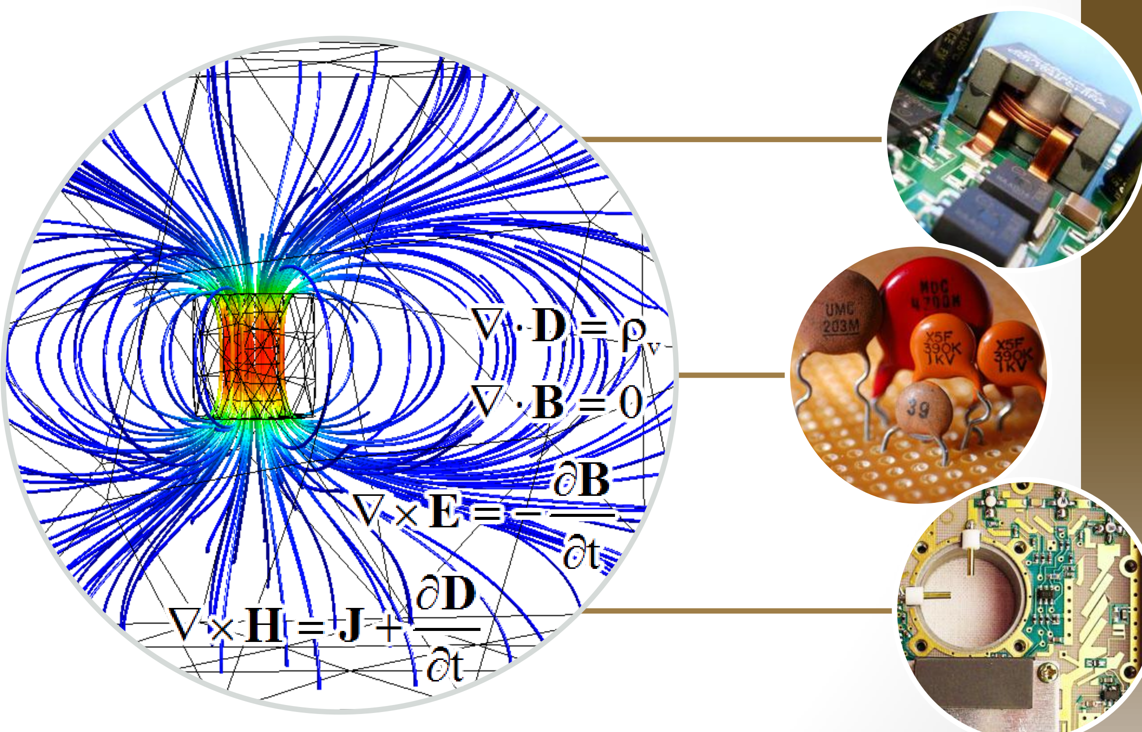
ELETROMAGNETISMO

CEL065



Prof. Pedro S. Almeida
pedro.almeida@ufjf.edu.br

Universidade Federal de Juiz de Fora

Revisão
de
Cálculo Vetorial

Universidade Federal de Juiz de Fora

Conteúdo

- Equação

Operadores Diferenciais

Operador **gradiente** (símbolo: *nabla*) sobre um campo escalar ψ → retorna um campo vetorial:

Retangular →

$$\nabla\psi(x,y,z) = \overrightarrow{\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right]} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{a_x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{a_y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{a_z}$$

Polar →

$$\nabla\psi(\rho,\phi,z) = \overrightarrow{\left[\frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right]} = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{a_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{a_z}$$

Esférico →

$$\nabla\psi(r,\theta,\phi) = \overrightarrow{\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right]} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{a_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi$$

Operador **Laplaciano** (símbolo: *nabla-dois*) sobre um campo escalar ψ → retorna um campo escalar:

Retangular →

$$\nabla^2\psi(x,y,z) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Polar →

$$\nabla^2\psi(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Esférico →

$$\nabla^2\psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

Operadores Diferenciais

Operador **divergente** (símbolo: *nabla-ponto*) sobre um campo vetorial **A** → retorna um campo escalar:

Retangular →
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Polar →
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Esférico →
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial(A_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Operador **rotacional** (símbolo: *nabla-xis*) sobre um campo vetorial **A** → retorna um campo vetorial:

Retangular →
$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{a_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

Polar →
$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\mathbf{a}_z$$

Esférico →
$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial(A_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{a}_\phi$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Operadores Diferenciais

