UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE MATEMÁTICA

Pedro Henrique Meirelles de Azevedo

Bilhares no Círculo, Quadrado e Elipse

Juiz de Fora

2023

Pedro Henrique Meirelles de Azevedo

Bilhares no Círculo, Quadrado e Elipse

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF

com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Meirelles de Azevedo, Pedro Henrique.
Bilhares no Círculo, Quadrado e Elipse / Pedro Henrique Meirelles de Azevedo. – 2023.
56 f. : il.

Orientador: Regis Castijos Alves Soares Junior
Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas . Curso de Matemática, 2023.

1. Bilhares. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Teoria Ergódica. I. Soares, Regis, orient. II. Título.

Pedro Henrique Meirelles de Azevedo

Bilhares no Círculo, Quadrado e Elipse

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Aprovada em (dia) de (mês) de (ano)

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. José Barbosa Gomes
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Reginaldo Braz Batista
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho à minha mãe, meu irmão e minhas irmãs.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Ana Paula, meu irmão, Felipe, e minhas irmãs, Ariane e Mariana, por sempre me apoiarem nessa jornada.

Agradeço ao meu orientador, Regis, que me possibilitou ter contato com o estudo de bilhares, e aos professores Reginaldo e José Barbosa, por terem aceitado participar da banca.

Agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora por me fornecer educação de qualidade.

RESUMO

Este trabalho possui como objetivo fazer uma apresentação da teoria de bilhares. Iniciaremos apresentando conceitos preliminares e resultados gerais sobre bilhares, em seguida nos focaremos aos três tipos de bilhares que serão nosso objeto de estudo: os bilhares no círculo, no quadrado e na elipse. Analisaremos o bilhar em cada um desses exemplos e veremos que a sua dinâmica é altamente influenciada pelo formato de sua fronteira.

Palavras-chave: Bilhares. Sistemas dinâmicos. Teoria Ergódica.

ABSTRACT

This work aims to make a presentation of the theory of billiards. We will start by presenting preliminary concepts and general results about billiards, then we will focus on the three types of billiards that will be our object of study: billiards in the circle, in the square and in the ellipse. We will analyze billiards in each of these examples and see that its dynamics is highly influenced by the shape of its boundary.

Keywords: Billiards. Dynamical systems. Ergodic Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Reta tangente à hipérbole 13

Figura 2: Teorema de Poncelet 13

Figura 3: Bilhar no Círculo 24

Figura 4: Relação entre os vetores velocidade antes e depois da colisão 25

Figura 5: Relação entre os pontos de colisão θ_n e θ_{n+1} 27

Figura 6: Espaço de colisão do bilhar no círculo 27

Figura 7: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 2 29

Figura 8: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 3 29

Figura 9: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 4 30

Figura 10: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 5 com uma volta ($\psi = \frac{\pi}{5}$ ou $\psi = \frac{4\pi}{5}$) 30

Figura 11: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 5 com duas voltas ($\psi = \frac{2\pi}{5}$ ou $\psi = \frac{3\pi}{5}$) 31

Figura 12: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 6 ($\psi = \frac{\pi}{6}$ ou $\psi = \frac{5\pi}{6}$) 31

Figura 13: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 7 com uma volta ($\psi = \frac{\pi}{7}$ ou $\psi = \frac{6\pi}{7}$) 32

Figura 14: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 7 com duas voltas ($\psi = \frac{2\pi}{7}$ ou $\psi = \frac{5\pi}{7}$) 32

Figura 15: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 7 com três voltas ($\psi = \frac{3\pi}{7}$ ou $\psi = \frac{4\pi}{7}$) 32

Figura 16: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 1 35

Figura 17: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 2 35

Figura 18: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 3 36

Figura 19: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 4 36

Figura 20: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 5 37

Figura 21: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 6 37

Figura 22: Bilhar no Quadrado 39

Figura 23: Desdobramento da trajetória do bilhar no quadrado 40

Figura 24: Representação do toro $\mathbb{T}^2$ como o quadrado 40

Figura 25: Extensão do fluxo na vizinhança do vértice 42

Figura 26: Trajetória periódica no bilhar no quadrado 43

Figura 27: Trajetória no quadrado desdobrado 44
Figura 28: Trajetória no quadrado com os lados identificados 44
Figura 29: Bilhar na elipse 46
Figura 30: Representação do Lema 3.27 48
Figura 31: Exemplo 1 de órbita do bilhar na elipse com período 2 49
Figura 32: Exemplo 2 de órbita do bilhar na elipse com período 2 49
Figura 33: Exemplo de órbita do bilhar na elipse com período 3 49
Figura 34: Exemplo de órbita do bilhar na elipse com período 4 49
Figura 35: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 1 . . 50
Figura 36: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 2 . . 50
Figura 37: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 3 . . 51
Figura 38: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 4 . . 51
Figura 39: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 5 . . 52
Figura 40: Espaço de colisão do bilhar na elipse 52

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 PRELIMINARES 12

2.1 RESULTADOS E DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS 12

2.2 TEORIA DA MEDIDA E TEORIA ERGÓDICA 14

2.3 SISTEMAS DINÂMICOS 17

2.4 BILHARES 18

3 BILHARES NO CÍRCULO, NO QUADRADO E NA ELIPSE 24

3.1 BILHAR NO CÍRCULO 24

3.2 BILHAR NO QUADRADO 38

3.3 BILHAR NA ELIPSE 46

4 CONCLUSÃO 54

REFERÊNCIAS 55

1 INTRODUÇÃO

O bilhar (no plano) é o sistema dinâmico definido pelo movimento livre de uma partícula no interior de um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ sujeita a colisões elásticas com a fronteira de D, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. A escolha do formato da fronteira de D influencia na dinâmica gerada por esse movimento, mas mesmo os exemplos mais simples podem exibir propriedades dinâmicas surpreendentemente ricas.

O problema aqui apresentado é: considerando a fronteira de D como sendo o círculo, o quadrado ou a elipse, quais propriedades dinâmicas (órbitas periódicas, órbitas densas, órbitas interiores e órbitas exteriores) podemos obter?

A área de sistemas dinâmicos se inicia a partir do trabalho de Poincaré, cujos estudos entre o fim do século XIX e início do século XX obtiveram resultados abrangendo diversos assuntos como equações diferenciais (12), estabilidade global de conjuntos de trajetórias (11), bifurcações (11) e probabilidade (15), com foco na teoria ergódica. Um dos muitos resultados importantes obtidos por Poincaré é conhecido como Teorema da recorrência de Poincaré (12), que afirma que um sistema isolado se torna arbitrariamente próximo de seu estado inicial, com exceção de um conjunto de pontos de medida nula. Enunciado pouco antes de sua morte, o "último teorema de Poincaré"(14), afirmava que uma aplicação contínua de um cilindro em si mesmo que rotaciona os círculos das bases em direções opostas e mantém as áreas invariantes possui exatamente dois pontos fixos. Esse teorema viria a ser provado em 1913 por Birkhoff (1), que se tornaria o precursor no estudo de bilhares, analisando bilhares em domínios convexos suaves. Sinai e Bunimovich obtiveram resultados relativos a bilhares em mesas dispersoras, desenvolvendo o Bilhar de Sinai (17), que consiste de uma mesa quadrada com um refletor circular em seu centro, e o Estádio de Bunimovich (5), que consiste de uma mesa retangular com dois lados opostos substituídos por semi-círculos focalizadores, ambos tipos de bilhares apresentam uma dinâmica caótica.

Entre os resultados apresentados destacam-se para o bilhar no círculo a caracterização das órbitas períodicas a partir do ângulo de reflexão, a demonstração da existência da cáustica circular e a prova da não ergodicidade da aplicação de colisão; para o bilhar no quadrado destacam-se o fato de que apesar da existência de trajetórias excepcionais é possível gerarmos uma extensão para o fluxo e a análise da função de complexidade; e

para o bilhar na elipse destaca-se a existência das cáusticas elípticas e hiperbólicas, além da não ergodicidade desse sistema.

No capítulo 2 apresentaremos resultados e definições necessárias para seguirmos para o capítulo 3, no qual são discutidos os bilhares no círculo, no quadrado e na elipse, cada um em sua seção. No capítulo 4 recapitulamos o que foi mostrado, assim como sugerimos possíveis caminhos que podem ser usados para seguir no estudo de bilhares.

2 PRELIMINARES

Nesse capítulo apresentaremos resultados preliminares que serão utilizados no capítulo seguinte. Iniciaremos apresentando noções geométricas, em seguida introduzimos conceitos de Teoria da Medida e Teoria Ergódica, prosseguimos com definições relativas a Sistemas Dinâmicos e terminamos o capítulo com um estudo geral de bilhares.

2.1 RESULTADOS E DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesta seção apresentaremos resultados e definições geométricas que serão utilizados no capítulo posterior, com base em (4).

Começaremos relembrando a definição de círculo, elipse e hipérbole.

Definição 2.1. Um **círculo** é o conjunto dos pontos $A \in \mathbb{R}^2$ tais que a distância de A a um determinado ponto C é igual a uma constante r. O ponto C é chamado de centro e a constante r é chamada de raio do círculo.

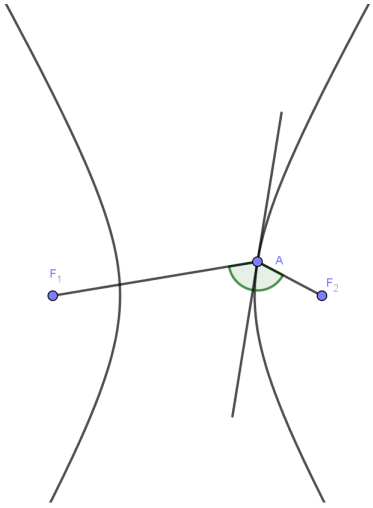
Definição 2.2. Uma **elipse** é o conjunto dos pontos $A \in \mathbb{R}^2$ tais que a soma das distâncias de A a dois pontos distintos F_1 e F_2 contidos no $\mathbb{R}^2$ é constante. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da elipse.

