UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA PROPOSTA DE TRABALHO DIDÁTICO COM A GEOMETRIA PROJETIVA

MARCELO CUNHA FIGUEIREDO

Juiz de Fora (MG)

Fevereiro, 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Marcelo Cunha Figueiredo

UMA PROPOSTA DE TRABALHO DIDÁTICO COM A GEOMETRIA PROJETIVA

Orientador (a): Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

Proposta de Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
Fevereiro, 2018

MARCELO CUNHA FIGUEIREDO

UMA PROPOSTA DE TRABALHO DIDÁTICO COM A GEOMETRIA PROJETIVA

Orientador: Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

Proposta de Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni
Orientador - UFJF

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho
UFJF

Prof. Dr. Dilhermando Campos
UFOP

Juiz de Fora, 28 de fevereiro de 2018

À minha filha Marcela, que me inspira na busca por um mundo melhor, onde possamos viver em paz.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pelo dom da vida e por me oportunizar um reencontro maravilhoso com vós, que ficará guardado em meu coração pelo resto de meu caminho. Obrigado por permitir-me realizar meus sonhos. Espero não me desviar do Seu caminho, Senhor, no qual me sinto tão bem, mostrando, cada vez mais, como és perfeito. Te amo, Deus.

Aos meus pais, Carlos e Cida, pela educação e pelo amor incondicional que depositaram nos filhos (eu e Pedro). Agradeço a Deus, mais uma vez, por ter pais como vocês.

Ao meu irmão Pedro, pela amizade e pela confiança.

Ao meu amor, Josiane, por me ajudar a melhorar como ser humano e pelo companheirismo durante todos esses anos juntos.

À minha filha Marcela, meu presente de Deus.

Ao Vinícius Batalha, que além de chefe, foi um grande amigo. Pode ter certeza que você faz parte dessa minha trajetória profissional.

Ao Ronaldo Campos, grande amigo e exemplo de professor. Sabes que és exemplo para muitos.

Aos meus colegas de graduação e pós-graduação - são tantos que não conseguiria lista-los aqui. Bons tempos, esses vividos na UFJF.

Às escolas Granbery e Apogeu, minhas primeiras experiências profissionais.

Aos meus colegas de trabalho do Campus Rio Pomba, que buscam sempre proporcionar um ensino público de qualidade para nossa comunidade.

Ao meu orientador, Adlai, por tudo que fez por mim; mais que um simples mestre, foi um amigo. Só você sabe como foi difícil a jornada, e quero deixar a minha gratidão pela paciência e pelas boas palavras em momentos delicados.

À Marise, que revisou os textos.

Aos professores Orestes e Dilhermando, por aceitarem fazer parte da banca examinadora de meu trabalho. Agradeço pelas considerações feitas na qualificação, as quais muito colaboraram para esta versão.

"*Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos, e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o sino que tine.*

E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria."

1 Coríntios 13: 1,2

RESUMO

As geometrias denominadas não-euclidianas fazem parte da história da Matemática e nossas leituras mostram que elas não têm tido muito espaço nas licenciaturas da matéria no Brasil. Contrapondo esse panorama, buscamos estruturar um material para atuais e futuros professores de matemática, vislumbrando um outro olhar para a Geometria. Nosso estudo tem como objetivo buscar nas literaturas sobre o tema formas de apresentação da Geometria Projetiva, para confecção de um produto educacional que mostre uma das possibilidades de axiomatização desta teoria. O curso proposto foi aplicado na prática junto a um grupo de licenciandos de uma universidade pública que já tinham estudado Geometria Euclidiana Plana, oportunizando uma pesquisa de campo. As atividades propostas no produto são de cunho investigativo, e buscam solucionar problemas de Geometria Euclidiana de forma alternativa, com auxílio de *software* de geometria dinâmica e após a apresentação de uma concepção geométrica projetiva. Nossa investigação teve como foco a questão: *'Como um curso básico e introdutório de Geometria Projetiva pode contribuir para licenciandos repensarem a geometria estruturalmente, de modo ampliado em seus fundamentos?'* Da pesquisa empreendida resultaram dados, analisados com base na metodologia fenomenológica, através da qual se procede com as reduções a partir das manifestações genuínas dos sujeitos de pesquisa, obtendo-se categorizações em forma de convergências de significações.

Palavras-chave: **Ensino de Matemática. Formação de Professores. Geometria Projetiva. Metodologia alternativa. Fenomenologia.**

ABSTRACT

The so named non-Euclidean geometries are a part of the History of Mathematics, but our readings indicate an absence of space for this subject in Brazilian Mathematics teaching degree courses. Opposing this scenario, we aimed to devise materials for both current and future Mathematics teachers under a different perspective for Geometry. Our goal was to search the literature for ways of presenting projective geometry in order to make up an educational product that shows a possibility of axiomatizing such theory. The proposed course was applied to a group of Mathematics teaching undergraduate students who had already gone through a Plane Euclidean Geometry class at a public University, which created the opportunity for a field study. The activities we propose in our product are of investigative nature, aiming to solve Euclidean Geometry problems in alternative ways with the help of a Dynamic Geometry software after the presentation of a Projective Geometry conception. Our investigation was focused on the question "In which ways can a basic and introductory class on Projective Geometry contribute for teaching degree students to structurally rethink Geometry by widening its foundations?". The data we generated in our research was analyzed according to the phenomenological approach, in which reductions are made based from genuine manifestations of the study subjects and categorizations are obtained in the form of signification convergences.

Keywords: **Mathematics Teaching. Teacher training. Projective Geometry. Alternative Methodolgy. Phenomenology.**

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

O presente estudo faz uma opção clara por constituir um objeto didático pedagógico, cuja proposta se dirige à aplicação do ensino da Geometria, sendo a dissertação de mestrado, por vislumbre e decisão próprios, tributária dessa opção. O foco central é, então, elaborar um Produto Educacional que materialize essa proposta. A ideia originalmente pensada para constituir o presente Produto seria, fundamentalmente, um curso de Geometria Projetiva. No entanto, a dissertação conta um pouco da trajetória empreendida com os estudos e a pesquisa, imprescindíveis à essa realização.

A dissertação narra como foi construída a questão que norteia a investigação, e como desenhamos e realizamos uma necessária pesquisa de campo para abordá-la. O texto está estruturado da maneira como passa a ser exposto.

No capítulo 2, “Introdução: trajetórias e entendimentos sobre o objeto de estudo”, a ideia é deixar claro o posicionamento pessoal com relação ao mundo da pesquisa em Educação Matemática, assim como delimitar esse universo, mostrando, a partir do recorte feito e da própria trajetória de vida, o significado do objeto de pesquisa dado. Para tanto, buscou-se subsídio em publicações sobre o tema, de forma a fundamentar e aprofundar os estudos que acolhem as indagações e desejos de conhecimento que são explorados.

No capítulo 3, “A Geometria Projetiva em Publicações científicas”, são apresentados os fichamentos resultantes da leitura das publicações e de autores consultados, e que abordam a Geometria Projetiva. Trata-se de obras matemáticas voltadas ao estudo da Geometria Projetiva, sejam tópicos ou objetos científicos sobre a matéria. Os fichamentos foram feitos separadamente para cada uma delas, com o intuito de subsidiar a compreensão de possíveis estruturas conceituais que deverão, ao fim, serem propostas para o curso pretendido. Entende-se que seja interessante trazer essa sistematização ao conhecimento dos leitores.

O capítulo 4, “O Curso” faz uma explanação direta sobre o conteúdo produzido, das diretrizes e concepções que o orientam, de como ele foi pensado, estruturado e organizado, uma vez que ele é a peça principal do Produto Educacional correlato à dissertação.

O capítulo 5, “A pesquisa”**,** trata da questão específica aqui delineada para alcançar os objetivos propostos, bem como da pesquisa de campo propriamente dita, etapa considerada essencial para responder às questões formuladas. Justifica-se, nesse tópico, a compreensão que se tem acerca do problema e a opção que se fez pelo tema dos cuidados metodológicos para desenvolver a pesquisa, que envolveu a interlocução com os sujeitos escolhidos -

estudantes licenciandos em matemática, que dela participaram –, explicitando como foram produzidos e analisados os dados gerados de sua participação e de seus depoimentos.

Por último, o capítulo final, é ocupado pelo pesquisador para expor as suas conclusões, constituídas a partir da análise dos dados da pesquisa como um todo. Em ‘considerações finais’, o pesquisador, de forma livre, mas, comprometido com a sua comunidade acadêmica, diante de novas descobertas com as quais se deparou, discorre sobre as convergências e conclusões do estudo, sistematizadas nas análises realizadas.

2 INTRODUÇÃO: trajetórias e entendimentos sobre o objeto de estudo[1]

A relação com a Matemática teve importância durante grande parte da minha vida escolar. Era minha matéria preferida. Os cálculos me fascinavam mais do que qualquer outra área do conhecimento, pois estimulavam o meu raciocínio lógico, e tinha prazer em resolver problemas.

No início da graduação, no ano de 2003, estava entusiasmado com as disciplinas que ainda não havia estudado, tais como o Cálculo, Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Analítica no $\mathbb{R}^3$, entre outras. E não que essas disciplinas não fossem importantes, mas, para a formação de um professor, o fato de saber lidar com a Matemática é muito pouco. Até que ponto ser um excelente "resolvedor de questões" e conhecedor dos principais teoremas vai garantir que um aluno tenha sucesso nos cálculos e na compreensão do que é fazê-los? Acredito que o problema do ensino e da aprendizagem da Matemática está muito além de saber matemática.

Já cursando uma pós-graduação *latu senso*, comecei a ter oportunidade de refletir criticamente sobre minhas próprias ações, já como docente de matemática. A experiência foi muito válida, pois pude perceber que a matemática poderia ser uma disciplina interessante para o aluno e não um simples condicionamento para a memorização de fórmulas, que praticamente em nada contribui para desenvolvimento de um cidadão, e muito menos para a formação de um cientista. Até então, em minhas aulas, estava adotando o esquema tradicional de ensino, não utilizando nenhum recurso metodológico diferente que permitisse outra visão da matemática.

Ao participar de alguns eventos em Educação Matemática, adquirindo publicações e conversando com seus autores, comecei a vislumbrar questões acerca da profissão do professor que até então desconhecia, e que respondessem, por exemplo, como a Tecnologia Informática poderia estar aliada à Educação Matemática, de um ponto de vista crítico à introdução dessas tecnologias no campo do ensino de matemática.

Um dos vieses importantes desse acesso ao mundo das investigações científicas é a possibilidade de lançar novos olhares sobre a Geometria. Vemos, na Geometria, uma potencialidade para o entendimento da constituição de uma ciência propriamente dita. Aliás, essa palavra tem modificado minha visão e a minha prática profissional nos dias de hoje.

---

[1] A primeira pessoa do singular é usada para exposição de minhas vivências particulares, enquanto o 'nós' se refere ao que foi construído juntamente com meu orientador e com grupo de estudos.

Será que a maneira como a matemática é trabalhada nas escolas realmente colabora com o significado do que é o ‘fazer matemático’?

Temos percebido, ao longo dessa trajetória, que os livros didáticos tiveram, sim, uma melhora no que se refere a aplicabilidade de alguns conteúdos no mundo cotidiano, porém não vislumbramos situações que permitem ao aluno entender a matemática numa proposta axiomática, que, segundo nossas concepções, é importante para a percepção de que ela é uma matéria abstrata, e de que nem tudo que é estudado poderá ser aplicado a uma situação real. Na geometria, a situação se agrava ainda mais, pela quantidade excessiva de fórmulas que são apresentadas aos leitores e iniciantes ao tema, sem a devida discussão sobre possibilidades alternativas de entendimentos.

Quando analisamos alguns livros didáticos, percebemos que vários pontos da Geometria Euclidiana Plana não estão sendo trabalhados. Exemplo disso é que alguns livros inscritos no PNLD de 2018 já não trazem conteúdos de Geometria Plana no primeiro ano. Alguns contemplam a geometria, porém de forma incompleta, como um simples capítulo sobre o teorema de Tales e a semelhança de triângulos, e mais um ou outro tópico sobre áreas de figuras planas. Na sua grande maioria, as publicações nesse campo continuam preocupadas com os cálculos de comprimentos, áreas e volumes. Essa concepção de geometria determina uma visão inadequada sobre seus os processos dedutivos. A questão que se coloca é: ‘Isso é de fato interessante para uma compreensão da Matemática como ciência?”

Pergunto, também, se a Geometria Euclidiana, como é assim chamada a geometria, herança de Euclides, bem como o tratamento usual dado à disciplina no cenário escolar brasileiro, com suas práticas e seus livros-textos é o único tipo de geometria que pode ser trabalhada com os nossos alunos?

Isso abre perspectivas para pesquisar - dentro do horizonte de um currículo alternativo que seja interessante em geometria, com o aporte de instrumentos (régua e compasso, por exemplo) - sobre a inserção de outras geometrias do currículo e sobre a utilização de *softwares* educacionais no seu aprendizado.

Podem os *softwares* de Geometria Dinâmica contribuir na visualização de várias situações. E porque não inseri-los nesse contexto? Uma vez que o computador é hoje uma ferramenta educacional inegável, torna-se pertinente realizar atividades com a sua ajuda, de modo que o aluno, interagindo com a máquina, produza seu próprio conhecimento. E isso muito me interessa - procurar fazer o aluno pensar. Nós, professores, não devemos “mastigar” definições e conceitos sem que os alunos ao menos tenham um contato inicial com o que está sendo proposto em aula. E, da forma como consideramos, a Geometria pode proporcionar um ambiente favorável ao desenvolvimento do raciocínio lógico das turmas.

Nos estudos preparatórios para a nossa pesquisa, entendemos a importância em tematizar, para nós, o panorama da geometria escolar e as possiblidades que se abrem através de propostas factíveis.

Pela nossa compreensão, deve-se deixar guiar mesmo pelos sentidos que a palavra geometria desperta, e o primeiro deles vem justamente da herança grega euclidiana. A obra intitulada "*Os Elementos*" produzida por um dos grandes matemáticos gregos, Euclides de Alexandria, é um dos livros que contêm grandes informações sobre o conhecimento matemático da época, desde os tempos de Tales, em ordem lógica. A estrutura axiomática é uma das grandezas desse texto, fazendo-o se diferenciar dos demais. Antigamente, os axiomas eram considerados afirmações evidentes, e os postulados eram proposições geométricas que não precisavam de demonstração para serem aceitas como verdadeiras. Porém, hoje esses conceitos são tratados como sinônimos. (DA SILVA; BONGIOVANNI; VALENTE, 2011).

