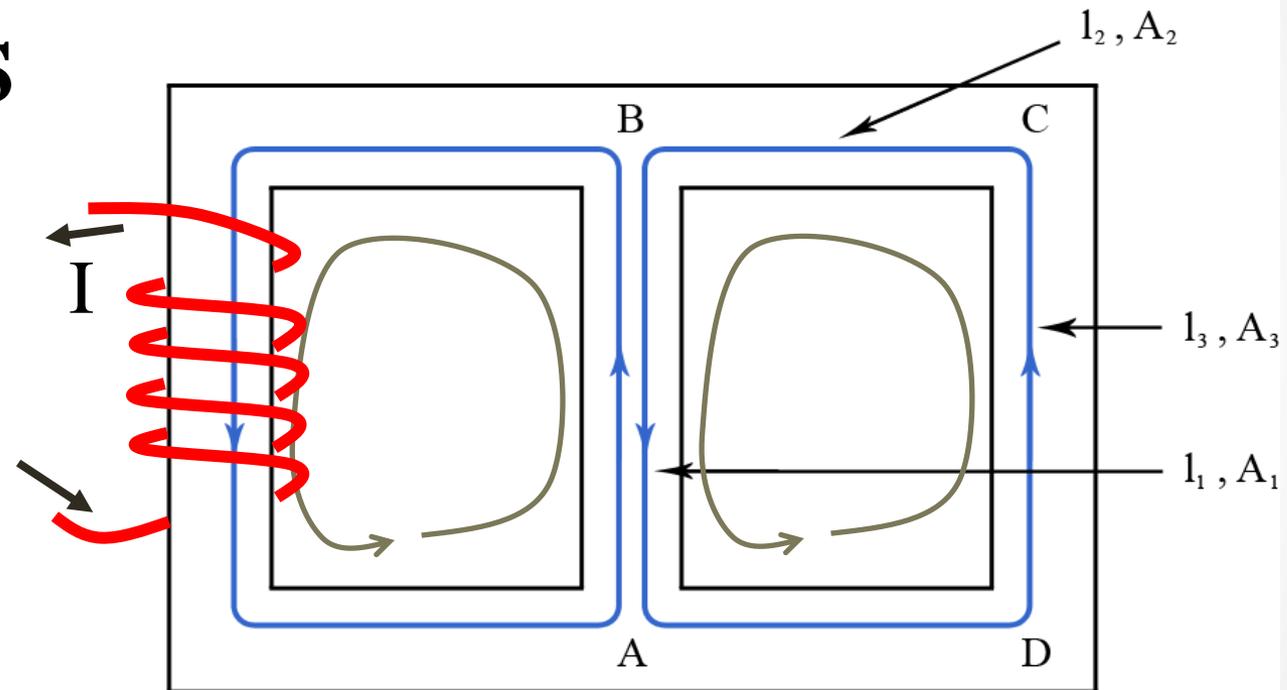
# Circuitos Magnéticos – analogias com a teoria de circuitos elétricos

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

*Relutância:*

$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$



$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \Leftrightarrow \quad \sum R_e \Phi = N I$$

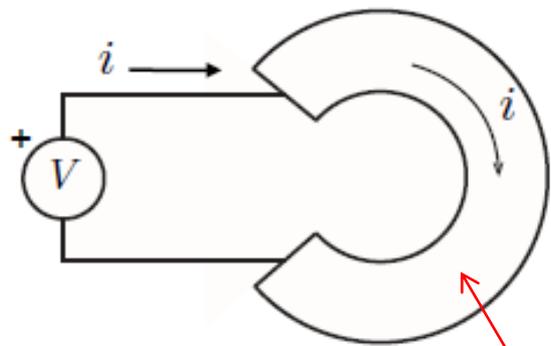
# Circuitos Magnéticos – analogias com a teoria de circuitos elétricos

## Princípios que se aplicam:

- Carga se conserva (eq. continuidade)
- Campo eletrostático é conservativo

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \rightarrow \text{LKC}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad \rightarrow \text{LKT}$$



ELÉTRICOS

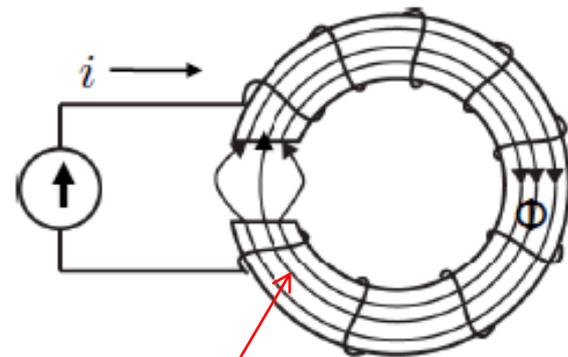
$\sigma$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

- Fluxo “se conserva” (inexistência de monopolos)
- Campo magnetostático é originado pela corrente

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

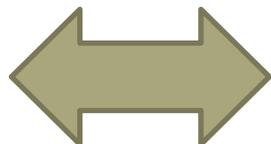
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI$$



$\mu$

MAGNÉTICOS

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

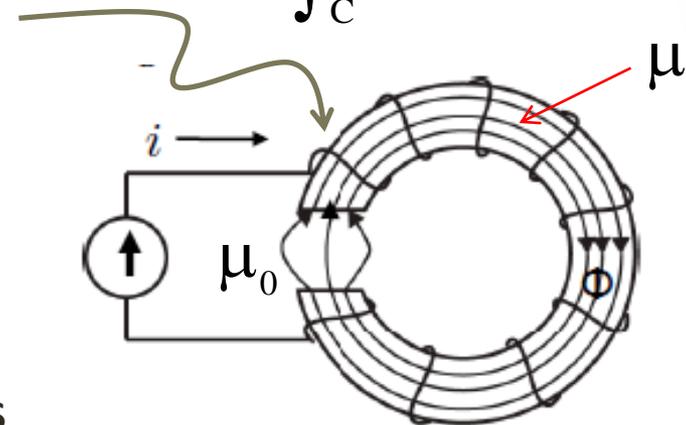
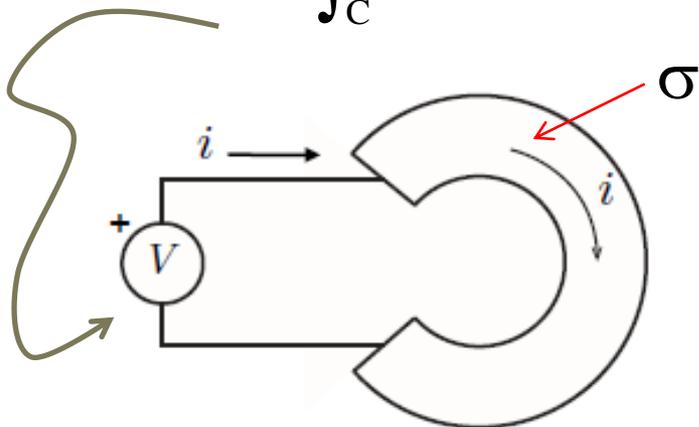


CIRCUITOS  
EQUIVALENTES

# Circuitos Magnéticos – analogias com a teoria de circuitos elétricos

$$\text{f.e.m.} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

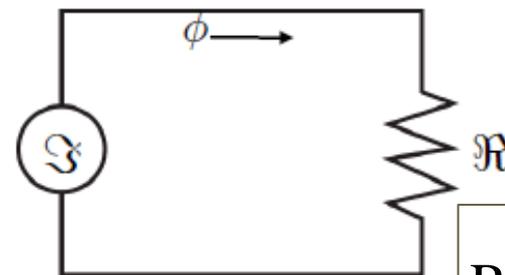
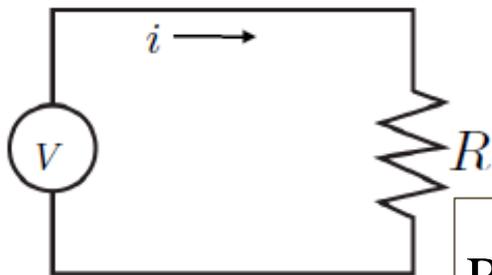
$$\text{f.m.m.} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$



CIRCUITOS  
EQUIVALENTES

ELÉTRICOS

MAGNÉTICOS

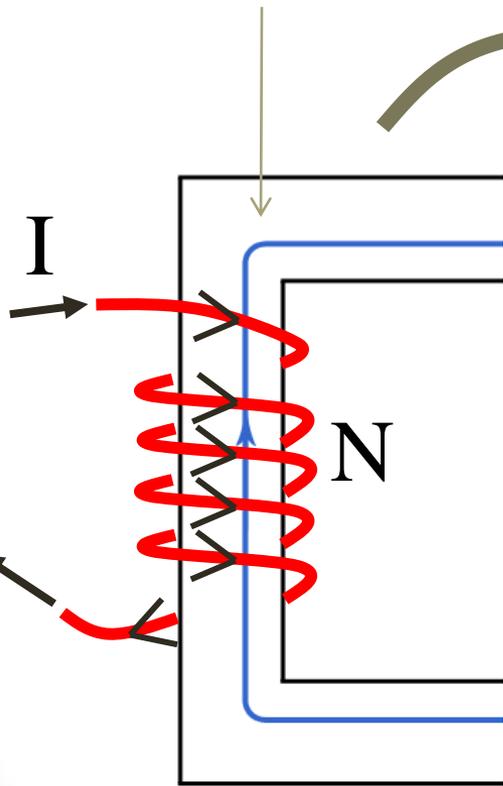


$$R = \frac{l_e}{\sigma A_e}$$

$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$

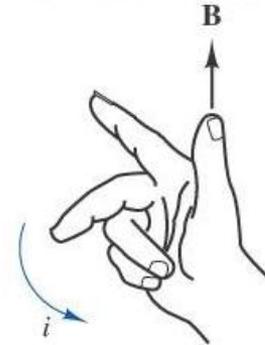
# Circuitos Magnéticos - técnica

material ferromagnético → circuito magnético



f.m.m.

Direção e sentido do fluxo magnético relativo a corrente de um enrolamento:



Analogia c/ circuitos:

FONTES = F.M.M.

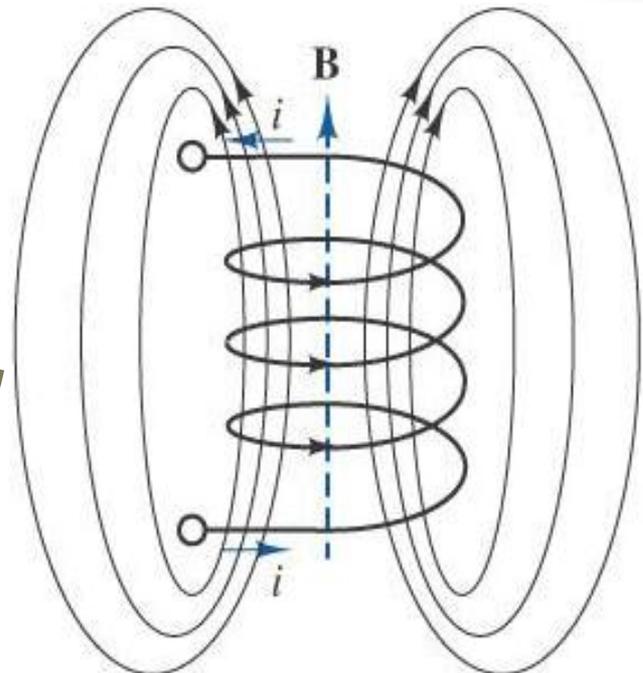
RESISTÊNCIAS = RELUTÂNCIAS

CORRENTES = FLUXOS

$$R_e = \frac{l_e}{\mu A_e}$$

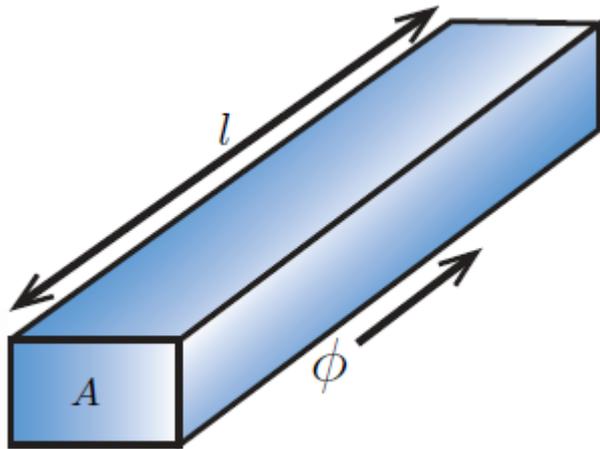
$$f.m.m. = NI$$

$$\Phi = \frac{f.m.m.}{R_e}$$



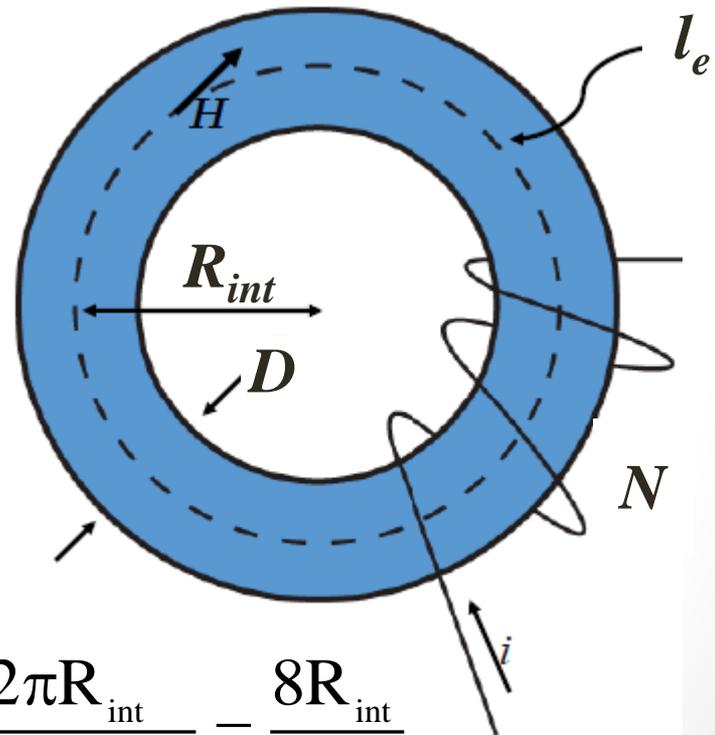
# Circuitos Magnéticos

*Relutância de uma barra de material ferromagnético:*



$$R_e = \frac{1}{\mu A}$$

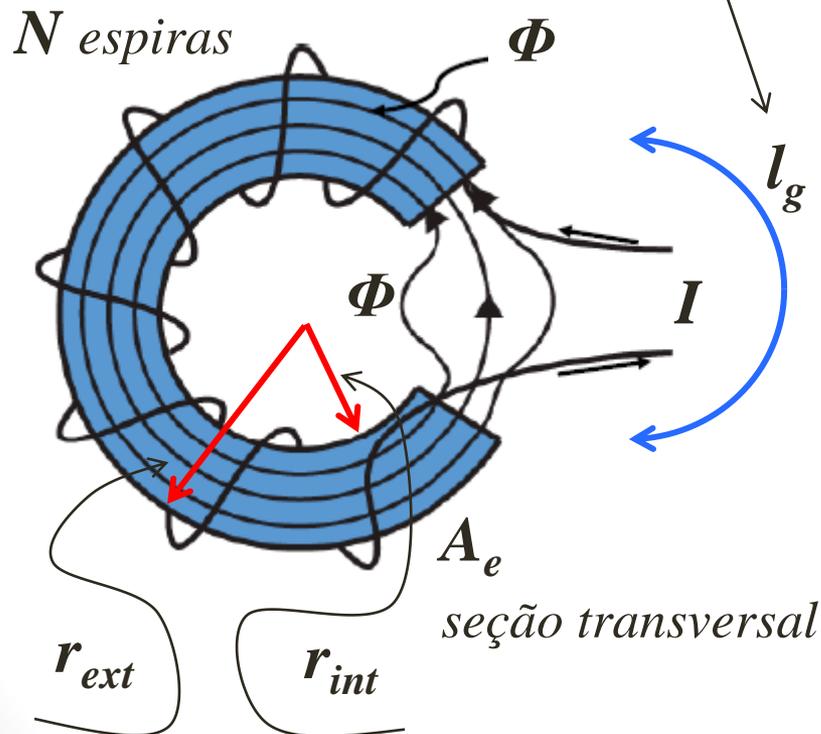
*Relutância de um toróide de material ferromagnético (seção circular):*



$$R_e = \frac{2\pi R_{int}}{\mu \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{8R_{int}}{\mu D^2}$$

# Circuitos Magnéticos

Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:



$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI$$

$$r = \frac{r_{int} + r_{ext}}{2} \Rightarrow \text{Raio médio}$$

$$H l_e = H (2\pi r) = NI$$

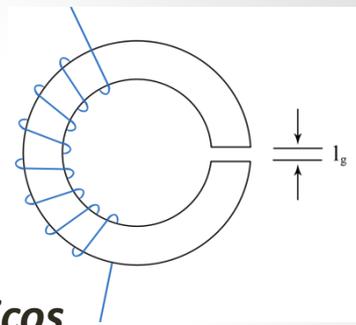
$$\therefore H = \frac{NI}{2\pi r} \Rightarrow \text{Campo aplicado}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

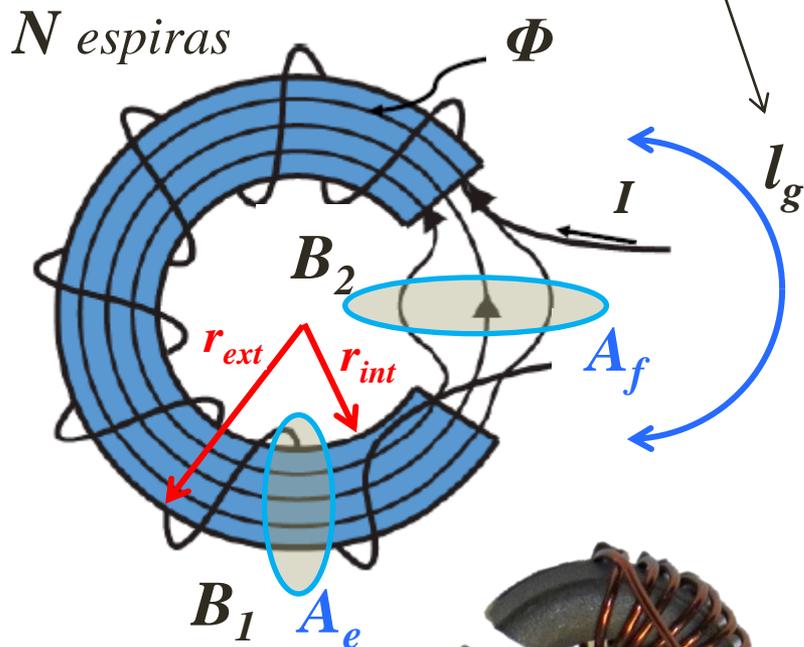
É constante em todo o circuito magnético???

$E \Phi$  ???

# Circuitos Magnéticos



Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:



Usando circuitos magnéticos (supondo  $l_g \ll 2\pi r$ ):

$$r = \frac{r_{\text{int}} + r_{\text{ext}}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{e1} &= \frac{2\pi r - l_g}{\mu_r \mu_0 A_e} \\ R_{e2} &= \frac{l_g}{\mu_0 A_f} \end{aligned} \right\} \Phi = \frac{NI}{R_{e1} + R_{e2}}$$

AR

$$B = \Phi / S$$

Áreas atravessadas por B:

$$A_e = \frac{\pi}{2} (r_{\text{ext}} - r_{\text{int}})^2$$

Espraiamento → "fringing flux"

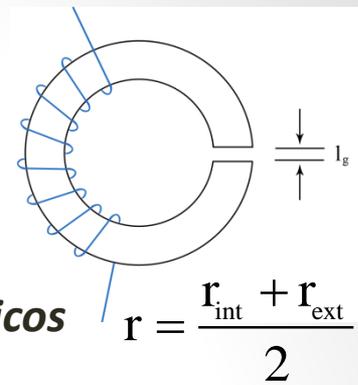
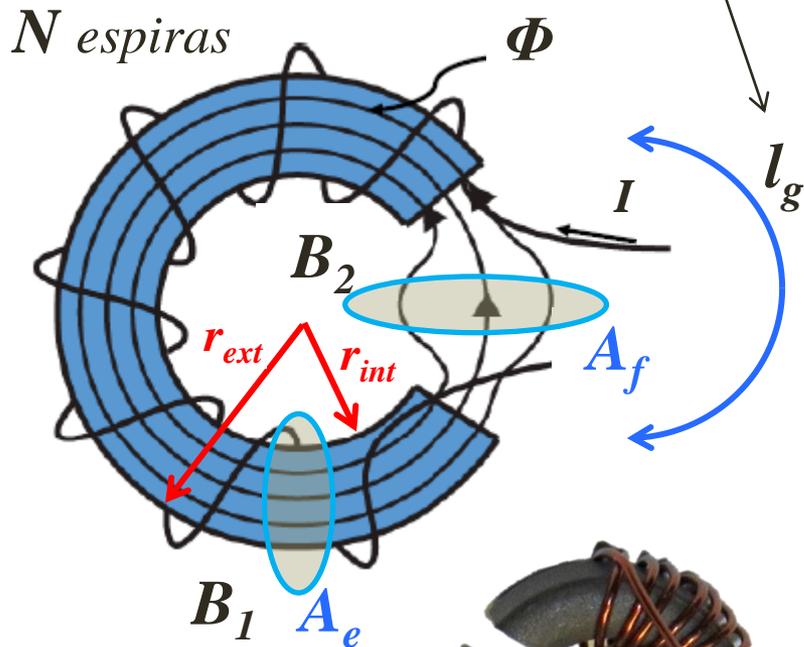
$$A_f = k_f A_e, \quad k > 1$$

$$\therefore B_1 \neq B_2$$



# Circuitos Magnéticos

Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:



Usando circuitos magnéticos (supondo  $l_g \ll 2\pi r$ ):

Primeira aproximação:

- $\mu_r \gg 1$
- $A_f \approx A_e$  ( $k_f \approx 1$ )

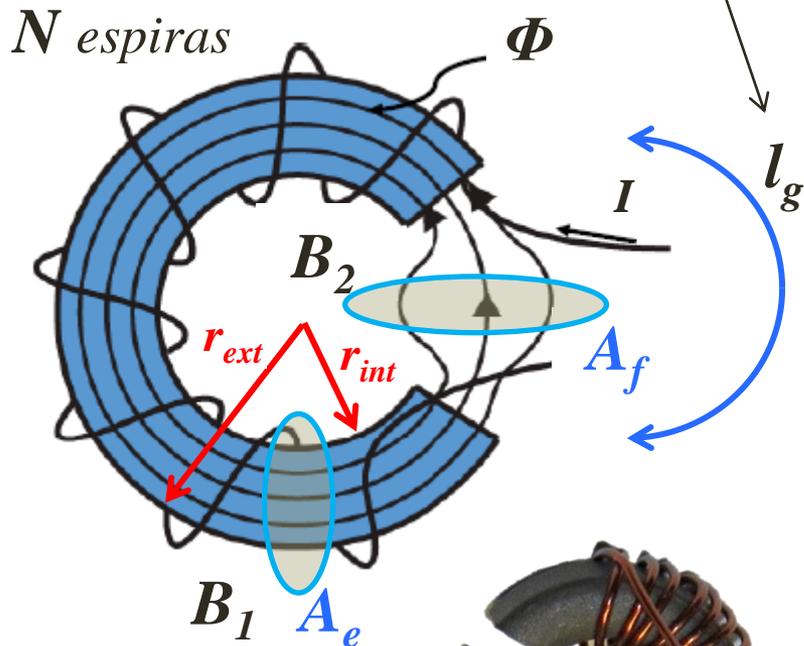
$$R_{e1} = \frac{2\pi r - l_g}{\mu_r \mu_0 A_e} \cong 0 \quad (\text{relutância do núcleo})$$

$$R_{e2} = \frac{l_g}{\mu_0 A_f} \cong \frac{l_g}{\mu_0 A_e} \quad (\text{relutância do gap})$$

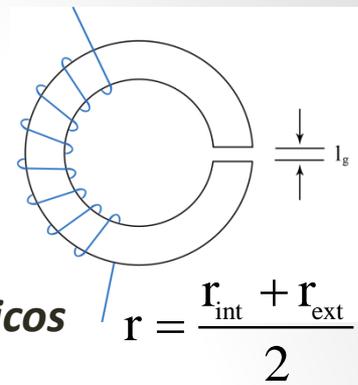
$$\therefore \Phi \cong \frac{\mu_0 A_e N I}{l_g}$$

# Circuitos Magnéticos

Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:



Usando circuitos magnéticos (supondo  $l_g \ll 2\pi r$ ):



Primeira aproximação:

- $\mu_r \gg 1$
- $A_f \approx A_e$  ( $k_f \approx 1$ )