Definição 2.3. Uma **hipérbole** é o conjunto dos pontos $A \in \mathbb{R}^2$ tais que o valor absoluto da diferença das distâncias do ponto A a dois pontos distintos dados F_1 e F_2 contidos no $\mathbb{R}^2$ é constante. Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole.

Devido à propriedade refletora da hipérbole, vale o seguinte resultado.

Proposição 2.4. *Dado um ponto A na hipérbole de focos F_1 e F_2, a reta tangente em A bissecta o ângulo $\widehat{F_1AF_2}$.*

– Figura 1: Reta tangente à hipérbole



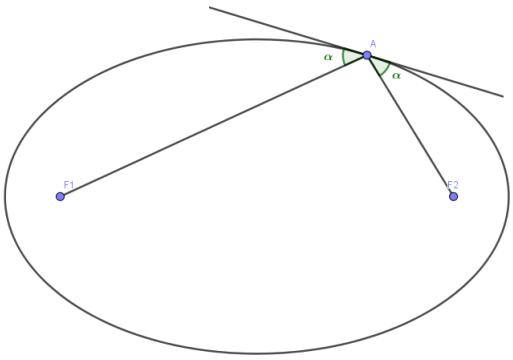
Em relação à elipse, um importante resultado é conhecido como Teorema de Poncelet. Para demonstrá-lo utilizaremos os dois lemas a seguir.

Lema 2.5. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então $\nabla f(x, y)$, isto é, o gradiente de $f(x, y)$, é perpendicular as curvas de nível de f, ou seja, é perpendicular à reta tangente à curva no ponto de tangência. Também denominamos $\nabla f(x, y)$ de normal à curva.*

Lema 2.6. *Seja G um ponto do plano e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(X) = |X - G|$. Então g é derivável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{G\}$ e $\nabla g(X) = \frac{X-G}{|X-G|}$.*

Teorema 2.7 (Teorema de Poncelet)**.** *Sejam D uma elipse, $A \in \partial D$ e L a reta tangente à elipse por A. Então os segmentos AF_1 e AF_2 fazem ângulos iguais com L.*

– Figura 2: Teorema de Poncelet



Demonstração. Tomando $f : \partial D \to \mathbb{R}$ como:

$$f(X) = \text{dist}(X, F_1) + \text{dist}(X, F_2) = |X - F_1| + |X - F_2| = c,$$

para uma constante c maior que a distância entre os focos.

Assim, temos $f(X) = f_1(X) + f_2(X)$, onde $f_1(X) = |X - F_1|$ e $f_2(X) = |X - F_2|$, daí $\nabla f_1(X) = \frac{X-F_1}{|X-F_1|}$ e $\nabla f_2(X) = \frac{X-F_2}{|X-F_2|}$. Então,

$$\nabla f(X) = \frac{X - F_1}{|X - F_1|} + \frac{X - F_2}{|X - F_2|},$$

com isso o gradiente de f é a soma de dois vetores unitários. Pela regra do paralelogramo os vetores unitários formam com a normal (gradiente de f) à curva ângulos iguais. Como A é um ponto qualquer de ∂D, segue o resultado. □

Também é válida a recíproca do Teorema de Poncelet, apresentada no teorema seguinte.

Teorema 2.8. *(Recíproca do Teorema de Poncelet) Seja B um ponto pertencente à elipse com focos F_1 e F_2 e pertencente também a um segmento A_0A_1 tal que o ângulo A_0BF_1 é igual ao ângulo F_2BA_1. Então A_0A_1 é tangente à elipse no ponto B.*

Demonstração. Se o ângulo A_0BF_1 é igual ao ângulo F_2BA_1 então necessariamente pelo Teorema de Poncelet a reta que contém A_0 e A_1 deve coincidir com a reta tangente por B. □

2.2 TEORIA DA MEDIDA E TEORIA ERGÓDICA

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados referentes a sistemas dinâmicos, teoria da medida e teoria ergódica, com base em (6). Para este capítulo assumimos que o leitor está familiarizado com conceitos relativos a espaços métricos.

Definição 2.9. Seja X um conjunto. Chamaremos de **álgebra** uma família $\mathcal{O}$ de subconjuntos de X que satisfaz as propriedades:

1. $X \in \mathcal{O}$
2. $A \in \mathcal{O} \Rightarrow A^c \in \mathcal{O}$
3. $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}$

Acrescentando mais uma propriedade a uma álgebra obtemos a definição a seguir.

Definição 2.10. Quando em uma álgebra $\mathcal{O}$ vale a propriedade

$$A_i \in \mathcal{O}, i = 1, 2... \Rightarrow \cup_i A_i \in \mathcal{O}$$

diremos que $\mathcal{O}$ é uma σ-**álgebra**.

Uma σ-álgebra particularmente interessante é a σ-álgebra de Borel, definida a seguir.

Definição 2.11. Seja X um espaço topológico. A σ-**álgebra de Borel** $\mathcal{O}$ de X é a menor σ-álgebra contendo todos os conjuntos fechados (abertos) de X, ou seja, se $\mathcal{O}_0$ é uma σ-álgebra de X contendo todos os conjuntos fechados (abertos) de X, então $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_0$.

Para atribuirmos um valor a cada elemento de uma álgebra utilizaremos o conceito de medida.

Definição 2.12. Seja $\mathcal{O}$ uma álgebra de subconjuntos de um conjunto X. Uma **medida** em $\mathcal{O}$ é uma função $\mu : \mathcal{O} \to [0, \infty]$ que satisfaz:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Para cada união enumerável $\cup_i A_i$ de conjuntos disjuntos $A_i \in \mathcal{O}, i = 1, 2, ...$, deve valer:
$$\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i).$$

Definição 2.13. Um **espaço de medida** é uma tripla (X, $\mathcal{O}$, μ), tal que X é um conjunto, $\mathcal{O}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{O} \to [0, \infty]$ é uma medida. Quando $\mu(X) = 1$ dizemos que (X, $\mathcal{O}$, μ) é um **espaço de probabilidade** e que μ é uma **probabilidade**.

Podemos definir uma classe de funções que são de grande importância no estudo de espaços de medida por preservar as principais propriedades desses espaços. Essa classe de funções é definida a seguir.

Definição 2.14. Sejam X, Y conjuntos, $\mathcal{O}$ uma σ-álgebra de X, e $\mathcal{S}$ uma σ-álgebra de Y. Dizemos que uma aplicação $F : X \to Y$ é **mensurável com respeito a $\mathcal{O}$ e a $\mathcal{S}$** quando $F^{-1}(B) \in \mathcal{O} \ \ \forall \ B \in \mathcal{S}$. Caso X e Y sejam espaços topológicos, diremos apenas que $F : X \to Y$ é **mensurável** quando F for mensurável com respeito às σ-álgebras de Borel de X e de Y.

Definição 2.15. Sejam (X, $\mathcal{O}$, μ) e (Y, $\mathcal{S}$, ν) espaços de medida. Dizemos que uma aplicação $F : X \to Y$ **preserva a medida** quando:

$$B \in \mathcal{S} \Rightarrow F^{-1}(B) \in \mathcal{O} \quad \text{e} \quad \mu(F^{-1}(B)) = \nu(B).$$

Veremos duas versões do Teorema de Recorrência de Poincaré. Apresentemos inicialmente a versão probabilística do teorema.

Teorema 2.16. *Teorema de Recorrência de Poincaré (Versão probabilística)*

Seja $F : X \to X$ uma aplicação que preserva a medida em um espaço de probabilidade (X, $\mathcal{O}$, μ). Dado $A \in \mathcal{O}$, seja A_0 o conjunto dos pontos $x \in A$ tais que $F^n(x) \in A$ para uma quantidade infinita de valores $n \geq 0$. Então A_0 pertence a $\mathcal{O}$ e $\mu(A_0) = \mu(A)$.

Para enunciarmos a segunda versão do teorema precisaremos definir o conjunto ω-limite de um ponto.

Definição 2.17. Consideremos X um espaço topológico e uma aplicação $F : X \to X$. O **conjunto ω-limite** de um ponto $x \in X$ é o conjunto dos pontos $y \in X$ tais que para toda vizinhança U de y tenhamos $F^n(x) \in U$ para uma quantidade infinita de valores de n. Quando X é um espaço métrico dizemos:

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{dist}(F^n(x), y) = 0.$$

Definição 2.18. Consideremos uma aplicação $F : X \to X$. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é **F-invariante** quando $f(x) = f(F(x))$.

Vejamos agora a versão topológica do teorema.

Teorema 2.19. *Teorema de Recorrência de Poincaré (Versão topológica)*

Consideremos X um espaço métrico separável, uma aplicação $F : X \to X$ mensurável e uma probabilidade μ F-invariante na σ-álgebra de Borel de X. Então $\mu(\{x : x \notin \omega(x)\}) = 0$, ou seja, quase todo ponto é recorrente.

Definição 2.20. Consideremos uma aplicação F. Um conjunto X é dito **F-invariante** quando $x \in X \Rightarrow F(x) \in X$.

Definição 2.21. Dizemos que uma aplicação F que preserva a medida é **ergódica** quando todo conjunto F-invariante tem medida 0 ou 1.

Proposição 2.22. *São equivalentes as afirmações:*

1. *F é ergódica;*

2. *Se $f \in \mathcal{L}^1(X)$ é F-invariante, então f é constante em quase todo ponto;*

3. *Se $f \in \mathcal{L}^p(X)$ é F-invariante, então f é constante em quase todo ponto;*

4. *Para todo $A, B \in \mathcal{O}$, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \mu(F^{-m}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

5. *Para toda $f \in \mathcal{L}^1(X)$ temos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(F^j(x)) = \int_X f d\mu$$

em quase todo ponto.