Significado gráfico em R^2

contornos do campo escalar

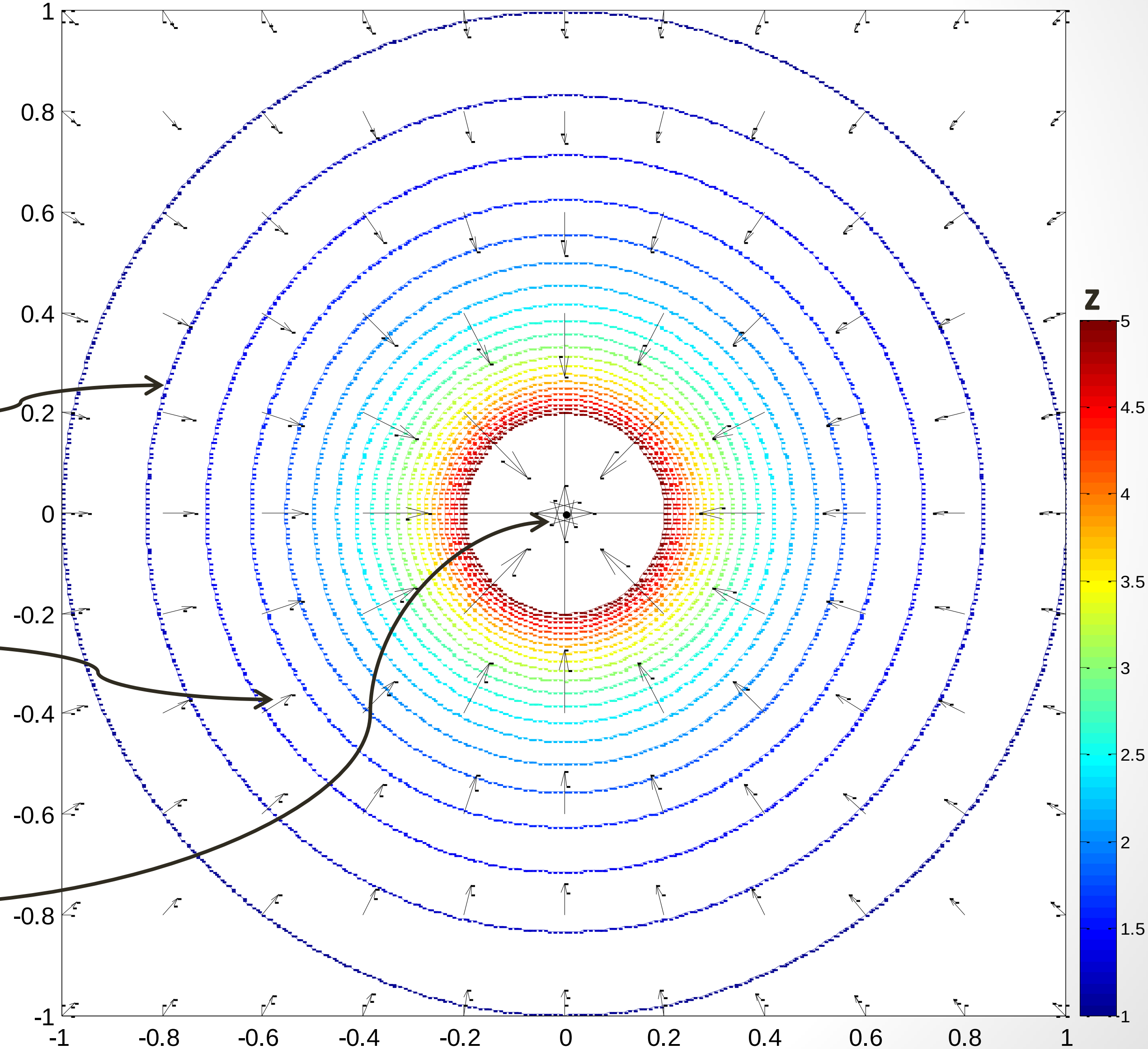
$$z = \psi(x, y)$$

campo vetorial

$$\mathbf{A} = \nabla\psi(x, y)$$

divergente neste ponto (“sink”)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Operadores Diferenciais