Pela relação de campos & lei de Ampère:

$$|\mathbf{B}| = \mu |\mathbf{H}| \cong \mu_0 \frac{NI}{l_g}$$

Campo H praticamente todo aplicado no gap

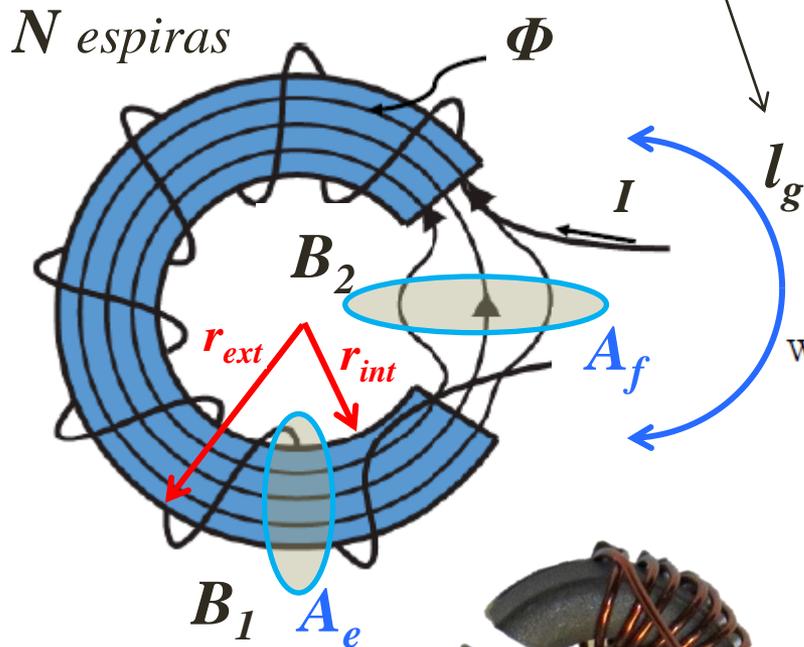
$$B_2 \cong B_1$$

Ou pela solução aprox. do circuito magnético:

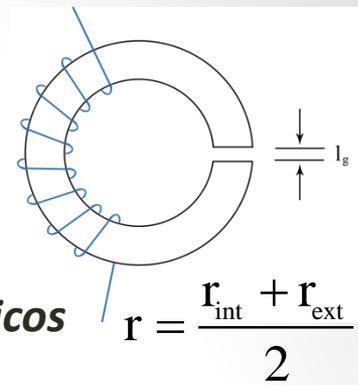
$$\therefore B_2 \cong B_1 = \frac{\Phi}{A_e} = \frac{\mu_0 NI}{l_g}$$

# Circuitos Magnéticos

Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:

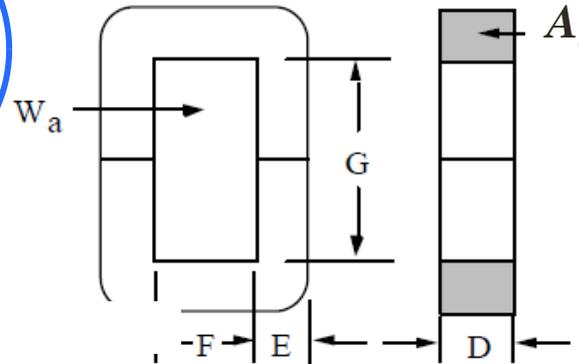


Usando circuitos magnéticos (supondo  $l_g \ll 2\pi r$ ):

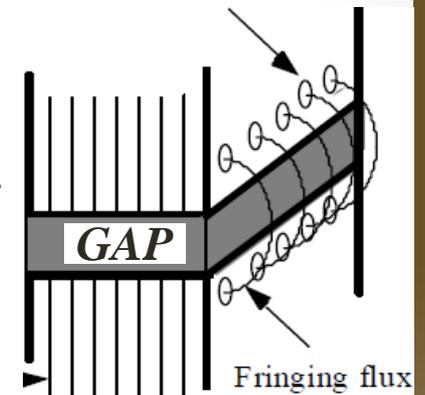


Solução exata:

- $\mu_r > 1$
- $A_f = k_f A_e$



**Espraiamento**

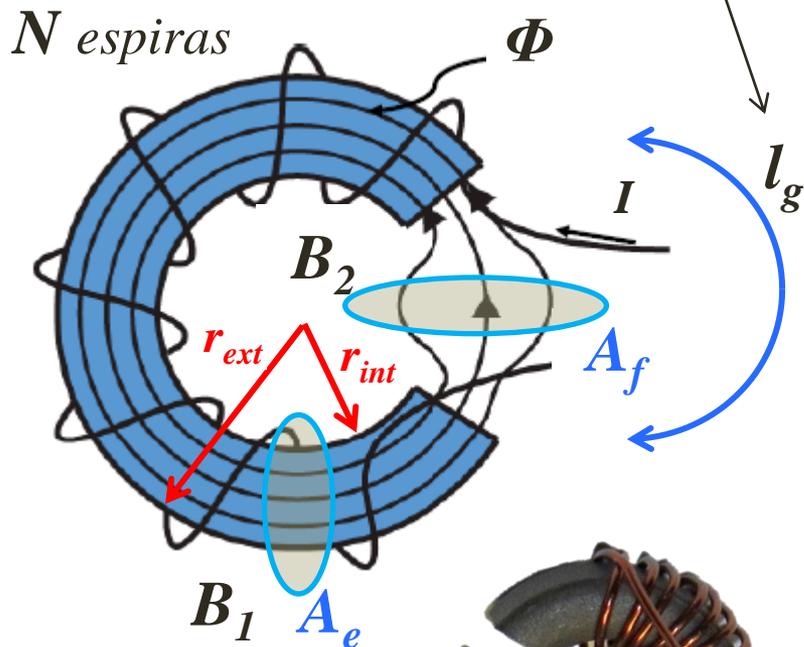


Fator de espraiamento:

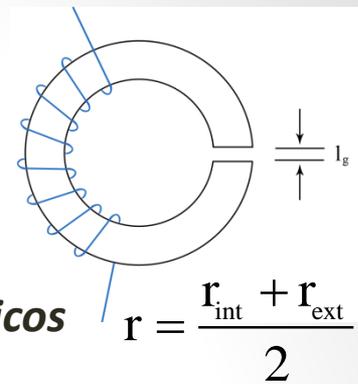
$$k_f = 1 + \frac{l_g}{\sqrt{A_e}} \ln \left( \frac{2G}{l_g} \right)$$

# Circuitos Magnéticos

Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:



Usando circuitos magnéticos (supondo  $l_g \ll 2\pi r$ ):



Solução exata:

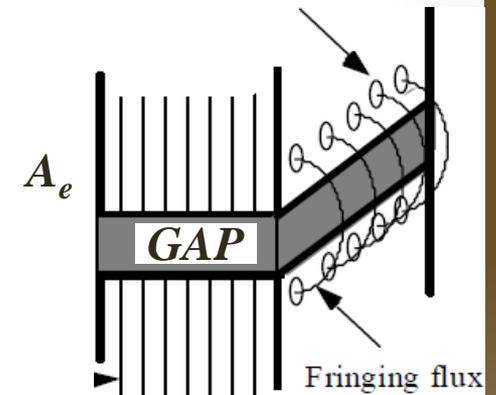
- $\mu_r > 1$
- $A_f = k_f A_e$

Relutâncias efetivas:

$$R_{e1} = \frac{2\pi r - l_g}{\mu_r \mu_0 A_e}$$

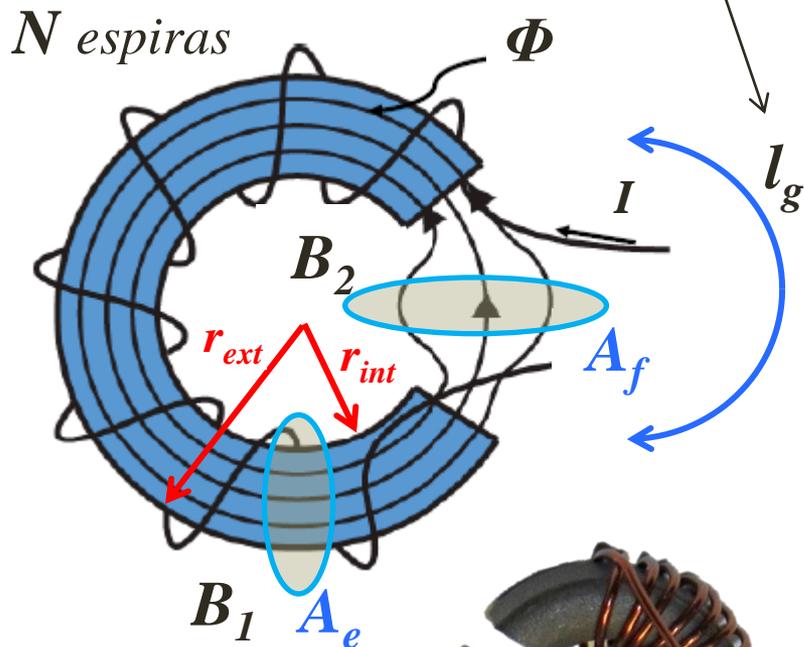
$$R_{e2} = \frac{\sqrt{A_e} l_g}{A_e \mu_0 \left[ \sqrt{A_e} + l_g \ln \left( \frac{2G}{l_g} \right) \right]}$$

**Espraiamento**

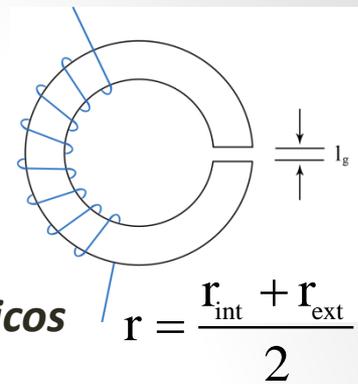


# Circuitos Magnéticos

Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:



Usando circuitos magnéticos (supondo  $l_g \ll 2\pi r$ ):



Solução meio-termo (de compromisso):

- $\mu_r \gg 1$
- $A_f = k_f A_e$

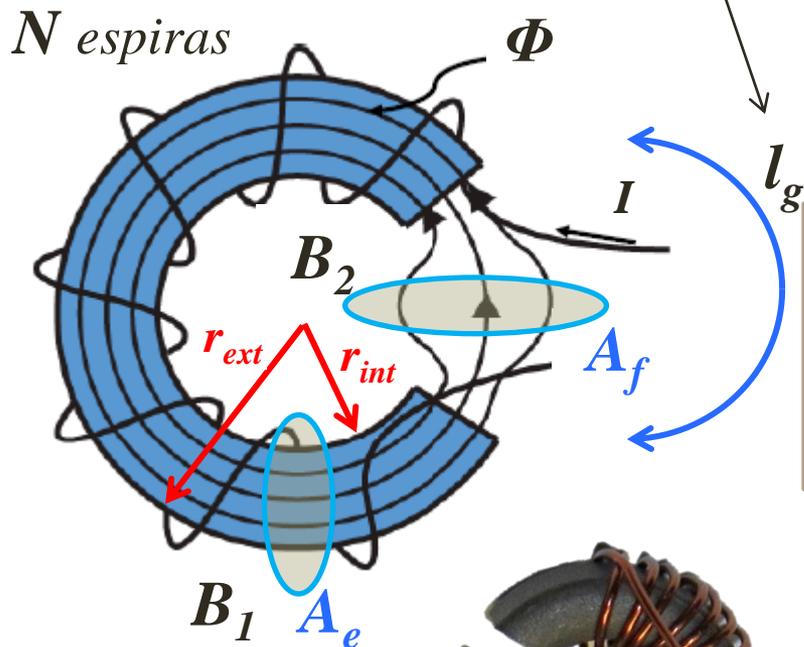
$$R_{e1} = \frac{2\pi r - l_g}{\mu_r \mu_0 A_e} \cong 0$$

$$R_{e2} = \frac{\sqrt{A_e} l_g}{A_e \mu_0 \left[ \sqrt{A_e} + l_g \ln \left( \frac{2G}{l_g} \right) \right]}$$

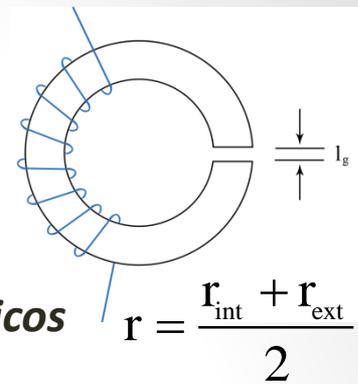
$$\Phi \cong \frac{NI}{R_{e2}} \rightarrow B_1, B_2$$

# Circuitos Magnéticos

Toróide de material ferromagnético com **entreferro**:



Usando circuitos magnéticos (supondo  $l_g \ll 2\pi r$ ):



Solução meio-termo (de compromisso):

- $\mu_r \gg 1$
- $A_f = k_f A_e$

FLUXO MAGNÉTICO:

$$\Phi \cong NI \frac{\mu_0 A_e}{\sqrt{A_e} l_g} \left[ \sqrt{A_e} + l_g \ln \left( \frac{2G}{l_g} \right) \right]$$

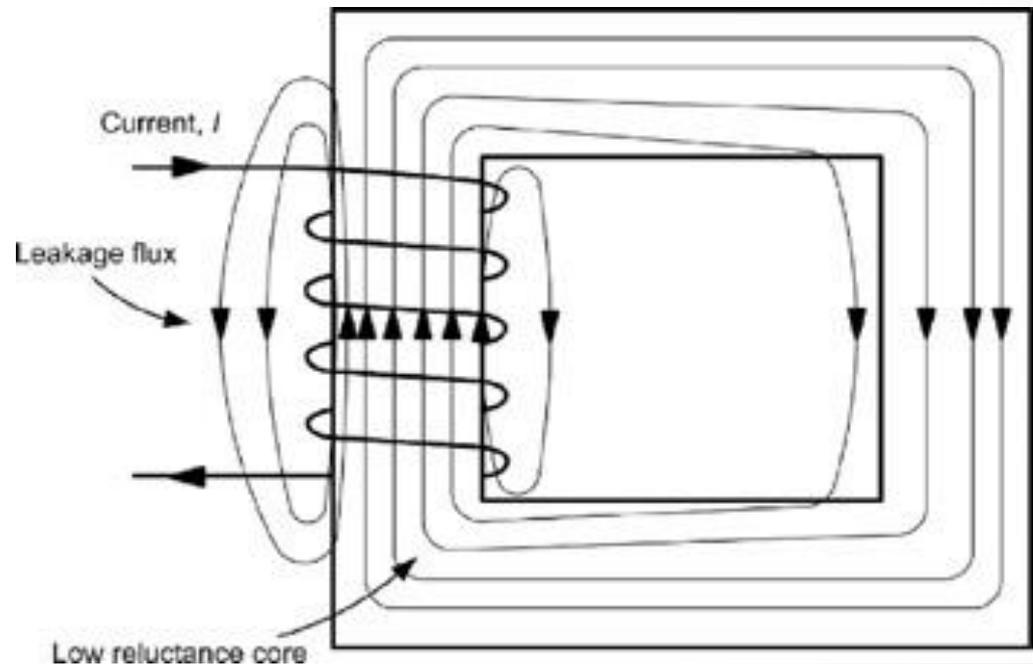
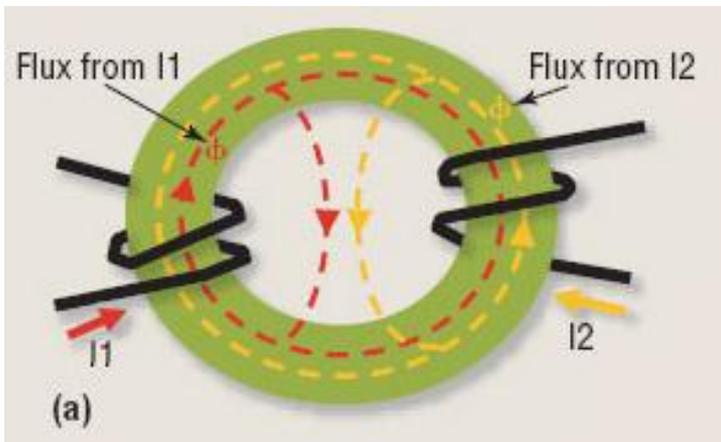
DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO:

$$B_1 = \frac{\Phi}{A_e} \quad B_2 = \frac{\Phi}{A_e \left[ 1 + \frac{l_g}{\sqrt{A_e}} \ln \left( \frac{2G}{l_g} \right) \right]}$$



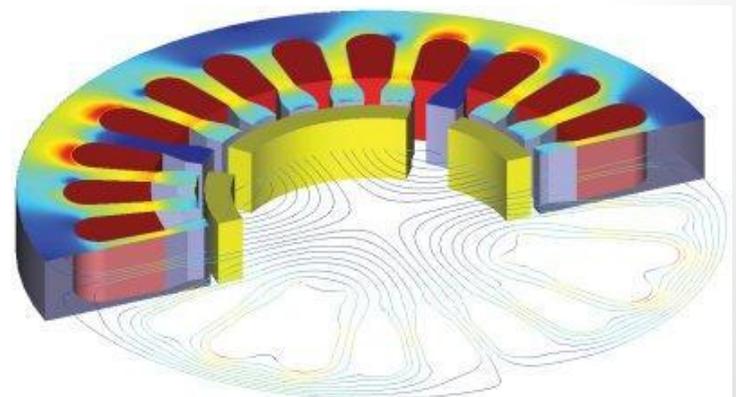
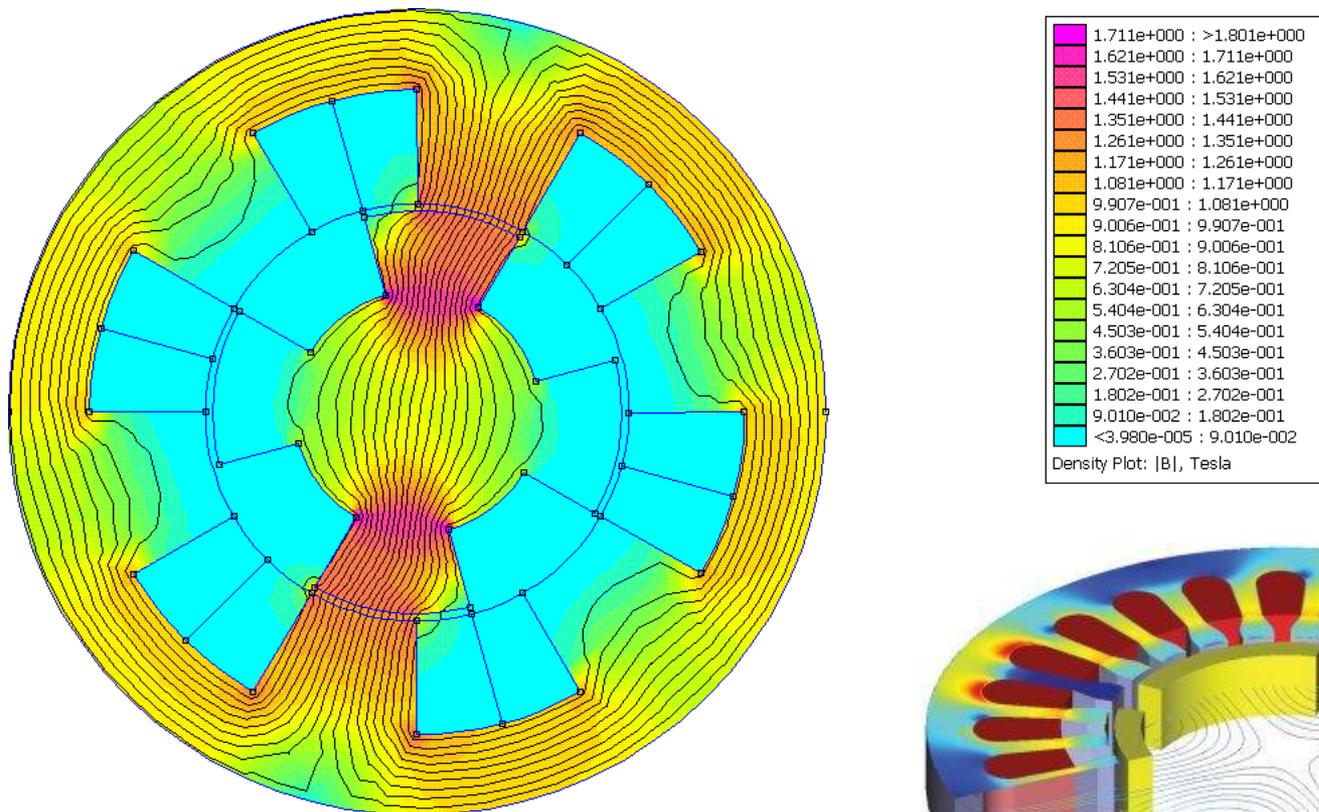
# Circuitos Magnéticos - limitações

1. O conceito de circuito magnético assume que todo o fluxo está confinado dentro do núcleo magnético, o que não é verdade. A permeabilidade de núcleos ferromagnéticos é de 2000 a 6000 vezes a do ar, no entanto uma pequena fração do fluxo circula pelo espaço em torno, de baixa permeabilidade. Este fluxo fora do núcleo é chamado de **fluxo de dispersão** ("leakage flux"), e deve ser considerado em alguns casos (projeto de máquinas rotativas, transformadores, indutores acoplados, etc.).



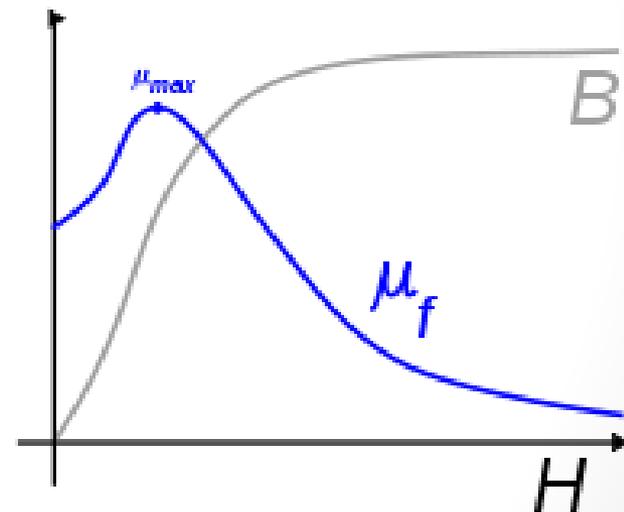
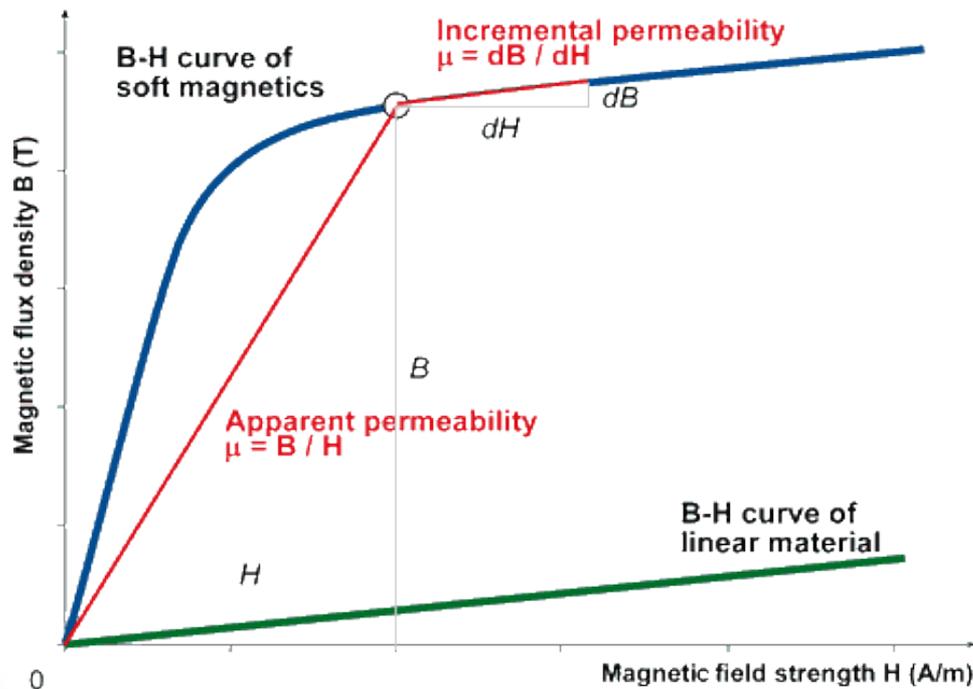
# Circuitos Magnéticos - limitações

2. O cálculo da relutância assume que existe um **caminho magnético médio**, do qual calculamos um comprimento médio. Esta premissa não é tão boa, especialmente quando se tem cantos, ângulos agudos em ângulos retos.