2.3 SISTEMAS DINÂMICOS

Veremos agora alguns resultados sobre sistemas dinâmicos. Nesta seção nos basearemos em (16).

Teorema 2.23. *Sejam $X : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^r, $r \geq 1$, em um aberto A e $x_0 \in A$. Então existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança V de x_0 e uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times V \to A$ de classe C^r tais que $\forall y \in V, \varphi(t, y) \equiv \varphi_t(y)$ é a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = X(x) \\ x(0) = y, \end{cases}$$

em $(-\epsilon, \epsilon)$.

Definição 2.24. A aplicação φ definida acima é chamada **fluxo local** de X em $x_0 \in A$.

Definição 2.25. Quando o campo de vetores X do Teorema anterior é completo, isto é, as soluções do problema de Cauchy são globais, fica definido o **fluxo global** de classe C^r, $\varphi : \mathbb{R} \times A \to A$ onde $\varphi(t, y)$ é a solução do problema de Cauchy $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \in A$ e verifica-se as seguintes propriedades:

1. $\varphi(0, x) = x$, $\forall x \in A$, isto é, $\varphi_0 = Id_A$;

2. $\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$, isto é, $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, em A;

3. φ_t é um difeomorfismo de classe C^r de A sobre A com inversa $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

Definição 2.26. Chamamos de **equação discreta** uma equação da forma

$$x(n+1) = f(x(n)),\ n \in \mathbb{N}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua e $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma função.

Definição 2.27. Seja $F : X \to X$. Chamamos a sequência $(F^n(x)),\ n \in \mathbb{N}$, de **órbita** de x.

Quando em uma órbita os pontos se repetem mantendo a mesma ordem dizemos que temos uma órbita periódica.

Definição 2.28. Dizemos que uma órbita é uma **órbita periódica** quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(x) = x$ para todo ponto x pertencente à órbita.

Definição 2.29. Um **sistema dinâmico**, em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, é a ação de um grupo G em A, isto é, existe uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi :\ G \times A &\to A \\ (g,x) &\mapsto \phi_g(x) \end{aligned}$$

tal que

1. $\phi_0 = I_d$

2. $\phi_{g \circ h} = \phi_g \circ \phi_h,\ \forall g,h \in G$

3. ϕ_g é um difeomorfismo com inversa ϕ_{-g}.

Definição 2.30. Seja X um espaço topológico. Dizemos que o sistema dinâmico $f : X \to X$ é **minimal** se a órbita de cada ponto $x \in X$ é densa em X.

2.4 BILHARES

Nesta seção introduziremos os conceitos básicos relativos a bilhares, mais informações podem ser encontradas em (7) e (20).

Definição 2.31. Dado $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira suave ou suave por partes, um **bilhar planar** corresponde ao movimento livre de uma partícula no interior de D, com reflexões elásticas na fronteira ∂D.

Utilizaremos ainda as seguintes hipóteses:

(i) A fronteira de ∂D é uma união finita do fecho Γ_i de curvas suaves,

$$\partial D = \Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_r.$$

As Γ_i são chamadas **paredes** ou **componentes de** ∂D. Elas são de classe C^k, $k \geq 3$, e cada uma é definida por uma função $f_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k, onde I é intervalo de $\mathbb{R}$, que está parametrizada pelo comprimento de arco.

(ii) As componentes da fronteira Γ_i podem intersectar umas as outras apenas em seus extremos, i.e.,

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cup \partial\Gamma_j \text{ para } i \neq j.$$

(iii) Em cada Γ_i a segunda derivada da curva ou nunca é zero ou é identicamente zero.

Definição 2.32. Uma **mesa de bilhar** D é o fecho de um domínio aberto conexo $D \subset \mathbb{R}^2$ ou $D \subset \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tal que ∂D satisfaz as hipóteses (i), (ii), (iii) descritas acima.

Denotemos por

$$\Gamma_* = \partial\Gamma_1 \cup \ldots \cup \partial\Gamma_r, \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_*.$$

Pontos $x \in \Gamma_*$ serão chamados **pontos de quina**, pontos $x \in \tilde{\Gamma}$ serão chamados **pontos de fronteira regulares**.

A parede Γ_i será chamada

1. **flat**, se $f_i'' = 0$, onde 0 representa o vetor nulo;
2. **focalizadora**, se $f_i'' \neq 0$, apontando para dentro de D;
3. **dispersora**, se $f_i'' \neq 0$, apontando para fora de D.

Definimos a **curvatura (com sinal)** K, dada por

1. $K = 0$ se Γ_i é flat;

2. $K = -\|f_i''\|$ se Γ_i é focalizadora;

3. $K = \|f_i''\|$ se Γ_i é dispersiva.

Denotemos por $q \in D$ a posição da partícula em movimento e por $v \in \mathbb{R}$ seu vetor velocidade, que são funções do tempo $t \in \mathbb{R}$. Quando a partícula se move no interior da mesa, tal que $q \in \text{ int}D$, ela mantém velocidade constante

$$\dot{q} = v \quad \text{e} \quad \dot{v} = 0. \tag{2.1}$$

Quando a partícula colide com a parte regular da fronteira, $q \in \tilde{\Gamma}$, seu vetor velocidade é refletido através da tangente a Γ em q, utilizando a regra ângulo de incidência é igual a ângulo de reflexão e pode ser expressado por

$$v^+ = v^- - 2\langle v, n\rangle n, \tag{2.2}$$

onde v^+ e v^- referem-se às velocidades pós-colisão e pré-colisão, respectivamente, e n denota o vetor unitário normal a $\tilde{\Gamma}$ no ponto q apontando para o interior da mesa. Se a partícula atinge um ponto de quina, ela para e seu movimento não será mais definido além desse ponto.

As equações de movimento (2.1) e (2.2) preservam a norma $\|v\|$ e é comum tomá-la normalizada, $\|v\| = 1$. Uma colisão é **regular** se $q \in \tilde{\Gamma}$ e o vetor v^- não é tangente a Γ. Neste caso $v^- \neq v^+$. Se v^- é tangente a Γ nos pontos de colisão, então $v^- = v^+$ e tal colisão é chamada **tangencial**.

O **estado** de uma partícula em movimento para qualquer tempo é especificado por sua posição $q \in D$ e seu vetor velocidade unitário $v \in S^1$. Assim, o **espaço de fase** do sistema é

$$\Omega = \{(q, v)\} = D \times S^1.$$

Em cada ponto de fronteira regular $q \in \tilde{\Gamma}$, é conveniente identificar os pares (q, v^-) e (q, v^+) relacionados pela regra de colisão (2.2). Isto ocasiona uma mudança na topologia de Ω, mas suas propriedades topológicas não serão essenciais.

Denotemos por π_q e π_v as projeções naturais de Ω sobre D e S^1, respectivamente. Além disso, denotemos por $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ o conjunto de estados (q, v) nos quais a dinâmica da

partícula está definida para todos os tempos $-\infty < t < +\infty$. Obtemos um fluxo

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}.$$

Toda trajetória do fluxo $\{\Phi^t x\}$, $x \in \tilde{\Omega}$, é uma curva contínua em Ω. É usual chamar sua projeção $\pi_q(\Phi^t x)$ sobre a mesa D uma **trajetória do bilhar**.

O fluxo Φ^t é C^{k-1} suave em pontos de colisões regulares ((7), Lemma 2.24). Além disso, é possível mostrar que $\tilde{\Omega}$ é um subconjunto denso de medida de Lebesgue total em Ω, e assim pode-se estender (tomando certos cuidados) o fluxo Φ^t a todo o espaço Ω por continuidade ((7), Seção 2.8).

No estudo de sistemas dinâmicos, é comum reduzir um fluxo a uma transformação construindo uma seção transversal. Para um bilhar, uma seção transversal em Ω é geralmente construída na fronteira da mesa de bilhar, i.e., no conjunto $\Gamma \times S^1$. Podemos descrever a seção transversal como o conjunto de todos os vetores de velocidade pós-colisão:

$$M = \bigcup_i M_i, \quad M_i = \{x = (q, v) \in \Omega : q \in \Gamma_i, \langle v, n \rangle \geq 0\},$$

onde n denota o vetor unitário normal a Γ_i apontando para dentro de D. O conjunto M é uma subvariedade de dimensão 2 em Ω chamado o **espaço de colisão**.

Denotamos por $\tau(x)$ o primeiro tempo positivo no qual a órbita $\Phi^t(x)$ intersecta $\Gamma \times S^1$, e chamamos esse valor o **tempo de retorno**. Seja $\tilde{M} = M \cap \tilde{\Omega}$. Este define uma **aplicação de retorno** $T : \tilde{M} \to \tilde{M}$ por

$$T(x) = \Phi^{\tau(x)+0} x,$$

onde o símbolo $\tau(x) + 0$ indica que estamos tomando tempos que se aproximam de $\tau(x)$ pela direita. T é chamada a **aplicação do bilhar** ou **aplicação de colisão** (de acordo com isso, M é chamado o **espaço de fase da aplicação do bilhar** T).

Parametrizamos esses elementos como $x = (r, \varphi)$, r é o parâmetro de comprimento de arco ao longo de ∂D e $\varphi \in [0, \pi]$ é o ângulo entre o vetor velocidade v e a tangente no ponto x.