Significado gráfico em R^2

contornos do campo escalar

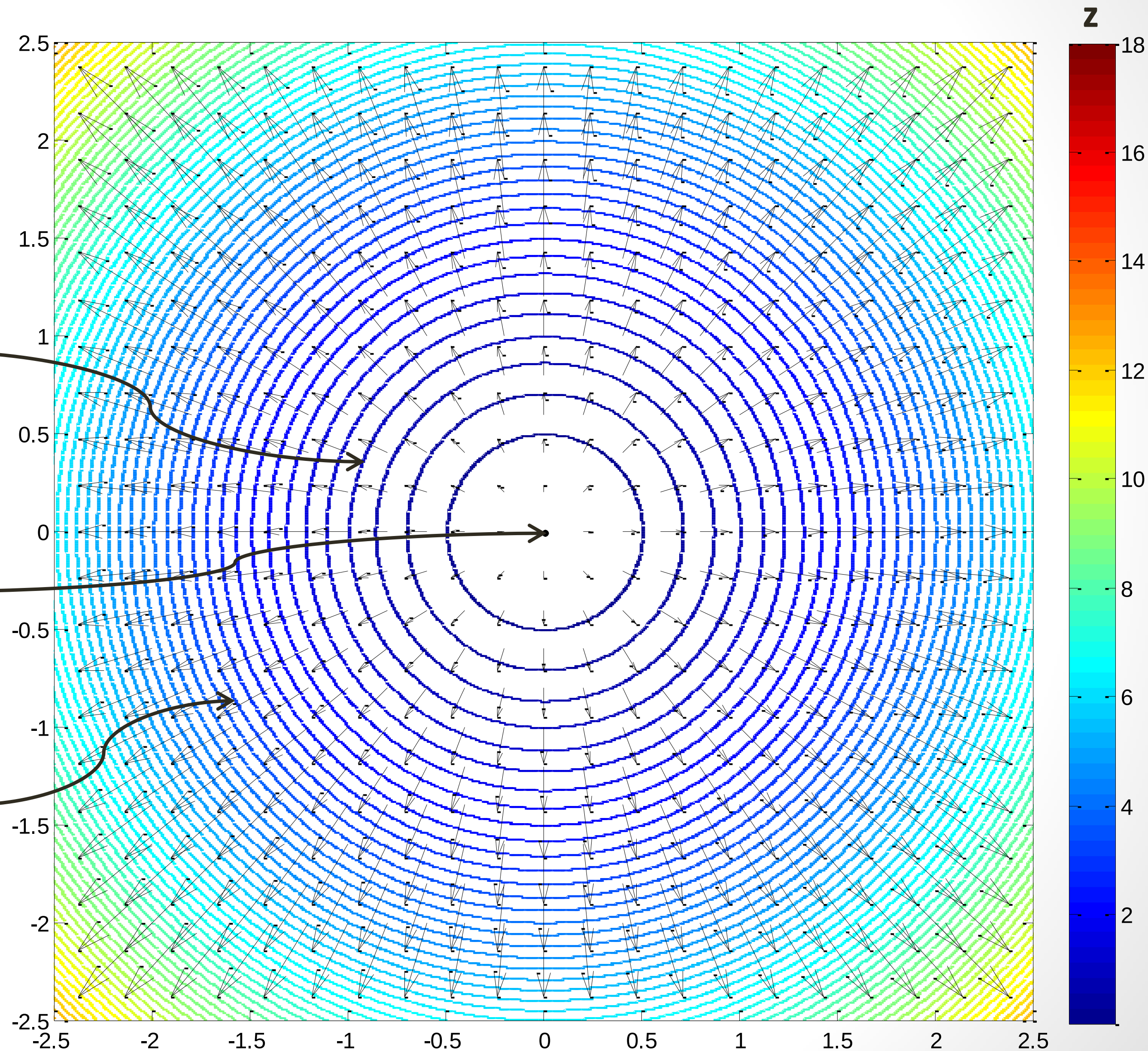
$$z = \phi(x, y)$$

divergente neste ponto ("source")

$$\nabla \cdot \mathbf{B} > 0$$

campo vetorial

$$\mathbf{B} = \nabla \phi(x, y)$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Operadores Diferenciais