# Circuitos Magnéticos - limitações

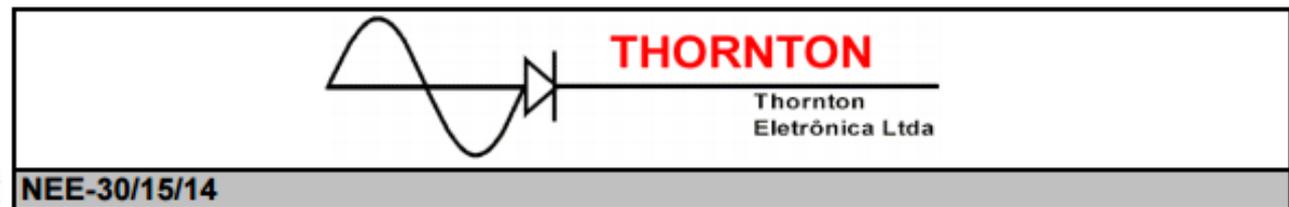
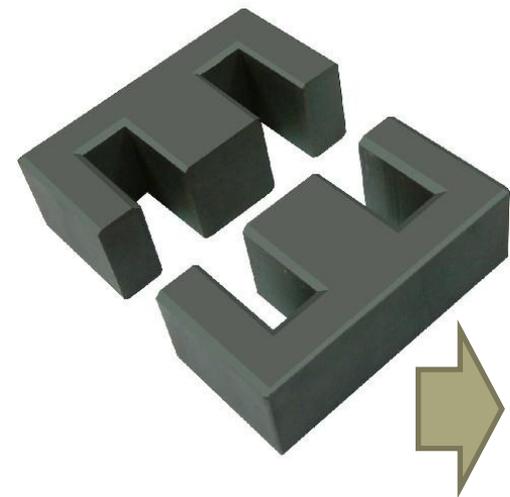
3. Em materiais ferromagnéticos, a **permeabilidade varia** com a densidade de fluxo magnético. Este efeito não-linear adiciona mais um grau de erros na análise via circuitos magnéticos, uma vez que a relutância de um núcleo depende da permeabilidade do material.



# Circuitos Magnéticos - limitações

Muitas destas limitações podem ser corrigidas com dados de fabricantes:

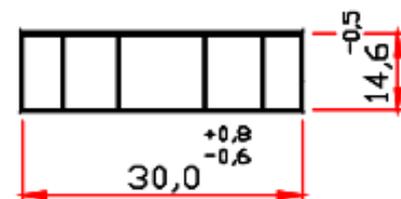
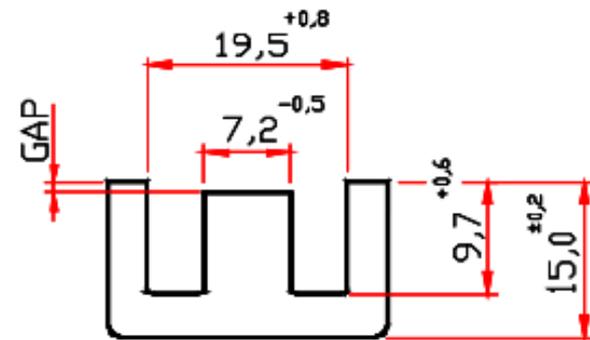
- Caminho magnético médio efetivo
- Área efetiva da perna central (c/ gap)
- Permeabilidade relativa para várias condições



Parâmetros Efetivos do Núcleo:

$\Sigma l/A$	0,55	mm <sup>-1</sup>
$l_e$	67,0	mm
$A_e$	122,0	mm <sup>2</sup>
$A_{min}$	---	mm <sup>2</sup>
$V_e$	8174,0	mm <sup>3</sup>

Peso Aprox. (pç) 21,0 g



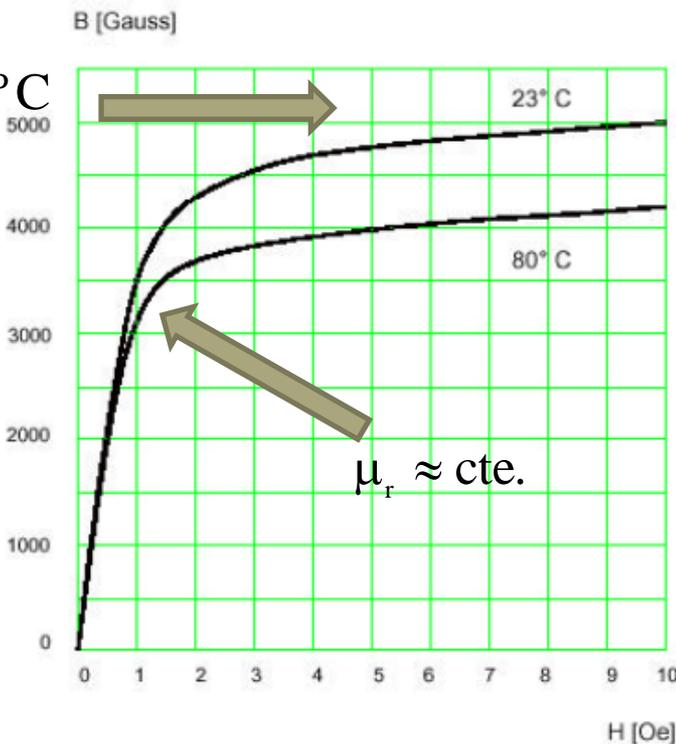
Dimensões em mm

# Circuitos Magnéticos - limitações

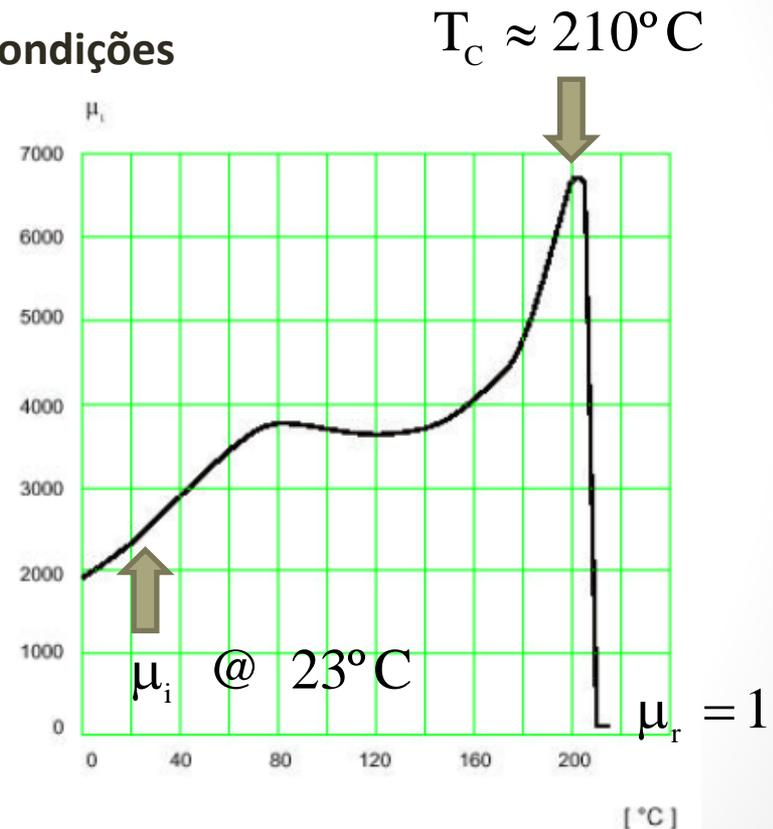
Muitas destas limitações podem ser corrigidas com dados de fabricantes:

- Caminho magnético médio efetivo
- Área efetiva da perna central (c/ gap)
- **Permeabilidade relativa para várias condições**

$B_{SAT}$  @ 23°C

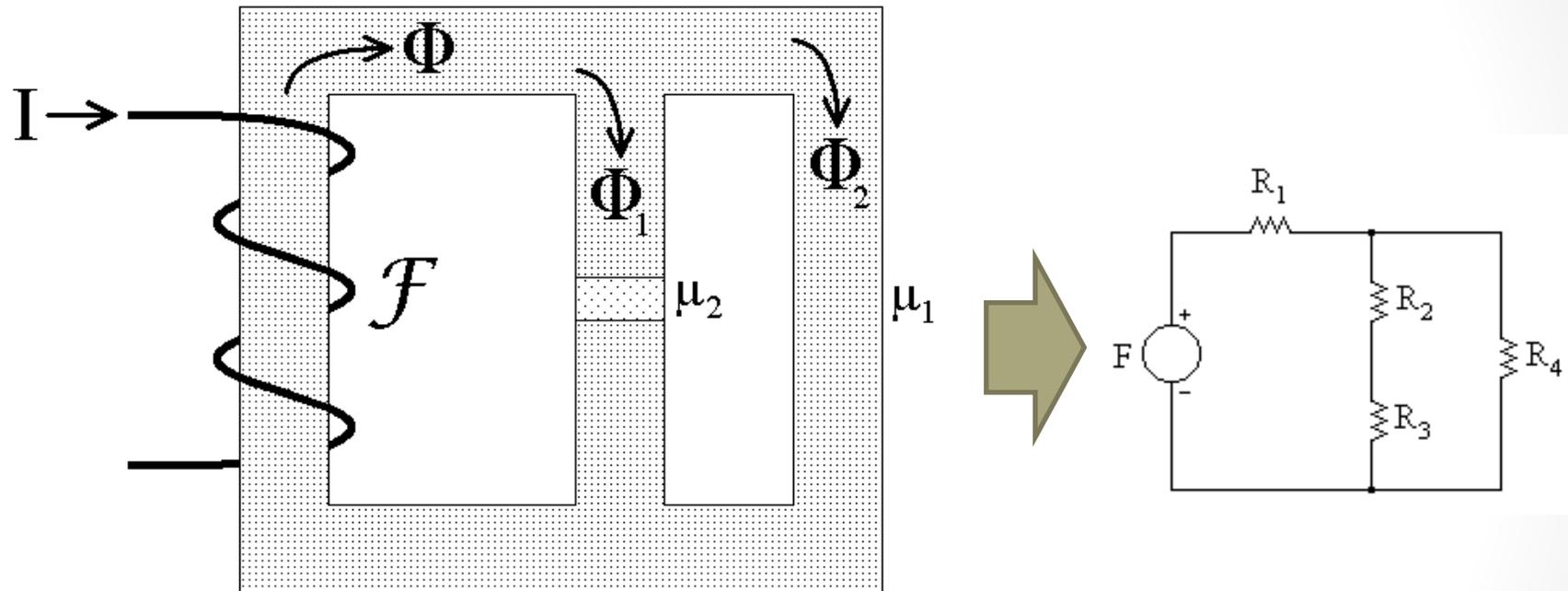


Tipico  $B \times H$



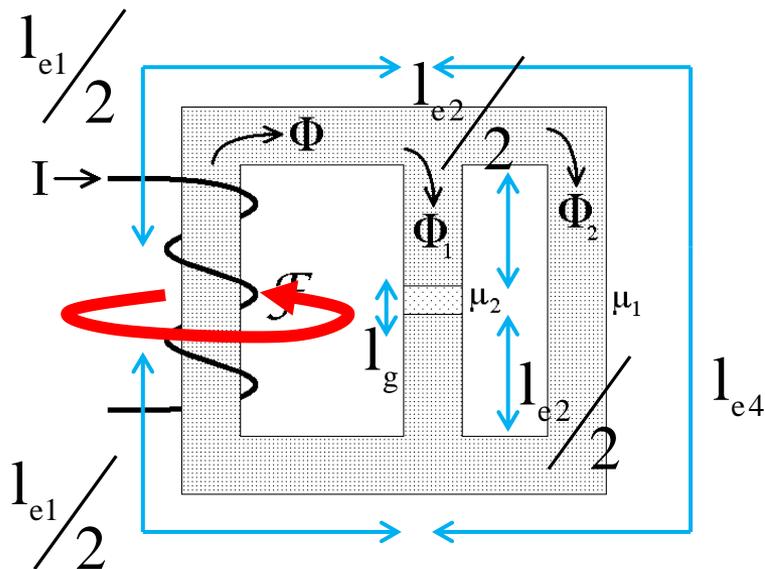
$\mu_r \times$  Temperatura

# Circuitos Magnéticos



$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu \ell} \quad \mathcal{F} = \Phi \mathcal{R} \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

# Circuitos Magnéticos



$$F = NI \Rightarrow \Phi$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 =$$

Relutâncias do  
circuito magnético:

$$= \frac{NI}{R_1 + (R_2 + R_g) \parallel R_4}$$

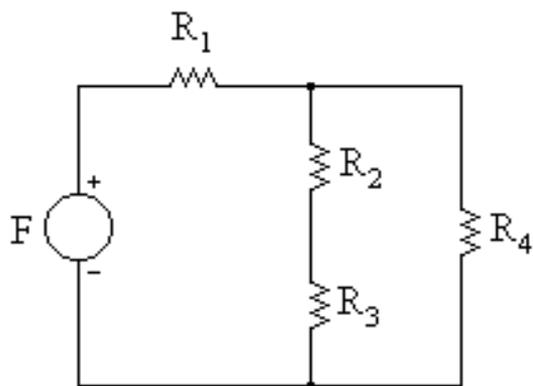
$$R_1 = \frac{l_{e1}}{A_e \mu_1}$$

$$R_2 = \frac{l_{e2}}{A_e \mu_1}$$

$$R_3 = \frac{l_g}{A_e \mu_2} = R_g = \frac{l_g}{A_e \mu_0}$$

$$R_4 = \frac{l_{e4}}{A_e \mu_1}$$

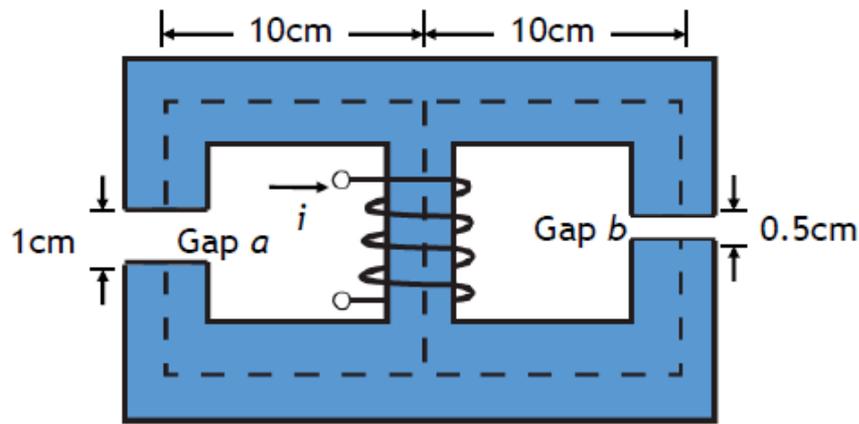
"gap" ou "airgap"  
→ entreferro



# Circuitos Magnéticos

*Circuitos paralelos:*

*Espessura do núcleo: 3cm*

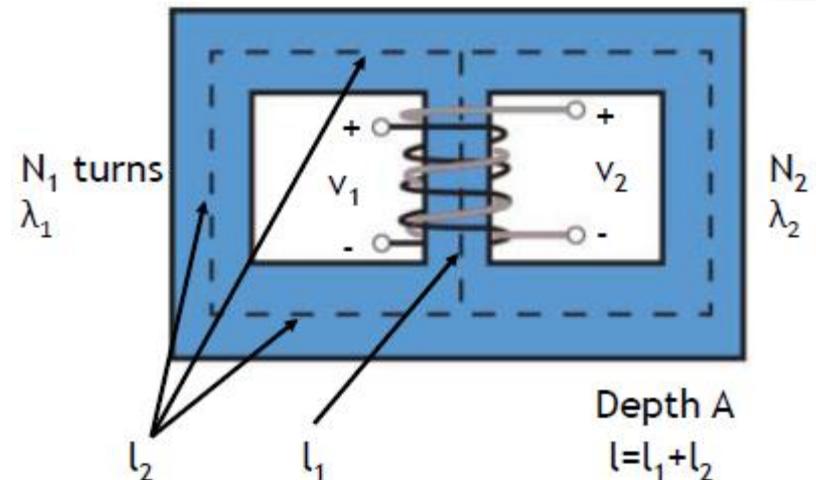


$$R_e = \frac{l_e}{A_e \mu_r \mu_0}$$

*Várias espiras: fmm em série*

**Aplicação:**

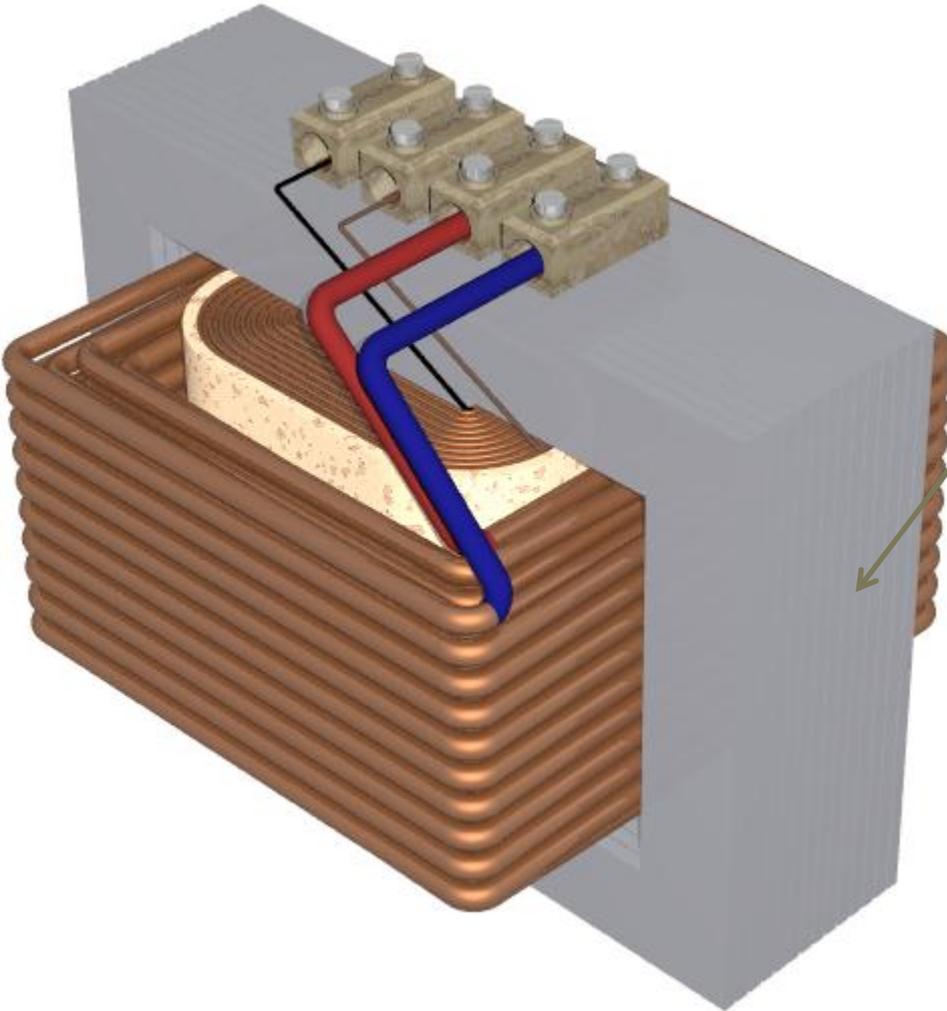
transformador monofásico cujas as bobinas são enroladas na perna central