Denotamos

$$S_0 = \partial M = \{\varphi = 0\} \cup \{\varphi = \pi\} \cup \left(\bigcup_i (\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}) \right),$$

onde o conjunto $\{r = a_i\} \cup \{r = b_i\}$ está incluído apenas para as curvas Γ_i que não são fechadas (constituindo fronteiras para o intervalo $[a_i, b_i]$). Além disso consideramos os seguintes conjuntos

$$S_1 = S_0 \cup \{x \in \text{int}M : T(x) \notin \text{int}M\}.$$

Esses são pontos que fazem uma colisão tangencial com uma parede dispersiva (i.e, $T(x) \in S_0$) ou cuja trajetória atinge um ponto de quina e para. Utilizando o mesmo estudo para a inversa T^{-1}, escrevemos

$$S_{-1} = S_0 \cup \{x \in \text{int}M : T^{-1}(x) \notin \text{int}M\}.$$

Quando T está bem definida em uma vizinhança de um ponto $x = (r, \varphi)$, podemos obter sua derivada neste ponto da seguinte maneira (ver (7), Seção 2.11):

$$D_xT = \frac{1}{\sin\varphi_1}\begin{bmatrix} \tau K - \sin\varphi & \tau \\ \tau K K_1 - K\sin\varphi_1 - K_1\sin\varphi & \tau K_1 - \sin\varphi \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

para $x_1 = (r_1, \varphi_1) = T(r, \varphi) = T(x)$ e $K_1 = K(x_1)$, onde τ é tempo necessário para duas rebatidas consecutivas (ou o deslocamento entre duas rebatidas consecutivas, já que a partícula tem velocidade constante unitária) e $K(x)$ indica a curvatura da fronteira $\partial\Gamma$ no ponto x.

Após uma rápida análise da matriz acima segue que a aplicação $T : M\backslash S_1 \to M\backslash S_{-1}$ é um difeomorfismo C^{k-1} ((7), Theorem 2.33). Definimos indutivamente

$$S_{n+1} = S_n \cup T^{-1}(S_n) \text{ e } S_{-(n+1)} = S_{-n} \cup T(S_{-n}).$$

S_{n+1} e $S_{-(n+1)}$ são os conjuntos de singularidades para T^{n+1} e $T^{-(n+1)}$, respectivamente. Podemos notar que esses conjuntos são uniões de curvas compactas suaves. Assim, no conjunto

$$\widehat{M} = M \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_n$$

todas as iterações de T estão definidas e são C^{k-1} difeomorfismos. Assim, T está bem definida em um subconjunto denso $\widehat{M} \subset M$ de medida de Lebesgue total. Assim, a aplicação pode ser estendida por continuidade a todo M, embora alguns pontos possam assumir mais de um valor na extensão.

Utilizando a fórmula para D_xT (2.3), obtém-se que $\det D_xT = \sin\varphi/\sin\varphi_1$.

A aplicação T preserva a medida $\sin\varphi dr d\varphi$ em M. De fato, utilizando mudança de variáveis e o valor do determinante acima

$$\iint_{T(A)} \sin\varphi_1 dr_1 d\varphi_1 = \iint_A \sin\varphi dr d\varphi$$

para qualquer boreliano $A \subset M$.

Consideremos agora que tenhamos ∂D uma curva suave estritamente convexa.

Teorema 2.33. *Para cada $n \geq 2$ e $\rho \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, com $mdc(n, \rho) = 1$, existem duas trajetórias distintas com período n que dão exatamente ρ voltas na curva para completar o seu período.*

A dinâmica do bilhar é altamente influenciada pelo formato de sua fronteira, sendo assim, no próximo capítulo trataremos sobre o bilhar em diferentes mesas.

3 BILHARES NO CÍRCULO, NO QUADRADO E NA ELIPSE

Neste capítulo apresentaremos o estudo dos três tipos de bilhares visados nesse trabalho: os bilhares no círculo, no quadrado e na elipse.

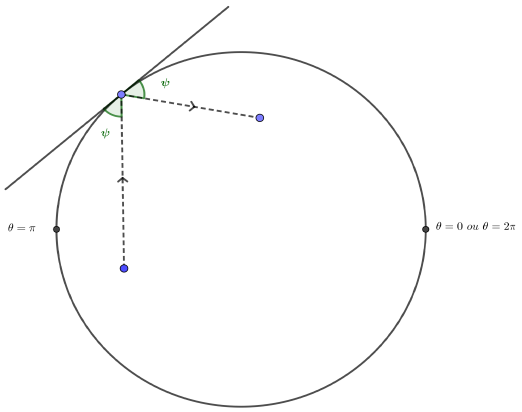
Para o bilhar no círculo nos focaremos no estudo das órbitas periódicas, na demonstração da não ergodicidade da aplicação de colisão e na existência da cáustica. No caso do bilhar do quadrado teremos como foco o desdobramento do quadrado, a extensão do fluxo para as trajetórias excepcionais e a análise da função de complexidade. Por fim, na seção sobre o bilhar na elipse buscaremos apresentar a existência das cáusticas elíptica e hiperbólica, assim como a não ergodicidade da aplicação de colisão.

3.1 BILHAR NO CÍRCULO

Nesta seção nos basearemos em (7).

Consideremos uma partícula se movendo com velocidade constante no interior do círculo unitário $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, o qual possui a fronteira ∂D parametrizada a partir do ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$ formado com a reta $y = 0$, de modo que, após a partícula colidir com a fronteira, o ângulo de incidência seja igual ao ângulo de reflexão.

– Figura 3: Bilhar no Círculo



Fonte: autor

Dessa forma, se considerarmos $q_t = (x_t, y_t)$ o vetor posição e $v_t = (u_t, w_t)$, enquanto não ocorrer colisão temos:

$$q_{t+s} = q_t + v_t s$$

$$v_{t+s} = v_t$$

Vejamos agora o que acontece com o vetor velocidade após ocorrer uma colisão.

Proposição 3.1. *Os vetores v^- e v^+, que representam a velocidade antes e após a colisão respectivamente, se relacionam da seguinte forma:*

$$v^+ = v^- - 2\langle v^-, n\rangle n$$

sendo $n = (x, y)$ o vetor normal a ∂D e $\langle v, n\rangle = ux + wy$ o produto interno.

Demonstração. Observemos a figura a seguir. Podemos notar que w é a projeção do vetor v^- sobre $-n$. Pela definição de projeção temos:

$$w = proj_{-n}(v^-) = \frac{\langle v^-, -n\rangle(-n)}{\|-n\|^2}$$

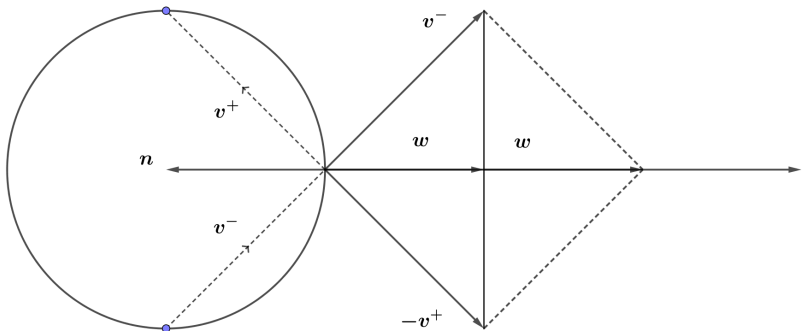
daí considerando n unitário encontramos:

$$\frac{\langle v^-, -n\rangle(-n)}{1} = (u(-x) + w(-y))(-n) = (ux + wy)(n) = \langle v^-, n\rangle n.$$

Deslocando o início do vetor $-v^+$ para o fim do vetor v^- observamos na imagem que $2w = v^- - v^+$, logo $v^+ = v^- - 2w = v^- - 2\langle v^-, n\rangle n$.

□

– Figura 4: Relação entre os vetores velocidade antes e depois da colisão



Fonte: autor

Podemos mostrar que apesar da mudança no vetor velocidade a norma permanece constante, ou seja, $\|v^+\| = \|v^-\|$.

Proposição 3.2. *O vetor velocidade v_t tem a norma constante para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se não houver colisão no intervalo de tempo $[t, t+s]$ o vetor velocidade permanece constante, logo sua norma permanece constante. Se ocorre colisão temos $v^+ = v^- - 2\langle v^-, n\rangle n$, daí $\|v^+\|^2 = \|v^- - 2\langle v^-, n\rangle n\|^2 = \|v^-\|^2 - 2\langle v^-, 2\langle v^-, n\rangle n\rangle + \|2\langle v^-, n\rangle n\|^2$. Agora devemos mostrar que $\|v^+\| = \|v^-\|$, ou seja, $\|2\langle v^-, n\rangle n\|^2 - 2\langle v^-, 2\langle v^-, n\rangle n\rangle = 0$. Observe que $\|2\langle v^-, n\rangle n\|^2 = \langle 2\langle v^-, n\rangle n, 2\langle v^-, n\rangle n\rangle = 4\langle v^-, n\rangle^2\langle n, n\rangle = 4\langle v^-, n\rangle^2\|n\|^2 = 4\langle v^-, n\rangle^2$. Observe também que $2\langle v^-, 2\langle v^-, n\rangle n\rangle = 4\langle v^-, n\rangle^2$. Logo $\|v^+\| = \|v^-\|$.

□

Após duas colisões consecutivas, a relação entre os ângulos de incidência e os pontos onde ocorrem as duas colisões é dada pela afirmação a seguir.