Significado gráfico em R^2

mesmo campo escalar

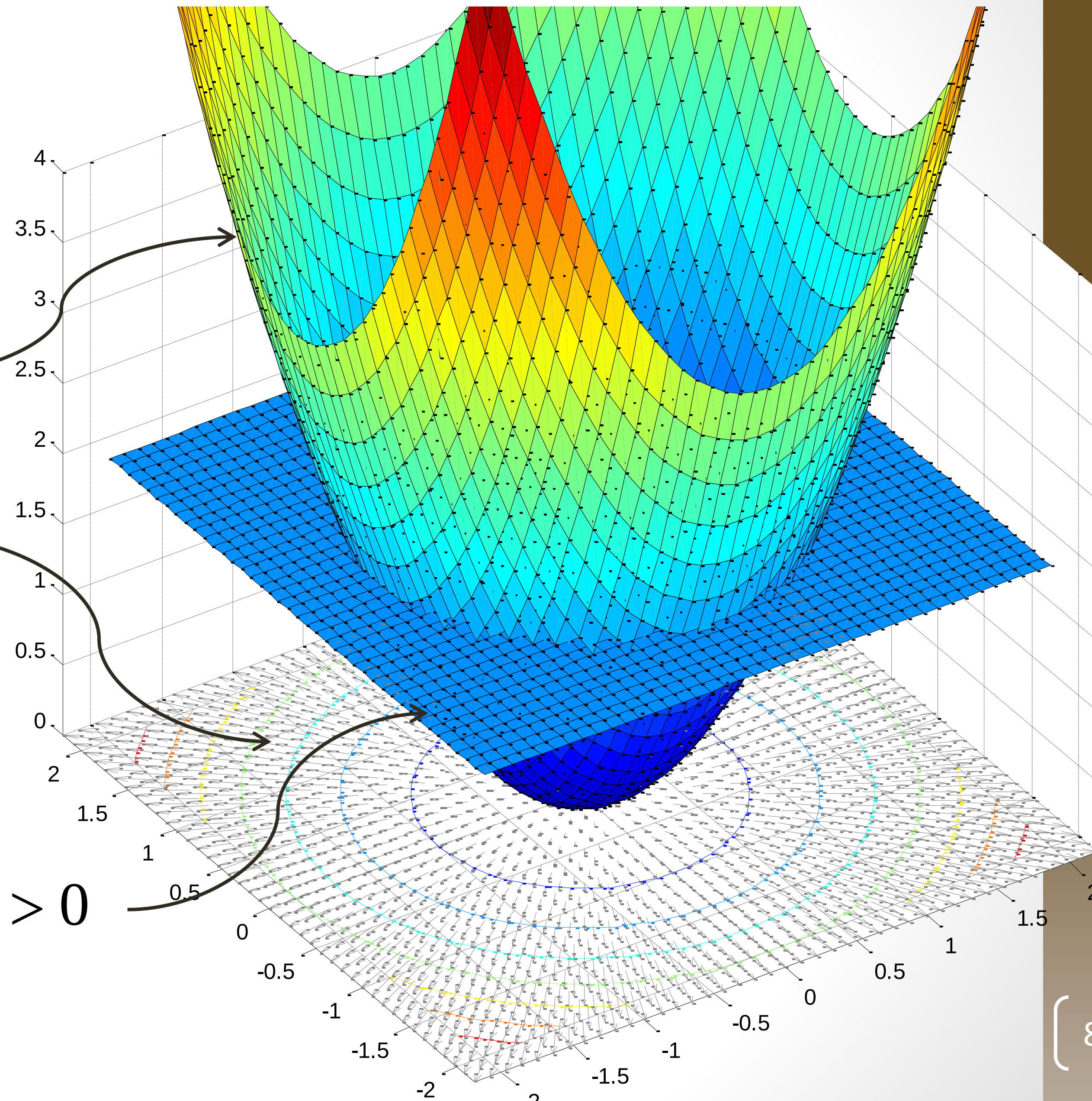
$$z = \phi(x, y)$$

campo gradiente associado

$$\mathbf{B} = \nabla\phi(x, y)$$

divergência e laplaciano (escalares)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi > 0$$