# Circuitos Magnéticos

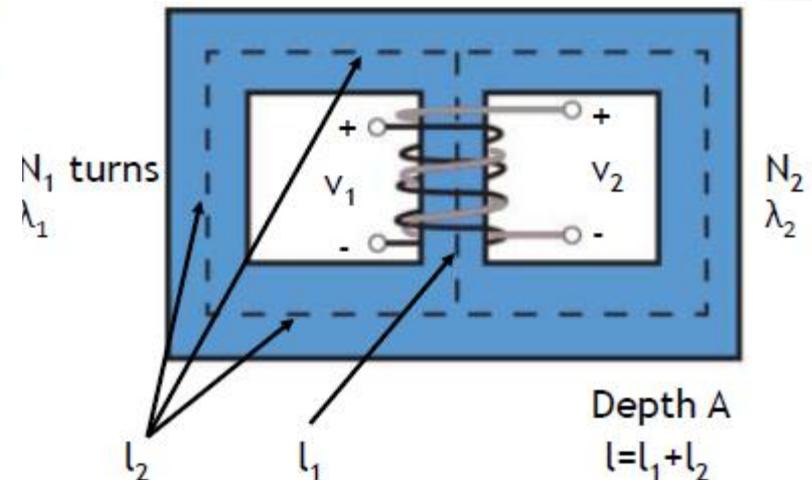
*Circuitos paralelos:*

Relutância do núcleo de ferro silício



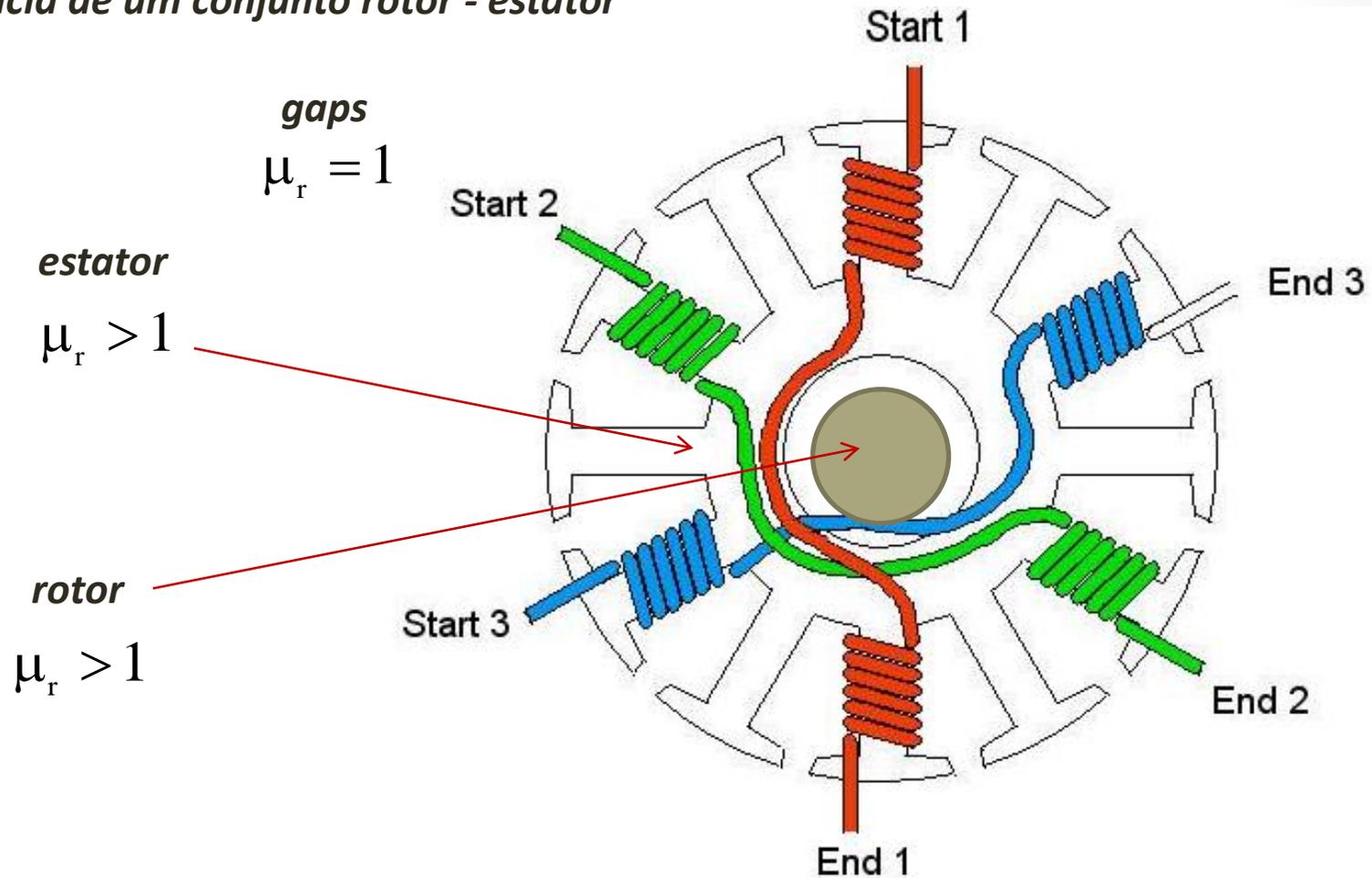
**Aplicação:**

transformador monofásico cujas as bobinas são enroladas na perna central



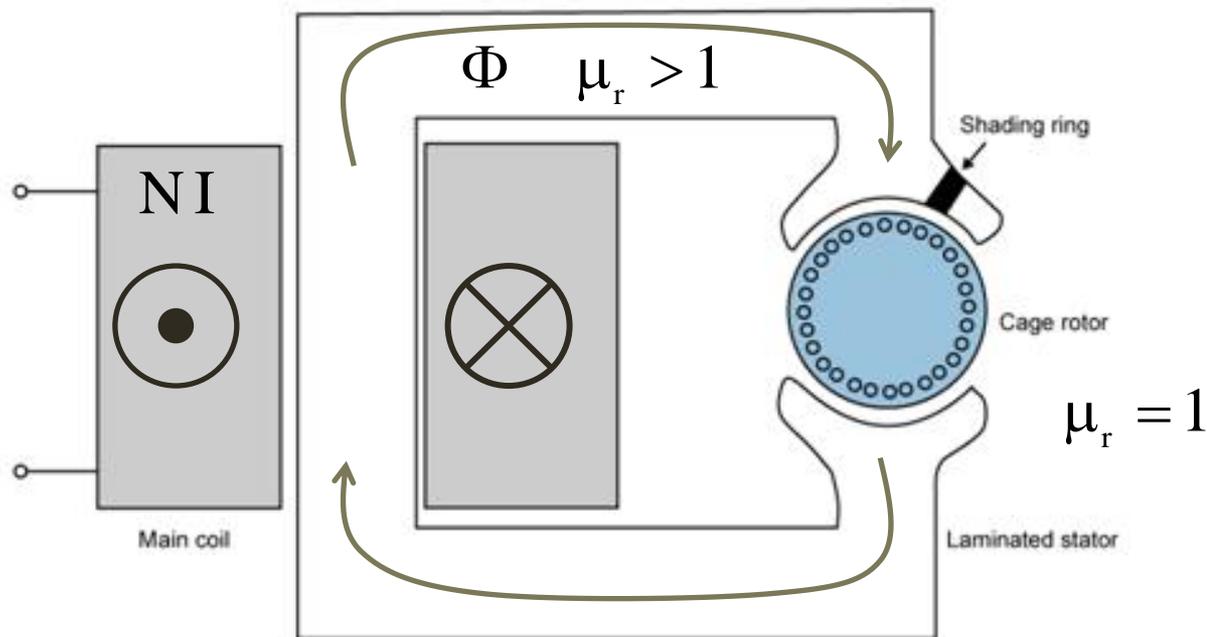
# Circuitos Magnéticos

*Relutância de um conjunto rotor - estator*



# Circuitos Magnéticos

*Relutância de um conjunto rotor – estator – modelo simplificado*

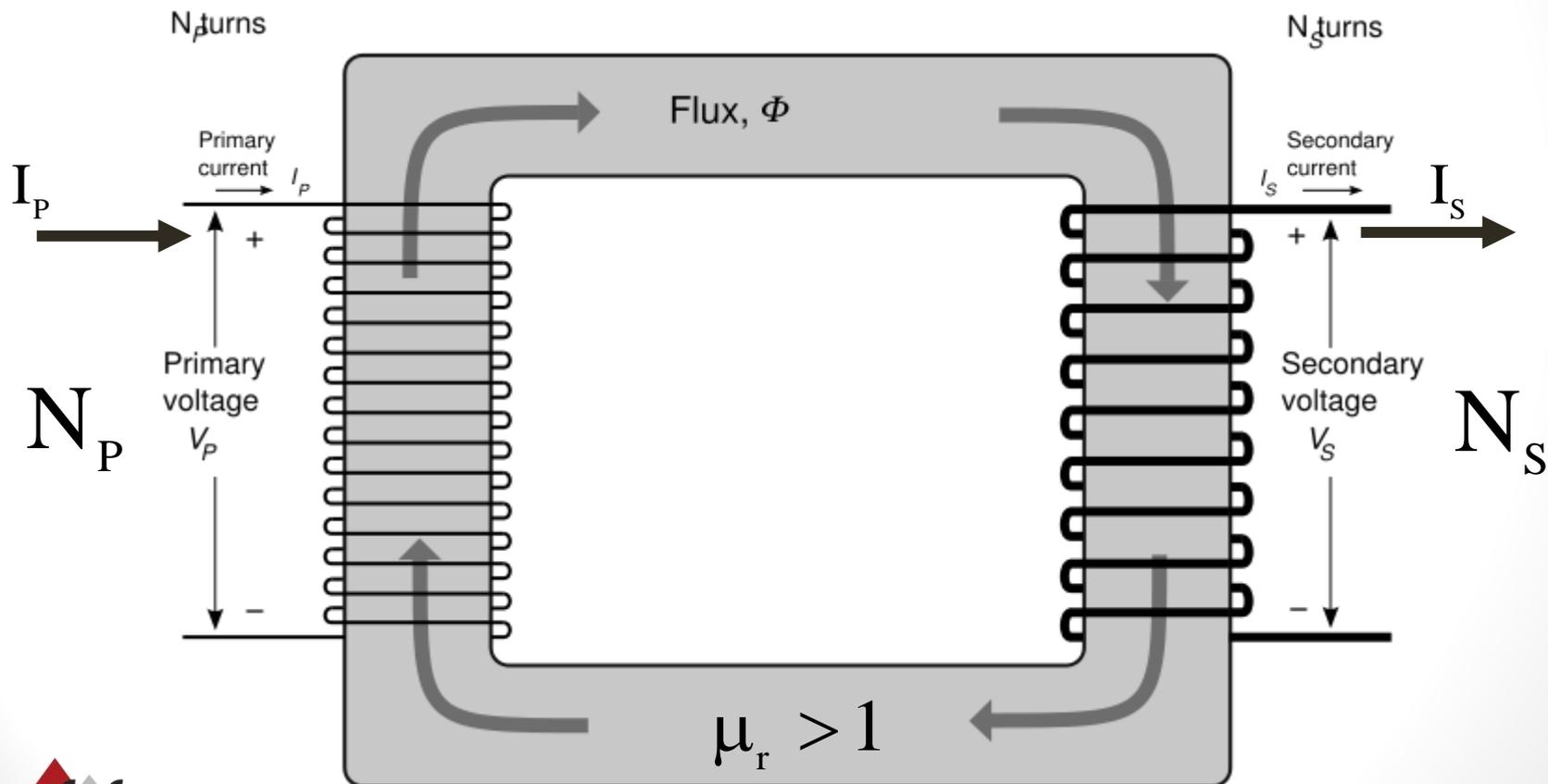


$$\begin{aligned} N &= 200 \text{ voltas} \\ L_e &= 500 \text{ mm} \\ L_g &= 0,5 \text{ mm} \\ A_e &= 1200 \text{ mm}^2 \\ D_r &= 50 \text{ mm} \\ \mu_r &= 2000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_r &= 16.600 \text{ A.esp/Wb} \\ R_g &= 284.000 \text{ A.esp/Wb} \\ R_s &= 166.000 \text{ A.esp/Wb} \end{aligned}$$

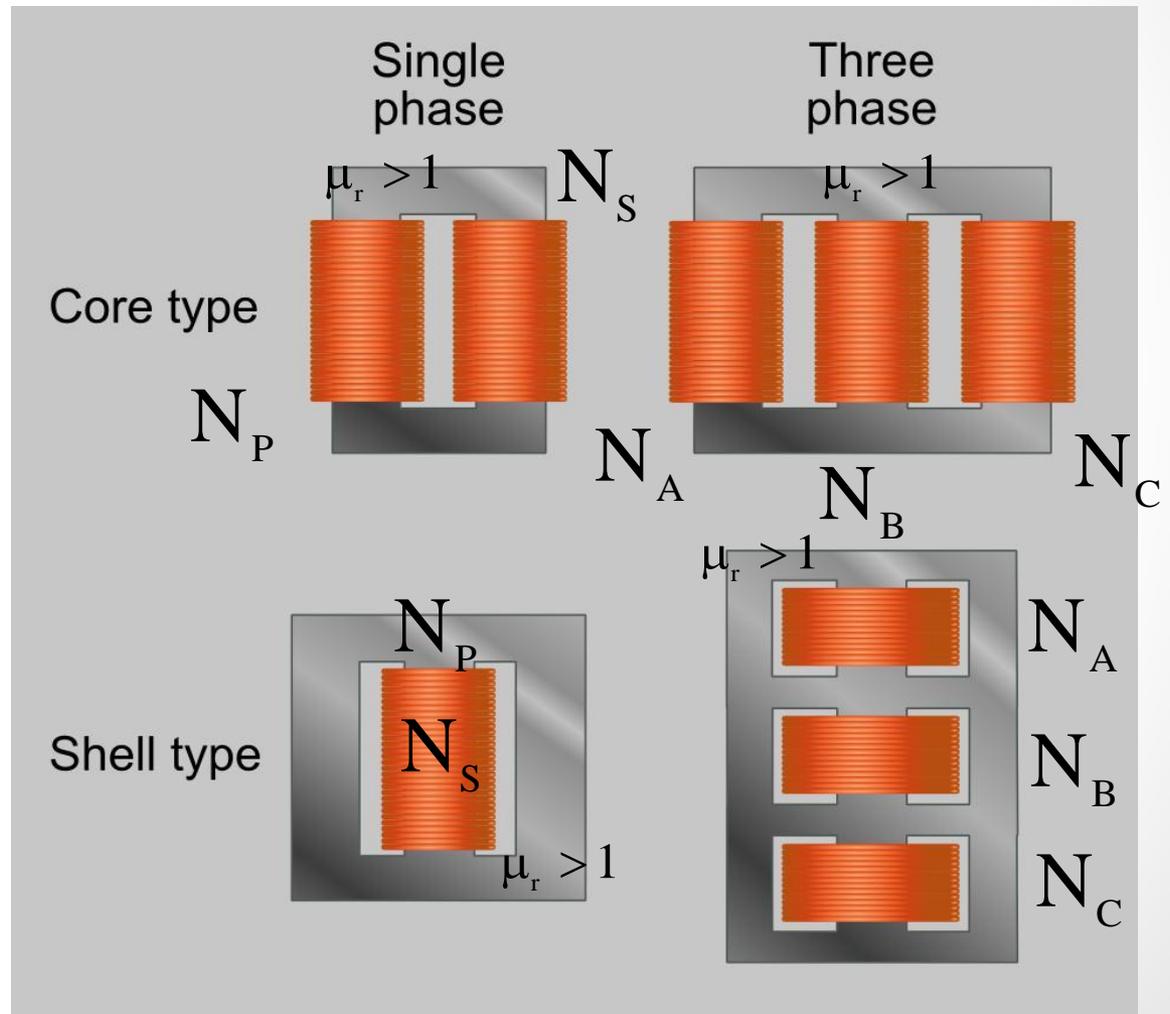
# Circuitos Magnéticos

*Circuitos magnéticos em um transformador:*



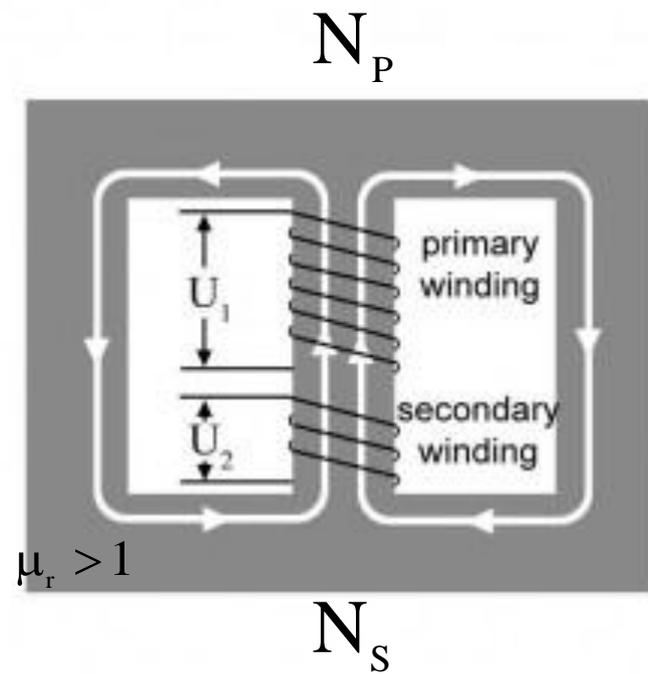
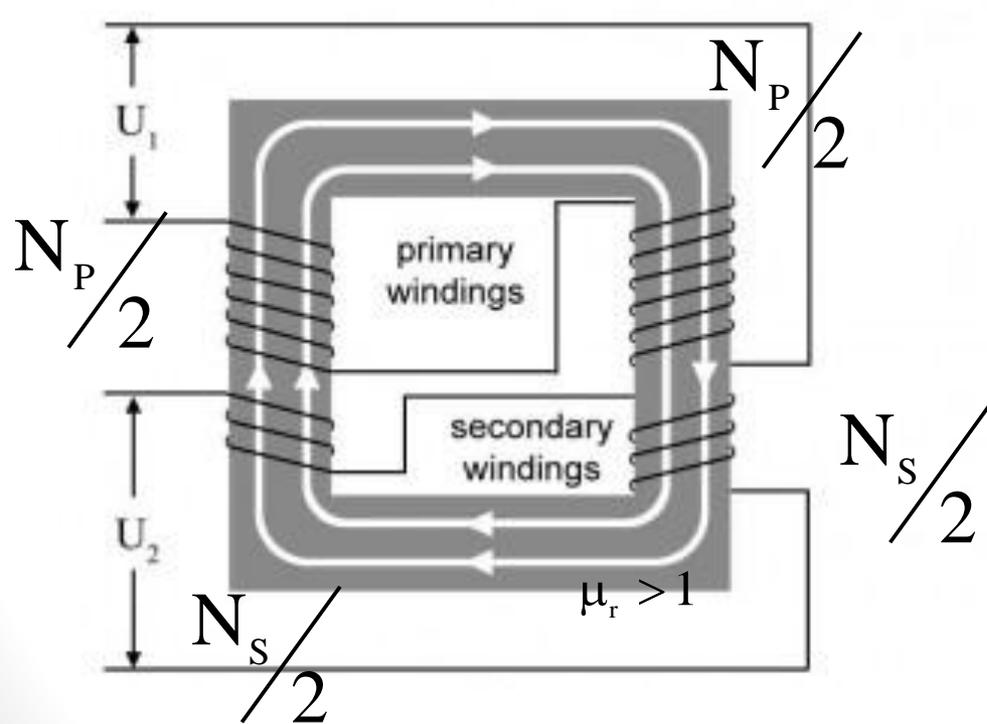
# Circuitos Magnéticos

*Circuitos magnéticos em transformadores monofásicos e trifásicos:*



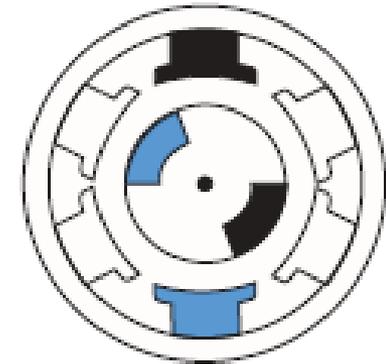
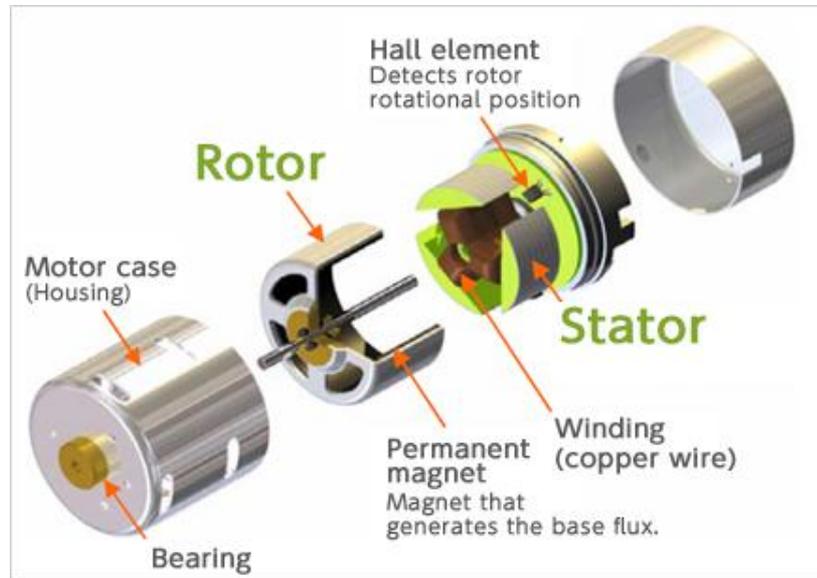
# Circuitos Magnéticos

*Circuitos magnéticos em um transformador monofásico – configurações com enrolamentos nas pernas laterais e pernas centrais:*

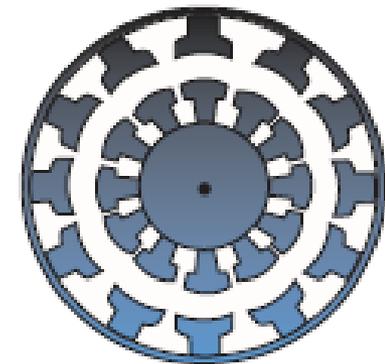
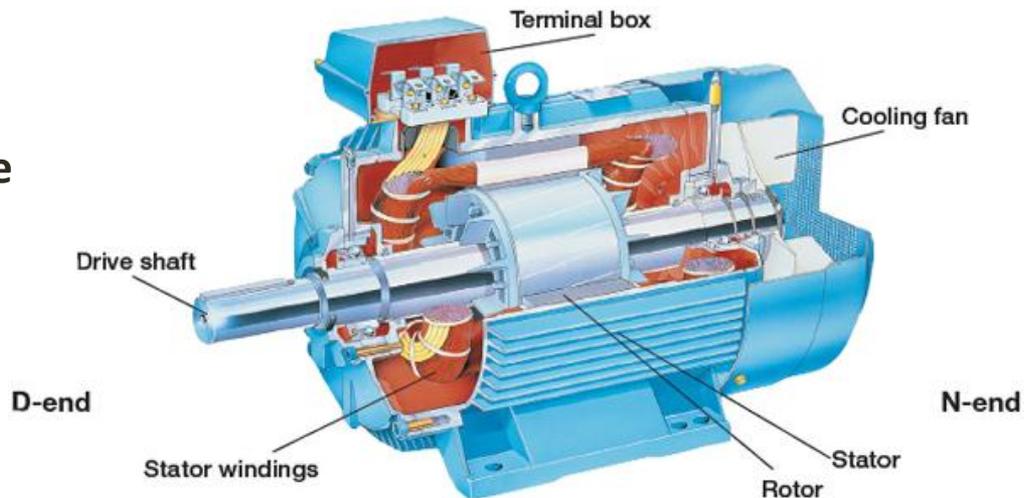


# Circuitos Magnéticos - aplicações

## Motor "Brushless" (BLDC)

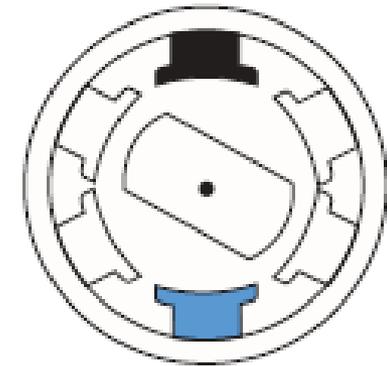
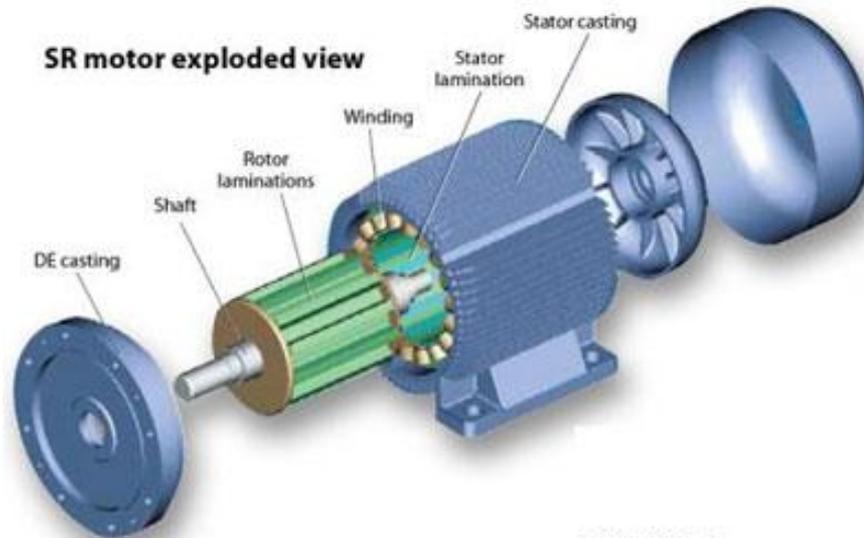


## Motor de indução

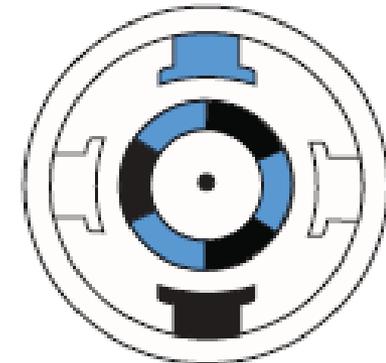
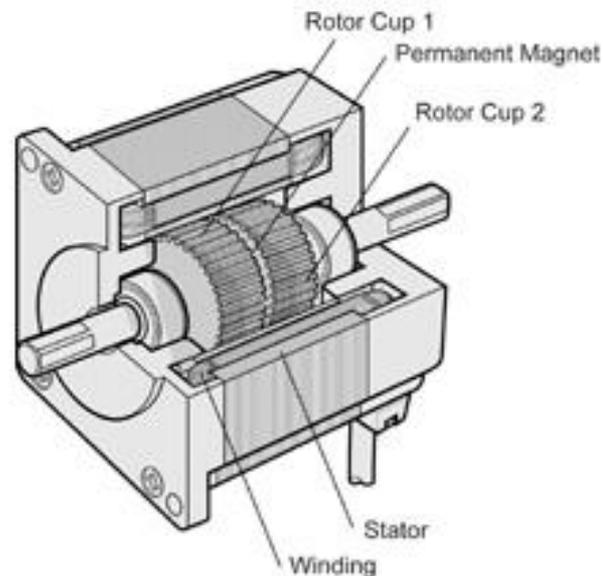


# Circuitos Magnéticos - aplicações

## Motor de Relutância (SR)

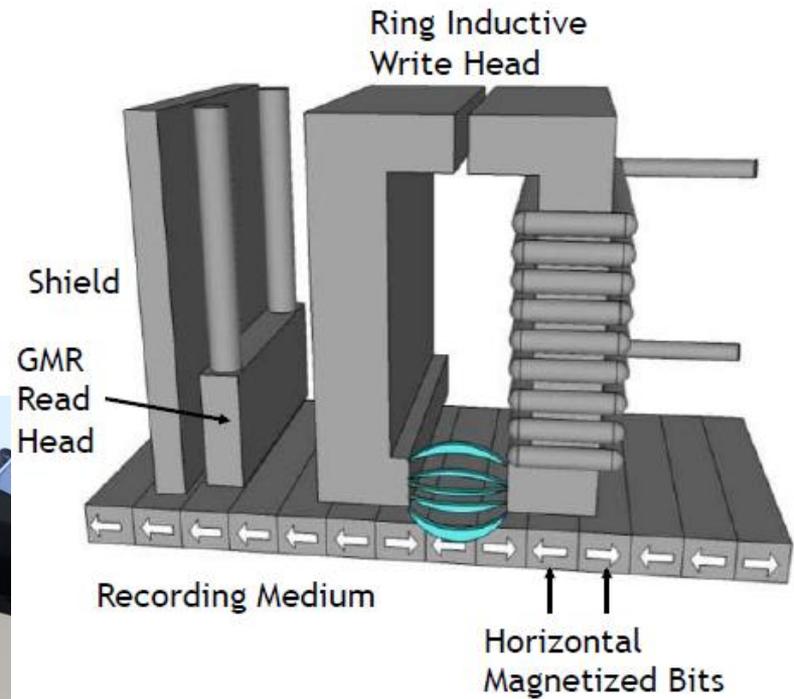


## Motor de passo



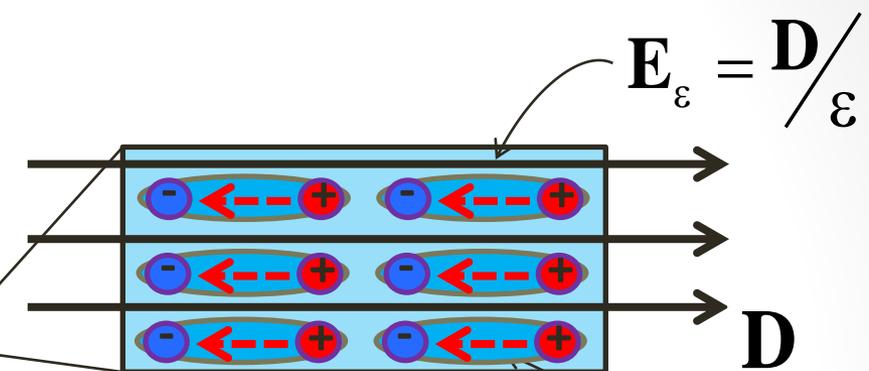
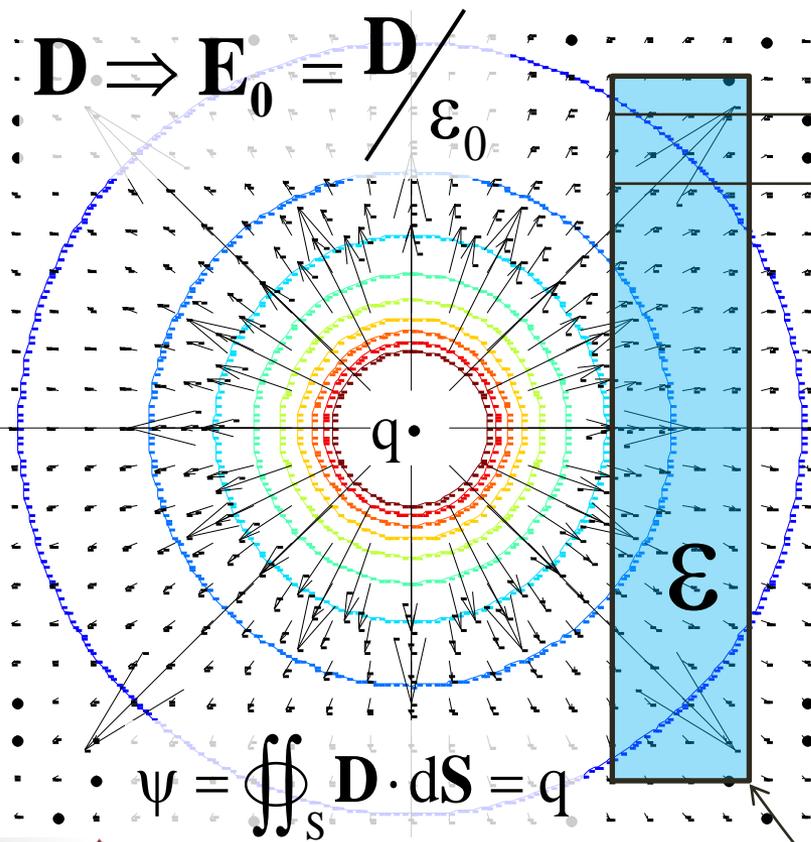
# Circuitos Magnéticos - aplicações