Proposição 3.3. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sejam θ_n o n-ésimo ponto de colisão e ψ_n o correspondente ângulo de reflexão. Então:*

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\psi_n \ (mod\ 2\pi)$$

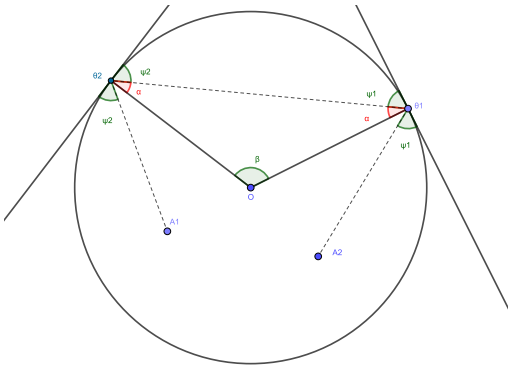
$$\psi_{n+1} = \psi_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. O triângulo $\theta_1 O \theta_2$ representado na figura a seguir é isósceles, logo possui os dois ângulos da base com o mesmo valor α . Podemos observar que $\alpha + \psi_1 = \alpha + \psi_2 = \frac{\pi}{2}$, pois são ângulos formados entre uma reta tangente e um raio, daí $\psi_1 = \psi_2$. Como $2\alpha + \beta = \pi$, pois são a soma dos ângulos internos de um triângulo, temos $\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \psi_1) = 2\psi_1$ e $\theta_2 = \theta_1 + \beta$, já que a medida do arco é a medida do ângulo central. Portanto $\theta_2 = \theta_1 + 2\psi_1$. Esse processo se repete durante todo o movimento do bilhar.

□

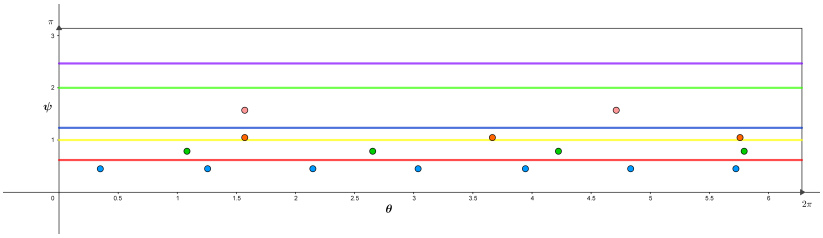
– Figura 5: Relação entre os pontos de colisão θ_n e θ_{n+1}



Fonte: autor

A figura a seguir representa o espaço de colisão do bilhar no círculo.

– Figura 6: Espaço de colisão do bilhar no círculo



Fonte: autor

Teorema 3.4. *A aplicação de colisão $F : M \to M$ do bilhar no círculo não é ergódica.*

Demonstração. Cada curva de nível $C_\psi = \{\psi = \text{constante}\}$ é invariante por F, ou seja, cada conjunto de pontos (θ, ψ) com um mesmo valor de ψ é invariante por F, pois as colisões preservam o ângulo ψ. Desse modo, temos que F não é ergódica, pois a função definida como $f(\theta, \psi) = \psi$ é F-invariante e não é constante, o que contradiz uma das equivalências apresentadas na Proposição 2.22. $\square$

Notemos que no espaço de colisão encontramos retas horizontais e pontos discretos. Os pontos discretos que possuem o mesmo valor para o ângulo ψ representam as orbitas periódicas, sobre as quais podemos afirmar o seguinte.

Proposição 3.5. *Se $\psi < \pi$ é um múltiplo racional de π, isto é, $\frac{\psi}{\pi} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então a rotação do círculo C_ψ é periódica de período n, ou seja, cada ponto no círculo é periódico de período n, ou ainda, $F^n(\theta, \psi) = (\theta, \psi)$ para cada $0 \leq \theta \leq 2\pi$.*

Demonstração. Temos que:

$$\frac{\psi}{\pi} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2\psi = 2\pi\frac{m}{n}$$

Tome $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Utilizando a Proposição 3.3 e considerando a aplicação p como sendo a projeção na primeira coordenada temos:

$$F(\theta,\psi) = (\theta + 2\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta + 2\pi\frac{m}{n} \ (mod\ 2\pi), \psi)$$

$$F^2(\theta,\psi) = (p(F(\theta,\psi)) + 2\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta + 4\pi\frac{m}{n} \ (mod\ 2\pi), \psi)$$

$$F^3(\theta,\psi) = (p(F^2(\theta,\psi)) + 2\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta + 6\pi\frac{m}{n} \ (mod\ 2\pi), \psi)$$

$$F^n(\theta,\psi) = (p(F^{n-1}(\theta,\psi)) + 2\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta + 2n\pi\frac{m}{n} \ (mod\ 2\pi), \psi)$$

Portanto,

$$F^n(\theta,\psi) = (\theta,\psi)$$

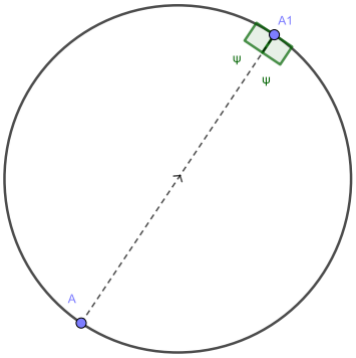
□

Observação 3.6. Se $\psi \geq \frac{\pi}{2}$, então as trajetórias de ψ e $(\pi - \psi)$ são identificadas, pois diferem apenas em relação ao sentido, já que esses ângulos são suplementares. Assim, podemos nos restringir aos casos em que $\psi < \frac{\pi}{2}$. Dada uma trajetória periódica com $\psi = (\frac{m}{n})\pi$, temos que existem n segmentos $\overline{\theta\theta'}$ onde θ e θ' denotam pontos de colisões consecutivas. Para cada um desses segmentos a partícula se desloca 2ψ. Com isso, ao fim de n colisões a partícula terá se deslocado $2\psi n = 2m\pi$. Dividindo esse valor pelo comprimento da circunferência temos: $\frac{2m\pi}{2\pi r} = \frac{2m\pi}{2\pi} = m$. Portanto, a partícula dará m voltas ao redor do círculo.

Vejamos agora alguns exemplos de órbitas periódicas

Exemplo 1. *Se o período é* 2*, então* $F^2(\theta,\psi) = (\theta,\psi)$ *ou seja* $(\theta + 4\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta,\psi)$*. Portanto,* $4\psi \equiv 0(mod 2\pi)$*, daí o único possível valor de* ψ *é:* $\frac{\pi}{2}$*.*

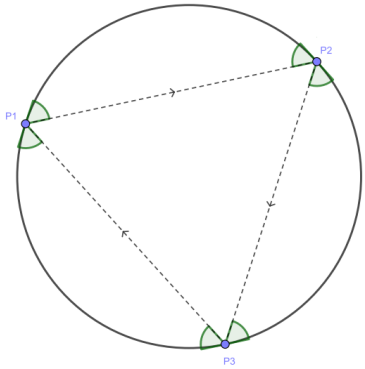
– Figura 7: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 2



Fonte: autor

Exemplo 2. *Se o período é* 3*, então* $(\theta + 6\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta, \psi)$*, daí os possíveis valores de* ψ *são:* $\frac{\pi}{3}$ *e* $\frac{2\pi}{3}$*. Pela Observação 3.6, essas trajetórias estão identificadas.*

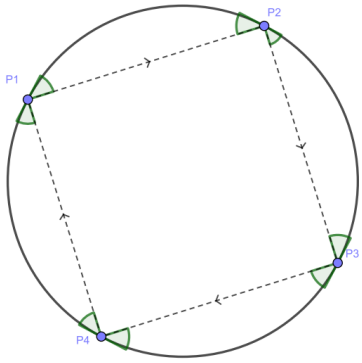
– Figura 8: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 3



Fonte: autor

Exemplo 3. *Se o período é* 4*, então* $(\theta + 8\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta, \psi)$*, daí os possíveis valores de* ψ *são:* $\frac{\pi}{4}$*,* $\frac{\pi}{2}$ *ou* $\frac{3\pi}{4}$*. Porém, para* $\psi = \frac{\pi}{2}$ *obtemos uma trajetória de período* 2*, logo esse valor não é válido. Portanto para uma trajetória de período* 4*, os possíveis valores de* ψ *são:* $\frac{\pi}{4}$ *e* $\frac{3\pi}{4}$*. Pela Observação 3.6, essas trajetórias estão identificadas.*

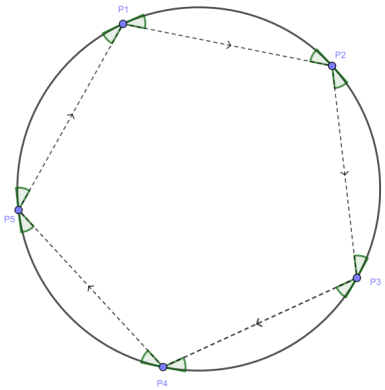
– Figura 9: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 4



Fonte: autor

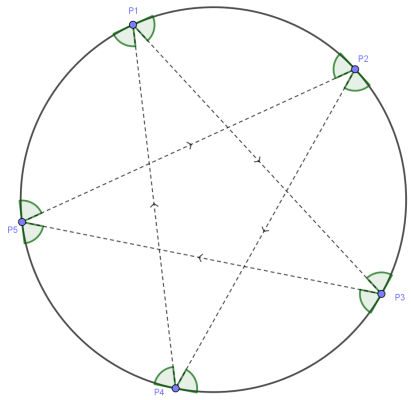
Exemplo 4. *Se o período é* 5*, então* $(\theta + 10\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta, \psi)$*, daí os possíveis valores de* ψ *são:* $\frac{\pi}{5}$*,* $\frac{2\pi}{5}$*,* $\frac{3\pi}{5}$ *ou* $\frac{4\pi}{5}$*. Pela Observação 3.6, a trajetória de* $\psi = \frac{\pi}{5}$ *está identificada com a trajetória de* $\psi = \frac{4\pi}{5}$*, enquanto a trajetória de* $\psi = \frac{2\pi}{5}$ *está identificada com a trajetória de* $\psi = \frac{3\pi}{5}$*.*

– Figura 10: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 5 com uma volta ($\psi = \frac{\pi}{5}$ ou $\psi = \frac{4\pi}{5}$)