Universidade Federal de Juiz de Fora

Operadores Diferenciais

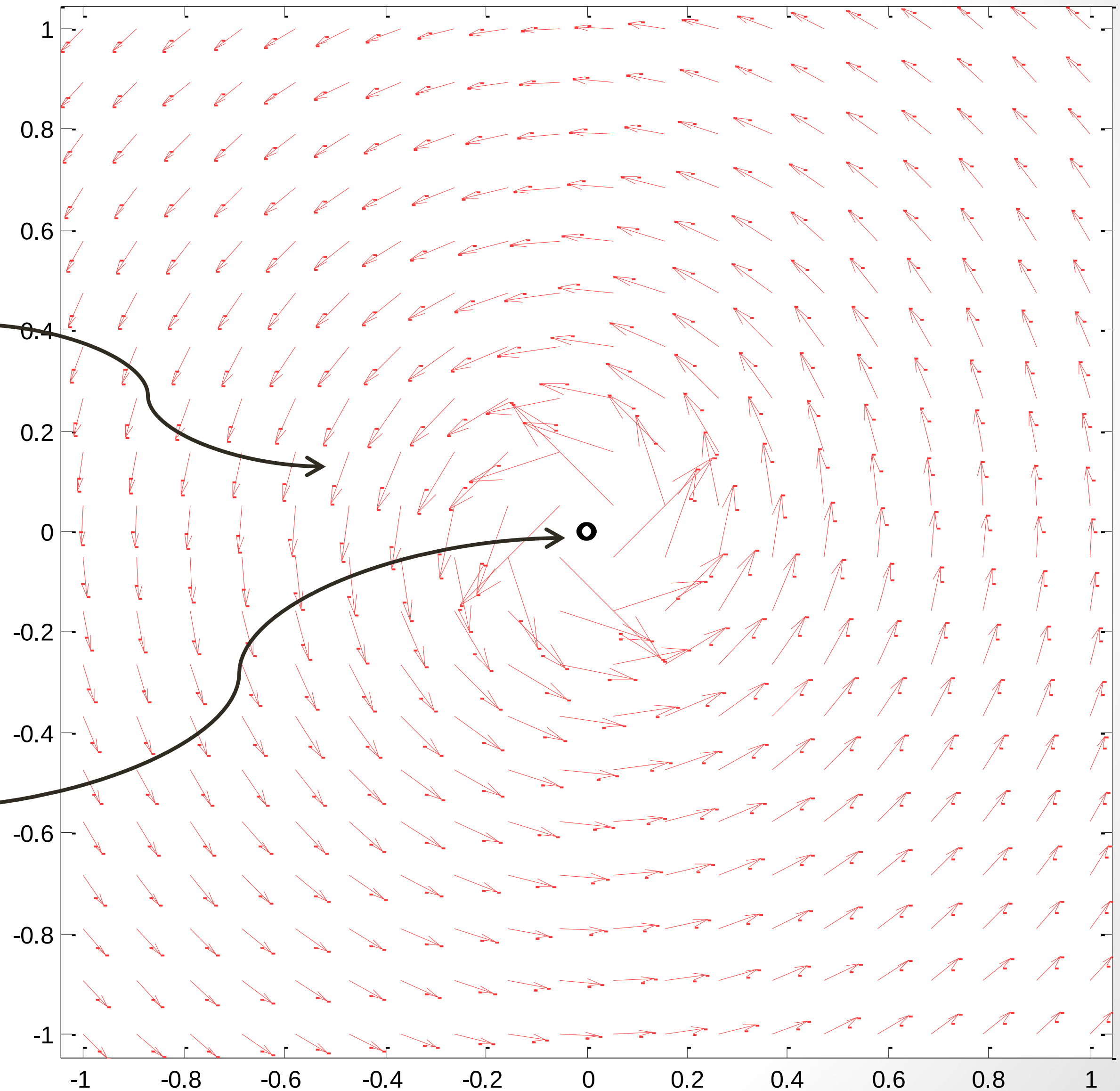
Significado gráfico em R^2

campo vetorial

$$\mathbf{A} = A_x(x,y)\mathbf{a_x} + A_y(x,y)\mathbf{a_y}$$

rotacional neste ponto

$$\nabla \times \mathbf{A} = k\,\mathbf{a_z}\ ,\quad k > 0$$



Universidade Federal de Juiz de Fora

Operadores Diferenciais

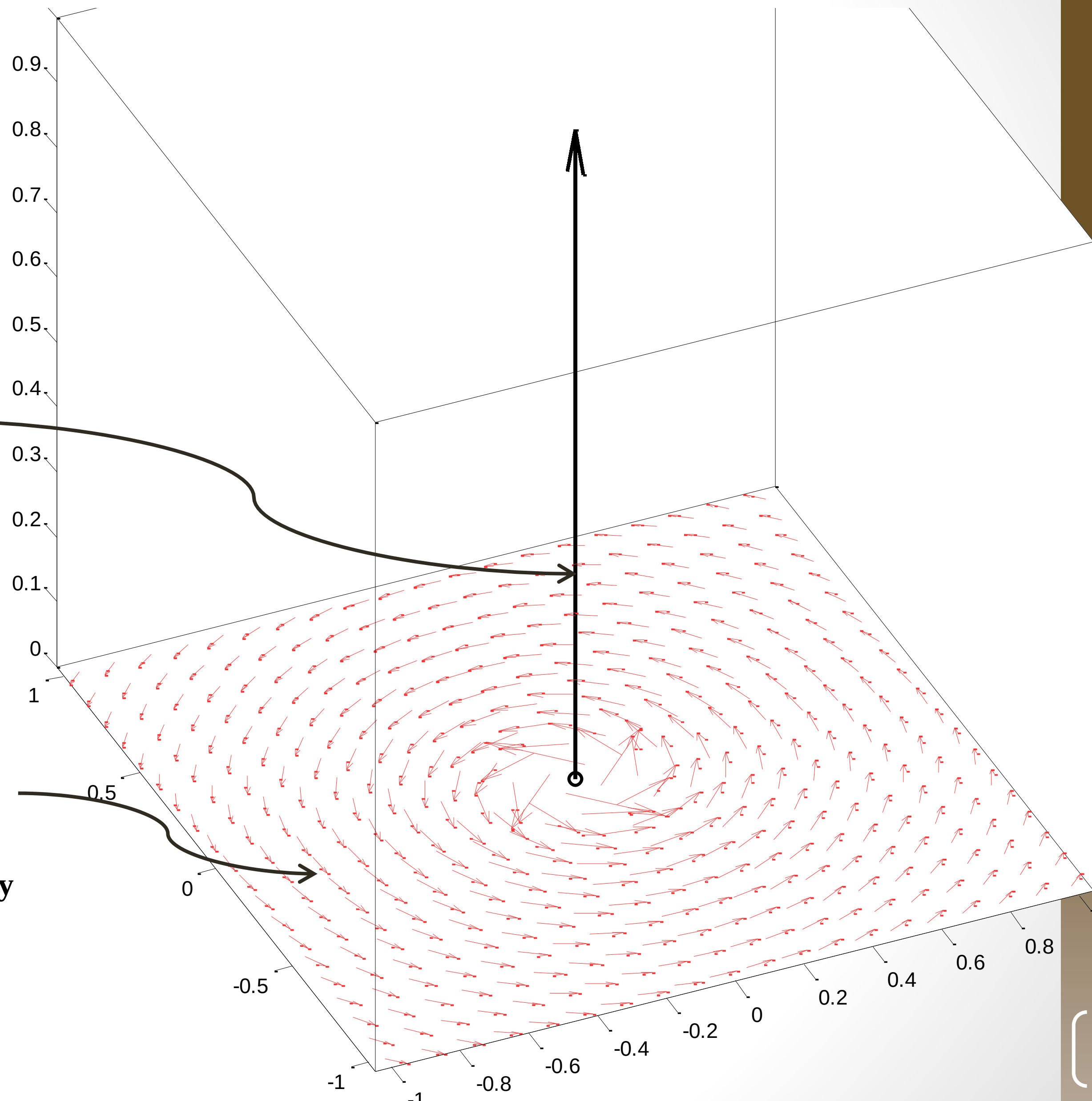
Significado gráfico em R^2

rotacional neste ponto (vetor)