Não percebemos, nos Elementos, uma reflexão teórica sobre o porquê do trabalho com a geometria que Euclides vinha a propor. Podemos considerar a obra como um livro técnico, pois é desprovido de explicitações ontológicas/epistemológicas.

Durante muito tempo, a obra de Euclides serviu e ainda serve de modelo e referência para o ensino de geometria, como também foi exemplo para toda a racionalidade ocidental. Mas, ao analisar a literatura histórica, percebemos que vários matemáticos começam a questionar a leitura do espaço em termos euclidianos, assim como a metodologia utilizada para ensinar a geometria.

Na obra "*Eléments de géométrie"* (1741), de Alexis Claude Clairaut, percebe-se claramente o fato descrito anteriormente, na seguinte passagem:

> Ainda que a geometria seja a ciência abstrata, é mister todavia confessar que as dificuldades experimentadas pelos que começam a aprendê-la, procedem as mais das vezes da maneira por que é ensinada nos elementos ordinários. Logo no princípio se apresenta ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e princípios preliminares que só lhe parecem anunciar um estudo árido. As proposições que em seguida vêm, não fixando o espírito sobre objetos mais interessantes, se sendo além disso difíceis de conceber, acontece comumente que os alunos principiantes se fatigam e se aborrecem antes de terem uma ideia clara do que se lhes queira ensinar. (CLAIRAUT apud MIORIM, 1998, p. 46),

Dessa compreensão resulta afirmarmos que qualquer proposta alternativa ao estudo euclidiano tradicional não pode passar apenas pela reformulação de objetos geométricos, mas, deve repensar toda uma metodologia de abordagem espacial, que acaba determinando os procedimentos de trabalho didático correlato.

Morris Kline, um dos grandes estudiosos da matemática contemporânea, ao escrever o prefácio do livro "*An Essay on the Foundations of the Geometry*", de Bertrand Russel, alega que a Geometria passou por uma profunda revolução no século XIX, e que a criação das geometrias denominadas não euclidianas gerava dúvida à caracterização euclidiana do espaço físico, sendo que tal fato mostrou que a mente humana não se restringe a pensar no espaço somente em termos euclidianos. Tornou-se claro que a geometria euclidiana não é *necessária* para experiência do espaço. (KLINE, 1956).

Um dos problemas que Russel procura responder na obra citada anteriormente é: Qual o conhecimento geométrico deve ser o ponto de partida lógico para o desenvolvimento de uma ciência do espaço e que seja também logicamente necessário para a experiência de qualquer forma de externalidade?

Percebe-se que a compreensão da geometria não se sustenta simplesmente com aquilo que é propriamente vivenciado. A percepção e a experiência relatada de outros estudiosos são contribuições que autenticam com o nosso entendimento aqui exposto.

Uma das primeiras rupturas com a tradição da geometria euclidiana se deu à época do Renascimento Cultural, pois, no espaço, essa ciência não dava conta de representar certos aspectos de profundidade quando retratados nos quadros dos artistas.

No meu caso, e no de muitos outros professores, a única geometria do espaço trabalhada no curso de Licenciatura em Matemática foi a geometria euclidiana. Seria essa a única visão interessante no processo de formação do professor de matemática?

Estuda-se, em geral, no ensino superior, a mesma geometria que é ensinada na escola básica, e até da mesma *forma*[2] que está escrita nos livros didáticos, e tal fato prejudica a formação geométrica do professor. Ficamos sem alternativas didáticas para sequer lidar com a geometria euclidiana, que é, em última instância, axiomática-dedutiva. Acreditamos mesmo que vários professores de matemática têm evitado trabalhar com esse conteúdo, pois se sentem despreparados ou desmotivados.

O foco do nosso estudo na geometria se deu pela constatação da dificuldade apresentada por alunos e professores com a disciplina de matemática. Para sustentar essa afirmação, recorremos a Lorenzato (2006), que argumenta que,

---

[2]Com forma, ou formato, queremos dizer de um conjunto que abrange uma metodologia de tratamento, a escolha de objetos científicos, uma metodologia didática e um fundo epistemológico.

> [...] geralmente se referindo o ensino de Geometria, é comum professores se dizerem com o direito de não ensiná-la por se sentirem inseguros; não conhecer o assunto a ser ensinado não gera direitos ao professor, e sim, o inevitável dever de aprender mais. (LORENZATO, 2006, p. 5)

A geometria projetiva, que é uma matéria distinta da única que é vista na maioria das Licenciaturas em Matemática, tem objetivos distintos daqueles da geometria euclidiana, que se preocupa particularmente com resultados métricos, como o cálculo de medidas, ângulos e áreas. Nosso interesse não é rejeitar a geometria euclidiana, mas sim oferecer ao professor uma outra visão geométrica do espaço, para que possa ter uma abordagem alternativa aos elementos geométricos.

O tema tem substancial relevância e está sendo alvo de pesquisas desenvolvidas por outros pesquisadores da área da educação matemática. Vários programas de pós-graduação em educação matemática de destacadas universidades do país discutem a importância de as geometrias não euclidianas serem abordadas desde as séries iniciais da educação básica (DA CRUZ; DOS SANTOS, 2010).

Porém, esse fato se contradiz ao se observar a grade curricular de algumas licenciaturas em matemática. Na análise de um dos artigos do X ENEM, que trata do estado da arte do ensino de geometrias não euclidianas, intitulado "Do mito da geometria euclidiana ao ensino das geometrias não euclidianas - a experiência no IFFluminense Campus Campos-Centro", verificou-se que, no ano de 2005, das 43 instituições pesquisadas, apenas cinco delas abordavam conceitos de geometria não euclidianas. O estudo verifica ainda que, no ano de 2010,

> [...] das 227 Instituições pesquisadas, 61 não disponibilizavam, no site oficial, a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Das 166 Instituições restantes apenas 12 apresentavam, na matriz curricular, alguma disciplina cujo título evidencia o estudo de Geometrias Não Euclidianas, 06 com disciplinas obrigatórias e 06 com disciplinas optativas ou eletivas. Aproximadamente 7% das 166 Instituições formam professores que sabem da existência de outras geometrias além da euclidiana. (BARRETO; TAVARES, 2010, p. 2)

No estado do Paraná, tópicos de geometrias não euclidianas já constam na lista dos programas das diretrizes curriculares. (RIPLINGER; BASSOI, 2010).

Percebemos assim uma movimentação no sentido de serem incluídos, nos programas de ensino básico, conteúdos relacionados a geometrias não euclidianas. Mas para que isso venha acontecer, tal conteúdo deve ser discutido nas licenciaturas em matemática.

Com o nosso interesse em pesquisar uma alternativa ao euclidiano, partimos para um breve entendimento quanto ao significado da geometria projetiva. Consideramos que os sentidos históricos teriam contribuição importante para esse entendimento, tendo o nosso grupo de estudo publicado sobre isso. (DETONI, VIEIRA, FIGUEIREDO, 2015). Temos conhecimento de uma fala que diz que enquanto a geometria euclidiana é a da régua e do compasso, a projetiva seria só a da régua. De fato, a não invariância de comprimentos, e a invariância de colinearidades e as incidências segundo projeções dão sustentação a essa fala.

Os teoremas da geometria projetiva, portanto, terão fundo temático no alinhamento de pontos e na incidência de retas. Um ponto culminante da geometria projetiva é sua inserção nas curvas cônicas, desde que, seções na superfície cônica circular, isto é, elipses, hipérboles e parábolas sejam projeções do círculo, abarcando por extensão todas as suas propriedades projetivas.

Como em muitos momentos da realização científica, não há um marco distinto para a história da geometria projetiva, que demarque a sua fundação ou avanços. Os registros históricos mostram-na como uma consolidação como ciência distinta de outras geometrias ao final do século XIX, com os esforços empreendidos por Poncelet e Staudt.

Enfocando a colinearidade, nossas leituras históricas apontam Menelau como responsável por um momento inicial marcante para a geometria projetiva, criando um teorema que ganhou seu nome. Este teorema caiu no ostracismo por longo tempo, tendo Ceva, já no século XVII, o redescoberto. Em nossa proposta de curso, ele será enfatizado.

Em nossas leituras, percebemos que a geometria projetiva não se faz, historicamente, com uma linearidade cronológica, nem mesmo apresentando uma unidade lógica. Seus avanços vão se dando em momentos que parecem extemporâneos aos demais, até que é proposta como ciência articulada, como já falamos anteriormente, no século XIX.

Um exemplo desse modo de evoluir nos é dado com o teorema de Pappus (290 d.C. a 350 d.C.). Esse matemático teoriza sobre a principal invariância métrica projetiva, que é a razão cruzada (também chamada razão de quatro pontos, ou, ainda, razão anarmônica), que ele ratifica a partir de um comentário no livro de Euclides. Esse resultado fica no limbo da história por longos séculos, até que Desargues e Cremona o retomam. Depois, Pascal faz dele uso disseminado, em novas situações geométricas.

A geometria projetiva evolui num movimento de generalização de seus resultados e de incorporação deles, como é comum na matemática, mas numa trajetória pouco nítida, uma vez que recebeu contribuição de pessoas de várias áreas, artistas, arquitetos e astrônomos (COXETER, 1974; EVES, 1963), que ofereciam protótipos de objetos científicos a partir de suas ocupações, embora não necessariamente com o mesmo espírito de um pesquisador matemático. Um exemplo de contribuição vem do pintor alemão Dürer, dentro da edição de sua obra "*Géométrie". *(DÜRER, 1995).

Paralelo ao trabalho de artistas renascentistas, aparece, no século XVII, o trabalho de Girard Desargues, um arquiteto com demandas próprias de suas tarefas de construção civil. Seu texto "*Brouillon project d´une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plane"*, de 1639, publicado com pequena tiragem, apresenta muito mais que situações aplicadas e conforma com bastante senso matemático um espaço projetivo. (TATON, 1951). Nesse texto, é apresentado, teoricamente, o espaço euclidiano *aumentado*, aquele que, além dos elementos fundacionais elementares, apresenta a ideia de pontos, retas e planos ideais, na extensão do espaço elementar para o infinito.

Na astronomia, junto a revoluções no modo de pensar modelos físicos e na confecção de novos instrumentos óticos, a solicitude de um pensamento geométrico mais conveniente favoreceu alguns aspectos para o desenvolvimento da geometria projetiva, especialmente na temática das cônicas, desde a proeminência das propriedades projetivas que elas encarnam até para a própria concepção de construção desses instrumentos.

Blaise Pascal, contemporâneo de Desargues, foi um dos que mais se debruçaram sobre estudos das cônicas, datando de 1640 um famoso teorema seu, versando sobre a colinearidade dos três pontos de encontro de lados opostos em um hexágono inscrito num círculo. A extensão do círculo para qualquer cônica deixa esse teorema com um amálgama para objetos projetivos.

Mas, em termos de estruturação científica da geometria projetiva, depois de Desargues, há um hiato de mais de um século (BELL, 1937), até que Poncelet redescobre as propostas arguesianas e publica o "*Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras*" (1822), o que acaba se tornando um marco para essa ciência. Nessa publicação, é exposto um método de pesquisa geométrica, compartilhando a projeção e a seção. Para nossos estudos a importância de Poncelet reside em apresentar soluções sintéticas, numa época em que a geometria analítica, já estruturada, era campo para muitos avanços na matemática.

Ao editar o seu famoso "*Programa"* (1893), Felix Klein observou a importância da geometria projetiva, constatando os maiores avanços na área nos últimos 50 anos anteriores àquela data. Salientava ele o caráter de amplitude encontrado nos teoremas projetivos, e que "as propriedades métricas, não mais como propriedades dos entes em si, são vistas como relações entre esses e uma forma fundamental, o círculo imaginário no infinito". (KLEIN, 1984, p. 2).

Esse apontamento de Félix Klein é um impulso às nossas pretensões de pesquisar e responder pela importância de ter a geometria projetiva presente em currículos matemáticos. Além de tudo, esse matemático, sempre ressaltou o caráter dinâmico das novas geometrias, especialmente pelos movimentos de transformação ou pelas projeções. Aliamos a esse aspecto em nossos estudos a pretensão de trabalhar com *softwares* gráficos, intuindo uma correspondência de dinamicidade que é percebida entre seus dispositivos de movimento e as transformações projetivas.

3 A GEOMETRIA PROJETIVA EM PUBLICAÇÕES CIENTÍFICAS

Neste capítulo trazemos o fichamento elaborado para nossos estudos mais específicos dos objetos científicos da geometria projetiva. Não nos detivemos apenas sobre publicações que atendiam pelo nome (ou próximo disso) " Curso de Geometria Projetiva", uma vez que tivemos acesso a uma série de obras que perpassam essa temática de várias formas, tratamentos e tamanhos.

Quisemos trazer o material fichado na intenção de transmitir aos interessados algumas indicações bibliográficas, com os respectivos detalhamentos que fazem com relação ao assunto tratado. Além disso, o fichamento ajuda a mostrar nossa trajetória estudando essa ciência, e que ao abrigo desta dissertação, entendemos, faz sentido.

Devemos antecipar que consideramos uma infelicidade a quase inexistência de obras publicadas no Brasil. Esse fato também corrobora a constatação de que nossa ciência (quase) não é praticada nas licenciaturas em matemática.

Por outro lado, a possibilidade de se acessar publicações em editoras, sebos e outros repositórios com buscas eletrônicas na *internet*, deixa-nos tranquilos de que algumas publicações - que, para nós, tiveram acesso fortuito – podem ser encontradas. Também é importante dizer que vários *links* nacionais e internacionais nos levam a publicações em forma de artigo, cursos ou materiais didáticos em geometria projetiva, que, com os correntes cuidados de certificação de qualidade, podem ser interessantes. Neste caso, há exemplares nacionais pertinentes.

A seguir, mostramos o fichamento, com informações mais usuais e outras, em forma de comentários, e que julgamos serem pertinentes ao assunto.