Fonte: autor

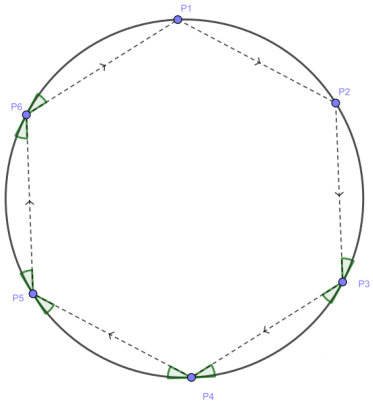
– Figura 11: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 5 com duas voltas ($\psi = \frac{2\pi}{5}$ ou $\psi = \frac{3\pi}{5}$)



Fonte: autor

Exemplo 5. *Se o período é* 6*, então* $(\theta + 12\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta, \psi)$*, daí os possíveis valores de* ψ *são:* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ *ou* $\frac{5\pi}{6}$*. Porém, para* $\psi = \frac{\pi}{3}$ *e* $\psi = \frac{2\pi}{3}$ *obtemos uma trajetória de período* 3*, além disso para* $\psi = \frac{\pi}{2}$ *obtemos uma trajetória de período* 2*. Portanto, para uma trajetória de período* 6 *os possíveis valores para* ψ *são* $\psi = \frac{\pi}{6}$ *e* $\psi = \frac{5\pi}{6}$*. Pela Observação 3.6, essas trajetórias estão identificadas.*

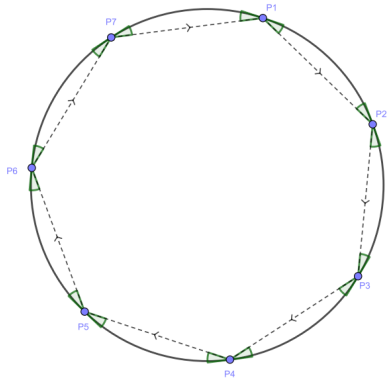
– Figura 12: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 6 ($\psi = \frac{\pi}{6}$ ou $\psi = \frac{5\pi}{6}$)



Fonte: autor

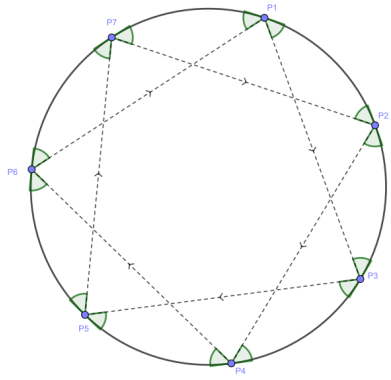
Exemplo 6. *Se o período é* 7*, então* $(\theta + 14\psi \ (mod\ 2\pi), \psi) = (\theta, \psi)$*, daí os possíveis valores de* ψ *são:* $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$,$\frac{3\pi}{7}$,$\frac{4\pi}{7}$,$\frac{5\pi}{7}$*, ou* $\frac{6\pi}{7}$*. Pela Observação 3.6, a trajetória de* $\psi = \frac{\pi}{7}$ *está identificada com a trajetória de* $\psi = \frac{6\pi}{7}$*, a trajetória de* $\psi = \frac{2\pi}{7}$ *está identificada com a trajetória de* $\psi = \frac{5\pi}{7}$ *e a trajetória de* $\psi = \frac{3\pi}{7}$ *está identificada com a trajetória de* $\psi = \frac{4\pi}{7}$*.*

– Figura 13: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 7 com uma volta ($\psi = \frac{\pi}{7}$ ou $\psi = \frac{6\pi}{7}$)



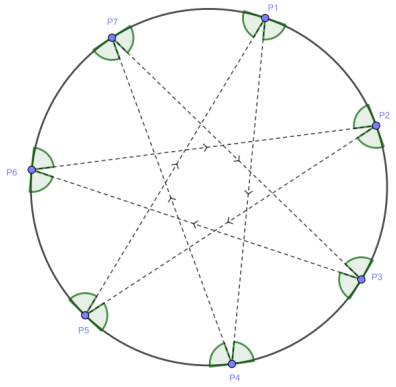
Fonte: autor

– Figura 14: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 7 com duas voltas ($\psi = \frac{2\pi}{7}$ ou $\psi = \frac{5\pi}{7}$)



Fonte: autor

– Figura 15: Exemplo de órbita do bilhar no círculo com período 7 com três voltas ($\psi = \frac{3\pi}{7}$ ou $\psi = \frac{4\pi}{7}$)



Fonte: autor

Classificaremos a rotação de um ângulo da seguinte forma.

Definição 3.7. Dizemos que a rotação de um ângulo α é uma **rotação irracional** se o número $\frac{\alpha}{2\pi}$ é irracional, caso contrário dizemos que é uma **rotação racional** .

No espaço de colisão percebemos a presença de retas horizontais. Tais retas representam trajetórias que são densas na fronteira do círculo.

Podemos apresentar o seguinte resultado sobre órbitas com ângulos irracionais.

Proposição 3.8. *Se α é irracional então a rotação R_α é minimal.*

Demonstração. Seja $A \subset S^1$ o fecho de uma órbita. Se a órbita não é densa, o complementar $S^1 \setminus A$ é um conjunto aberto, pois é o complementar de um fechado, é invariante, pois é o complementar de um invariante, e é não vazio, pois a órbita não é densa. Seja I o maior dos intervalos em $S^1 \setminus A$. Lembremos que $\alpha = \frac{\pi}{2} - \psi$, assim os iterados $R_\alpha^n I$ não podem coincidir, pois se ocorre então a rotação é periódica e $\psi = \frac{m}{n}\pi$, daí $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n}\pi$, o que contradiz o fato de α ser irracional. Além disso, os iterados não podem se sobrepor, caso contrário I não seria o maior intervalo. Logo, temos infinitos intervalos disjuntos e de mesmo comprimento, o que não pode ocorrer, pois o círculo possui comprimento finito. Portanto, a órbita deve ser densa.

□

Definição 3.9. Uma sequência de pontos x_n em um círculo C é dita uma **sequência uniformemente distribuída (ou equidistribuída)** se para qualquer intervalo $I \subset C$, o limite

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#\{\ n \mid 0 < n < N,\ x_n \in I\}}{N} = \frac{m(I)}{m(C)},$$

onde $m(\cdot)$ denota o comprimento.

Veremos agora três resultados que equivalem à sequência $x_n \in C$ ser uniformemente distribuída. O teorema a seguir foi demonstrado por H.Weyl em 1914.

Teorema 3.10. *Seja x_n uma sequência em S^1. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *(x_n) é uniformemente distribuída (mod 2π)*

2. *Para toda função* $\varphi : S^1 \to R$ *contínua, tem-se* $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \varphi(x_j) = \int_{S^1} \varphi(x)dx$

3. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} exp(2\pi im\varphi(x_n)) = 0$, *para todo inteiro* m *não nulo.*

Corolário 3.11. *Se* $\frac{\psi}{\pi}$ *é irracional então para cada ponto* $(\theta, \psi) \in C_\psi$ *a sequência formada por suas imagens* $x_n = \frac{\theta+2n\psi}{\pi}$ $(mod\ 2\pi)$ *é uniformemente distribuída em* C_ψ.

Demonstração. Dado m inteiro não nulo temos:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi im\frac{(\theta+2\psi n)}{\pi}} = \frac{e^{2im\theta}}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{4im\psi n} =$$

$$= \frac{e^{2im\theta}}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(e^{4im\psi})^n = \frac{e^{2im\theta}}{N}(\frac{1-e^{4imN\psi}}{1-e^{4im\psi}}),$$

pois $\sum_{n=0}^{N-1} Z^n = \frac{1-z^n}{1-z}$.

Como $\frac{1-e^{4imN\psi}}{1-e^{4im\psi}}$ é limitado e $\lim_{N\to\infty} \frac{e^{2im\theta}}{N} = 0$, segue que:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi im\frac{(\theta+2\psi n)}{\pi}} = \lim_{N\to\infty} \frac{e^{2im\theta}}{N}(\frac{1-e^{4imN\psi}}{1-e^{4im\psi}}) = 0.$$

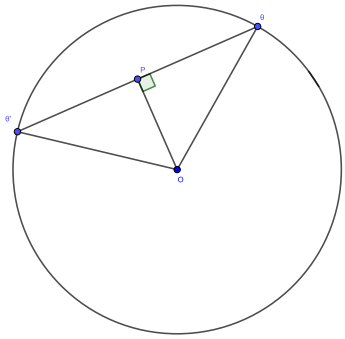
Pelo teorema anterior o corolário segue. □

Agora mostraremos que o bilhar no círculo possui como cáustica um círculo concêntrico ao bordo do bilhar.

Proposição 3.12. *Cada segmento da trajetória entre duas colisões consecutivas é tangente ao círculo* $S_\psi = \{x^2 + y^2 = cos^2\psi\}$ *concêntrico ao disco* D. *Além disso, se* $\frac{\psi}{\pi}$ *é irracional, então as trajetórias preenchem densamente o anel entre* ∂D *e o círculo menor* S_ψ.

Demonstração. Seja $O = (0, 0)$ o centro do disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Considere $\theta = (x, y)$ e $\theta' = (x', y')$ dois pontos de colisões consecutivas. Tomando $P \in \overline{\theta\theta'}$ tal que $\overline{OP} \perp \overline{\theta\theta'}$, temos que o triângulo $\Delta O\theta\theta'$ é isósceles, logo $\widehat{O\theta P} = \widehat{O\theta' P}$. Além disso, $\widehat{OP\theta} = \widehat{OP\theta'} = \frac{\pi}{2}$, portanto $\widehat{\theta' OP} = \widehat{\theta OP}$.