Cabeça de leitura de um HD



# Energia Magnetostática - permeabilidade

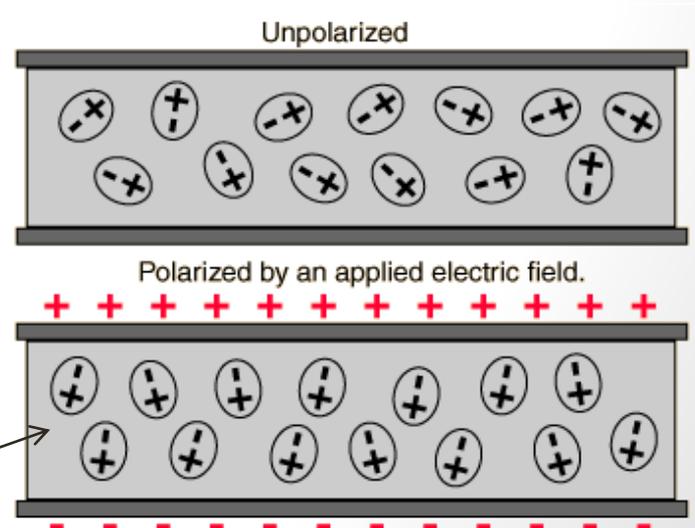
Analogia com campos eletrostáticos:



polarização

dipolos -  
moléculas

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_q)}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_q|^3}$$



material dielétrico

# Energia Magnetostática - permeabilidade

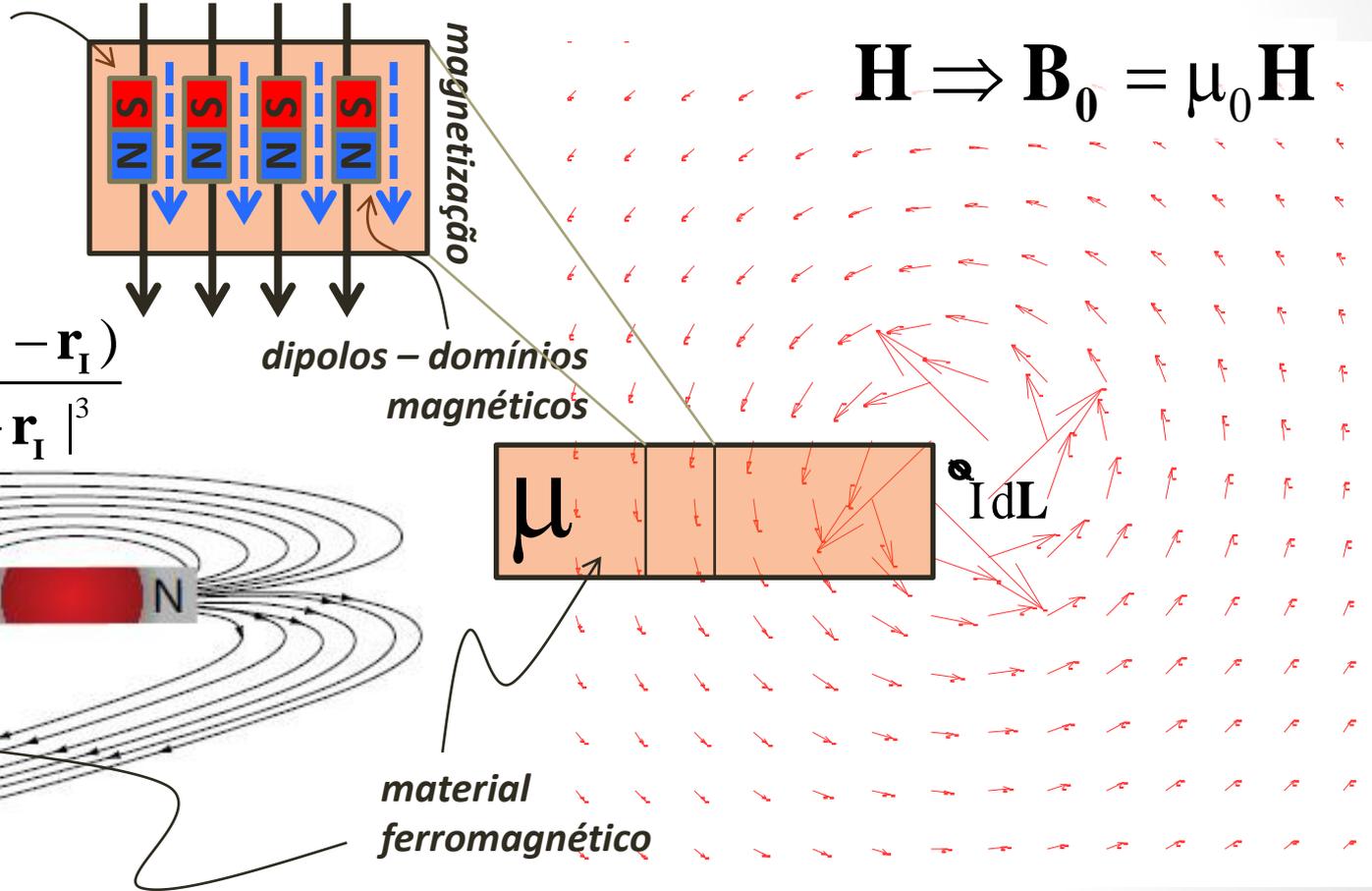
Analogia com campos eletrostáticos → campo magnetostático:

$$\mathbf{B}_\mu = \mu \mathbf{H}$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{L} \times (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I)}{4\pi |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_I|^3}$$

$$\mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$$



# Energia Magnetostática - permeabilidade

paramagnético  
diamagnético

Material	Permeabilidade relativa	Densidade de fluxo de saturação
Vácuo (espaço livre)	$\mu_r = 1$ ( $\mu = \mu_0$ )	-
Ar	$\mu_r = 1,00000037$	-
Cobre	$\mu_r = 0,999994$	-
Alumínio	$\mu_r = 1,000022$	-
Água	$\mu_r = 0,99999976$	-
<b>Permalloy/Mu-Metal (70-90% Ni + Fe)</b>	<b><math>\mu_r = 8.000-50.000</math></b>	<b><math>B_{SAT} = 0,8</math> T</b>
<b>Ferro-Silício</b>	<b><math>\mu_r = 4.000-5.000</math></b>	<b><math>B_{SAT} = 1,6-3</math> T</b>
<b>Ferrites (<math>FeO_2</math> + metais – NiZn, MnZn)</b>	<b><math>\mu_r = 600-2.000</math></b>	<b><math>B_{SAT} = 0,2-0,5</math> T</b>
<b>Ligas de Cobalto (Co, B, Fe, Ni, Mo, Si)</b>	<b><math>\mu_r = 250-18.000</math></b>	<b><math>B_{SAT} = 0,5-1</math> T</b>

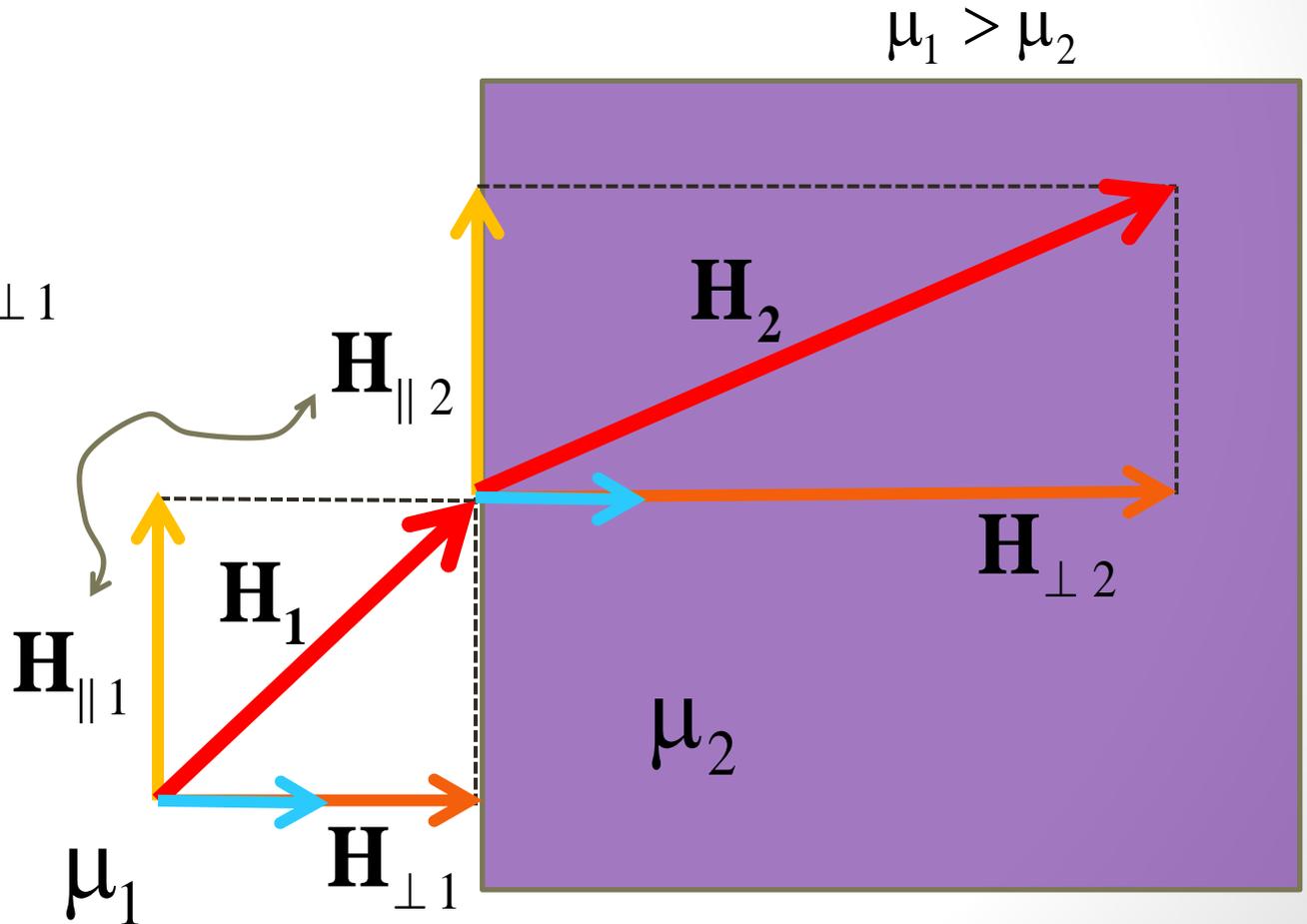
# Energia Magnetostática – condições de fronteira

Idênticas às condições de fronteira em **campos eletrostáticos**

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\parallel 2} = \mathbf{H}_{\parallel 1} \\ \mathbf{H}_{\perp 2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \mathbf{H}_{\perp 1} \end{cases}$$

Portanto:

$$\mathbf{B}_{\perp 2} = \mathbf{B}_{\perp 1}$$



# Energia Magnetostática

Energia por unidade de volume (energia específica):

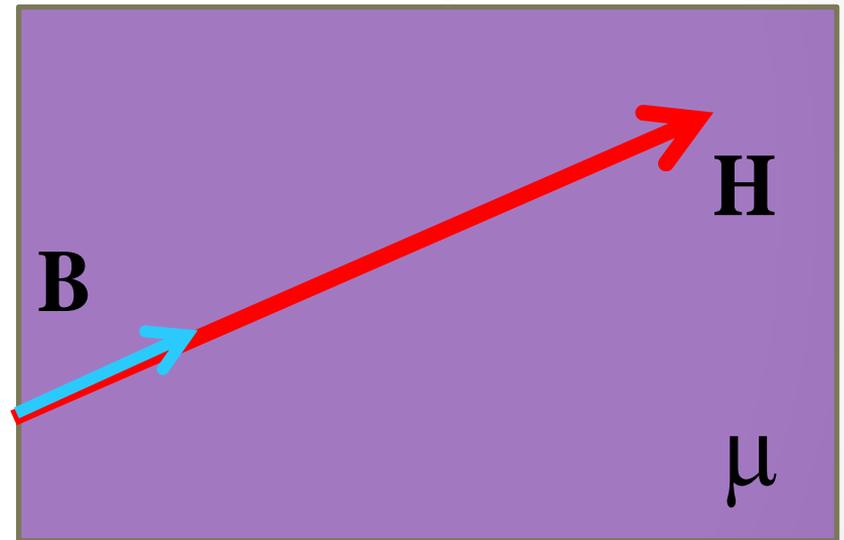
$$U_H = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad \text{J/m}^3$$

Integrando:

$$W_H = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad \text{J}$$

$W_H$

Energia necessária para estabelecer um fluxo magnético no material



$$W_H = \frac{1}{2} \iiint_V \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dV$$

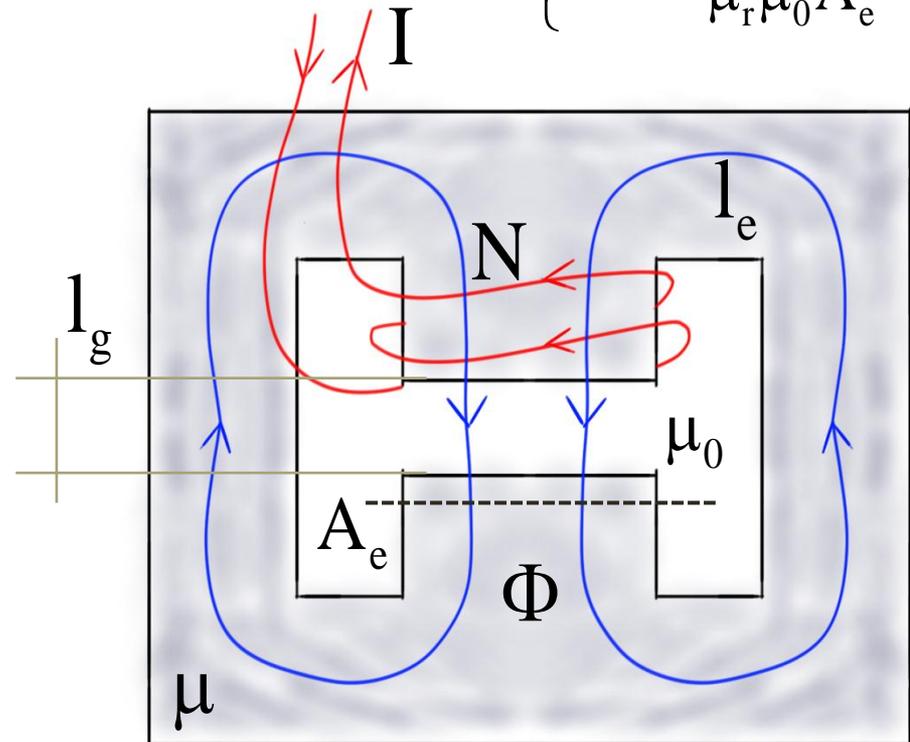
# Energia Magnetostática

$$W_H = \frac{1}{2} \iiint_V \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dV$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_g \cong \frac{l_g}{\mu_0 A_e} \\ R_N \cong \frac{l_e}{\mu_r \mu_0 A_e} \end{array} \right.$$

$$\Phi = \mu_0 A_e \frac{NI}{l_g + \frac{l_e}{\mu_r}}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l_g + \frac{l_e}{\mu_r}}$$



# Energia Magnetostática

$$W_H = \frac{1}{2} \iiint_V \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dV$$

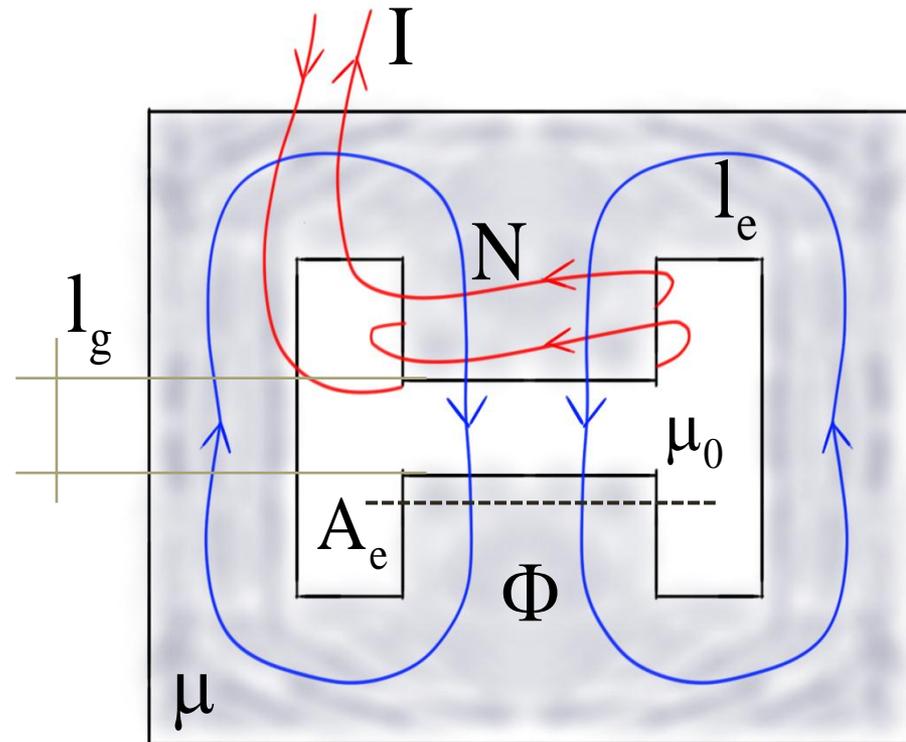
$$B = \mu_0 \frac{NI}{l_g + l_e / \mu_r}$$

*Energia no gap:*

$$W_g = \frac{l_g A_e \mu_0}{2} \frac{N^2 I^2}{\left( l_g + l_e / \mu_r \right)^2}$$

*Energia no núcleo:*

$$W_N = \frac{V_e \mu_0}{2 \mu_r} \frac{N^2 I^2}{\left( l_g + l_e / \mu_r \right)^2}$$



# Energia Magnetostática

$$W_H = \frac{1}{2} \iiint_V \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dV$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l_g + \frac{l_e}{\mu_r}}$$

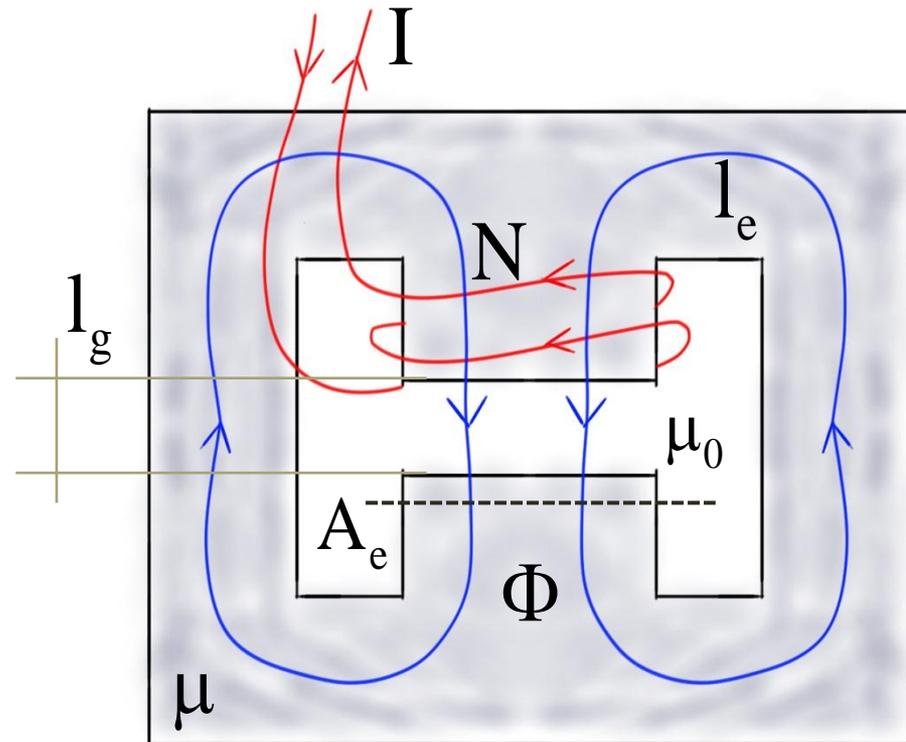
*Energia no gap:*

$$W_g \cong \frac{A_e \mu_0}{2} \frac{N^2 I^2}{l_g}$$

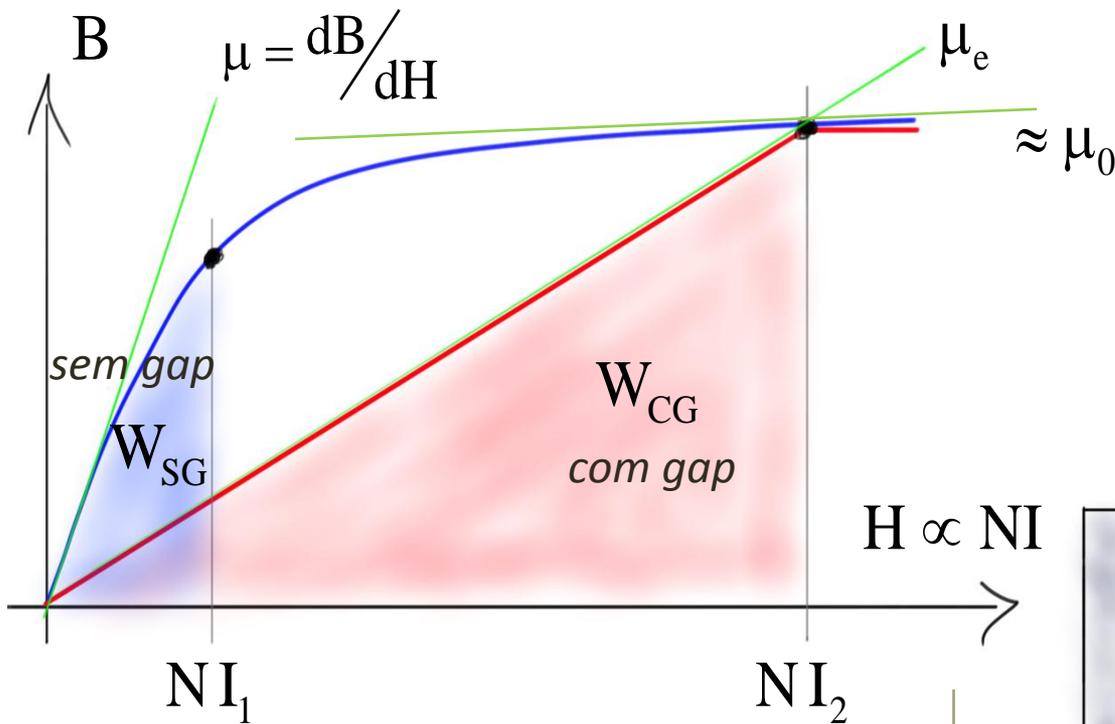
*Energia no núcleo:*

$$W_N \cong 0$$

$$W_H = W_N + W_g \approx W_g$$



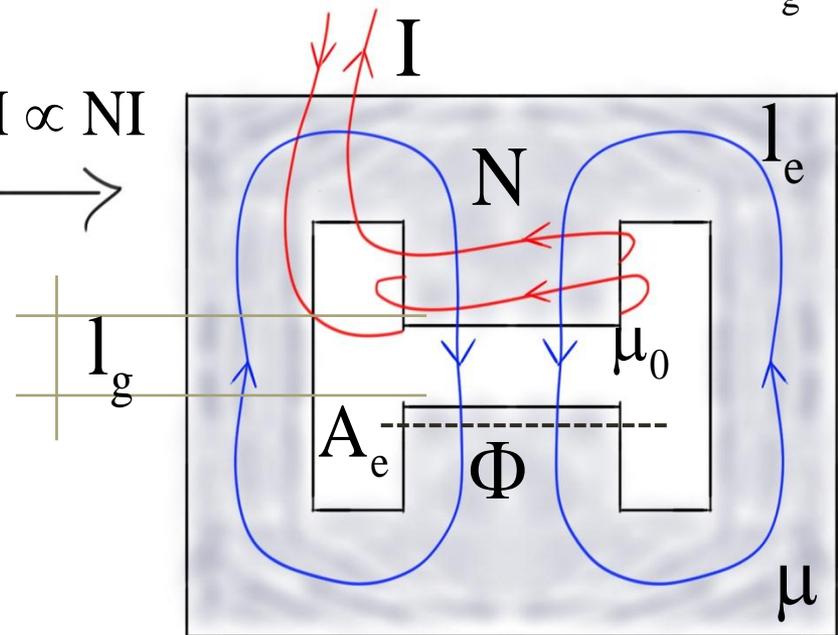
# Energia Magnetostática



$$B = \mu_0 \frac{NI}{l_g + \frac{l_e}{\mu_r}}$$

$$W_H \cong \frac{A_e \mu_0}{2} \frac{N^2 I^2}{l_g}$$

**GAP** → Armazena-se mais energia sem saturar o núcleo



# Indutância

*Definição via a energia armazenada no campo:*

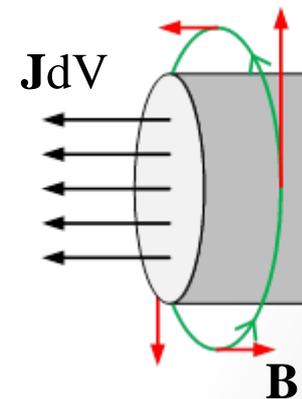
- Na eletrostática – capacitância vs. energia no campo elétrico:  $W_E = \frac{1}{2} CV^2$