Publicação: **College Geometry**, de David C Kay (University of Oklahoma), Holt, Rinehart and Winston: New York. 1969
Prefácio/lombada: Assinala o valor de se tratar a Geometria em sua forma mais pura, não algébrica. É um livro para iniciantes da matemática superior.
Índice: 1 - Teoremas famosos da Geometria; 2 - Fundamentos; 3 - Geometria absoluta e conceitos de paralelismo (triângulos, polígonos, círculos e três geometrias; 4 - Desenvolvimento de Geometria por modelos
Presença projetiva: Diluída; Não aprece a expressão Geometria Projetiva
Disposição do conteúdo de Geometria Projetiva: Na parte de modelos, teoremas e objetos da projetiva em triângulos (razão anharmônica, Menelau, Ceva e Desargues, harmonia); no modo sintético escorado em princípios axiomáticos euclidianos. Sem

se referir a uma ´Geometria Projetiva´, discute perspectividades; apresenta inversão.
Observações: Não é uma apresentação sistemática própria para a Geometria Projetiva, apesar de apresentar mais de uma sequência de conceitos. Tem a qualidade de colocar os conceitos e objetos projetivos conjugados a euclidianos e não euclidianos.
Recortes: É bastante simples a localização de temas da Geometria Projetiva; observando-se os aportes de figuras bastante significativas para um estudo (essa coluna vai sendo enriquecida à medida que o livro for sendo útil)

Publicação: **Geometria Elementar**, de Irmão Isidoro Dumont. Coleção de livros didáticos da FTD, Livraria Francisco Alves/Livraria Paulo de Azevedo, Rio de Janeiro, São Paulo, Belo Horizonte, sem data. 515 p.
Prefácio/lombada: Já na capa pode-se ler que o livro é feito segundo os programas de admissão às escolas superiores.
Índice: Noções Preliminares, depois: PRIMEIRA PARTE, geometria plana: Livro I (segue lista de assuntos de linha e ângulos até quadriláteros); Livro II (Círculo); Livro III (Figuras semelhantes); Livro IV (áreas); SEGUNDA PARTE, geometria no espaço: Livro V (Planos e ângulos poliédricos); Livro VI (Poliedros); Livro VII (corpos redondos, incluindo o estudo de triângulos esféricos); Livro VIII, capítulo I – Elipse, capítulo II – Hipérbole, capítulo III – Parábola, capítulo IV – seções cilíndricas e cônicas, capítulo V - Hélice
Presença projetiva: No Livro III, ao se tocar no assunto ´feixe de retas´, aborda-se feixes harmônicos, com tratamento elementar. Também assim é abordado, logo em seguida, no desenvolvimento de relações no círculo, polo e polar. Nos capítulos sobre cônicas do livro VIII, há estudos de projeções envolvendo círculo, bem como o capítulo IV, que traz o estudo de seções.
Disposição do conteúdo de Geometria Projetiva: Não há tratamento geométrico projetivo. O tratamento é elementar, e, quando se trata de cortes e projeções, não se estruturam projetividades com tratamento teórico específico. Consideramos importante, e o foi para nossos estudos, as demonstrações em situações próximas a que Dandelin fez para as cônicas. Há um tratamento sintético e um analítico, quando é uma tarefa explicitamente posta.
Observações: A autoria declarada de Irmão Isidoro Dumont pode se remeter não a um autor real, mas a um grupo, que teria criado esse nome de fantasia; não temos a data de publicação, mas, por semelhança com outras publicações do autor no Brasil (que são traduções), trata-se provavelmente de publicação da década de 1940, no século XX.
Recortes: À p. 424, o tema ´projeção do círculo´ desperta interesse. Os temas associados a projeções cilíndricas e cônicas, p. 479/484, são bem trabalhados.

Publicação: **Geometry Revisited**. Coxeter e Greitzer. Coleção New Mathematical Library. Random House, New York, 1967.

Prefácio/lombada: (Nota ao leitor): Livro dirigido por matemáticos profissionais a alunos do ensino médio e estudiosos em geral. Traz, como de resto, a coleção citada, tópicos não comumente presentes nos currículos. Sua compreensão vai requerer um pouco de técnica e algum esforço intelectual. PREFÁCIO: a epígrafe sugere que quem despreza a Geometria Euclidiana, perde alguma coisa. Apresenta uma série de capítulos como ´técnicas´ evolutivas para o tratamento euclidiano, como a Geometria das Transformações, e, ao final, expõe o capítulo de Geometria Projetiva, chamando a atenção para o tratamento do infinito e para objetos projetivos, tais como a concorrência.

Índice: Capítulo 1 (pontos e linhas em um triângulo); capítulo 2 (algumas propriedades de círculo); capítulo 3 (colinearidade e concorrência); capítulo 4 (transformações); capítulo 5 (uma introdução a Geometria Inversiva); capítulo 6 (uma introdução à Geometria Projetiva).

Presença projetiva: Presença manifesta no capítulo 3, apresentando os teoremas que fazem fundo para a GP, explicitamente desenvolvida no capítulo 6.

Disposição do conteúdo de Geometria Projetiva: Desde o capítulo 3, os objetos projetivos têm tratamento tal como na Geometria Elementar, com figuras ilustrativas seguidas de relações desenvolvidas em textos matemáticos, sempre buscando a forma axiomática. O capítulo 6 trabalha polaridade e dualidade, aplicando em seguida, notadamente em cônicas.

Observações: O capítulo 6, que é o explícito para a Geometria Projetiva, nitidamente é uma escolha mínima para iniciar-se o estudo proposto.

Recortes: Ao final do capítulo 6, desenvolve-se um esquema projetivo baseado nos estudos apresentados.

Publicação: **Elementos de Geometria**, de F.I.C. (sigla de um coletivo de autores, Frère Ignace Chaput), Rio de Janeiro: F. Briguiet, 11ª ed., 1941. Tradução de Raja Gabaglia.

Prefácio (da 11a. edição) /lombada: O texto, que pretende ser didático, é atualizado como exigem os novos programas de ensino. Não traz nenhuma consideração pedagógica.

Índice: É extenso o índice. Compõe-se de 8 livros e um apêndice com 4 partes. Do livro I ao III, vemos um programa tal como o conhecemos em Geometria Plana (retas, ângulos, circunferência, figuras semelhantes). Do livro IV ao VII, temos o que reconhecemos como Geometria Espacial, com superfícies, retas e planos, poliedros e corpos redondos. No livro VIII, temos ´as curvas usuais´, com cônicas e hélice. Na primeira parte do apêndice, começando por polígonos estrelados, continua pelo que identificamos como temas pertinentes a uma Geometria Projetiva: sinais na geometria; transversais; razão anharmônica; divisão harmônica; polo e polar; figuras homotéticas; figuras inversas; e eixos radicais. Na parte II, a primeira seção retoma as cônicas, agora com interesse projetivos, incluindo o teorema de Dandelin. As terceira e quarta partes dedicam-se a temas esparsos: Teorema de Guldin, teoremas sobre áreas e volumes (e diversos métodos, sobretudo aproximados).

Presença projetiva: Em nenhum momento é explicitada ou mesmo nomeada uma geometria projetiva, sendo seus objetos expostos numa sequência tal como da geometria elementar usual.
Disposição do conteúdo de Geometria Projetiva: Faz-se uso de métodos projetivos, como seções e projeções, mas sem tratamento técnico específico da Geometria Projetiva (perspectividades ou projetividades, por exemplo).
Observações: Como é sabido por quem conhece essa publicação, há uma preocupação extenuante de tratar os objetos científicos tematizados, e, se o leitor tiver uma entrada e interesses projetivos, o livro é capaz de suprir um conjunto sequencial para dar conta de uma introdução à Geometria Projetiva.
Recortes: O tratamento do Teorema de Dandelin e seus resultados é interessante para o estudioso das cônicas, pois revela seu elo em sua forma analítica com sua definição clássica, a partir de cortes na superfície cilíndrica.

Publicação: **Theory and Problems of Projective Geometry**, de Frank Ayres Jr. Nova Iorque: Schaum Publishing, Co., 1967, 243 p. Chama a atenção o fato de ser publicação de uma série desenvolvida para temas especiais da Matemática.
Prefácio/lombada: A proposta do livro e a de ser um primeiro curso em Geometria Projetiva para graduandos já encaminhados em seus cursos de Matemática, podendo ser dirigido a professores do ensino médio. Pretende ocupar espaço editorial nessa disciplina, que careceria de material mais organizado, apesar de existirem boas publicações. Apresenta um panorama de alguns olhares sobre a Geometria, mas admite que decidir sobre quais tópicos são interessantes é uma questão ainda não resolvida. É importante requerer-se que o livro seja Geométrico em espírito e não um tratado de Álgebra, meramente. Pretende-se investir em métodos, e não em fatos geométricos.
Índice: Temos, inicialmente, uma introdução, como capítulo 1, que apresenta a Geometria Euclidiana como ponto de partida para se estender para o espaço projetivo e seus objetos. O capítulo 2 apresenta a razão cruzada (ou anharmônica); no 3, temos o teorema de Desargues para os triângulos; o capítulo 4 traz conjuntos harmônicos (pontos e retas), para onde serão trazidos os feixes; os capítulos 5 e 6 apresentam os conceitos mais estruturais da Geometria Projetiva, as projetividades e as involuções. Nos seis capítulos seguintes é expandida essa ciência, em teoremas significativos e relações mais importantes. Do capítulo 13 ao 16 são apresentados vários olhares geométricos, o afim, o euclidiano, o projetivo na versão analítica e transformações em espaço coordenado. No capítulo 18 há o confronto desses olhares. O capítulo 17 é dedicado às cônicas, aplicando-se a elas todos os objetos projetivos constituídos até então no texto.
Presença projetiva: Há, obviamente pelo título e intenções, uma explicitação total da Geometria Projetiva, ainda que em alguns capítulos do livro se tenha exposição de outras geometrias, mas, estas, com interesse comparativo ou constitutivo da Projetiva.
Disposição do conteúdo de Geometria Projetiva: O conteúdo é completamente disposto, em termos de objetos projetivos recorrentes, além de haver uma estrutura em sequência conceitual. Há presença do tratamento sintético, mas correlação em tratamento algébrico. Essa distinção é tomada como tarefa, tanto que há um capítulo específico para o algébrico coordenado. Como tem objetivos didáticos, compõe-se de exercícios propostos com até 200 problemas resolvidos (em detalhes).

Observações: Mesmo quando há figuras, sugerindo um tratamento sintético e construtivo em linhas, não ocorre uma sistemática de construções gráficas. Às figuras, logo sucede um desenvolvimento literal, já abarcando operadores projetivos conceituados previamente.
Recortes: Todas as partes do livro têm uma significância que poderia ser recortada para uma ênfase local.

Publicação: "**Geometria Superior**", de N.V. EFIMOV. Traduzido do russo para o espanhol. Hayka, 1978
Prefácio/lombada: Informa ao leitor que o livro trata de diferentes olhares sobre a Geometria. Aborda conceitos da Geometria Euclidiana, Não Euclidianas, Geometria Projetiva e de Minhowski.
Índice: Breve resenha das investigações sobre os fundamentos da Geometria; 2- Axiomas da Geometria Elementar; 3- Teoria Não Eucliciana das paralelas; 4- Análise dos axiomas da Geometria Elementar; 5- Fundamentos da Geometria Projetiva; 6- Princípio da teoria de grupos na Geometria. Grupos de transformações; 7- Espaço de Minhowski; 8- Propriedades distintas da métrica não euclidiana; 9- Formas especiais da Geometria de curvatura constante
Presença Projetiva: A geometria projetiva aparece explicitamente como umas das três partes do livro.
Disposição do conteúdo de Geometria Projetiva: A parte da projetiva é iniciada destacando-se seu objeto principal, a projeção de uma imagem num plano em outro. Define detalhadamente o ponto no infinito, a reta no infinito, o plano no infinito. Trata do teorema de Desargues, elencando os axiomas projetivos separados em três grupos.
Observações: Os objetos da Geometria Projetiva são bem detalhados. O espaço projetivo é informado de maneira que o leitor entenda até a razão das denominações feitas pelos matemáticos que constituíram a Projetiva. Porém já trata o teorema de Desargues como conhecido pelo leitor, tornando o texto, neste ponto, hermético.
Recortes: A primeira parte do texto sobre a Geometria Projetiva é relevante e importante para quem quer entender o que é e qual seu objeto de estudo.

A revisão bibliográfica feita neste capítulo foi determinante para conseguirmos elaborar uma sequência conceitual e o conjunto de atividades desenvolvidas, bem como os objetos geométricos pertinentes. Não nos quedamos satisfeitos com as obras mais óbvias, como "*Projective Geometry*" de Ayres, por exemplo, uma vez que o tratamento e a linguagem, no caso, excessivamente algébrica para nossas intenções, não nos interessava. Independente disso, todas as obras tiveram importância para nós, em um ou outro aspecto.

Ayres (1967), nessa obra, faz, a propósito, uma recolocação dos objetivos de Desargues para a fundamentação da Geometria Projetiva, com uma base axiomática e definições dos elementos ideais. Ainda que seja um tratamento não conveniente para o tipo de objetivo que temos nas escolas básicas, a disponibilidade para professores que querem trabalhar com a Geometria Projetiva garante um material bastante completo.

Curiosamente, uma obra das que mais nos interessou, pela disposição didática e, principalmente, pelo tratamento mais sintético, os "*Elementos de Geometria*", (FIC, 1941), publicação traduzida por Raja Gabaglia e presente no Brasil desde os fins do século XIX, conforme Valente (1999), apesar de ser mais uma obra que não estrutura a Geometria Projetiva como um todo, nem confere essa nomeação para os conjuntos de objetos apresentados.

"*Elementos*", previsivelmente, uma obra esgotada para venda original, é encontrada em acervos de sebos virtuais. Consideramos impróprio seu uso como livro-texto para um curso escolar, mas, ao mesmo tempo, admite-se que a sua disponibilidade para consulta por professores é interessante, pela reunião de assuntos geométricos, muitos possíveis de serem implementados em atividades complementares, nas aulas de geometria.

A "*Geometria Elementar*", de Irmão Isidoro Dumont (sem data), uma publicação nos moldes da anterior citada aqui, do FIC, também traz um compromisso de varrer bem uma gama de conteúdos que, à sua época, se considerava importante ser do acesso de estudantes secundaristas. O autor também se esmera em apresentar um estudo de cônicas, com cortes e projeções, que elucidam e embasam vários conceitos correlatos a elas, e que mesmo estudantes de cursos superiores desconhecem hoje.