$$\nabla \times \mathbf{A} = k\,\mathbf{a_z}\ ,\quad k > 0$$

campo vetorial

$$\mathbf{A} = A_x(x,y)\mathbf{a_x} + A_y(x,y)\mathbf{a_y}$$



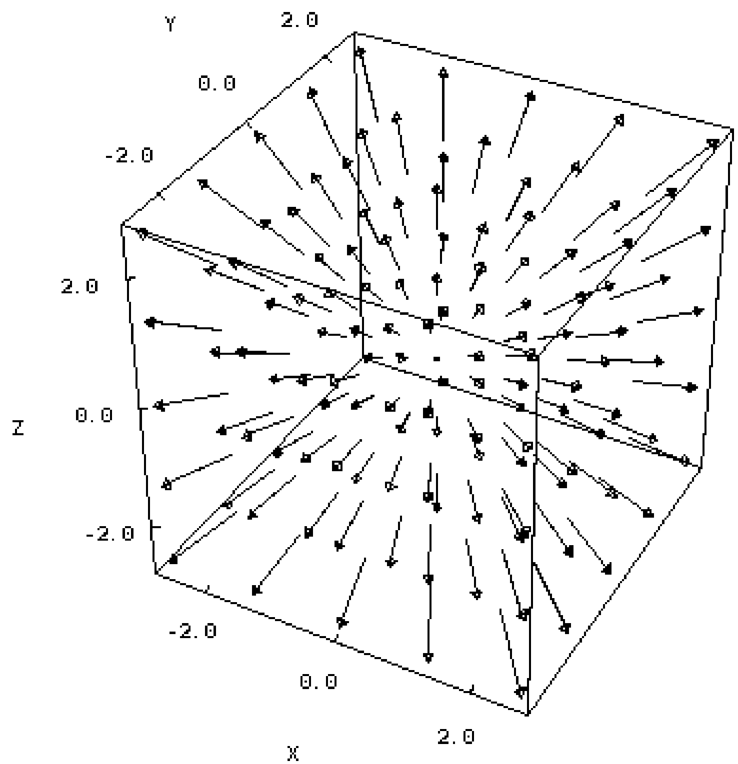
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Operadores Diferenciais

Significado gráfico em R^3

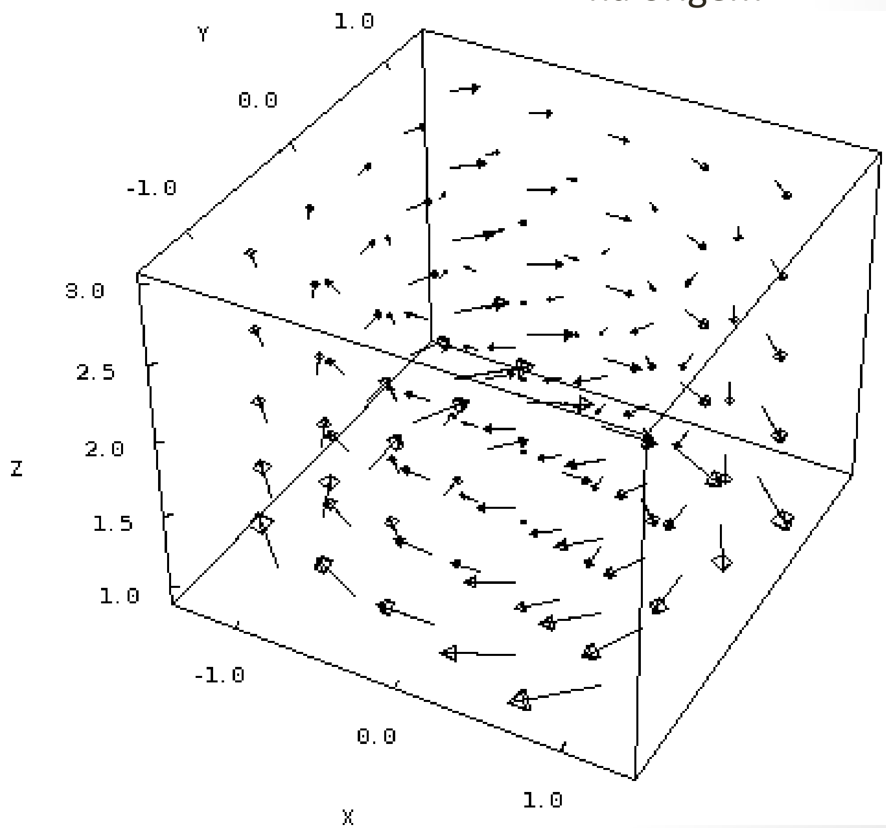
$$\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$$

na origem



$$\nabla \times \mathbf{A} < 0$$

na origem



Universidade Federal de Juiz de Fora

Identidades de Cálculo Vetorial

Supondo dois campos escalares (ψ e ϕ) e dois campos vetoriais (**A** e **B**):