– Figura 16: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 1



Fonte: autor

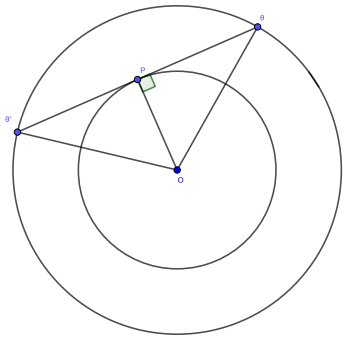
Pela Proposição 3.3, $\widehat{\theta' O \theta} = 2\psi$, com isso $\widehat{\theta' O P} = \psi$. Note que $P = (\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$, pois P é a instersecção da corda $\overline{\theta\theta'}$ com um raio de forma perpendicular. Assim,

$$\text{dist}(O, P) = \sqrt{(\frac{x+x'}{2})^2 + (\frac{y+y'}{2})^2} \Rightarrow \cos\psi = \frac{\overline{OP}}{\overline{O\theta}} = \frac{\sqrt{(\frac{x+x'}{2})^2 + (\frac{y+y'}{2})^2}}{1}$$

$$\Rightarrow \cos^2\psi = (\frac{x+x'}{2})^2 + (\frac{y+y'}{2})^2.$$

Portanto, $P \in S_\psi$. Como P é o único ponto com a propriedade de que $\overline{OP} \perp \overline{\theta\theta'}$, segue que $\overline{\theta\theta'}$ é tangente à S_ψ em P.

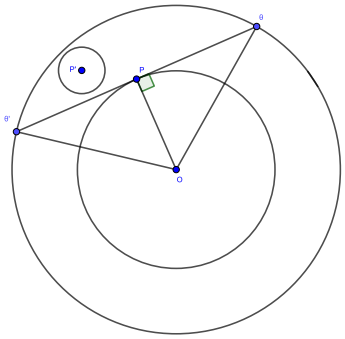
– Figura 17: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 2



Fonte: autor

Tomemos P' um ponto qualquer no anel entre ∂D e o círculo menor S_ψ. Dado $\epsilon > 0$, seja $B(P', \epsilon)$ a bola de centro P' e raio ϵ.

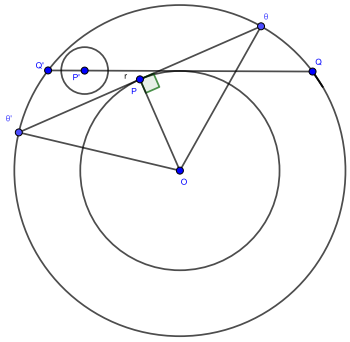
– Figura 18: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 3



Fonte: autor

Seja r uma reta por P' tangente a S_ψ, assim r intercepta ∂D em dois pontos. Denotemos por Q um desses pontos.

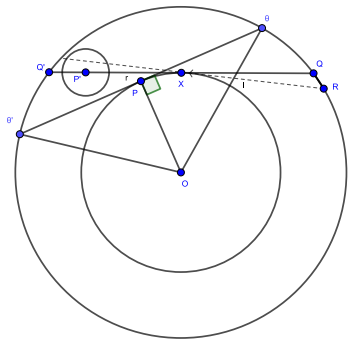
– Figura 19: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 4



Fonte: autor

Por hipótese a rotação por ângulo 2ψ é irracional, daí a órbita de todo (θ, ψ) é densa no bordo ∂D devido à minimalidade da rotação. Pela densidade da órbita, segue que existe um ponto de colisão $R \in \partial D$ pertencente à trajetória que contém o segmento $\overline{\theta\theta'}$ tal que $\text{dist}(Q, R) < \epsilon$. Suponhamos l uma trajetória do bilhar que sai do ponto R e intercepta a reta r no ponto X (l é a tangente a S_ψ).

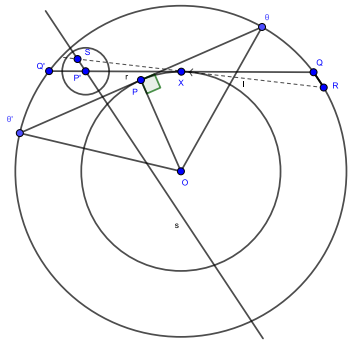
– Figura 20: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 5



Fonte: autor

Seja também s a reta passando por P' e paralela ao segmento $\overline{QR}$. Considere S ponto de intersecção entre as retas l e s.

– Figura 21: Demonstração da existência da cáustica S_ψ do bilhar no círculo: Passo 6



Fonte: autor

Note que, pelo paralelismo entre a reta s e o segmento $\overline{QR}$, temos que $\triangle XSP' \simeq \triangle XQR$. Além disso, $\overline{XQ} = \overline{XQ'}$, onde Q' é o outro ponto de interseção entre a reta r e ∂D. Daí, como $\overline{XP'} < \overline{XQ'} = \overline{XQ}$, usando a semelhança entre $\triangle XSP'$ e $\triangle XQR$, segue que $\overline{SP'} < \overline{QR}$. Portanto, $\text{dist}(P', S) < \text{dist}(Q, R) < \epsilon$. Ou seja, dado qualquer ponto P' no anel entre ∂D e S_ψ, temos uma trajetória do bilhar passando por $B(P', \epsilon)$.

$\square$

Observação 3.13. Não podemos garantir que a reta l intersecta a reta r no ponto de tangência X, porém o fato de que $\text{dist}(Q, R) < \epsilon$ nos permite tomar a intersecção entre l

e r próxima o suficiente de X, de modo que as desigualdades utilizadas continuam válidas.

A aplicação F representa apenas as colisões. Para descrevermos o movimento da partícula em um intervalo de tempo qualquer, consideraremos a aplicação $\Phi^t : \Omega \to \Omega$. Veremos agora que, para o círculo, Φ^t satisfaz as propriedades necessárias para ser considerada um fluxo.

- Φ^t é contínua: Seja $(p_0, v_0) \in \Omega$. Suponhamos que não ocorrem colisões no intervalo $[0, t]$, assim $\Phi^t(p_0, v_0) = (p_0 + tv_0, v_0)$ e, portanto, Φ^t é contínua. Agora suponhamos a ocorrência de colisão em $t_1 \in (0, t]$, logo $\Phi^t(p_0, v_0) = (p_0 + t_1v_0, v_1)$, onde v_1 representa o vetor velocidade após a colisão. Ao ocorrer uma colisão há uma mudança instantânea no movimento da partícula, o que causa uma descontinuidade na aplicação Φ^t. Para removermos essa descontinuidade, identificaremos os vetores $(p_0 + t_1v_0, v_0) \simeq (p_0 + t_1v_0, v_1)$ no intervalo (t_1, t), ou seja, estamos identificando os vetores v_0 e v_1. Como no intervalo (t_1, t) o movimento é retilíneo teremos então: $\Phi^t(p_0, v_0) = (p_0 + t_1v_0 + (t - t_1)v_1, v_1)$. Dessa forma a aplicação Φ^t se torna contínua.

- $\Phi^0 = I_\Omega$, onde I_Ω representa a identidade em Ω e $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$: Dados $(p_0, v_0) \in \Omega$ e v_1 como antes, temos $\Phi^0(p_0, v_0) = (p_0, v_0) = I_\Omega(p_0, v_0)$, ou seja, $\Phi^0 = I_\Omega$.

  Se no intervalo $[0, t + s]$ não houver colisão é claro que $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$. Suponhamos então que haja uma única colisão em um instante t_1 satisfazendo $0 < s < t_1 < t$. Assim, $\Phi^{s+t}(p_0, v_0) = (p_0 + t_1v_0 + (t + s - t_1)v_1, v_1)$ e também, $\Phi^s \circ \Phi^t(p_0, v_0) = \Phi^s(\Phi^t(p_0, v_0)) = \Phi^s(p_0+t_1v_0+(t-t_1)v_1, v_1) = (p_0+t_1v_0+(t+s-t_1)v_1, v_1)$. Portanto, $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t}$. Analogamente, tem-se $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{s+t}$.

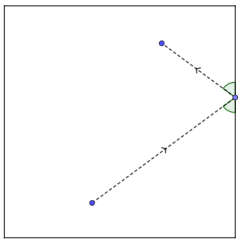
Portanto a aplicação Φ^t é um fluxo contínuo que representa movimentação do bilhar.

3.2 BILHAR NO QUADRADO

Nesta seção nos basearemos em (20), (7), (9).

Veremos agora o caso do bilhar no quadrado $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,\ y \leq 1\}$. Consideremos que ao colidir com um vértice de D a partícula tem sua trajetória interrompida, uma vez que não há vetor normal em um vértice.

– Figura 22: Bilhar no Quadrado



Fonte: autor

Definição 3.14. Trajetórias que não tocam um vértice são ditas **trajetórias regulares**, enquanto as trajetórias que tocam um vértice são ditas **trajetórias excepcionais**.

Seja $v(t) = (u(t), w(t))$ o vetor velocidade da partícula em um tempo t.