Sobressai-se em importância, a nosso ver, o estudo que se faz, na publicação de Isidoro Dumont, de feixes harmônicos, um traço inequívoco pelo interesse em extrapolar conteúdos euclidianos elementares tradicionais. Como um todo, consideramos ser uma publicação interessante de se ter como obra de referência.

A publicação "*Geometry Revisited"*, de Coxeter e Greitzer (1967), mostra uma das formas características encontradas em algumas outras publicações: a proposta de se estender a Geometria para além de seu tratamento usual, abrangendo modos alternativos em relação a objetos geométricos, para se compor um corpo de conteúdos. Neste caso, a Geometria Projetiva, explicitada num capítulo à parte, tem essa presença, como um campo geométrico distinto que pode ser explorado.

Essa mesma obra é exemplar, também, da composição de cursos pós-ensino médio, preparatórios para uma caminhada do estudante do ensino superior em áreas das Ciências

Exatas. Estes funcionam com a intenção de ir além do que foi visto pelo estudante em sua formação básica, sempre apresentando novos temas. Salientamos, aqui, que são obras publicadas desde a década de 1960. Teoremas e situações que exploram invariantes projetivos têm presença nessas publicações, como em *"College Geometry"*, de David C Kay (1969).

Nessas publicações, que se dirigem, portanto, aos *colleges* norte-americanos, apesar de não ser uma referência a quem quer conjuntar um curso em Geometria Projetiva, encontramos passagens e tratamentos interessantes para essa ciência. De certo modo, elas mostram uma convivência possível de objetos projetivos com os de outras geometrias, além de demonstrar a emergência da Projetiva como horizonte curricular em Geometria.

Uma outra publicação que foi importante para nós é a de Efímov (1978), *"Geometria Superior"*. Sabemos que se trata de um autor reconhecido na história do ensino de matemática na Rússia, e, de fato encontramos em seu texto um exemplo de preocupação com a qualidade científica e, ao mesmo tempo, didática.

Nessa obra russa, vemos a Geometria Projetiva convivendo tanto com a geometria elementar, ou seja, a euclidiana, quanto com algumas não euclidianas, o que, em nosso entendimento, é sempre um alento para se pensar um currículo mais expandido em geometria escolar.

Apesar de escrito dentro da preocupação axiomática, o texto de Efímov apresenta vários recursos para uma assimilação mais cômoda pelo leitor, especialmente as configurações gráficas e ilustrativas. Há uma nítida preocupação com as representações analíticas para o desenvolvimento dos temas. Do ponto de vista estrutural, o tratamento geométrico é levado para uma compreensão dentro da teoria de grupos, o quem também justifica as várias geometrias expostas no livro. A esse respeito, há um subcapítulo especialmente devotado às transformações projetivas.

4 O CURSO

O curso elaborado em nossos estudos é o objeto maior do Produto Educacional desenvolvido junto a este texto de dissertação. Como já afirmamos, foi organizado através de num processo de sistematização e reconhecimento de textos já publicados, interpretados no tocante a seu teor, profundidade, completude e tratamento.

A versão que acompanha o Produto é uma versão finalizada, já com contribuições críticas de profissionais que tiveram acesso a ela, especialmente os estudantes envolvidos, e que são considerados os sujeitos do curso e de nossas pesquisas e de membros da banca de qualificação. O curso, ao final, premia a prática de situações gráficas, mas ele traz a preocupação com a fundamentação axiomática, com demonstrações de cada objeto científico envolvido em sua proposta.

Um estudo detalhado das obras citadas nos permitiu escolher a maneira pela qual a estrutura do curso seria alicerçada. Após desenvolver uma discussão sobre o espaço projetivo fornecemos ao leitor uma maneira alternativa para o entendimento do teorema de Tales, com o auxílio de tópicos do cálculo diferencial e integral.

Nos capítulos seguintes, usamos da semelhança entre triângulos para tratar da razão anharmônica, tema bem antigo na história da Matemática, mas pouco tratado nas literaturas sobre Geometria. Esse assunto é importante na constituição de teoremas que envolvem colinearidades e incidências, que são objetivos de estudo da Geometria Projetiva.

Nossa intenção ao propor o curso não é mostrar para a comunidade acadêmica que a Geometria Projetiva é ‘melhor’ ou ‘pior’ do que a Geometria Euclidiana, e sim mostrar que existem outras formas para o entendimento do espaço e para instigar os leitores quanto a algumas situações que podem ser observadas como fatos da Geometria Projetiva.

Além de demonstrar teoremas projetivos e discutir assuntos da Geometria Euclidiana de formas inovadoras, buscamos também resolver problemas euclidianos com ferramentas próprias da Geometria Projetiva.

Os desenhos que propomos podem ser elaborados em *softwares* de Geometria Dinâmica, que têm sido bastante utilizados como ambientes investigativos no que tange às regularidades geométricas.

O uso de *softwares* gráficos no trabalho com a Geometria é tema bastante comum em pesquisas educacionais atuais, que, em geral, apontam para uma renovação pedagógica do ambiente de aprendizagem, com novas propostas didáticas de ampliação do uso de recursos eletrônicos de produção e difusão do conhecimento.

Nosso olhar sobre a utilização da informática na educação está de acordo com Perrier e Santo (2006).

> A informática aplicada à matemática não deve estar associada a um modismo ou à necessidade de se estar atualizado com as inovações tecnológicas introduzidas. É necessário que a informática seja um instrumento de transformação das práticas atuais capaz de integrar, conscientemente, o uso do computador no processo de ensino-aprendizagem em matemática. (PERRIER; SANTO, 2006, p. 2).

Entendemos que os *softwares* de Geometria Dinâmica podem colaborar no processo investigativo, pois permitem que os alunos possam movimentar os elementos geométricos, fato que não acontece quando utilizamos a lousa estática. A essa crença somamos uma intuição de que a dinâmica de um *software* gráfico tem em si uma afinidade com a flexibilidade de uso de retas, exigindo poucos atributos para serem usadas em construções projetivas.

Os *softwares* de Geometria Dinâmica e suas potencialidades foram alvo de estudos de Noss e Hoyles (1996). Segundo esses pesquisadores, a possibilidade de explorações dinâmicas permite fazer interagir conhecimentos geométricos já constituídos com um fluxo de interações, numa dialética que abre novas possibilidades matemáticas. (NOSS; HOYLES; 1996).

Utilizar o computador simplesmente para tornar a atividade mais “bonita” para o aluno não é nosso objetivo. Pretendemos utilizá-lo como forma de colaborar com os estudantes na construção de conjecturas no processo de investigação. Esse pensamento vai ao encontro do que argumentaram Noss e Hoyles (1996), quando afirmam haver um contrassenso ao se usar tecnologias informáticas para a reprodução de objetivos educacionais mais tradicionais.

Acreditamos que os softwares de Geometria Dinâmica possibilitam alternativas no trabalho com a Geometria. Segundo Alves e Soares (2003),

> As potencialidades dos softwares de geometria dinâmica, aqui indicadas, são algumas de suas mais importantes características que ajudam a enriquecer o processo de ensino-aprendizagem da geometria, além de valorizar o conhecimento matemático e a sua construção, através das ações de experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar. (ALVES; SOARES; 2003, p. 7)

É com essa perspectiva que pretendemos utilizar o *software* GeoGebra como ferramenta de realização das atividades a serem propostas no curso, conjugadamente a um ambiente presumivelmente didático de produção em grupo, a partir de participações autônomas de estudantes.

A proposta do curso foi levada aos sujeitos, e o vivenciamento dele em situação didática foi a peça principal das atividades de campo em nossa pesquisa.

5 A PESQUISA

Neste capítulo, expomos, mais articuladamente, como nos investimos de uma investigação para que pudéssemos fundamentar as nossas percepções em torno das possibilidades didáticas da Geometria Projetiva. Formulado o nosso problema, como fenômeno para nós mesmos, coube-nos refletir sobre o que mais precisamente nos movia pesquisar - e, definida essa questão de interesse -, sobre como deveríamos proceder metodologicamente para constituir nossas argumentações e análises sobre o conjunto do estudo.

5.1 Uma Questão para Investigação

Constituímos nosso pensamento para configurar uma metodologia de pesquisa a partir das bases fenomenológicas. Para a fenomenologia, a questão de investigação posta em uma pesquisa científica reconduz todo o processo vivenciado, desde o aparecimento de nossos incômodos com um certo tema até a realização de uma síntese ao fim de um ciclo de investigação.

Entendendo o horizonte de pesquisa não como um objeto estático, que se coloca fenomenicamente, o ato de pesquisar passa a desvendar uma região de inquérito, provavelmente, ainda não dominada. Fenômeno é aquilo que se nos mostra tal como ele existe em sua mundaneidade, isto é, sem estar acompanhado de esquemas explicativos e submissos a hipóteses para sua existência. (BICUDO, 2011).

O que temos, e que não devemos abrir mão, é nossa trajetória humana como exploradores, investigadores da temática que abraçamos. Em nosso caso, ao abordamos a Geometria Projetiva como possibilidade curricular, somos pessoas da Matemática, estudamos Geometria e Educação, e, com tudo isso, temos alguns pressupostos, desde aqueles que nos tornam capazes de abrir uma investigação até os que nos tornam presunçosos, decidindo sobre o ‘certo’ e o ‘errado’ para ocorrências nessa temática. Ao pesquisar, no autêntico sentido do termo, devemos abrir mão destes últimos. Como em Husserl (2012), devemos estar dispostos a colocar nossos valores sobre o tema em suspensão, porém sem perder de vista a experiência acumulada.

O fato de fazer um investigando sobre um tema pouco comum, dentro do espectro do estudo em Geometria Projetiva e em seu currículo, contribui para essa atitude metodológica que assumimos da fenomenologia, uma vez que a matéria não esteve presente em nossa formação científica. Portanto, nossa investigação recai não somente sobre um objeto que é contumaz e que a nós caberia dar contribuições, com versões novas e próprias; nossa proposta é não só observar suas possibilidades de se fazer presente na vida de estudantes da Geometria, em ações didáticas, mas, antes, de apresentar suas potencialidades científicas como componentes importantes na busca pela formação de matemáticos e docentes.

Em nosso grupo de estudos, lidamos com a compreensão do fenômeno da Geometria como disciplina escolar, e, dessa experiência, faz parte entender como se delimitam os objetos científicos que farão parte dos estudos geométricos. Deparamos com firmes indicações de possibilidades, e até da importância em se pensar novas práticas curriculares, desde a formação do professor de matemática até as ações na escola básica.

A Geometria, em seu papel escolar, é um assunto aberto a investigações e vem sendo estudado amplamente por pesquisadores. Uma grande parte se dedica a fazer propostas de inovação daquela que chamamos a vertente *elementar* - a caracterizar a que está tradicionalmente posta nos currículos escolares, ocupando um lugar importante no pensamento euclidiano. Nossa proposta é buscar caminhos para as geometrias alternativas, entendendo que estes possam trazer também contribuições para novos modelos, assim como tragam implicações para o modelo usual utilizado em nossa formação e em nossas escolas, questionando-o e compreendendo-o em mais amplitude.

Desse modo, o horizonte que abrimos com a investigação fica delineado: existe uma diversidade de geometrias, tanto em termos de objetos científicos delimitados quando de seu tratamento, especialmente o tratamento didático; queremos contribuir numa das vertentes possíveis dessa variedade, trazendo ao mundo do projetivo para a sala de aula de Matemática.

Ao longo de nossos estudos, fomos compreendendo, também, nossas próprias intenções, que foram se revelando a partir de expectativas ainda obscuras. Entendemos que nosso incômodo maior se constituía em nossa compreensão de que a Geometria, que deve ser compreendida visando a aplicação nas escolas, é fragilmente tratada em suas estruturas científicas, e, usualmente, considerada ao largo de estatutos epistemológicos que a conduzem, tanto por parte de estudantes, professores e quanto nos próprios textos didáticos.

Fomos entendendo que nossa atenção dedicada à Geometria Projetiva, em parte, se devia a um vislumbre de que ela pode representar, ao ser abordada, um modo de compreendermos mais amplamente o universo geométrico. Estudá-la, buscando compreender como ela é em seu estatuto científico, é uma oportunidade de (re)visitar a Geometria que mais usualmente lidamos.

Nosso objetivo específico é analisar como a Geometria Projetiva se mostra aos estudantes como uma ciência do espaço. De uma forma prática, interessa-nos ver como ela contribui na resolução de problemas relacionados ao desenho geométrico – aqui representando o pensamento geométrico sintético, não analítico - sempre procurando traçar correspondências com o pensamento euclidiano, já que este é um ponto de partida inexorável.

A questão elegida como foco para nossa pesquisa, para nosso caso, tem que refletir a realidade onde nos encontramos, buscando um estágio mais preliminar de abordagem do tema. Assim, desejamos levantar algumas perguntas: Qual Geometria Projetiva estruturar? "Quais objetos geométricos são fundamentais, e até qual estágio de estruturação dessa ciência trabalhar?" A essas perguntas respondemos com a estruturação original do curso proposto.

Mas, precisamos, também, perguntar pelo como: "Como estruturar uma proposta didática que permita à Geometria Projetiva ser apresentada e trabalhada de modo a viabilizar o conteúdo escolar?" Esse 'como' é desenvolvido pela presente pesquisa, que faz um inventário e analisa os modos possíveis de apresentar os conteúdos, incluindo os recursos didáticos envolvidos.

Acreditando que a redação escrita de uma ideia ajuda a estruturá-la, expressamos assim o foco central da pesquisa: 'Como um curso básico e introdutório de Geometria Projetiva pode contribuir para os licenciandos repensarem a Geometria estruturalmente, de modo ampliado e em seus fundamentos?'

5.2 O Porquê de uma Pesquisa de Campo

A primeira versão elaborada para o curso foi trabalhada de forma prévia e experimental, junto a entrevistados selecionados para a pesquisa de campo - licenciandos da segunda metade da graduação em Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. Programamos para que fosse desenvolvido em uma disciplina de Geometria, a qual já mantinha uma disposição curricular para práticas de tópicos alternativos.