Propriedades distributivas:

$$\nabla(\psi+\phi)=\nabla\psi+\nabla\phi$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$$

Divergente e rotacional do produto de um campo escalar e um campo vetorial:

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{A})=\left[\mathbf{A}\cdot\nabla\psi\right]+\left[\psi\nabla\cdot\mathbf{A}\right]$$
$$\nabla\times(\psi\mathbf{A})=\left[\psi(\nabla\times\mathbf{A})\right]+\left[(\nabla\psi)\times\mathbf{A}\right]$$

Gradiente do produto de campos escalares:

$$\nabla(\psi\phi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi$$

Gradiente de um produto escalar:

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

Divergente e rotacional de um produto vetorial:

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

na qual se define a **derivada direcional** na direção de A vezes seu módulo:

$$\mathrm{A}\cdot\nabla=(\nabla\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}$$

Identidades de Cálculo Vetorial

Supondo um campo escalar ψ e um campo vetorial **A**:

Identidades com derivadas segundas:

O **rotacional do gradiente** de qualquer campo escalar sempre resulta no vetor nulo:

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0$$

O **divergente do rotacional** de qualquer campo vetorial é sempre zero:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

O **Laplaciano** de um campo escalar pode também ser definido como o **divergente do gradiente**:

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi)$$

O **rotacional do rotacional** de um campo vetorial segue a identidade:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

na qual o **Laplaciano vetorial** é definido, em coordenadas retangulares, como:

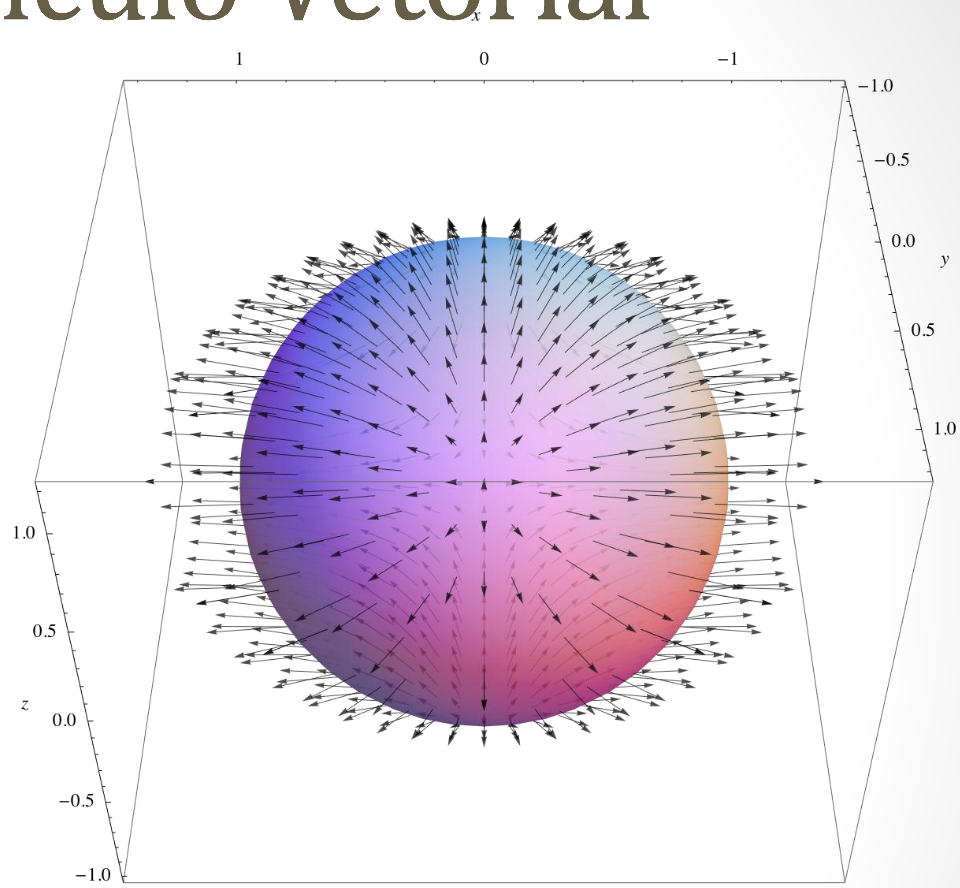
$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a_x} + \nabla^2 A_y \mathbf{a_y} + \nabla^2 A_z \mathbf{a_z}$$

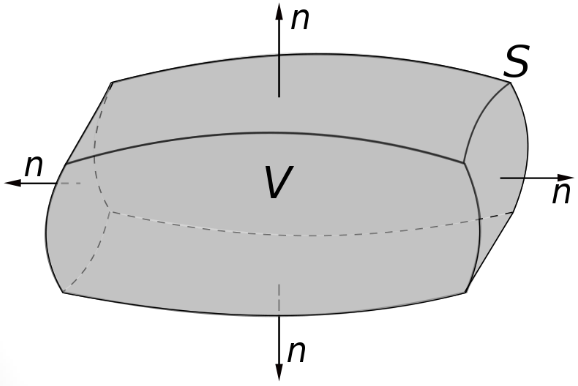
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Teoremas de Cálculo Vetorial