- Definindo a indutância de um sistema similarmente:  $W_H = \frac{1}{2} LI^2$

$$L = \frac{2W_H}{I^2} = \frac{\iiint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV}{\left(\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}\right)^2}$$

*O potencial vetorial gerado por uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$  é:*

$$\mathbf{A} = \iiint_V \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dV$$



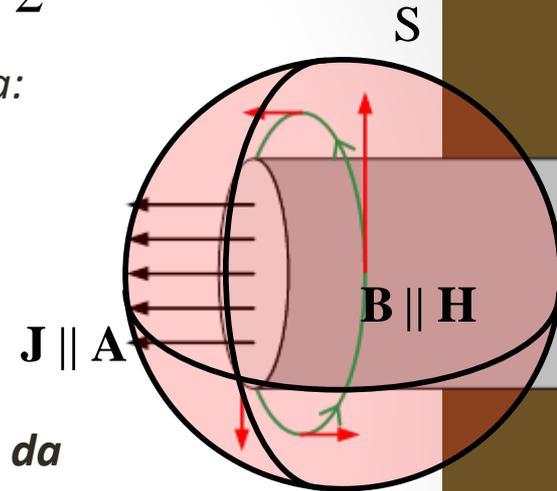
# Indutância

Definição via a energia armazenada no campo:

$$W_H = \frac{1}{2} L I^2$$

• A indutância de um sistema em termos da energia magnética:

$$L = \frac{2W_H}{I^2} = \frac{\iiint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV}{\left( \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right)^2} = \frac{\iiint_V \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV}{\left( \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right)^2}$$



A identidade vetorial a seguir, junto à Lei de Ampère e o teorema da divergência, leva a:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

$$L = \frac{\iiint_V [\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}] dV}{\left( \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right)^2} = \frac{\cancel{\oiint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}} + \iiint_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dV}{\left( \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right)^2}$$

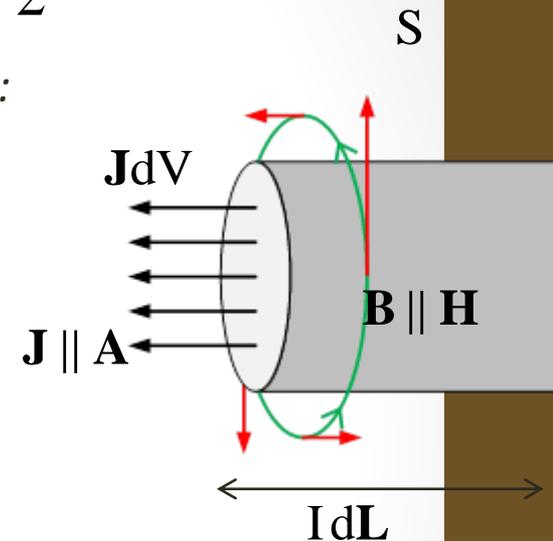
# Indutância

Definição via a energia armazenada no campo:

$$W_H = \frac{1}{2} L I^2$$

- A indutância de um sistema em termos da potencial vetorial:

$$L = \frac{\iiint_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dV}{\left( \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right)^2} = \frac{1}{I^2} \iiint_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dV$$



Como

$$\mathbf{A} = \iiint_V \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dV$$

e simplificando para um elemento filamentar  $I \cdot dL$  percorrendo um circuito fechado  $C$ :

$$\mathbf{A} = \oint_C \frac{\mu I dL}{4\pi R}$$

$$L = \frac{\iiint_V \left( \left( \iiint_V \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dV \right) \cdot \mathbf{J} \right) dV}{\left( \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right)^2} = \frac{I \oint_C \left( \oint_C \frac{\mu}{4\pi R} dL \right) I \cdot dL}{I^2}$$

# Indutância

Definição via a energia armazenada no campo:

$$W_H = \frac{1}{2} L I^2$$

• A indutância de um sistema em termos da potencial vetorial:

$$L = \oint_C \left( \oint_C \frac{\mu}{4\pi R} d\mathbf{L} \right) \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{I} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

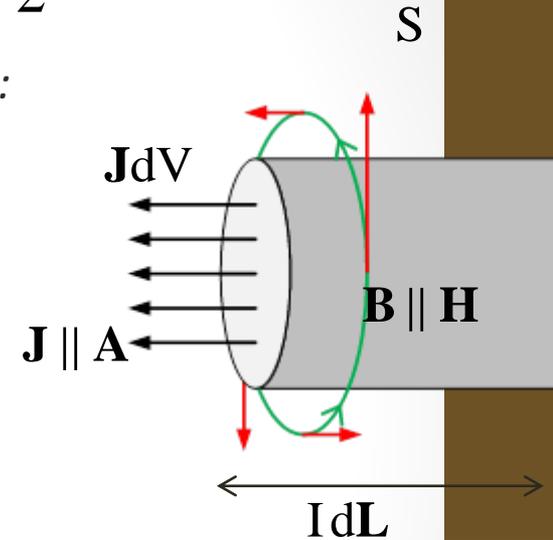
independe de I; só depende de material e geometria

Como  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \Phi = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$

e  $\mathbf{A} = \oint_C \frac{\mu I d\mathbf{L}}{4\pi R}$  (pelo Teorema de Stokes)

A indutância de um sistema em termos da fluxo magnético:

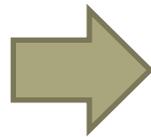
$$L = \frac{1}{I} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{I} \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{I} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Phi}{I}$$



# Indutância própria – cálculo

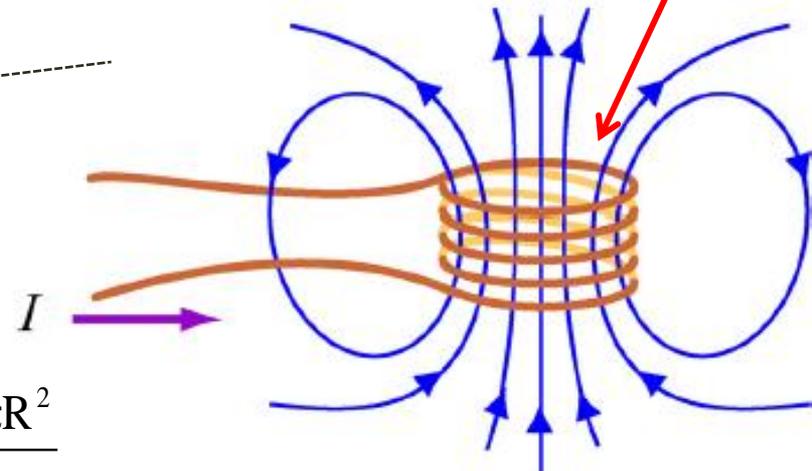
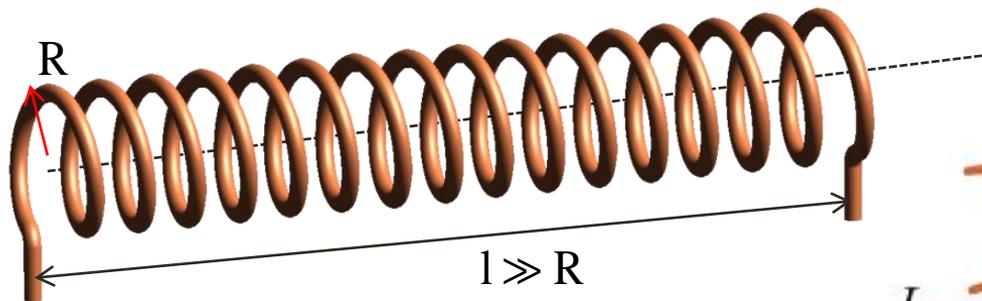
*Mais generalizadamente, pode-se definir pelo enlace de fluxo de N espiras*

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$



1. Resolve-se o circuito magnético equivalente para encontrar o fluxo  $\Phi$  produzido pelas N espiras percorridas pela corrente I
2. Calcula-se o enlace de fluxo total  $N\Phi$
3. Divide-se o enlace total pela corrente

Exemplo: calcule a indutância de um solenoide longo com núcleo de ar.



Resp.:

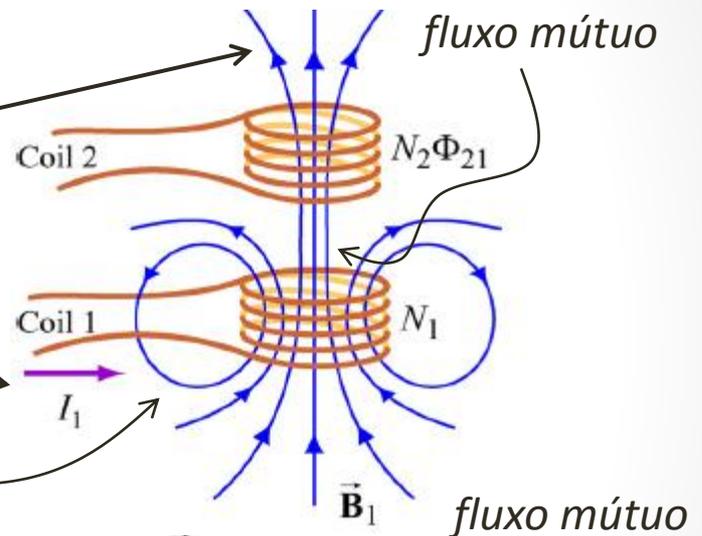
$$L = \frac{N^2 \mu_0 A}{l} = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{l}$$

# Indutância mútua – cálculo

A indutância mútua é definida como a razão entre o fluxo enlaçado em uma bobina 2 de espiras  $N_2$  devido a uma corrente  $I_1$  na bobina 1 de espiras  $N_1$  – e vice-versa:

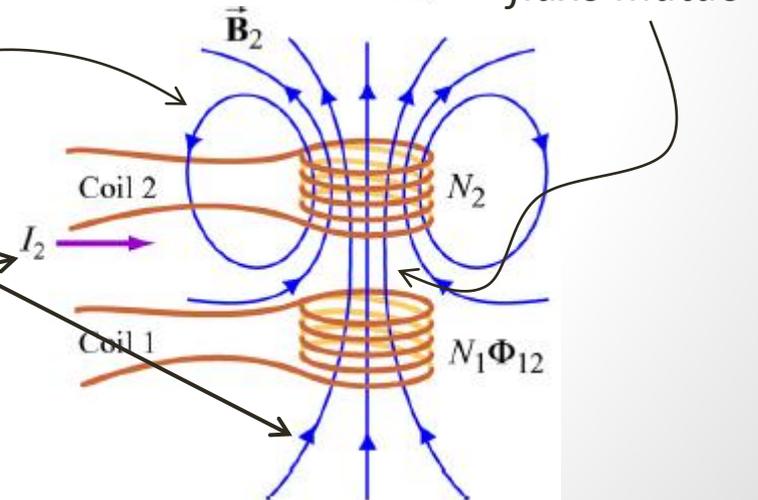
$$M_{2,1} = \frac{N_2 \Phi_{2,1}}{I_1}$$

fluxo próprio



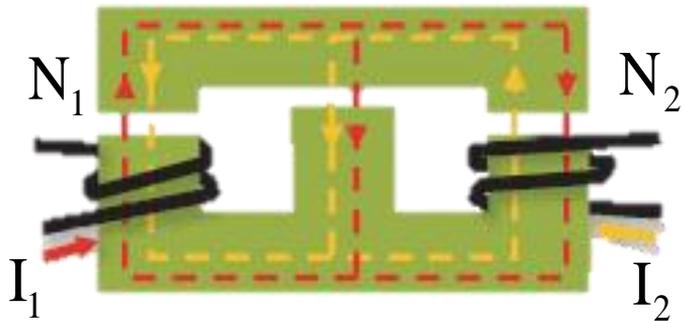
fluxo próprio

$$M_{1,2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2}$$



# Indutância mútua – cálculo

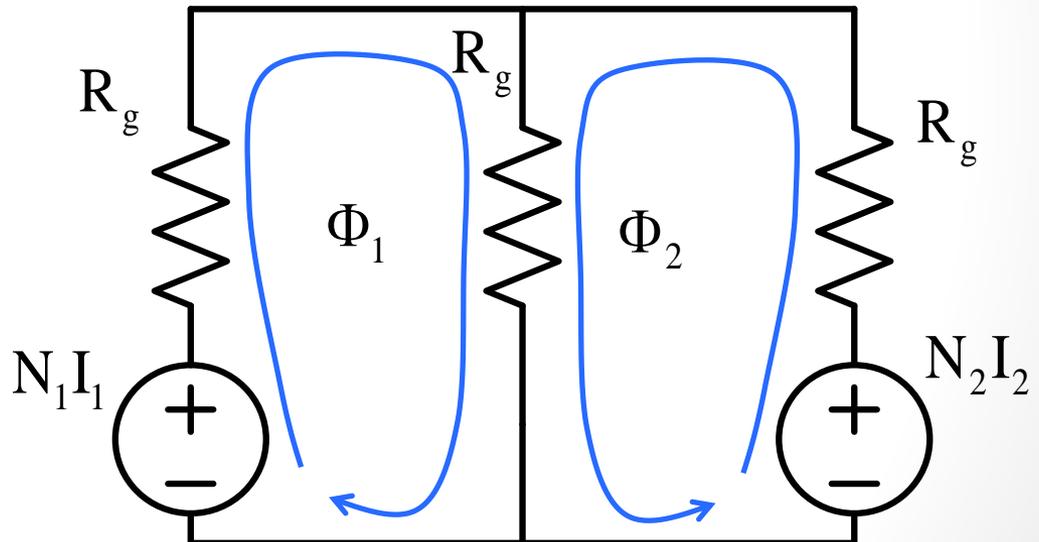
*Exemplo de cálculo – núcleo EE c/ 3 gaps idênticos ( $l_g$ ):*



$$R_{\sigma g} \cong \frac{l_{\sigma g}}{\mu_0 A_e}$$

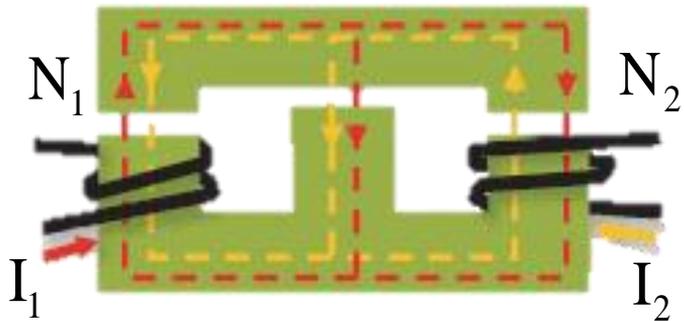
$$M_{1,2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2} \quad M_{2,1} = \frac{N_2 \Phi_{2,1}}{I_1}$$

- Circuito magnético supondo  $\mu_r \gg 1$  e  $A_f = A_e$ :



# Indutância mútua – cálculo

Exemplo de cálculo –  
núcleo EE c/ 3 gaps idênticos ( $l_g$ ):

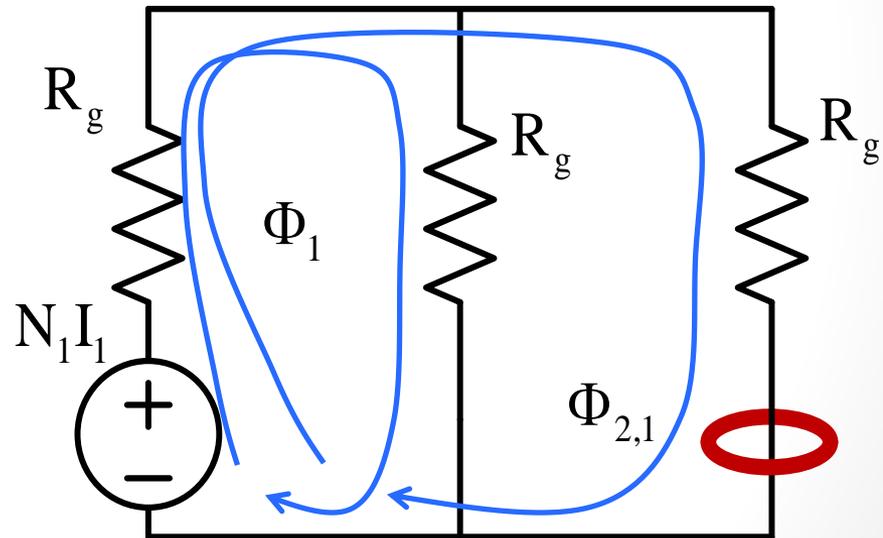


$$\Phi_1 + \Phi_{2,1} = \frac{N_1 I_1}{R_g + \frac{R_g}{2}}$$

$$\therefore \Phi_{2,1} = \frac{1}{2} \frac{N_1 I_1}{R_g + \frac{R_g}{2}} = N_1 I_1 \frac{\mu_0 A_e}{3l_g}$$

$$M_{1,2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2} \quad M_{2,1} = \frac{N_2 \Phi_{2,1}}{I_1}$$

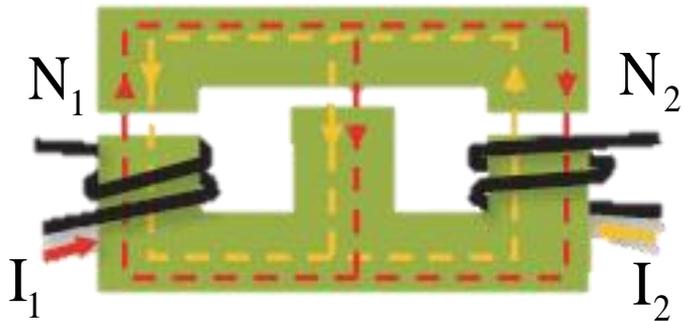
Usando superposição – parte 1



$$M_{2,1} = \frac{N_2 \Phi_{2,1}}{I_1} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_e}{3l_g}$$

# Indutância mútua – cálculo

Exemplo de cálculo –  
núcleo EE c/ 3 gaps idênticos ( $l_g$ ):

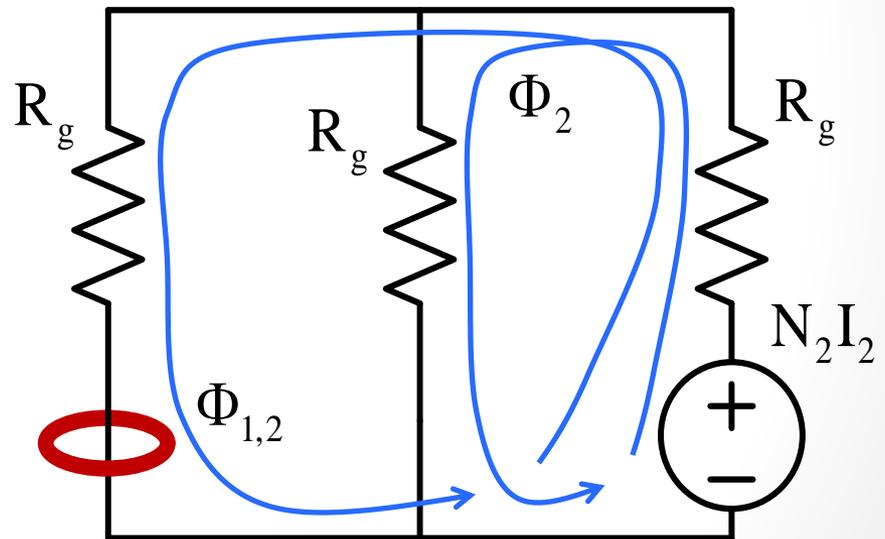


$$\Phi_{1,2} + \Phi_2 = \frac{N_2 I_2}{R_g + \frac{R_g}{2}}$$

$$\therefore \Phi_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{N_2 I_2}{R_g + \frac{R_g}{2}} = N_2 I_2 \frac{\mu_0 A_e}{3l_g}$$

$$M_{1,2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2} \quad M_{2,1} = \frac{N_2 \Phi_{2,1}}{I_1}$$

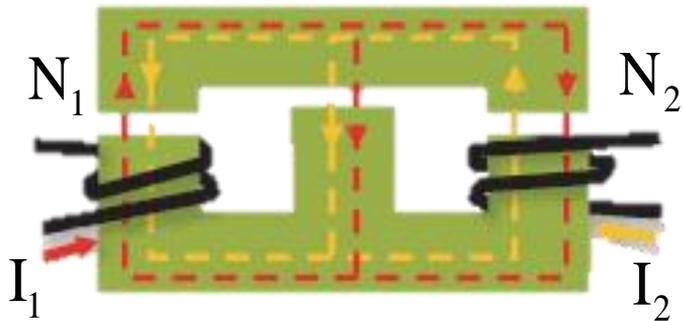
Usando superposição – parte 2



$$M_{1,2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_e}{3l_g}$$

# Indutância mútua – cálculo

Exemplo de cálculo –  
núcleo EE c/ 3 gaps idênticos ( $l_g$ ):



Pode-se calcular as **indutâncias próprias  $L_1$  e  $L_2$**  pelos resultados anteriores:

$$M_{1,2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2} \quad M_{2,1} = \frac{N_2 \Phi_{2,1}}{I_1}$$

Resultados:

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{1,2} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_e}{3 l_g} \\ M_{2,1} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_e}{3 l_g} \end{array} \right.$$

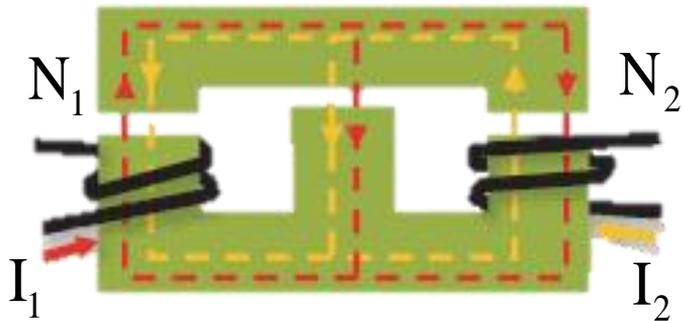
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 + \Phi_{2,1} = \frac{2 \mu_0 A_e}{3 l_g} N_1 I_1 \\ \Phi_2 + \Phi_{1,2} = \frac{2 \mu_0 A_e}{3 l_g} N_2 I_2 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{N_1}{I_1} (\Phi_1 + \Phi_{2,1}) = \frac{2 \mu_0 A_e}{3 l_g} N_1^2 \\ L_2 = \frac{N_2}{I_2} (\Phi_2 + \Phi_{1,2}) = \frac{2 \mu_0 A_e}{3 l_g} N_2^2 \end{array} \right.$$

# Indutância mútua – cálculo

Exemplo de cálculo –  
núcleo EE c/ 3 gaps idênticos ( $l_g$ ):



Pode-se calcular as **indutâncias próprias  $L_1$  e  $L_2$**  pelos resultados anteriores:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 A_e}{l_g} N_1^2 \\ L_2 = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 A_e}{l_g} N_2^2 \end{cases}$$



$$\sqrt{L_1 L_2} = 2 \left[ N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_e}{3 l_g} \right]$$

*coeficiente de acoplamento = número de linhas de fluxo acopladas entre  $N_1$  e  $N_2$*

$$k \sqrt{L_1 L_2} = M \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$M_{1,2} = \frac{N_1 \Phi_{1,2}}{I_2} \quad M_{2,1} = \frac{N_2 \Phi_{2,1}}{I_1}$$

Resultados:

$$M_{1,2} = M_{2,1} = M$$

$$\begin{cases} M_{1,2} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_e}{3 l_g} \\ M_{2,1} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_e}{3 l_g} \end{cases}$$