Foram projetadas três semanas de aulas, num total de seis encontros de duas horas cada, desde a apresentação do material até o desenvolvimento de atividades teóricas e construtivas propriamente, com utilização de régua, compasso e *software* gráfico. Pensamos solicitar dos participantes a elaboração de relatórios paulatinos, como parte da estratégia para acompanhamento das atividades em campo, constando de registro paralelo das atividades; esses relatórios constituiriam, mais tarde, material para análises interpretativas dos pesquisadores.

A criação de um ambiente didático favorável, com um grau de abertura e com possibilidades de movimentações, favoreceu que os alunos não somente correspondessem às tarefas propostas, mas que participassem ativamente de sua implementação, aumentando a significância de suas manifestações positivamente à qualidade dos dados a serem analisados.

Uma pesquisa de campo, para nós, se justifica quando, mesmo com toda uma fundamentação para a preparação de uma proposta de curso, esse não se sustenta por si. O modo como os sujeitos irão perceber e responder às atividades se torna o mais importante, e, o curso em si, passa a ser um pretexto para que a atmosfera da geometria possa acontecer, e que os horizontes para a significação geométrica possam emergir e ser verdadeiros. Essa autenticidade reflete na qualidade de dados coletados, e, consequentemente, nos resultados a serem obtidos.

A pesquisa contou com a participação de seis licenciandos em Matemática, todos com créditos já cumpridos em Geometria Plana. A eles foi disponibilizado previamente o material teórico do curso. Em três dias principais de atividades coletivas, os pesquisadores apresentaram o curso, sempre abrindo à participação dos alunos, para que estes se colocassem nas atividades demonstrativas e nos exercícios de aplicação dos conceitos.

5.3 As Atividades no Ambiente de Pesquisa

Com relação ao referencial teórico que embasa as atividades propostas para o trabalho de campo com os sujeitos da pesquisa, aplicamos atividades que envolvem a exploração e a investigação matemática, mediadas especialmente pelo computador. Este aspecto permeia o que apresentamos no curso, mas, ainda mais, no modo em que foi levado aos estudantes participantes.

Nossa visão sobre questões relativas ao ensino e aprendizagem de matemática se aproxima a dos educadores matemáticos, que buscam uma metodologia didática expositiva, na qual o aluno é tratado como um colecionador de verdades.

Acreditamos que um ambiente em que os alunos possam discutir, formular propostas de resolução, a errar e tentar corrigir, contribui para a construção do seu conhecimento matemático.

Para sustentar a discussão sobre as atividades exploratórias e investigativas recorremos a Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), que as qualificam perante à maneira tradicional de se ensinar matemática:

> O processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para frente e para trás. Essa perspectiva contrasta fortemente com imagem usual dessa ciência, como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, qual edifício sólido, paradigma do rigor e da certeza absoluta. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.15).

Entendemos que devemos explicitar as diferenças existentes entre um exercício convencional e uma tarefa investigativa. Assim, o estudante se torna livre na busca de estabelecer regularidades. Movidos por esse espírito observador e crítico, podem ser feitas descobertas que mesmo o preparador de uma atividade ainda não havia vislumbrado.

Nos apoiamos, ainda, no educador matemático George Polya, ao comentar sobre a importância do trabalho desenvolvido pelo aluno. Segundo ele,

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com o auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho. (POLYA, 1995, p. 1).

Portanto, a postura do professor no trabalho investigativo deve ser a de mediador, ou seja, deve estimular no aluno à criticidade, colaborando para que este senta-se autônomo no desempenho da atividade. Para que a investigação aconteça, devemos fornecer aos estudantes um ambiente propício para que essa ação seja exercida. Vemos o laboratório de informática como ideal nessa proposta de trabalho, e cremos que toda iniciativa docente, em prol de suscitar dados para análises, acaba sendo um momento formador para os futuros profissionais.

5.4 Análise do Pesquisador sobre a Experiência Vivida no Curso

Sobre os já referidos relatórios elaborados pelos alunos durante o curso, esses resultaram em dados que foram analisados pelos pesquisadores. A intenção foi utilizar as sugestões da fenomenologia como modo de constituir um pensamento qualitativo na constituição da metodologia a ser aplicada.

Basicamente, os procedimentos metodológicos constaram de dois momentos principais: o de **análise ideográfica**, no qual as manifestações dos sujeitos são colhidas e interpretadas como **ideias significativas** genuínas sobre a experiência vivida no e com o curso e, posteriormente, e o de uma **análise nomotética**, em que as ideias constituídas possibilitaram convergências para **grupos e núcleos de significação**, constituindo interpretações mais abrangentes para a compreensão do fenômeno pesquisado (sempre a experiência vivenciada pelos participantes do curso com o material proposto), e quando foram sugeridos **nomes**, os quais, desejamos, possam ser compreendidos e considerados pela comunidade de educadores matemáticos.

As manifestações dos participantes, além daquelas presenciadas durante as sessões didáticas – das quais não foram tomados registros -, foram norteadas por um conjunto de 3 ou

4 perguntas que eram respondidas ao final de cada seção, por escrito em um impresso distribuído. Abaixo, relacionamos tais perguntas. Nossa intenção era provocar uma oportunidade para a manifestação dos participantes, desejando que os mesmos extrapolassem o sentido estrito nas perguntas, elaboradas com a intenção de não os influenciar.

1ª. sessão

1) Além das circunstâncias você (aluno da disciplina), tem interesse por experienciar ´novas´ geometrias? Por quê?
2) A sessão (aula) de hoje foi esclarecedora, junto com o material do curso, para pôr em campo as ideias primeiras da Geometria Projetiva? Como cada conceito visto fez com que você não perdesse de vista a ideia geral da Geometria Projetiva?
3) Que noções ou conceitos (ou objetos) geométricos você mais achou interessante? Por quê?

2ª. sessão

1) Com a sessão de hoje, você constituiu mais compreensão dos conceitos e objetos da Geometria Projetiva? O que ajudou nisso?
2) As situações trabalhadas tiveram alguma familiaridade, uma vez que a Geometria Projetiva é uma ciência talvez inédita a você (familiaridade é aquela característica que, mesmo você ainda não tendo entendido uma situação, pelo menos ela não lhe parece totalmente estranha)? Nesse sentido, você viu muita diferença com relação ao ´mundo´ geométrico que já domina?
3) As situações aplicadas ajudaram a você a compreender mais o sentido de uma Geometria Projetiva? Como?

3ª. sessão

1) A Geometria Projetiva, finda essa última sessão, já se desenhou como um horizonte geométrico distinto do que você conhecia de outros modos? O que você pode dizer desse horizonte?
2) As situações trabalhadas com o GeoGebra foram interessantes? Permitiram a você se sentir praticante no projetivo? Fale sobre.
3) Por fim, o material disponibilizado se mostrou interessante sob o ponto de vista didático? O que poderia ser diferente nele?
4) Fale como você viu a potencialidade que o GeoGebra tem para se trabalhar situações projetivas.

Nesse texto se encontram os quadros que mostram o movimento de nossas análises desde a transcrição da manifestação dos sujeitos (1ª coluna), passando por uma interpretação – que representa uma adequação de linguagem (2ª coluna) -, e, numa última coluna, a ideia significativa –, nomeada aqui simplesmente de ideia -, que transcrevem, de forma mais essencial e capital, o que o sujeito manifestou. As tabelas representam, portanto, o movimento das nossas análises ideográficas. Identificamos 32 ideias distintas, muitas delas se repetindo ao longo das análises e, portanto, recebendo mesmas numerações.

As ideias distintas foram numeradas de 1 a 32. A numeração de cada uma traz a tríade I – P – S (ideia-pergunta-sessão). Por exemplo, a ideia 10-3-1 é a décima ideia distinta, ocorrida na pergunta 3, da sessão 1. A disposição de cada sujeito nas dez tabelas – e sua resposta - não é ordem geral; o primeiro de uma pode não ser o primeiro de outra.

Abaixo seguem os quadros com as manifestações transcritas além das análises efetuadas.

Quadro 1-1 (Pergunta 1, 1ª sessão):

Além das circunstâncias você (aluno da disciplina) tem interesse por experienciar ´novas´ geometrias? Por quê?			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	Sim, por ter uma dificuldade no começo da geometria...	Uma nova geometria permite refazer sua trajetória de estudante	Novo tratamento permite reconduzir a constituição do conhecimento geométrico (ideia 1-1-1)
	Novas formas vêm mudando as minhas perspectivas	Aberturas de novos horizontes geométricos	
2	Sim, ampliar o conhecimento do futuro professor	Novas geometrias permitem uma formação além do que se vai ensinar	Percepção da validade de se ampliar a estrutura conceitual da Geometria (ideia 2-1-1)
	Enriquecer as aulas do futuro professor	Novos modos ampliam o repertório do professor	Importância de alternativas na formação do professor (3-1-1)
	Uma nova forma de ver o mundo já para o aluno do ensino básico	Geometria como componente cosmológico para a formação profissional	
3	Não; ainda não senti necessidade. Não me despertou interesse	Vê importância na necessidade, pessoal e profissional, e isto não ocorreu	Refratário à iniciativa (4-1-1)
4	Novas geometrias abrem visão da matemática que já temos	Ampliação dos horizontes geométricos	(1-1-1)
5	Sim, desde estudar Geometria Plana passei a ter um certo interesse	Cita disciplina que tem como primeiro conteúdo um estudo introdutório de todo o mundo geométrico científico	Geometria Projetiva realiza uma expectativa criada durante a licenciatura (5-1-1)
	Aluno do ensino médio tem interesse em descobrir aplicação de várias geometrias	Alternativas geométricas tem respaldo na sala de aula	(2-1-1) (3-1-1)

	Tem importância em minha formação de professora		(3-1-1)
6	Sim, para engrandecimento pessoal	Contribuição para a formação da cultura matemática própria	Importância na formação cultural matemática (6-1-1)
	Estudo de geometrias abre muitas possibilidades de descobertas	Mais de uma geometria abre novos horizontes	(2-1-1)

Quadro 2-1 (Pergunta 2, 1ª sessão):

2) A sessão (aula) de hoje foi esclarecedora, junto com o material do curso, para pôr em campo as ideias primeiras da Geometria Projetiva? Como cada conceito visto fez com que você não perdesse de vista a ideia geral da Geometria Projetiva?

Sujeito	Manifestação	Interpretação	Ideia
1	Bastante, principalmente a ideia de infinito foi muito esclarecedora e em alguns momentos abstrata, mas sem perder o foco de que estamos fazendo uma construção projetiva	As ideias apresentadas foram esclarecedoras	Eficiência dos recursos disponibilizados (ideia7-2-1)
		Apesar de abstrato fez sentido a constituição do espaço projetivo.	Constituição de uma nova ciência (ideia 8-2-1)
2	Muito esclarecedora. Durante a aula sempre foram trabalhados os conceitos de geometria plana, sempre refletia na base da projetiva, que é o ponto ideal, o que foi bem interessante.	As ideias apresentadas foram esclarecedoras	(7-2-1)
		Interessou-se pelo espaço projetivo	(8-2-1)
3	Achei o material excelente, porém senti falta de um tempo maior para analisar e entender melhor a composição do material.	O material foi bem produzido	(7-2-1)
		Falta de tempo para compreender melhor o material	A metodologia não colaborou com a compreensão (ideia 9-2-1)
4	Sim, a aula e o material cumpriram o que pretendiam. Cada conceito abordado tratou do seu tema específico, mas sem fugir do proposto (primeiras ideias da geometria projetiva); as explicações dadas para cada conceito juntam na ideia do espaço projetivo, sem perder a linha de pensamento proposta inicialmente.	As ideias apresentadas foram esclarecedoras e o material foi didático.	(7-2-1)
		O espaço projetivo foi compreendido.	(8-2-1)
5	A partir da aula de hoje, pude ter a noção do que é a geometria projetiva (que eu não conhecia). Achei o material disponibilizado por e-mail e o fornecido pela TV fazem com que a visão geral da geometria projetiva não se perdesse. Porém, é ainda melhor quando o professor passa seus pensamentos no quadro negro.	As ideias apresentadas foram esclarecedoras.	(7-2-1)
		Os recursos didáticos foram eficientes no entendimento da constituição da geometria projetiva.	(8-2-1)
6	Não consegui acompanhar a visualização da geometria projetiva, porém seu caráter pontual foi possível estabelecer ligações entre a parte geométrica e algébrica abordada.	Não compreendeu as ideias iniciais.	(9-2-1)
		Entendeu a parte algébrica apresentada.	(7-2-1)

Quadro 3-1 (Pergunta 3, 1ª sessão):

3) Quais noções ou conceitos (ou objetos) geométricos você mais achou interessante? Por quê?

Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	A sessão como um todo, principalmente o teorema de Menelau associado ao cálculo diferencial, o que de fato aguçou minha curiosidade. Ficou muito nítido o fato de Tales ser um caso particular.	A associação do cálculo com a geometria, proporcionando um novo entendimento do teorema de Tales, aguçou a curiosidade do sujeito .	Articulação entre cálculo e geometria (ideia 10-3-1)
2	O conceito geométrico que mais me chamou atenção foi o conceito ponto ideal, pois ele é gerado por conceitos que já conhecemos na geometria euclidiana, dando uma ideia de expressão da geometria euclidiana.	Os elementos novos: pontos, retas e plano do infinito despertaram a curiosidade do sujeito.	Elementos constituintes da geometria projetiva (ideia 11-3-1)
		Percebeu que o plano projetivo é uma extensão do euclidiano.	Reimplementação do euclidiano (ideia 12-3-1)
3	O processo em que se chegou à conclusão que o Teorema de Tales é um caso particular do Teorema de Menelau. Porque o Teorema de Tales é um dos Teoremas mais importantes da Geometria Euclidiana. Acredito que o modo como foi exposto foi bastante interessante.	A maneira como foi conduzido o processo de colocar Tales como um caso particular do Teorema de Menelau despertou o interesse do sujeito. Tem consciência que o Teorema de Tales é muito importante na proposta euclidiana.	10-3-1
4	O conceito de Reta do Infinito, juntamente com Ponto no infinito e a noção de que tendendo para $+\infty$ ou para $-\infty$ chegamos ao mesmo ponto. Pois mostra que as paralelas se encontram e explicou como isso acontece nessa geometria	Os elementos do espaço projetivo despertaram interesse no sujeito	11-3-1
		Achou interessante o fato da reta projetiva ser uma "curva", já que ambos lados tendem para o ponto ideal.	11-3-1
5	Na minha opinião, o conceito geométrico mais interessante dessa primeira aula foi o de Retas Paralelas. Saber que as retas paralelas se encontram em um ponto infinito e ideal me deixa mais interessado em estudar a geometria projetiva, pois essa parte é totalmente diferente daquela que estamos acostumados, ou seja, da geometria euclidiana.	As considerações feitas sobre as paralelas euclidianas despertaram interesse no sujeito.	11-3-1
		Uma maneira alternativa de lidar com os elementos geométricos já conhecidos pelo sujeito foi analisada como principal motivador no estudo da geometria projetiva	Maneira alternativa de lidar com elementos geométricos (ideia 13-3-1)
6	O conceito mais interessante foi o de Ponto Ideal e como ele criou uma conexão do cálculo com a geometria.	A articulação entre cálculo e geometria foi vista como interessante pelo sujeito.	10-3-1

Quadro 1-2 (Pergunta 1, 2ª sessão):

1) Com a sessão de hoje, você constituiu mais compreensão dos conceitos e objetos da Geometria Projetiva? O que ajudou nisso?			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	Sim, de acordo com a argumentação mostrada em sala, tornou a questão da divisão harmônica e anharmônica muito mais clara e objetiva, bem como o teorema de Desargues.	Percebeu que a razão anharmônica é ferramenta de trabalho para obtenção de resultados projetivos.	Aspectos teóricos da própria geometria projetiva (ideia 14-1-2)
2	Sim, nessa aula aprendemos novos teoremas que são extensão da geometria euclidiana. Isso contribui para reforçar os conceitos de ponto ideal, entre outros.	Viu o plano projetivo como extensão do plano euclidiano, colaborando com os conceitos aprendidos na sessão anterior.	Relacionamento do euclidiano e projetivo (ideia 15-1-2)
3	Sim, os desenhos feitos pelo professor Marcelo no quadro são de grande auxílio para compreensão do que está sendo trabalhado. Às vezes, fica um pouco difícil enxergar na televisão e, então, o desenho ajuda muito. Além disso o GeoGebra auxilia bastante.	O sujeito, apesar de não ter comentado sobre os conceitos abordados na sessão, considerou os recursos utilizados, como o GeoGebra, fundamentais na compreensão dos assuntos.	Recursos didáticos auxiliando na compreensão (ideia 16-1-2)
4	Sim, constituí. Abordar mais conceitos e mais teoremas ajudou a aumentar minha compreensão; o conhecimento de geometria projetiva está sendo construído.	O trabalho com os teoremas importantes da Geometria projetiva trouxe uma maior visibilidade sobre a questão estudada.	14-1-2
5	Sim, expandiu muito minha compreensão; O que ajudou no processo foram as demonstrações, unidas a visualização geométrica.	As tarefas demonstrativas aliadas as visualizações propostas colaboraram para que o sujeito compreendesse o espaço projetivo.	14-1-2 16-1-2

Quadro 2-2 (Pergunta 2, 2ª sessão):

2) Você tinha familiaridade[3] com as situações trabalhadas, uma vez que a Geometria Projetiva seja uma ciência talvez inédita? Nesse sentido, você viu muita diferença com relação ao ´mundo´ geométrico que já domina?			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	Sim, como no exemplo da questão da olimpíada mundial de matemática, onde por projetiva fica muito mais clara a resolução do mesmo. Bem como os raios comuns que me parece haver alguma incidência com os raios de incidência.	A familiaridade destacada foi descrita por um problema de geometria plana que poderia ser resolvido de maneira mais simples, por elementos projetivos.	Observação de familiaridade (ideia 17-2-2) Riqueza da projetiva em resoluções de problemas (18-2-2)
2	Tiveram alguma familiaridade, mas ela foi trabalhada matematicamente. As diferenças sem dúvidas são maiores.	Destacou que existiu uma familiaridade, mas notou que a projetiva e a euclidiana são distintas.	17-2-2 Geometrias distintas (ideia 19-2-2)
3	Foi possível enxergar uma familiaridade com a geometria projetiva mesmo sem eu nunca ter visto, pois se aproximou um pouco da geometria euclidiana que eu já conhecia.	A familiaridade entre as geometrias foi relatada mesmo o sujeito não conhecendo a geometria projetiva.	17-2-2
4	Teve alguma familiaridade sim, mas teve também uma diferença considerável com o que eu já domino, como as provas dos teoremas e as ferramentas usadas nelas.	O sujeito notou que as geometrias são familiares, porém destacou que a geometria projetiva se mostra distinta na maneira de se constituir pelas ferramentas novas apresentadas.	17-2-2 19-2-2
5	Percebi muita similaridade entre a geometria euclidiana e a projetiva, porém fica claro durante o processo a robustez da projetiva na demonstração de problemas.	Destacou que percebeu uma familiaridade porém exaltou a qualidade da geometria projetiva na resolução de alguns problemas geométricos.	17-2-2 18-2-2

[3] Explicitando-se para o participante que por familiaridade entende-se aquela característica de algo ou alguma situação em que, mesmo que ainda não se tenha entendido, ela não seja pelo menos totalmente estranha.

Quadro 3-2 (Pergunta 3, 2ª sessão):

3) As situações aplicadas ajudaram a você a compreender mais o sentido de uma Geometria Projetiva? Como?			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	Em absoluto, nesta presente aula, pude claramente ver uma maior aplicabilidade da geometria projetiva	A sessão colaborou com a compreensão do sujeito.	Aplicabilidade da projetiva (ideia 20-3-2)
2	Sim, a razão anharmônica nos dá uma base e curiosidade. Com ela, trabalharemos conceitos mais específicos que resultaram em novos teoremas como o de Pappus e Desargues	A sessão colaborou com a compreensão do sujeito. Percebeu que as razões anharmônicas servem como base para obtenção de novos resultados, como o teorema de Pappus e o de Desargues.	Aspectos teóricos da própria projetiva (21-3-2)
3	Sim, os teoremas de Menelau e Pappus ajudaram bastante na compreensão das matérias vistas na aula de hoje.	A sessão colaborou com a compreensão do sujeito. Destacou como o teorema de Menelau foi importante na constituição da projetiva.	21-3-2
4	Sim, utilizando os conceitos da geometria projetiva para provar os teoremas.	A sessão colaborou com a compreensão do sujeito. As demonstrações foram destacadas como importantes no processo.	21-3-2
5	A principal ferramenta para compreender melhor a Geometria Projetiva foram os desenhos, que me ajudaram a engrandecer minha visualização da mesma.	Os desenhos produzidos promoveram visualizações que foram destacadas pelo sujeito.	Recursos visuais (ideia 22-3-2)

Quadro 1-3 (Pergunta 1, 3ª sessão)

1) A geometria Projetiva, finda essa última sessão, já se desenhou como um horizonte geométrico distinto do que você conhecia de outros modos? O que você pode dizer desse horizonte?			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	De forma global ainda não consigo visualizar a geometria projetiva	Somente a experiência no curso não foi suficiente para vislumbrar a ciência projetiva	(23-1-3) Aspectos relativizados da condição de aprendiz
	Com toda certeza é uma geometria diferente, porém com elementos semelhantes à euclidiana	Percepção de um novo espaço geométrico, porém com alguma familiaridade a partir do euclidiano	(1-1-1)
	O horizonte projetivo representa um avanço valoroso para a geometria, e com grande aplicabilidade	A GP é reconhecida como uma ampliação da geometria já conhecida, com presença justificada em aplicações	(2-1-1) (20-3-2)
2	Até o presente, me vi imerso na euclidiana, tinha aquela geometria como única e verdadeira	Uma nova geometria reconduz a necessidade de atualizar compreensão epistemológica	(1-1-1)
	Algumas ideias da geometria euclidiana são particularidades de alguns modelos da GP	Correspondência com o Euclidiano, de certa forma de pertinência, ajuda a compreender o novo mundo geométrico	(2-1-1)
3	Não distingui um horizonte muito diferente do que eu já estava acostumada com a geometria euclidiana.	Um horizonte próprio da GP ainda não se configurou	(23-1-3)
	Foi possível destacar alguns pontos que diferenciam as duas, como por exemplo o encontro das paralelas no "ponto infinito",	Pontualmente, há alguns momentos que deslocam a GP da Euclidiana	(1-1-1)
4	É sim um horizonte distinto, mas acredito que não seja um horizonte completamente diferente, pois algumas ideias da geometria aparecem na projetiva também	GP é compreendida em familiaridade com objetos da euclidiana	(24-1-3) trânsito entre geometrias diferentes amplia compreensão
	Esse horizonte possui ferramentas mais sofisticadas para resolver problemas que antes seriam mais difíceis e agora se tornaram mais simples.	Compreensão da implicação de novos objetos geométricos em novos métodos de resolução	(25-1-3) compreensões sobre elementos constituintes da GP
5	O curso me ajudou a expandir minha visão geométrica e a lidar com abstrações	A ampliação do espaço geométrico para o projetivo contribui para um todo de conhecimento	(1-1-1)

Continua

Quadro 1-3 (continuação)

	Achei fantástico as demonstrações dos teoremas;	**O modo como a GP se coloca traz efetividade ao aluno**	**(25-1-3)**
	é um curso que eu gostaria de fazer por completo	Compreensão da validade do estudo para sua formação	(5-1-1)
6	A geometria projetiva é diferente da geometria euclidiana, pois deve resolver problemas que a euclidiana não resolve.	Contribuição para a formação da cultura matemática própria	(2-1-1)
		Compreensão de que a GP cria um mundo temático próprio, ainda que remissivo ao euclidiano	(1-1-1)

Quadro 2-3 (Pergunta 2, 3ª sessão)

2) As situações trabalhadas com o GeoGebra foram interessantes? Permitiram a você se sentir praticante no projetivo? Fale sobre.			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	As situações trabalhadas me possibilitaram entender a geometria projetiva como uma ferramenta bastante útil matematicamente.	Confirmação do software como ambiente propício para a GP.	(26-2-3) Características do software acolhem a dinâmica do projetivo
	Essa prática feita através do GeoGebra, trouxe uma maior familiaridade com a geometria projetiva	Software potencializa inteirar com a GP	(27-2-3) Potencialização didática do software
2	O auxílio da ferramenta do GeoGebra facilitou e até melhorou o meu entendimento e compreensão de todo o processo	Software potencializa inteirar com a GP	(27-2-3)
	Ainda tenho dificuldade em pensar de forma não e Euclidiana (projetiva), mas acredito que este movimento é um processo	Software não foi suficiente, mas abriu perspectivas.	(28-2-3) Uso do software não é suficiente
3	O GeoGebra [...] para os problemas que envolvem geometria projetiva foi muito interessante e esclarecedor.	Confirmação do software como ambiente propício para a GP.	(27-2-3)
	Porém, não foi possível formar um novo horizonte sobre a geometria projetiva, eu entendi os conceitos de maneira mais pontual	Software não ajudou nas compreensão global da GP, mas contribuiu para desenvolver situações.	(28-2-3)
4	As situações foram sim interessantes e me fizeram perceber e participar da parte prática.	Software potencializa inteirar com a GP	(27-2-3)
	Elas trouxeram uma ideia inicial de como é a prática projetiva.	Software ajuda em situações projetivas	(28-2-3)
5	O GeoGebra ajuda em muito do didatismo, deixando as explicações muito mais claras e objetivas, mais palpáveis	Software arremata com qualidade a proposta de atividades em GP	(27-2-3)
6	Trabalhar com o GeoGebra foi importante, pois permitiu ter uma noção muito maior da extensão de determinados conceitos, sendo o software um aplicativo dinâmico, pude perceber a ideia de feixe com uma maior amplitude do que seria sem o GeoGebra	Software é capaz de trazer mais significados geométricos, para a GP	(27-2-3)
		Caráter dinâmico do software se afina com a dinamicidade do feixe projetivo	(26-2-3)

Quadro 3-3 (Pergunta 3, 3ª sessão)

3)Por fim, o material disponibilizado se mostrou interessante sob o ponto de vista didático? O que poderia ser diferente nele?			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	O trabalho todo foi bem pensado e organizado de uma forma bem coerente [...] as demonstrações [...] muito claras e de fácil entendimento.	Reação positiva ao material, valorizando demonstrações	(29-3-3) Acertos na proposta didática do material
	Baseando-se sempre em uma perspectiva geométrica	Elogio enfático ao caráter sintético de tratamento	(30-3-3) Acertos na proposta metodológica do material
2	Achei o material coeso, traz todo o processo histórico da geometria projetiva.	Reação positiva ao material, valorizando coesão e sentidos históricos	(30-3-3); (6-1-1)
	aborda a discussão de que na Educação Básica é ensinada aos alunos somente a geometria euclidiana, os alunos admitem a geometria euclidiana como única	Material permite ir além do científico, apresentando discussões profissionais futuras	(3-1-1)
	Considerei o processo investigativo muito importante, até mesmo motivador.	Elogio à proposta didático-metodológica do material	(29-3-3); (O-3-3)
3	Interessante e auxilia bastante o estudo, pois o conteúdo é bem explicado e o as demonstrações são feitas passo a passo. Assim, é possível acompanhar a matéria.	Elogio à proposta didático-metodológica do material	(29-**3**-3); (O-3-3)
4	O material foi interessante, funcionou como estudo complementar do que foi visto em sala.	Valor complementar do material à apresentação do conteúdo	(30-3-3)
	O material estava bem construído com as figuras descrevendo os conceitos, as demonstrações bem esquematizadas.	Reação positiva ao material, valorizando demonstrações e a importância de figuras gerarem sentidos para a compreensão	(29-3-3)
5	importante as demonstrações serem mostradas e o material me pareceu bastante completo nesse quesito .	Reação positiva ao material, valorizando demonstrações	(29-3-3)
6	O material se demonstrou muito didático, a ponto de pensar em estudar ele nas férias com mais calma.	Elogio à proposta didático-metodológica do material. Incorporação à sua formação como professor.	(20-3-3); (30-3-3); (3-1-1)
	Talvez poderia ter mais exercícios, mas achei muito bom.	Sugestão de ter mais exercícios	(31-3-3) Contribuição sugestiva à potencialidade do material