Teorema da Divergência

Supondo um campo vetorial **A** tridimensional, que atravessa uma superfície curva contínua fechada de *fronteira* S (2D) que engloba um *volume* V (3D), e um campo vetorial **n** de módulo unitário, normal à superfície de S e apontando para fora em todos os pontos





$$\oiint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

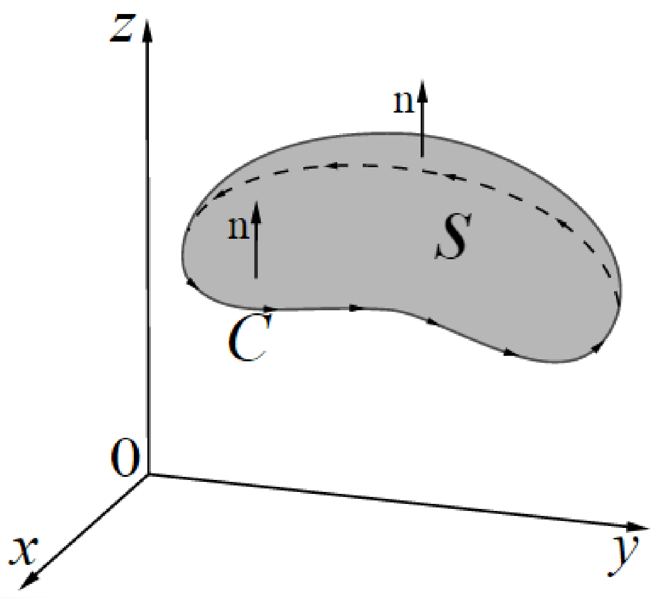
O **fluxo** do campo A através da superfície fechada S é igual ao somatório de todas as **fontes que divergem/convergem** do/para o interior de S.

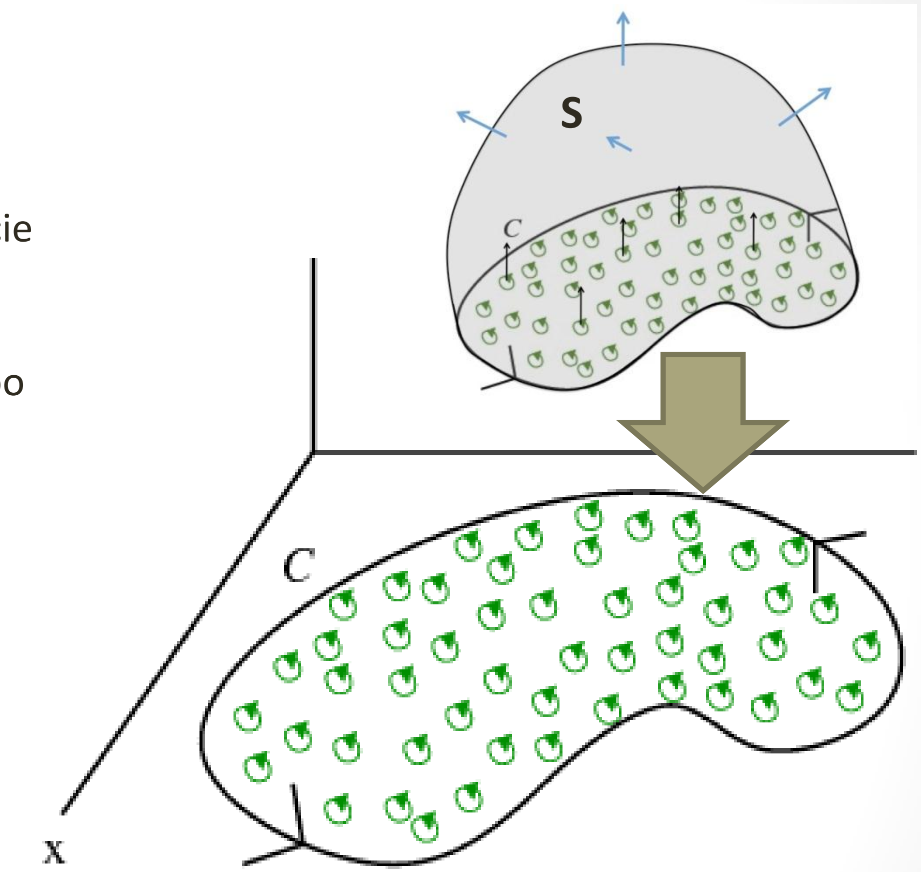
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Teoremas de Cálculo Vetorial

Teorema de Stokes

Supondo um campo vetorial **A** tridimensional, que atravessa uma superfície contínua curva S (2D), que possui uma fronteira curva (1D) C orientada no sentido positivo (anti-horário com relação ao campo normal **n** de S)





$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A})\, d\mathbf{S}$$

O **valor integral** do campo A sobre a fronteira C da superfície S é igual ao **fluxo do rotacional** do mesmo campo A através de S