# Força Magnética

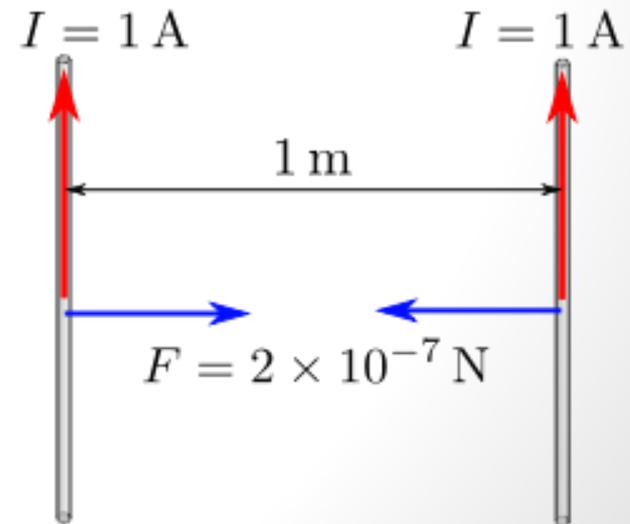
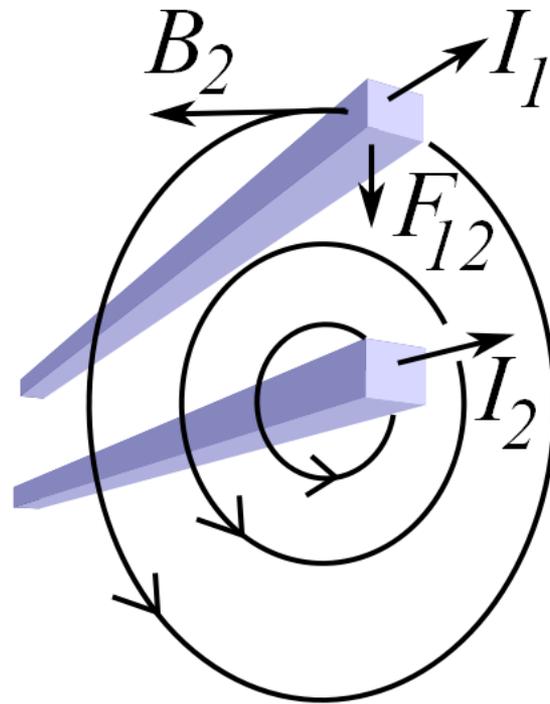
Lei de Ampère da força:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}$$

Definição do ampère:

**“1 A é a corrente necessária em dois condutores paralelos distantes em 1 m um do outro para produzir uma força de atração por unidade de comprimento de  $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$  entre eles.”**

\* base da definição do coulomb:  
 $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$



# Força Magnética

Força em um elemento diferencial de corrente

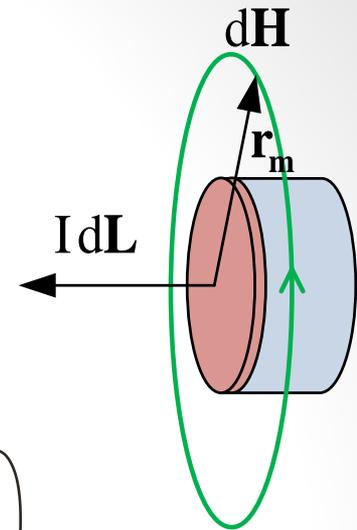
Da Lei de Ampère da força:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r}$$

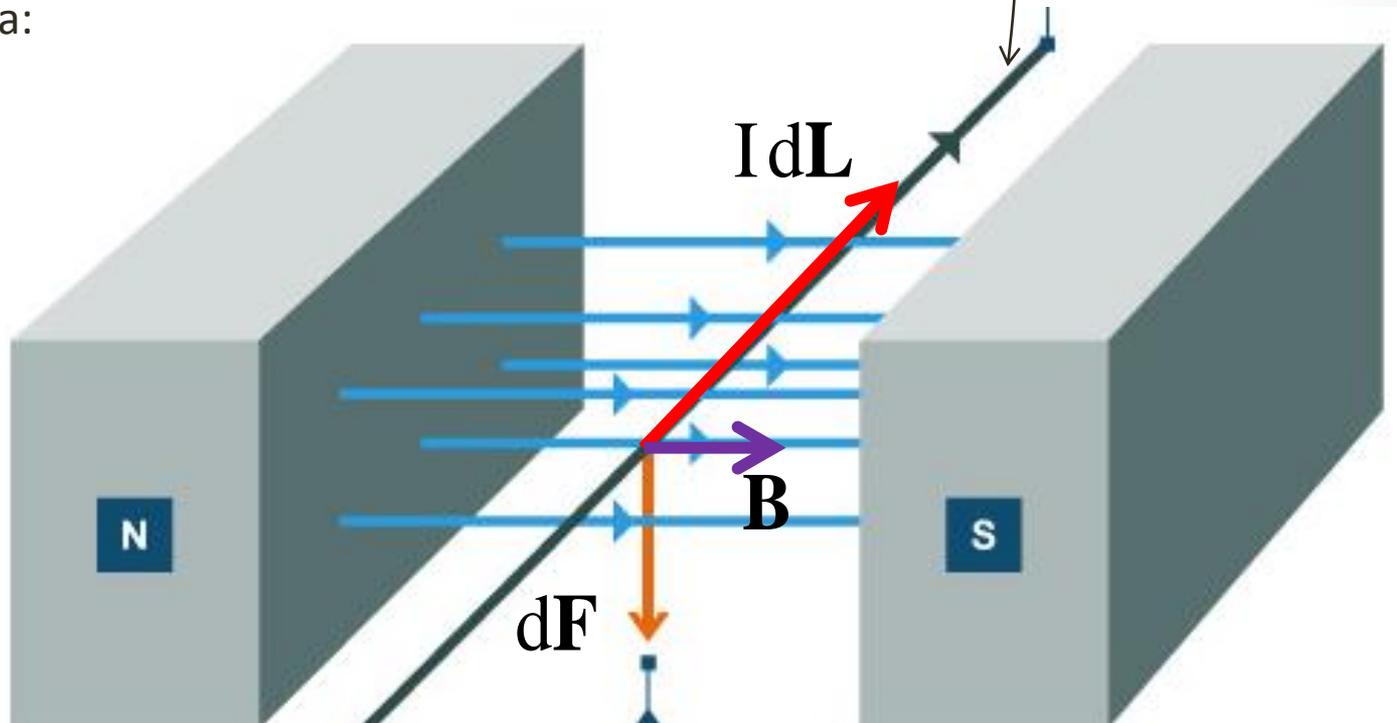
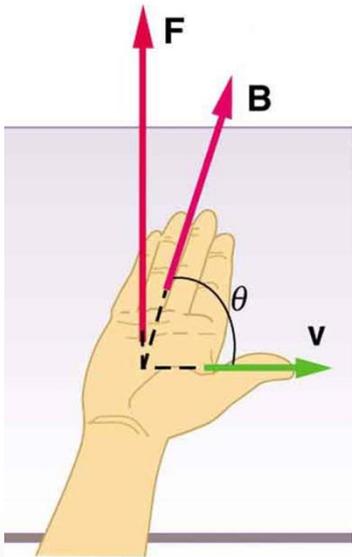


$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

condutor



Regra da mão direita:



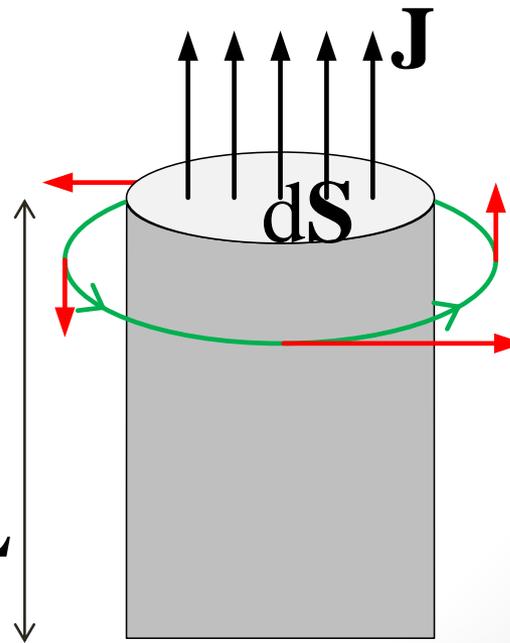
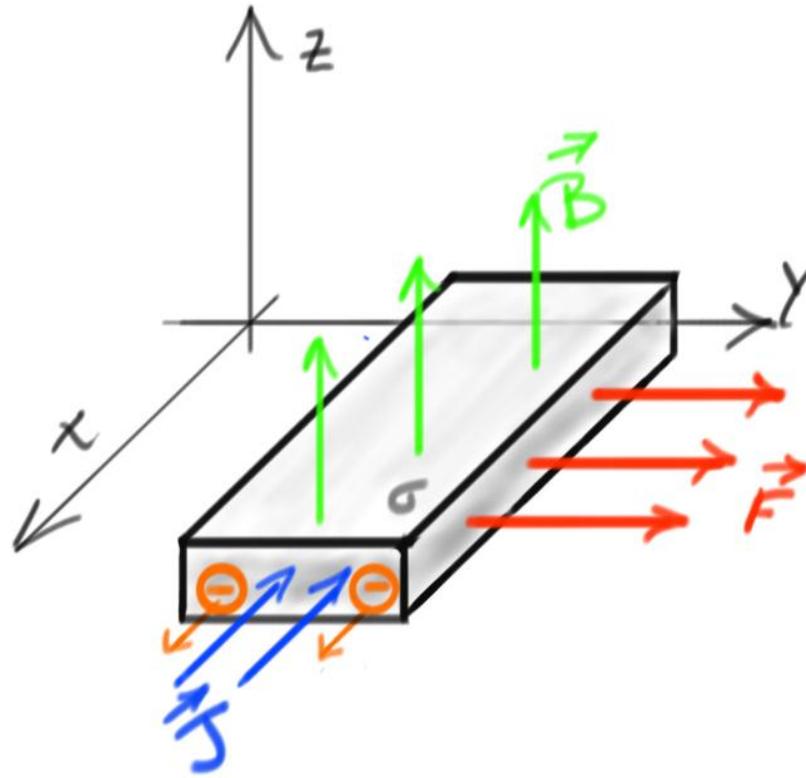
# Força Magnética

Generalização para qualquer densidade de corrente

$$I d\mathbf{L} = \mathbf{J} dV$$



$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} dV \times \mathbf{B}$$

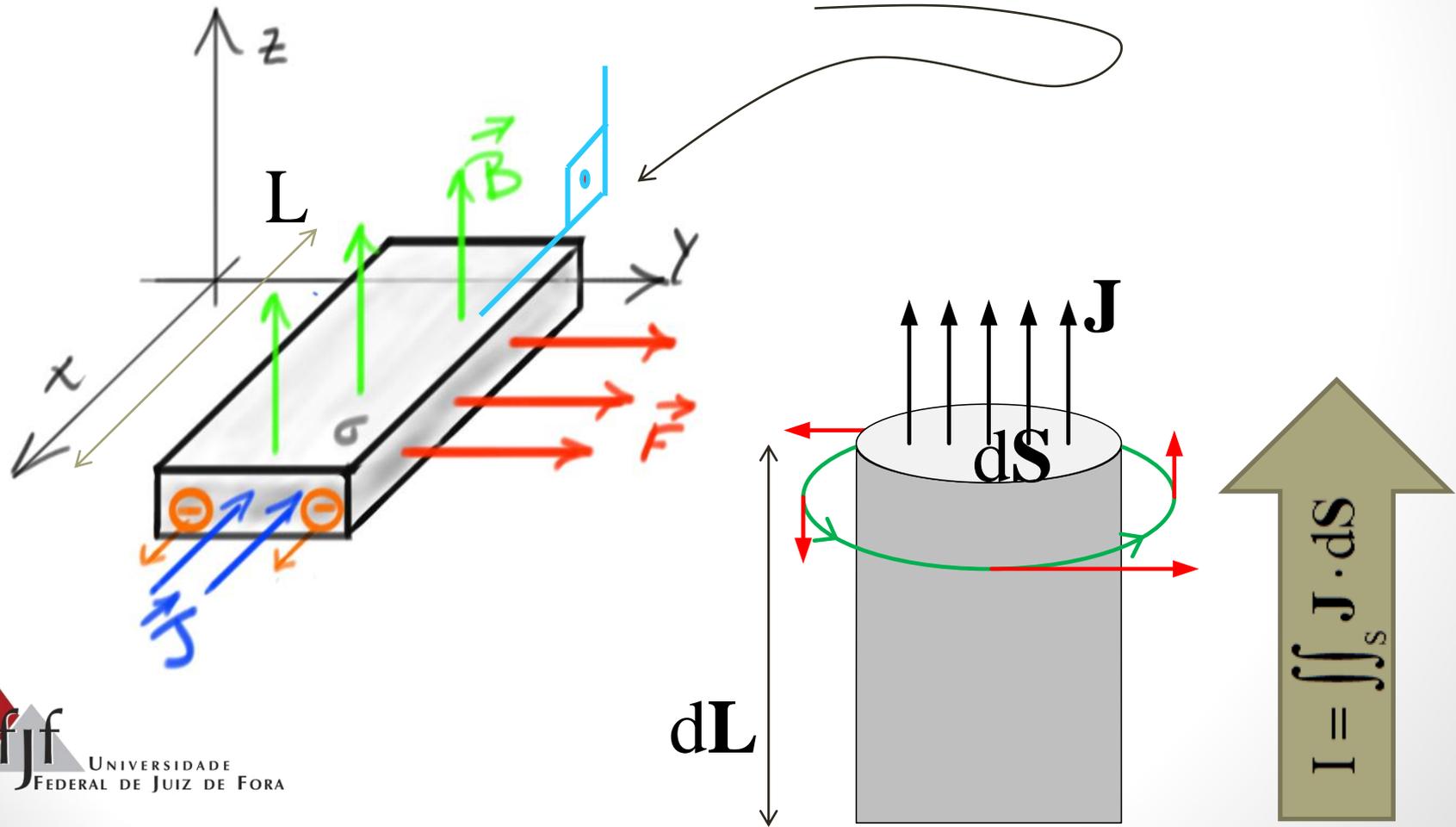


$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

# Força Magnética

Se o campo magnético é uniforme no espaço:

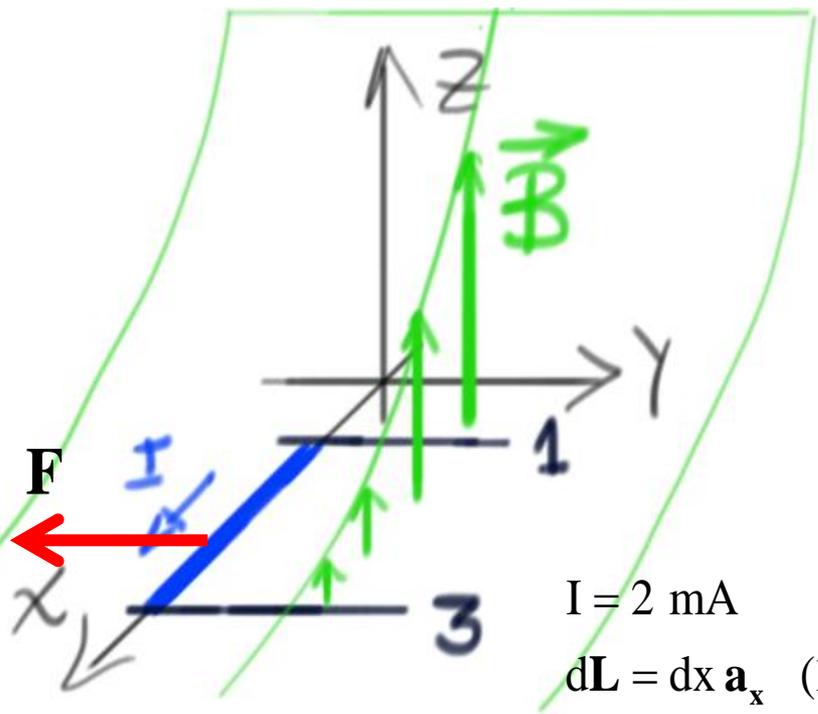
$$\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) \Rightarrow F = BIL \sin \theta$$



# Força Magnética

Se o campo magnético não é uniforme no espaço:

$$\mathbf{F} = \iiint_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} \, dV = -I \int_C \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$



$$\mathbf{F} = -I \int_C \mathbf{B} \times d\mathbf{L} =$$

$$= -(2 \times 10^{-3}) (3 \times 10^{-6}) \int_1^3 \frac{\mathbf{a}_z}{x} \times \mathbf{a}_x \, dx$$

$$\therefore \mathbf{F} = -6 \times 10^{-9} \left[ (\ln 3 - \ln 1) \mathbf{a}_y \right] \text{ N}$$

$$\cong -6,6 \mathbf{a}_y \text{ pN}$$

Força líquida

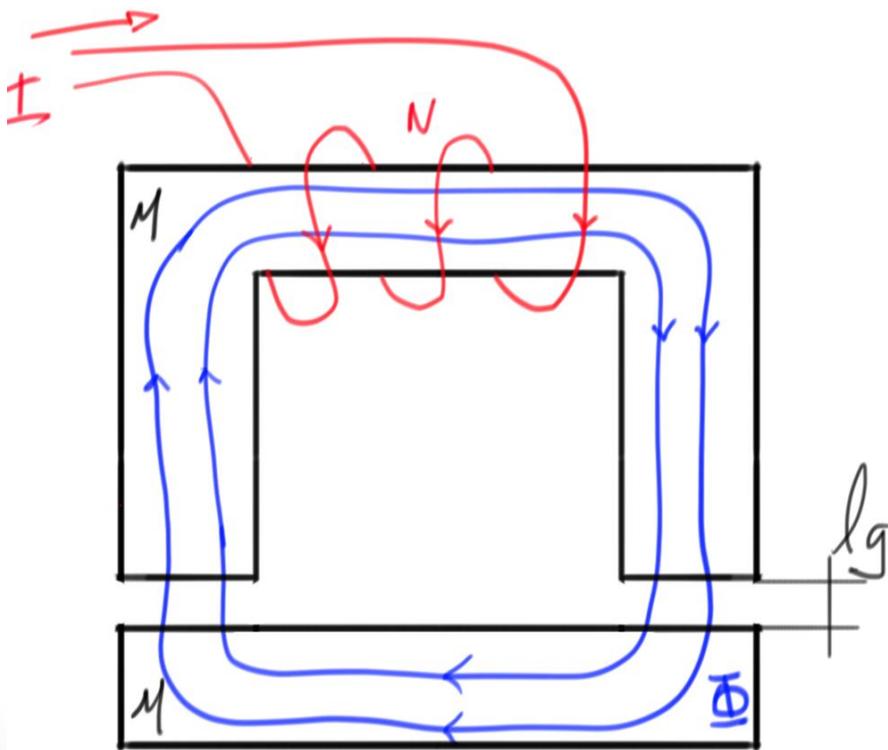
$$I = 2 \text{ mA}$$

$$d\mathbf{L} = dx \mathbf{a}_x \quad (1 \leq x \leq 3)$$

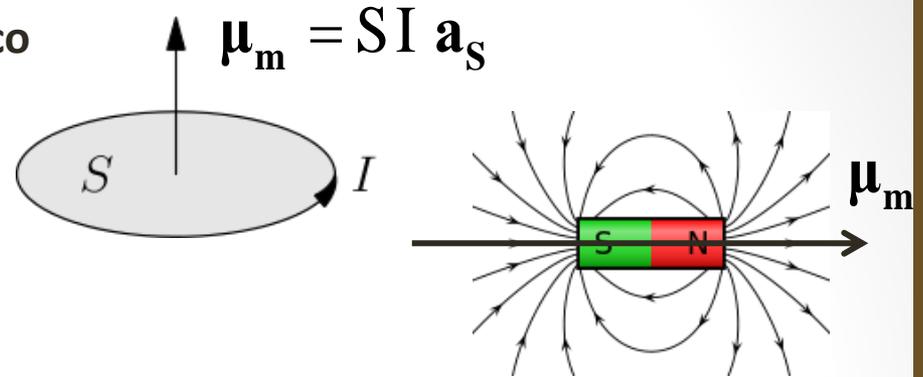
$$\mathbf{B} = \frac{3 \times 10^{-6}}{x} \mathbf{a}_z \text{ T}$$

# Força Magnética

Força exercida em um circuito magnético sobre um material ferromagnético



Momento magnético (dipolo):



Potencial escalar magnético em um campo:

$$U_m = -\boldsymbol{\mu}_m \cdot \mathbf{B}$$

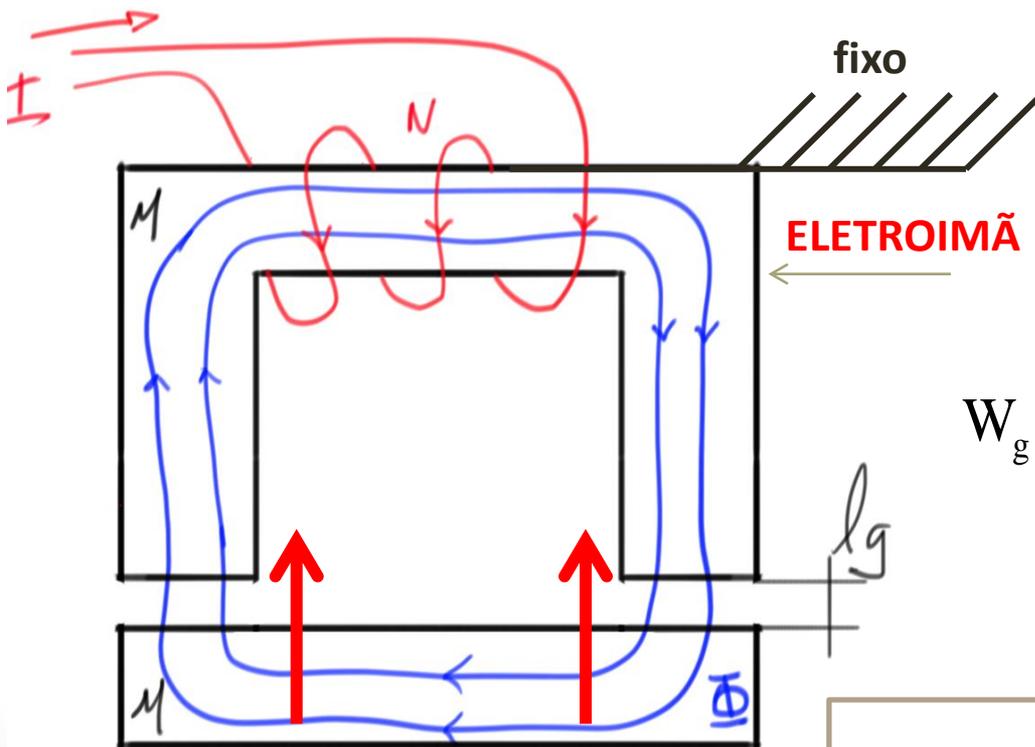
Força é o gradiente da energia potencial escalar de um campo:

$$\mathbf{F} \triangleq -\nabla U_m \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{dW_H}{dx} \\ F_y = -\frac{dW_H}{dy} \\ F_z = -\frac{dW_H}{dz} \end{cases}$$

pois 
$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{F} = 0 \\ \nabla \times (-\nabla U_m) = 0 \end{cases}$$

# Força Magnética

Força exercida em um circuito magnético sobre um material ferromagnético



$$W_H = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{B^2}{\mu} dV$$

$$R_{\text{total}} \cong \frac{2l_g}{\mu_0 A_e} \Rightarrow B_g = \frac{NI\mu_0}{2l_g}$$

$$W_g = \frac{1}{2} \frac{B_g^2}{\mu_0} [A_e l_g] = \frac{N^2 I^2 \mu_0 A_e}{8l_g}$$

(em cada gap)

$$F_g = -\frac{dW_g}{dl_g}$$

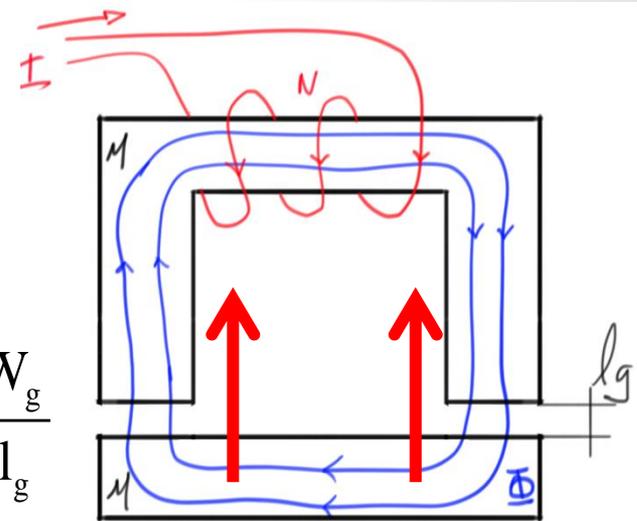
$$F_g = -\frac{d}{dl_g} \left[ \frac{N^2 I^2 \mu_0 A_e}{8l_g} \right] = \frac{N^2 I^2 \mu_0 A_e}{8l_g^2}$$