Tabela 4-3 (Pergunta 4, 3ª sessão)

3) Fale como você viu a potencialidade que o GeoGebra tem para se trabalhar situações projetivas			
Sujeito	**Manifestação**	**Interpretação**	**Ideia**
1	Como a geometria projetiva utiliza em suas construções essencialmente retas, o GeoGebra se torna uma ferramenta de grande potencialidade	Software condiz com a principal característica operacional da GP, uma geometria de retas	(32-4-3) características epistemológicas da GP são acolhidas no software
2	[O aluno] trabalha de forma investigativa, o que pode trazer diversas questões e descobertas no processo construtivo.	Software condiz com uma proposta didática investigativa	(27-2-3)
	uma forte ferramenta para se trabalhar todo e qualquer assunto	Vê o software como potencial em geral	(23-1-3)
3	A utilização do GeoGebra é interessante, porque é possível visualizar que várias figuras são feitas apenas com régua e compasso.	Software reforça o espírito de trabalho sintético da Geometria	(32-4-3)
	muitas vezes ao se fazer no papel o espaço não é suficiente	A espacialidade permitida pelo software é generosa	(27-2-3); (32-4-3)
4	É uma ferramenta muito potente, no caso das atividades projetivas o GeoGebra ajudou a enxergar onde as construções queria chegar [...]	Espacialidade reproduzida pelo software permite uma interação que se vislumbra antecipações	(27-2-3)
5	Gostei muito da geometria projetiva como um todo, principalmente da parte infinitesimal, com o GeoGebra conseguimos ver na prática [...].	Software coaduna-se com as compreensões infinitesimais	(32-4-3)
	As melhores aplicações foram o teorema de Menelaus e o quadrilátero completo que foi uma novidade para mim e me surpreendi com sua vasta aplicabilidade.	Os desdobramentos de um assunto têm uma organização permitida no software	(26-2-3)
6	Apesar do GeoGebra não ter sido pensado para trabalhar a geometria projetiva, ele se demonstrou útil pois muitos conceitos da geometria euclidiana são usados na projetiva, o que o software consegue abordar e, portanto, tem um bom potencial para a projetiva.	Software é um espaço de transições compreensivas entre geometrias	(24-1-3)

O **primeiro movimento** até as ideias, que entendemos pela fenomenologia, corresponde ao esforço de ser fiel ao dado, sem contraposição com ideias que sejam preconcebidas. Depois cumprida essa etapa, iniciamos um **segundo movimento**, já com preocupações nomotéticas. Fizemos primeiro agrupamentos de ideias, constatando oito grupos de significação – ou, simplesmente grupos -, os quais, de acordo com a interpretação dos pesquisadores, reúnem ideias próximas. Neste movimento, temos em vista constituir as estruturas da compreensão, ouvindo os sujeitos. Algumas ideias se repetem em mais de um grupo. Configuramos oito grupos, dispostos no quadro a seguir:

Figura 1 – Agrupamento de ideias

GRUPO	IDEIAS
G1	1-1-1, 8-2-1, 10-3-1, 13-3-1, 19-2-2, 24-1-3
G2	2-1-1, 8-2-1, 15-1-2, 12-3-1
G3	3-1-1, 5-1-1, 6-1-1, 8-2-1
G4	4-1-1, 9-2-1, 23-1-2
G5	7-2-1, 16-1-2, 17-2-2, 22-3-2, 29-3-3, 30-3-3, 31-3-3
G6	11-3-1, 12-3-1, 14-1-2, 15-1-2, 21-3-2, 25-1-3, 32-4-3
G7	20-3-2, 21-3-2
G8	26-2-3, 27-2-3, 28-2-3, 16-1-2, 22-3-2

Fonte: Dos autores, 2017

Em seguida, passamos a enumerar e descrever os grupos conforme estes se delinearam, classificados por assunto, a partir das respostas apresentadas pelos participantes.

G1: Modos da compreensão do projetivo

As ideias do grupo 1 nos possibilitam ver como os sujeitos desenvolveram compreensões do projetivo a partir das percepções que tiveram ao vivenciar o curso. Em sua obra "*A origem da Geometria*", Edmund Husserl põe interrogativamente este título, dizendo não querer saber dos fundamentos históricos propriamente, mas em que momento, a cada aprendiz, a geometria nasce como um fazer intelectual humano, em distinção a qualquer coisa previamente já conhecida pelo mesmo. Obviamente, que sugestionados por toda a realização de atividades específicas, os sujeitos manifestaram uma série de modos segundo os quais a Geometria Projetiva foi se processando como um especializar próprio e distinto de outros que conheciam.

Como tarefa da pesquisa, esses modos são significativos, já que nos importamos com uma lucidez de entendimento da ciência, e não só o conhecimento de objetos científicos e o domínio de técnicas. Entendemos, conclusivamente, que o curso elaborado e sua aplicação nos moldes dados foi capaz de suscitar elementos para esse entendimento.

Não há manifestação (e, portanto, ideia) que crucialmente denote tal premissa, mas as ideias agrupadas convergem para tanto. Algumas delas expressam que o espaço euclidiano elementar constitui uma base que serve de ponto de partida. Porém, várias delas dizem que estudar o projetivo faz suscitar a tarefa de reconstituição do espaço, seja pela necessidade se compreender uma amplitude geométrica maior que o elementar, seja em observar distinções entre o euclidiano e o projetivo. Chama a atenção o que um sujeito diz dessa distinção, quando ela é observada a partir do modo com que os recursos, especialmente os eletrônicos, são utilizados.

Uma determinada manifestação nos fala sobre o reconhecimento de um fazer geométrico distinto do costumeiro, e que os recursos didáticos adotados foram apontados como estímulos. As familiaridades com o euclidiano, bem como a identificação pontual no desdobrar para o projetivo foram reconhecidas enquanto elementos fomentadores de um pensamento geométrico novo, que permitiram a exposição didática, as atividades e o *software*.

G2: A validade de se ampliar a estrutura conceitual da Geometria

Em sua grande maioria, os sujeitos participantes manifestaram uma concordância quanto à importância da experiência vivida para sua formação científica e profissional, no tocante à ampliação da informação sobre o mundo geométrico.

As ideias organizadas neste grupo 2, respondem bem frontalmente ao que foi argumentado neste texto, acerca da importância de uma compreensão mais ampla do professor sobre o assunto que ele vai transmitir a seus alunos. Os alunos dizem que estudar outras geometrias traz esse ganho de formação, e outros, já com experiência do mundo profissional, garantem que os alunos do ensino básico têm interesse em vivenciar geometrias alternativas à tradicional.

Os sujeitos fazem registro de um ganho cultural científico quando lhes é apresentado um exercício de espacialização, e que foi possibilitado a partir da Geometria Projetiva, sobretudo em suas abstrações junto a elementos ideais. Ao mesmo tempo, em situações práticas, o trânsito exercitado entre o euclidiano e o projetivo lhes trouxeram oportunidade de revisitar aquele, segundo revelam.

Os participantes do curso enfatizam que os materiais didáticos utilizados, bem como a performance do professor do curso foram determinantes para assegurar as compreensões projetivas a partir do conhecimento prévio que cada um possuía da geometria.

G3: Importância de uma geometria alternativa na formação

Sendo a amostra de campo da pesquisa composta por licenciandos, era de se esperar que manifestações relativas à sua formação profissional surgissem. Foram identificadas ideias desse grupo 3 que mostram isso em alguns vieses. A formação científica logo emerge como dado significativo desse contexto, uma vez que, naturalmente, o licenciando tem abertura para vivenciar o máximo possível em termos de temas matemáticos. Alguns sujeitos perceberam a participação no curso como um diferencial importante para seus currículos, e, mesmo admitindo que as horas de curso tenham sido insuficientes para o amadurecimento – fato que foi lamentado -, eles reconhecem uma ampliação da cultura matemática a partir da experiência vivida.

Alguns alunos, já vislumbrando sua atuação profissional, acreditam que a experiência tenha contribuído para a formação acadêmica, explicando que acumularam créditos para aturarem na escola básica. Apesar de nem sempre ficar explícito, os participantes consideraram a experiência do curso positiva, uma vez que oportunizou a exposição de uma geometria alternativa e, portanto, de um estilo necessariamente novo para eles.

Eles também registraram vivenciar positivamente o material disponibilizado – impresso e eletrônico –, bem como o tratamento dispensado nas ações, que consideram ter representado uma oportunidade de formação, motivando-os a fazer o mesmo com seus próprios alunos.

G4: Dissonâncias

Neste grupo reunimos ideias que apresentara algumas discrepâncias com relação ao andamento ‘normal’ esperado para o curso por parte dos pesquisadores. São dissonâncias somente significativas do ponto de vista qualitativo, já que quantitativamente pouco ocorreram. Um olhar sobre os quadros, nas três sessões categorizadas, mostra que mesmo um sujeito que tenha passado por um momento de contradição manifesta, avaliando negativamente algum aspecto, sustenta sentimentos otimistas de modo geral.

Desse modo, quando um sujeito afirma ainda não vislumbrar a Geometria Projetiva, essa fala, mesmo assim, é significativa para os pesquisadores por denotar o cuidado necessário para com o processo do aprendiz.

Em outra manifestação essa fala é retomada, quando um sujeito mostra que compreendeu vários aspectos da atividade, sendo capaz de estabelecer relações, apesar de se considerar ainda aquém da esperada compreensão global. São manifestações importantes que chamam a atenção dos pesquisadores, incorporando essa crítica, e que entendemos estar mais ligada ao modo como o curso foi trabalhado.

O material também recebeu algumas críticas da parte dos participantes, embora a carência de tempo tenha sido apontada como um fator limitador para a melhor compreensão da matéria, até em sua proposta geral. Essa crítica é importante, assim como entendemos, pois o dimensionamento de tempo para a programação do curso teve como base a intuição e experiência em outras atividades dos pesquisadores como docentes. Entendemos, também, que não se trata apenas do tempo consumido com as atividades do grupo, mas a duração total do curso, - do início ao fim -, que restringiu as condições para o amadurecimento do estudante.

G5: Metodologia de trabalho com geometrias

Este grupo de ideias contempla as análises desenvolvidas sobre as colocações dos alunos a respeito da maneira como o curso foi conduzido, além dos recursos didático-metodológicos utilizados no processo.

Seus argumentos mostraram que a forma como o curso foi organizado colaborou para a compreensão de uma nova forma de abordar o espaço, como na colocação de um dos participantes,

> [...] a aula e o material cumpriram o que pretendiam. Cada conceito abordado tratou do seu tema específico, mas sem fugir do proposto (primeiras ideias da geometria projetiva), as explicações dadas para cada conceito juntam na ideia do espaço projetivo, sem perder a linha de pensamento proposta inicialmente". (RELATÓRIOS DO CURSO, 2017).

Percebemos que a relação estabelecida entre tópicos da Geometria Euclidiana e da Geometria Projetiva aguçou a curiosidade dos alunos. Indagado sobre sua avaliação da primeira sessão, um deles respondeu "durante a aula sempre foi trabalhado os conceitos de Geometria Plana sempre refletia na base da projetiva, que é o ponto ideal, o que foi bem interessante". (Depoimento de participante do curso, 2017).

Os alunos perceberam que o espaço projetivo é o espaço euclidiano acrescido dos elementos do infinito. Na opinião desse participante, por exemplo, o curso se mostrou como oportunidade de aprendizado para "[...]novos teoremas que são extensão da geometria euclidiana. Isso contribui para reforçar os conceitos de ponto ideal, entre outros", por exemplo, notamos que o sujeito entendeu, pelo termo "extensão", nossa proposta de incorporar no plano euclidiano os pontos, retas e plano do infinito.

As figuras ilustrativas das aulas utilizadas ao material digital disponibilizado, segundo os participantes, foram um recurso eficiente, porém vale ressaltar que acreditamos que as considerações foram uma tentativa de colaborar com o curso. Alguns deles argumentam que o pouco tempo de estudo não favoreceu a melhor compreensão do material, enquanto outros chegaram a sugerir que os exercícios fossem mais utilizados, como na declaração "[...] achei o material excelente, porém senti falta de um tempo maior para analisar e entender melhor a composição do material".

G6: Compreensões do Projetivo

Nesse grupo de ideias estão, a nosso ver, os depoimentos mais incisivos no sentido de demonstrar como os alunos vivenciaram a Geometria Projetiva, a partir do curso. Essas ideias mostram uma multiplicidade de compreensões por parte dos alunos, e é interessante notar que elas ocorrem desde uma tomada de um elemento projetivo específico até a tomada mais geral, elucidativa de uma estrutura geométrica.

A experiência no curso, com o suporte do material disponibilizado, permitiu a percepção acerca do papel da constituição do espaço para, depois, trabalhar a geometria. A passagem do elementar para o ideal mostrou a importância em se tematizar o infinito, assim como, da mesma forma, a introdução ao pensamento euclidiano prepara o aluno para abstrações a partir do espaço elementar. Ficou evidente o interesse matemático demonstrado com a elaboração de um modelo abstrato.

Os alunos manifestaram que, uma vez colocados os fundamentos e alguns propósitos, objetos geométricos como a razão anarmônica, feixes e teoremas próprios, estes podem ser bem compreendidos ao serem introduzidos na estrutura geométrica que vai se configurando. Informaram que compreenderam as noções básicas envolvidas no estudo da Geometria Projetiva, com seus invariantes ocorrendo em várias situações, bem como conseguiram perceber objetos projetivos gerando outros.

Por fim, um método para compreender o projetivo se mostra eficiente no curso, a partir do momento que o participante expressa perceber novos métodos sendo criados e aplicados, numa especificidade geométrica projetiva.

G7: Funcionalidade da Geometria Projetiva

Muitas vezes, o aluno de licenciatura em Matemática tem oportunidade de acessar informações acerca de geometrias alternativas ao modelo euclidiano. Mas, dada a massiva influência desse último, essas alternativas são apresentadas a título de informações gerais e curiosidades, sem expectativas de gerar um conhecimento sistematizado. Os alunos participantes da pesquisa manifestaram algumas ideias que demonstram um vivenciamento mais fundamentado, nesse sentido, e o fazem se referindo a aplicabilidades e funcionalidades percebidas com relação à Geometria Projetiva.

Algumas atividades praticadas durante o curso oportunizaram aos estudantes visualizarem essa geometria ocorrer em situações que foram previsíveis, até porque a familiaridade pode ser esperada quando já se conhece algo, não sendo diferente no mundo geométrico. Mesmo objetos científicos novos, como a razão anarmônica, ganharam franca aceitação, em vista de serem usados em aplicações não necessariamente de cunho projetivo.

Além disso, os sujeitos informaram perceber que a Geometria Projetiva funciona dentro das concepções e propósitos próprios, desdobrando-se tanto em seus principais teoremas quanto em situações de associação de seus próprios objetos. O procedimento adotado no curso, de se valorizar demonstrações, também contribuiu para a aceitação da nova geometria.

G8: Softwares de Geometria dinâmica e Geometria Projetiva

Tratando da ferramenta investigativa proposta no material, percebe-se, pelas manifestações dos sujeitos, que o GeoGebra colaborou em parte para a compreensão dos conteúdos trabalhados. Na declaração de um dos participantes, "(o aluno) trabalha de forma investigativa, o que pode trazer diversas questões e descobertas no processo construtivo" percebe-se que o sujeito vê o *software* como instrumento potencial numa proposta de investigação.

As atividades propostas pelo *software*, mesmo se alinhando à teoria euclidiana, levaram os sujeitos a resolver seus problemas com base na geometria por eles praticada, empregando ferramentas projetivas. Na fala "apesar do GeoGebra não ter sido pensado para trabalhar a geometria projetiva, ele se demonstrou útil, pois muitos conceitos da geometria euclidiana são usados na projetiva, o que o *software* consegue abordar e, portanto, tem um bom potencial para a projetiva"(Entrevista de campo, 2017), notamos que o sujeito percebe que o *software*, apesar de ser euclidiano, permite construções empregadas pela geometria projetiva, como os quadriláteros completos na obtenção de conjugados harmônicos.

A maneira como eles se comportaram na sessão que utilizou o quadrilátero completo para obtenção da média harmônica entre dois segmentos foi curiosa. As reações dos participantes do curso, ao perceberem que algumas propriedades eram mantidas ao movimentarem os elementos, nos mostraram que o *software*, além de propiciar novas conjecturas, foi uma ferramenta de trabalho eficaz, sendo difícil imaginar tal resposta sem ele.

Apesar de algumas manifestações sugerirem que o *software* não é suficiente, pela falta de tempo de compreender o material, creditamos a ele um papel potencial no trabalho com a geometria projetiva. As manifestações foram positivas nesse sentido.

Tendo agrupado as ideias de acordo com seus significados aproximadas, fazemos um último movimento de essencialização, em vista de constituirmos as estruturas mais gerais de nossa compreensão, ou seja, aquela que responde à questão originalmente formulada, antes da realização da pesquisa de campo. A essa nova organização, agora classificada por grupos, chamamos de Núcleos de Significação, ou, simplesmente, Núcleos.

Nesse último movimento, nosso entendimento é de que os grupos G1, G2, G6 e G7 podem ser aproximados no **Núcleo de Constituição do Projetivo**, no qual as variadas compreensões de geometria foram elaboradas pelos próprios sujeitos, entre as quais as abordagens de natureza epistemológica, didática, pedagógica e científica. Nesse núcleo, veem-se organizados os sentidos que a Geometria Projetiva despertou nos estudantes, bem como a importância que ela significou, para eles, em sua formação científica, profissional e pessoal, como um todo.

Como enfrentamento da questão que levantamos para a pesquisa, esse Núcleo mostra que o projetivo se constituiu na espacialização do conhecimento, capaz de proporcionar ressignificações na abordagem geométrica pelos estudantes, expressando, eles mesmos, a importância das experiências vividas enquanto sujeitos ativos na pesquisa, para a ampliação do olhar que hoje é dirigido à geometria de um modo geral.

Cada Grupo presente nesse Núcleo mostrou um viés distinto de como o estudante articulou a compreensão global do projetivo, desde aquele que trouxe ideias expressivas sobre a assimilação dos próprios elementos geométricos, incluindo ideias que salientavam a aplicabilidade dessa ciência, até os grupos que articularam concepções que refletem o balizamento do projetivo com outras geometrias, especialmente com o pensamento euclidiano, como inexorável para se constituir o horizonte geral das geometrias.

Essas observações, assim como a concebemos, são valiosas como conclusões sobre a variedade de aspectos que emergem no processo de acolhimento de uma proposta como a que nos dispusemos a desenvolver com a pesquisa. Como um breve exemplo, tomamos as informações históricas, que cumprem um importante elo na implementação de um pensamento novo esteado numa tradição já consolidada.

Em nossas análises percebemos que os grupos G5 e G8 são constituídos de ideias semelhantes, principalmente pela forma escolhida para implementar as atividades com os indivíduos envolvidos na pesquisa. Desse modo, os aproximamos no **Núcleo de Aspectos didáticos: os materiais**.

O ambiente de geometria dinâmica foi avaliado como positivo na observação de propriedades projetivas, tendo ele sido explorado em sua dinamicidade, que se mostrou afinidade com a agilidade da Geometria Projetiva em trabalhar com retas aleatórias em suas direções e pontos de aplicação. Utilizar o *software* permite movimentar os pontos, as retas e observar um leque de situações invariantes. O curso provou, para nós pesquisadores, que se utilizássemos somente a régua e o compasso, os resultados teriam sido diferentes, com menor ocorrência de episódios potencializadores do estilo projetivo.

O grupo G3 compreende um **Núcleo de Formação Profissional,** cujas ideias revelaram a importância de se oportunizar a licenciandos cursos alternativos com temas constantes de sua grade curricular. A característica de complementaridade – em relação a conteúdos geométricos usuais – que demos à nossa proposta, independe de um ponto zero projetivo para ser trabalhada, bem como não deixa a impressão de uma prática extemporânea.

As falas dos sujeitos, revelando, ao mesmo tempo, a significância da Geometria Projetiva, comprovam que o curso foi uma oportunidade na sua formação, dando-lhes a chance de experimentar uma visão de geometria estruturalmente mais aberta, antecipando a importância de dispor dessa concepção em suas atuações futuras, como professores e professoras do ensino básico.

O grupo G4 constituiu um **Núcleo de Ideias Dissonantes**, que como já dissemos, apesar de quantitativamente pouco expressivas, são reveladoras de pistas para o aperfeiçoamento de propostas didáticas. Não as consideramos idiossincrasias, que mereçam ser descartadas nas análises, mas uma contribuição crítica, que continuará nos instigando a buscar respostas e a compreendermos, nós mesmos, a experiência vivenciada com o curso proposto.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo pretendemos descrever alguns resultados que poderemos constituir das análises feitas.

Nossas considerações vão nos colocar, como pesquisadores que ultimaram sua pesquisa e, pretensamente, resolveram sua questão de inquérito, novamente de frente para nossa comunidade científica, a dos educadores matemáticos, e a eles vamos oferecer nossas conclusões.

Do ponto de vista da fenomenologia, segundo seu articulador primeiro Edmund Husserl, ao término de uma pesquisa, não respondemos categoricamente à questão, bem como não concluímos nada em definitivo. O que fazemos é levar o nível de nosso incômodo intelectual para um nível acima daquele em que estávamos no princípio, e o que temos a oferecer, a partir de nós mesmos, é uma síntese transitória.

Particularmente aqui, resulta isso dizer que não termos a certeza de que a proposta de curso que articulamos é taxativamente a mais adequada, mas, pela experiência genuinamente vivida de pesquisar, teremos dado alguns passos em nos tornarmos conhecedores na questão da presença curricular da Geometria Projetiva.

A experiência proporcionada por esta pesquisa foi muito significativa para mim como pessoa, professor e formador de professores de matemática. Situações diversas que me incomodam na atividade docente foram contrapostas com uma proposta de construção coletiva dialogada.

Ensinar matemática como ciência pronta, do meu ponto de vista, não faz o aluno vislumbrar o que vem a ser essa ciência na realidade. As manifestações que os sujeitos legaram mostram a importância de concretizar uma pesquisa para a formação e atuação de um professor.

A metodologia de ensino tradicional, que condiciona o aluno a atos de repetição e memorização de mecanismos prontos, vai de encontro aos meus anseios de formar um cidadão crítico e pensante. Novas práticas pedagógicas devem ser pensadas para fazermos de nosso aluno um verdadeiro "matemático", que testa, troca, inverte, refaz, que seja capaz de conseguir se movimentar no objetivo de resolver uma tarefa. As atividades de pesquisa empreendida, de cunho investigativo, mediada por *sofwares*, mostraram caminhos possíveis para esse intento pedagógico.

A Geometria Projetiva mostrou, com a ajuda da pesquisa, que pode constituir um conteúdo para levantar reflexões distintas sobre o espaço. Existem várias geometrias, e a licenciatura deveria proporcionar momentos que possibilitem essa reflexão. Entender o espaço de outras formas, assim como os sujeitos manifestaram, pode ampliar nossa visão geométrica, além de ajudar a vislumbrar situações que não poderiam ser imaginadas caso a Geometria Projetiva não fosse tematizada.

A realização da pesquisa com participação dos sujeitos foi fundamental para constatar a importância de estudar Geometria Projetiva para constituir uma nova possibilidade geométrica. As reações dos sujeitos, percebidas na aplicação do curso, foram impactantes e disso se tira o maior proveito para todo estudo feito: como a Geometria Projetiva enriqueceu sua cultura geométrica.

O produto educacional relacionado a este estudo busca enfatizar que a Geometria Projetiva, além de proporcionar objetivos e entendimentos novos, em alguns casos, resolve problemas de Geometria Euclidiana de maneira mais simples e elegante. As construções realizadas com auxílio de *softwares* de Geometria Dinâmica mostraram que objetos projetivos são operantes em várias situações, mesmo nas euclidianas usuais às quais os estudantes estão familiarizados.

Finalmente, existe um caminho longo pela frente. A formação de professores é uma tendência em educação matemática que merece muita atenção. Formar professores neste mundo que vivemos atualmente não é nada trivial. Só com muito amor pela profissão continuamos de pé, e acordamos todos os dias com esperança de que possamos colaborar para um mundo mais justo e bonito. Ter realizado essa pesquisa, me põe ativo nessa intenção de continuar a investigar propostas pedagógicas, para minha prática profissional e para contribuir com outros professores.

Cumprimento, nesta ocasião, a todos colegas professores, esperando, com este estudo, já ter mostrado um pouco do novo olhar sobre as possibilidades para o ensino da matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: IX WORSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 9. CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO, 23., 2003, Campinas. **Anais**... Campinas: CSBC, 2003. p. 275-286.

AUFFINGER, A. C. T. D. C.; VALENTIM, F. J. S. **Introdução à Geometria Projetiva.** Vitória: Departamento de Matemática da UFES, 2003. 63 p. Apostila

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** 10ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

BARRETO, M. D. S.; TAVARES, S. Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não Euclidianas – A experiência no IFFluminense Campus Campos-Centro. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Ilhéus: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. p. 1-10. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/?info_type=Tema12&lang_user=>. Acesso em: 10 nov.2015.

BELL, E. T. **Men of mathematics**. New York: Simon & Schuster, 1937.

______ . **The development of mathematics**. New York: McGaw-Hill, 1945.

BICUDO, M. A. V. et al. **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica.** 1ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação.** Porto: Porto Editora, 1994

COXETER. H.S.M. **Projective Geometry**. 2 ed. Toronto: University of Toronto, 1974.

CRUZ, D. G.; SANTOS, C. H. Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas – Hiperbílica e Elíptica – A serem abordadas nas séries do Ensino Médio. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE, 2010, Salvador. **Anais...**Ilhéus: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. p. 1-11. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/?info_type=Tema12&lang_user=>. Acesso em: 10 nov. 2015.

DETONI, A R. VIEIRA, M D. FIGUEIREDO, M C. Apontamentos para uma história da geometria projetiva. **Anais do** VI EMEM. UFSJ, 2015

DÜRER, A. **Géométrie**. Paris: Seuil, 1995.

EFÍMOV, N. V. **Geometría Superior.** Moscol: Editora Mir, 1978.

EVES, H. **A survey of geometry**: volume one. Boston: Allyn and Bacon, 1963.

GODEAUX, L. **As Geometrias**. Lisboa: Publicações Europa-América, 1936.

HUSSERL, E. **A crise das ciências europeias e a fenomenologia transcendental**. Rio de Janeiro: Forense. 2012

KLEIN, F. *O programa de Erlangen*. in: FERNANDES, N. C. (Trad.) **O programa de Erlangen de Félix Klein**: considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas. São Paulo: Ifusp, 1984, 2-78.

KLINE, M. Foreword. in: RUSSEL, B.A.W. **An essay on the foudations of geometry.** New York: Dover Publications, 1956.

MACHADO. A. **A ilusão especular**. São Paulo: Brasiliense, 1984.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1988.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática: geometria euclidiana plana.** 1ª ed. Rio Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

NOSS, R.; HOYLES, C. **Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

PERRIER, G. R. F.; SANTO, A. O. D. E. Educação Matemática e a Informática: Novas possibilidades para uma aprendizagem significativa. In: SIPEMAT, 2006, Recife. **Anais...** Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação, 2006. 1 – 11. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/SIPEMAT06/?info_type=edition&lang_user=>. Acesso em: 21 nov. 2015

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: u**m novo aspecto do método matemático**.** 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 151p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PONTE, J. P. Investigar, Ensinar e Aprender. **Actas do ProfMat** (CD-ROM, p.25- 39). Lisboa: APM, 2003.

RIPPLINGER, H. M. G.; BASSOI, T. S. O ensino da Geometria Esférica no Ensino Médio: Uma abordagem metodológica e teórica. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, CULTURA E DIVERSIDADE , 2010, Salvador. **Anais...** Ilhéus: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. p. 1-7. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/?info_type=Tema12&lang_user=>. Acesso em: 10/11/2015.

RUSSELL, B. A. W. **An essay on the foundations of Geometry.** Nova York: Dover Publications, 1956.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, M. C. L; BONGIOVANNI, V.; VALENTE, W. R. **Um abandono da Geometria? Vivam as geometrias!** Belém: SBEM-PA, 2011. 73p

TATON, R. **L´ouvre mathématique de G. Desargues**. Paris: Presses Universitaires de France, 1951.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.