# Força Magnética

Força exercida em um circuito magnético sobre um material ferromagnético

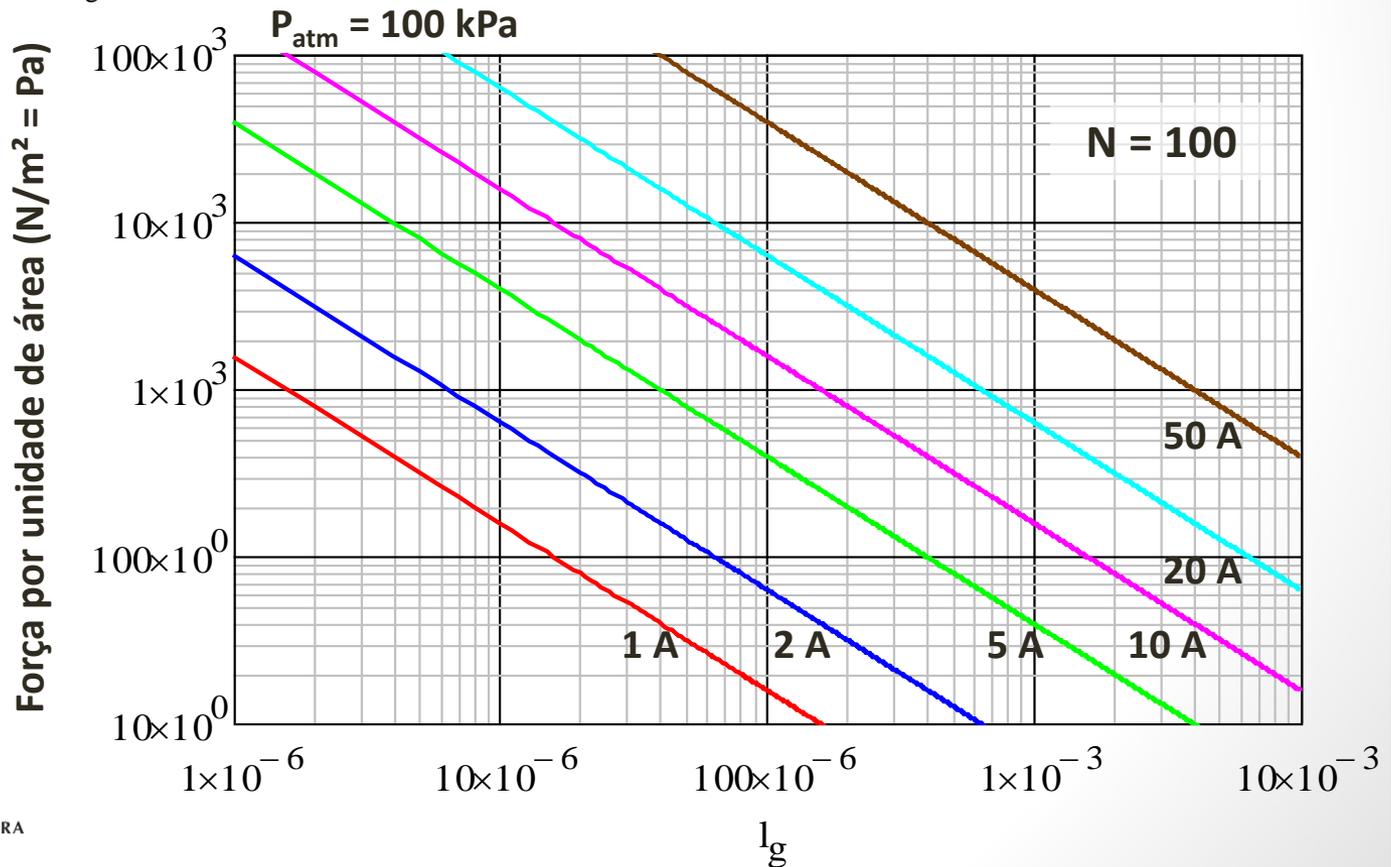
$$F_g = \frac{N^2 I^2 \mu_0 A_e}{8 l_g^2}$$

$$F_g = - \frac{dW_g}{dl_g}$$



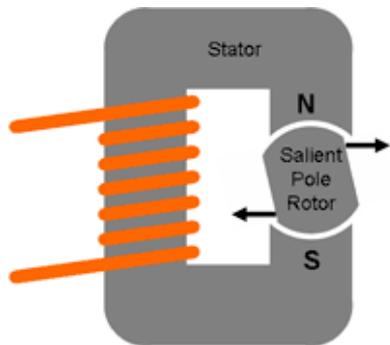
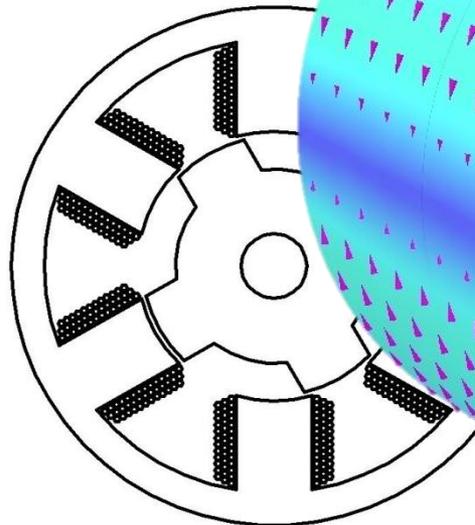
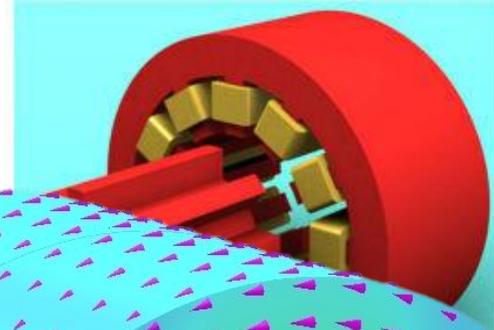
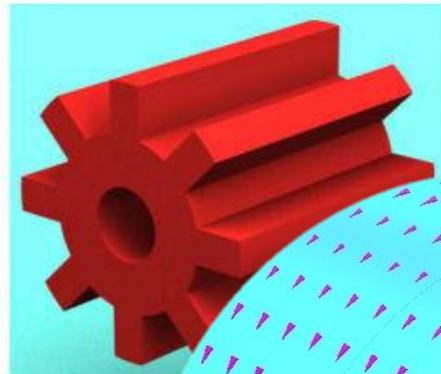
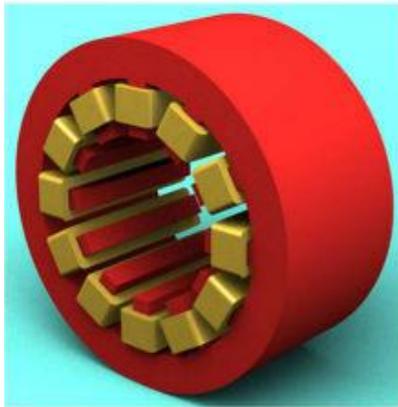
“Pressão magnética”

$$P_m = \frac{B^2}{2\mu}$$



# Força Magnética

Aplicação: motor de relutância comutada



Variable Reluctance Motor

# Materiais Ferromagnéticos

A origem dos efeitos magnéticos observados em alguns tipos de materiais tem origens em diversas escalas da matéria:

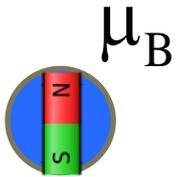
1. Partículas ( $e^-$  &  $-\mu_B$ )
2. Átomos (distribuição eletrônica)
3. Moléculas (coleção de átomos)
4. Grãos da estrutura cristalina (domínios)

quântico

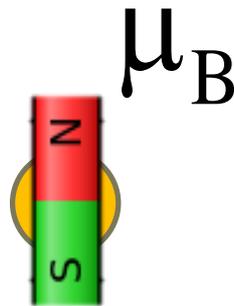
microscópico

macroscópico

Partículas e átomos:



próton



elétron

**FERROMAGNETISMO**

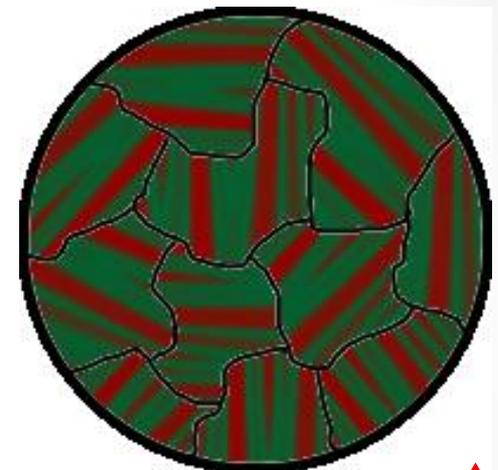
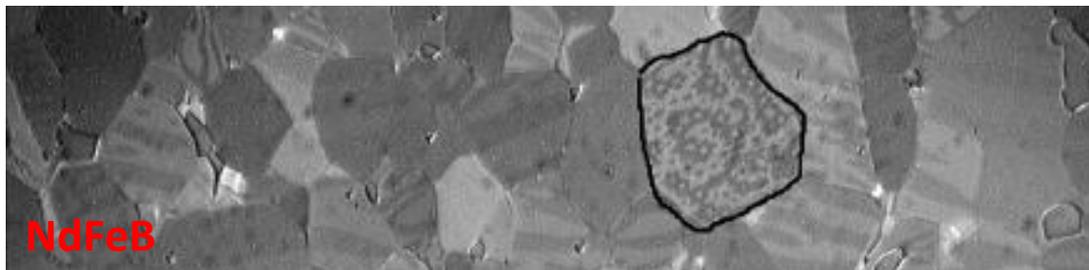
*momento de dipolo magnético intrínseco da partícula subatômica  
→ spin & carga elétrica*



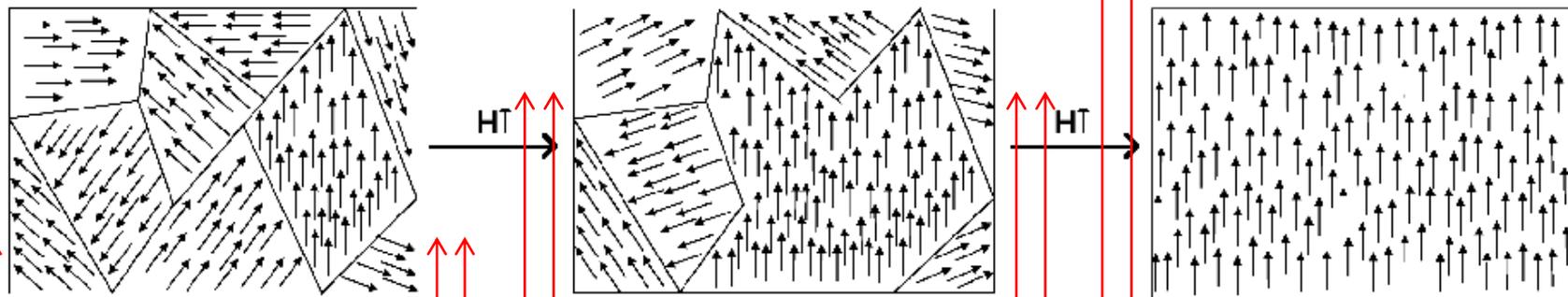
# Materiais Ferromagnéticos

No entanto somente materiais nos quais os cristais tem a organização correta e com estes átomos “magnéticos” → alinhamento ferromagnético.

Além disto, há a formação de domínios magnéticos:



**magnetização = alinhamento**



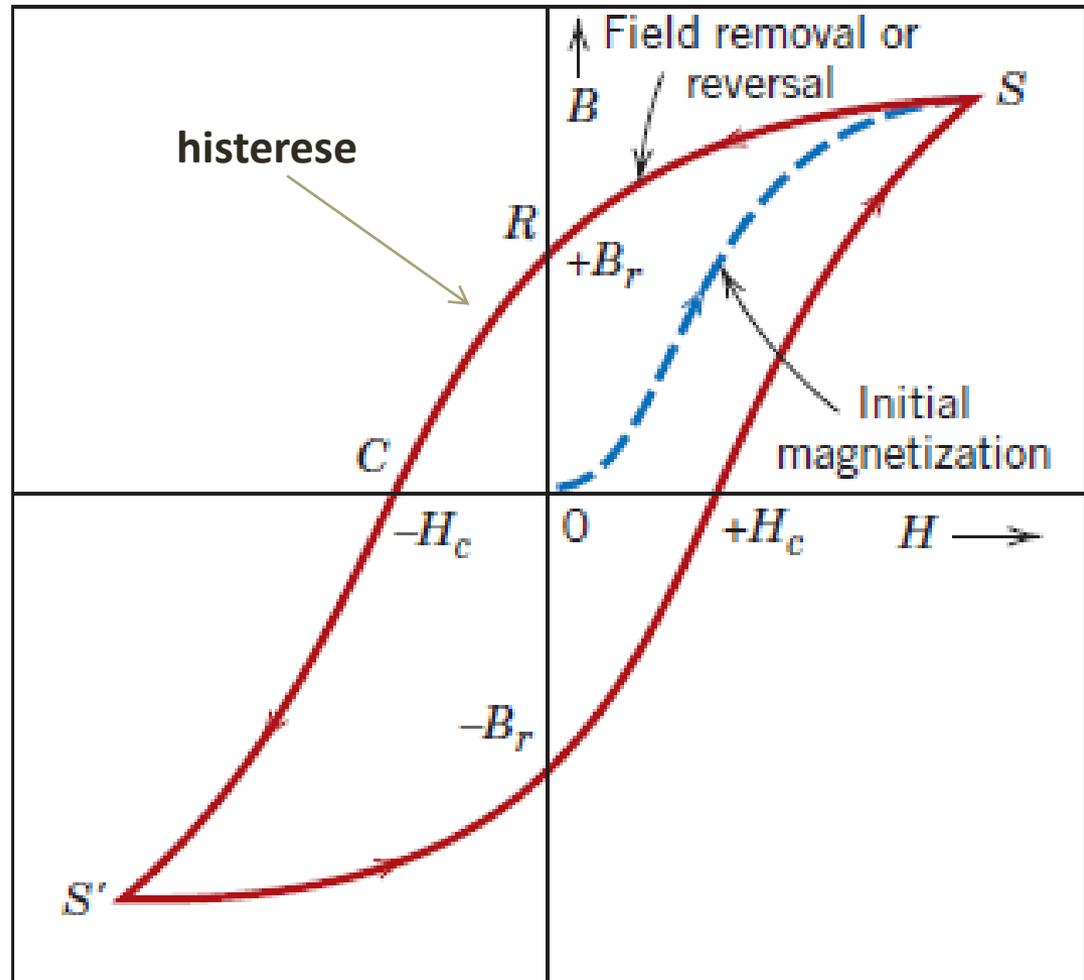
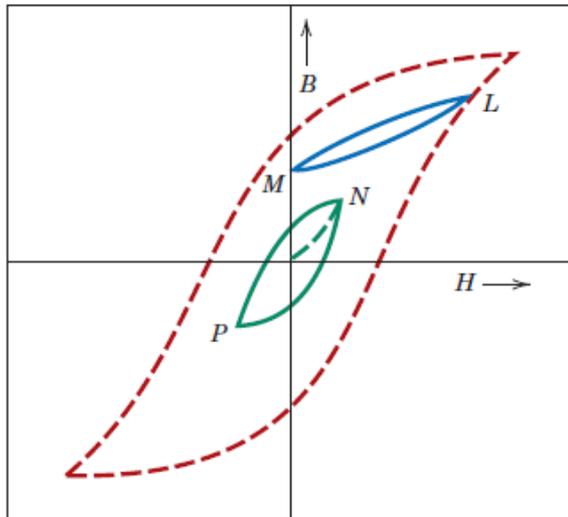
**SATURAÇÃO**



# Materiais Ferromagnéticos

Saturação magnética,  
histerese,  
coercividade e  
remanescência

histerese



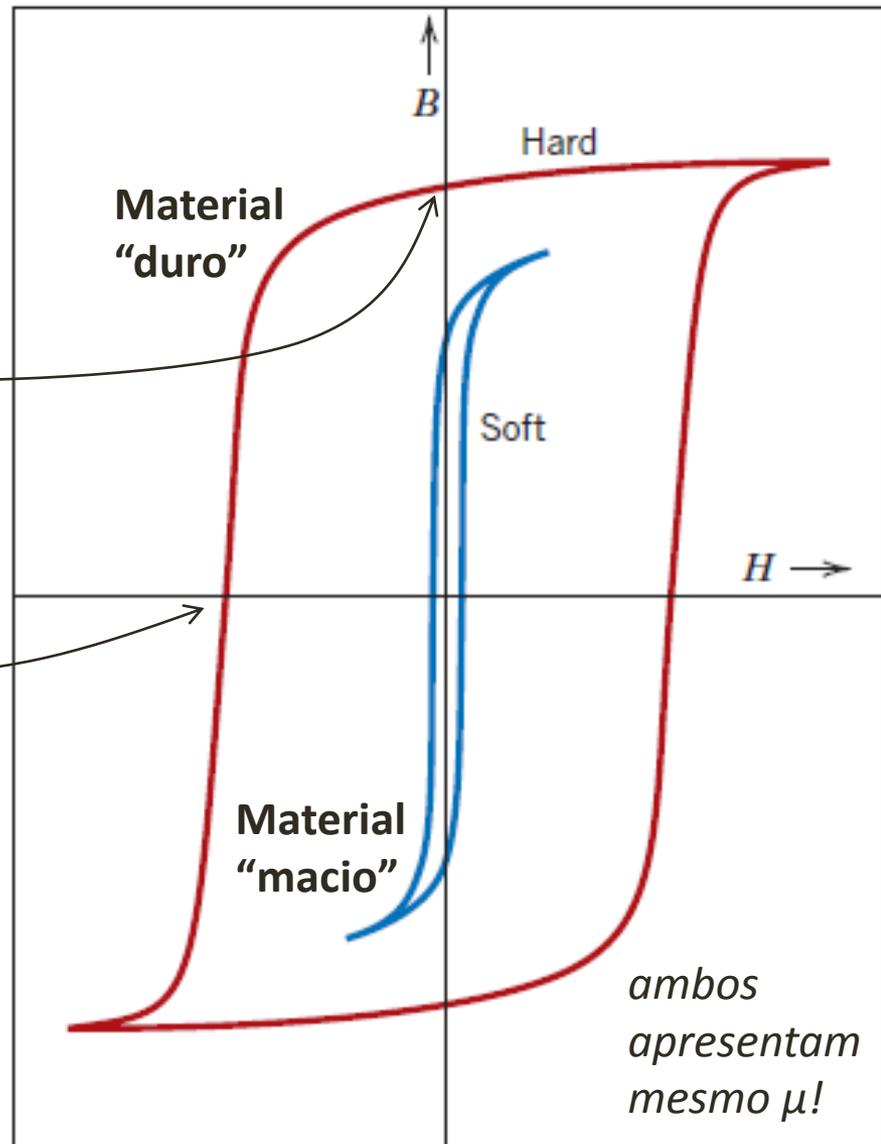
# Materiais Ferromagnéticos

Saturação magnética,  
histerese,  
coercividade e  
remanescência

Fluxo remanescente -  $B_r$  (T)

Coercividade -  $H_c$  (A/m)

Coercividade → fmm de desmagnetização  
Fluxo remanescente → aprox. saturação

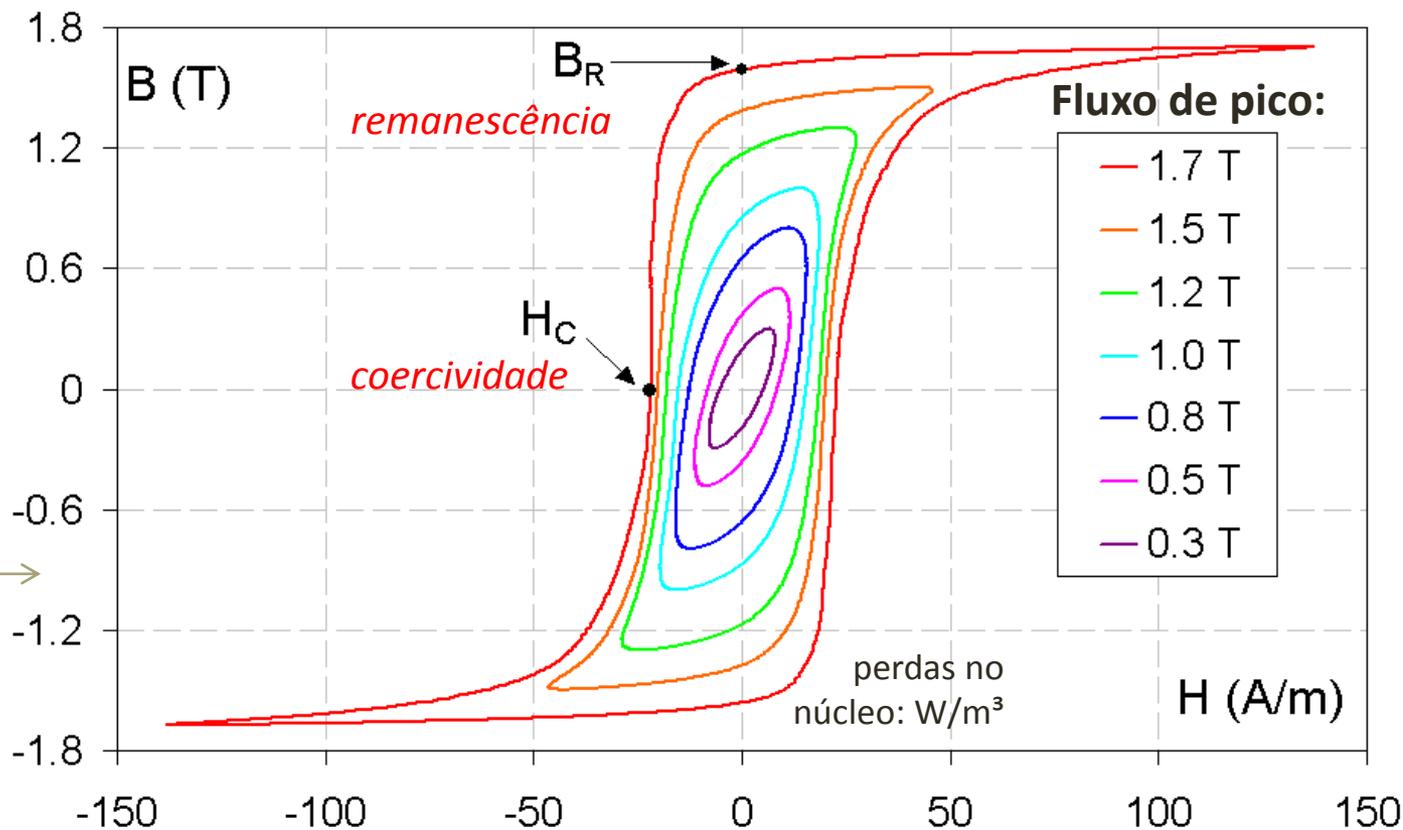


# Materiais Ferromagnéticos

Saturação magnética,  
histerese,  
coercividade e  
remanescência

A área do laço de histerese (e portanto as perdas por histerese) aumentam com o grau de magnetização do núcleo:

Núcleo de Fe-Si c/  
fluxo B modulado  
senoidalmente  
em 50 Hz



# Materiais Ferromagnéticos

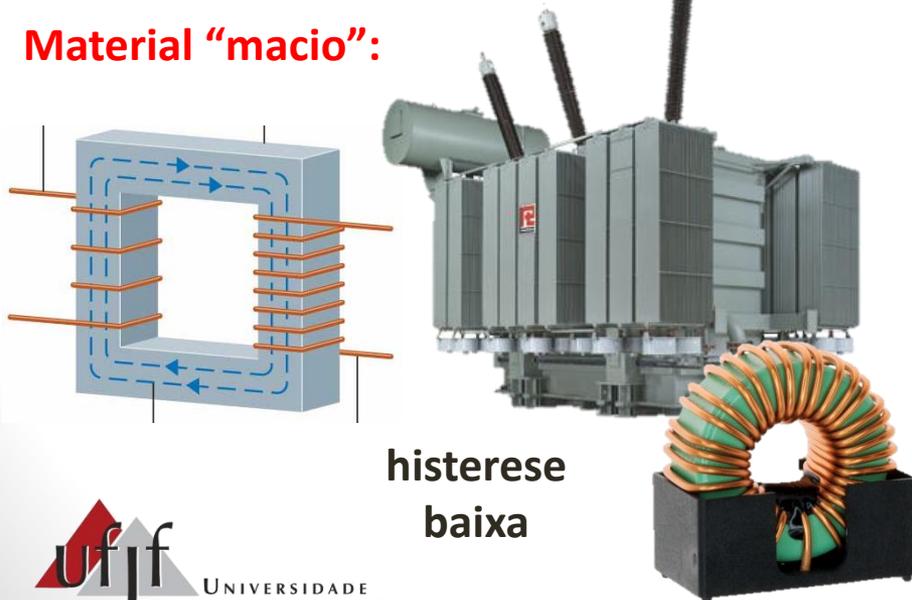
Saturação magnética, histerese, coercividade e remanescência

**Material “duro”:**



alto  $B_r$  e  $H_c$

**Material “macio”:**



histerese  
baixa