Teorema 3.15. *Após m colisões em uma parede vertical e n colisões em uma parede horizontal o vetor velocidade se torna*

$$v(t) = ((-1)^m u(t), (-1)^n w(t)).$$

Demonstração. Se em um instante t_1 a partícula colidir com uma parede horizontal de D, a coordenada $u(t)$ se manterá constante e a coordenada $w(t)$ mudará de sinal, dessa forma $v(t_1) = (u(t), -w(t))$. Caso contrário, se em um instante t_1 a partícula colidir com uma parede vertical de D, a coordenada $w(t)$ se manterá constante e a coordenada $u(t)$ mudará de sinal, dessa forma $v(t_1) = (-u(t), w(t))$. Assim, podemos representar o vetor $v(t)$ como:

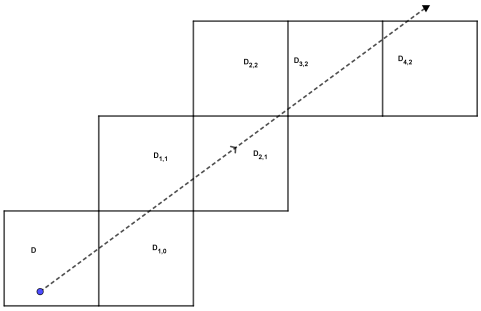
$$v(t) = ((-1)^m u(t), (-1)^n w(t))$$

onde m representa o número de colisões na vertical e n representa o número de colisões na horizontal. □

Ao invés de refletir a trajetória da partícula podemos refletir o quadrado sobre o lado da colisão, fazendo a partícula se deslocar em linha reta sobre um toro. Essa construção é denominada **desdobramento da trajetória do bilhar**. Denotaremos as cópias de D como:

$$D_{m,n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ m \leq x \leq m + 1, \quad n \leq y \leq n + 1\}.$$

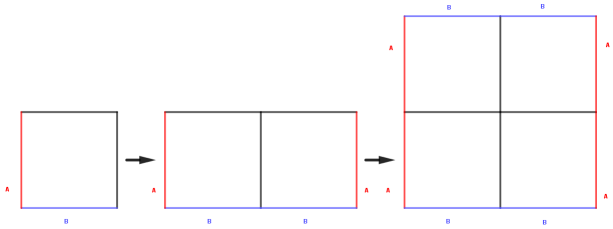
– Figura 23: Desdobramento da trajetória do bilhar no quadrado



Fonte: autor

Podemos representar o toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ como o quadrado unitário com os pares de lados opostos identificados.

– Figura 24: Representação do toro $\mathbb{T}^2$ como o quadrado



Fonte: autor

Com isso temos o seguinte resultado para o fluxo.

Corolário 3.16. *Seja $v = (u_0, w_0)$ o vetor velocidade da partícula em um instante t. Se $\frac{w_0}{u_0} \in \mathbb{Q}$, então uma correspondente trajetória regular (que não atinge um vértice) do bilhar no quadrado D é periódica. Se $\frac{w_0}{u_0} \notin \mathbb{Q}$, então a correspondente trajetória regular do bilhar é densa.*

Demonstração. Seja $x = (x_1, x_2)$ a posição da partícula no tempo t com velocidade v. Assim,

$$\frac{dx_1}{dt} = u_0, \quad \frac{dx_2}{dt} = w_0.$$

Podemos integrar esse sistema de equações diferenciais explicitamente. O fluxo resultante $\{\Phi_v^t\}_{t\in\mathbb{R}}$, é dado por

$$\Phi_v^t(x_1, x_2) = (x_1 + u_0 t, \quad x_2 + w_0 t)(mod 1)$$

As curvas integrais do sistema são segmentos de reta com inclinação $\gamma = \frac{w_0}{u_0}$. A trajetória ao longo da órbita é uniforme com "saltos" instantâneos aos correspondentes pontos quando a órbita atinge a fronteira do quadrado. Se considerarmos os sucessivos momentos em que uma órbita intersecta o círculo $C_1 = \{x_1 = 0\}$, ou seja, que uma órbita intersecta a parede vertical esquerda com um vetor velocidade possuindo qualquer direção, a coordenada x_2 muda por exatamente γ $(mod\ 1)$ entre tais dois retornos, já que, tomando como 1 o tempo que a partícula leva no percurso de uma parede vertical a outra parede vertical, temos que a velocidade será o deslocamento na direção vertical dividido pelo deslocamento na horizontal, como o deslocamento na horizontal é 1 (distância entre as paredes verticais), segue a velocidade é igual ao deslocamento vertical, logo a coordenada x_2 muda por exatamente γ $(mod\ 1)$. Assim, se $\gamma = \frac{w_0}{u_0}$ é irracional, o fecho de cada órbita contém o círculo C_1 e como a imagem desse círculo sob o fluxo $\{\Phi_v^t\}$ cobre todo o toro, o fluxo é minimal, isto é, cada órbita é densa em $\mathbb{T}^2$. Se γ é racional, então cada órbita é fechada e como D é compacto, segue que a correspondente trajetória do bilhar é periódica.

□

O fluxo Φ^t do bilhar no quadrado está definido para todo $t \in \mathbb{R}$ no caso de trajetórias regulares, enquanto para trajetórias excepcionais o fluxo está definido até a partícula colidir com um vértice.

Vejamos agora que o conjunto das trajetórias excepcionais é enumerável.

Proposição 3.17. *O conjunto das trajetórias excepcionais é uma união enumerável de superfícies de dimensão* 2 *em* Ω.

Com isso podemos gerar uma extensão para o fluxo considerando as trajetórias excepcionais.

Proposição 3.18. *O fluxo* Φ^t *pode ser unicamente estendido por continuidade de todas as trajetórias excepcionais. Nesse caso, toda trajetória que toca um vértice de* D *reverte seu curso de volta em linha reta.*

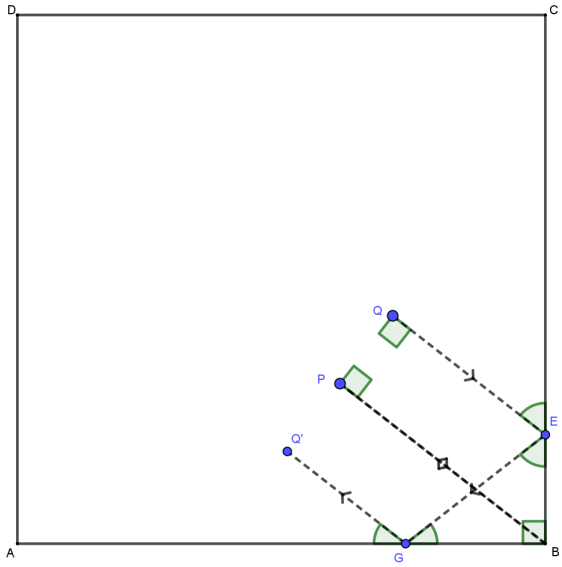
Demonstração. Tomemos uma trajetória excepcional e um ponto fase (p, v) nessa trajetória. Consideremos $\Phi^{2t_1}(p, v) = (p, -v)$ a extensão do fluxo no vértice, onde t_1 é o tempo que a partícula leva para se deslocar de p até o vértice. Considere o ponto fase (q, v) fora da

trajetória excepcional de modo que a reta que contém p e q é perpendicular às trajetórias de (p, v) e (q, v). Como o vértice do quadrado faz um ângulo reto, segue que o tempo de colisão da partícula, na vizinhança do vértice que sai da posição q mais a sua extensão também é $2t_1$, já que o comprimento da linha poligonal (Q, E, G, Q') apresentada na figura a seguir é igual ao dobro do comprimento do segmento $\overline{PB}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ na definição de limite, obtemos:

$$\lim_{(q,v)\to(p,v)} \Phi^{2t_1}(q, v) = \Phi^{2t_1}(p, v)$$

$\square$

– Figura 25: Extensão do fluxo na vizinhança do vértice

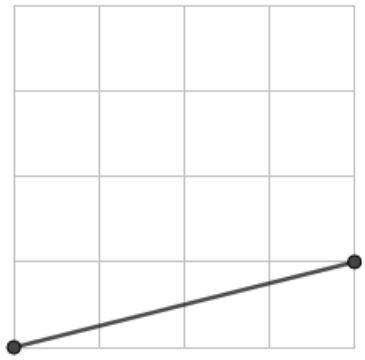


Fonte: autor

Apresentemos as trajetórias periódicas do bilhar no quadrado.

Definição 3.19. Uma **trajetória periódica** do bilhar no quadrado (desdobrado) é um segmento no plano cujas extremidades diferem por uma translação por um vetor do reticulado $2\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}$.

– Figura 26: Trajetória periódica no bilhar no quadrado



Fonte: autor

Tais trajetórias aparecem em famílias de paralelas, analisaremos o número de trajetórias periódicas de comprimento menor que L, ou seja, a quantidade dessas famílias.

Teorema 3.20. *O número de famílias de trajetórias periódicas de comprimento menor que L tem assíntotas quadráticas $N(L) \sim \pi\frac{L^2}{8}$.*

Demonstração. Tomemos uma trajetória indo da origem ao ponto $(2p, 2q)$, onde podemos supor p e q não negativos. Essa trajetória possui comprimento $2\sqrt{p^2+q^2}$ e a cada (p, q) correspondem duas orientações da trajetória (da origem para $(2p, 2q)$ e de $(2p, 2q)$ para a origem). Portanto, o número de trajetórias periódicas de comprimento menor que L é $\#\{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p^2 + q^2 < \frac{L^2}{4}\}$.

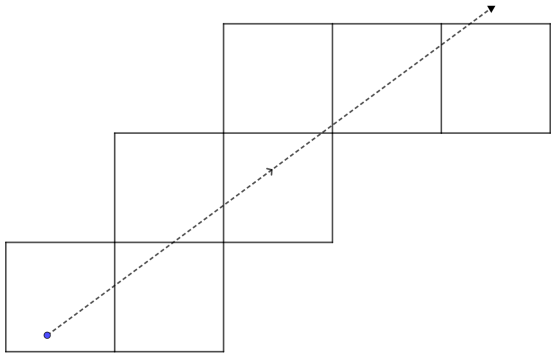
Esse número é o número de pontos com coordenadas inteiras dentro do círculo de raio $\frac{L}{2}$ centrado na origem, que, como é demonstrado pelo Problema do Círculo de Gauss ((9)), é aproximadamente igual à área desse círculo, ou seja, $\pi\frac{L^2}{4}$. Dividimos esse número pela metade, pois existem duas orientações para a trajetória, assim obtemos $\pi\frac{L^2}{8}$. Portanto, o número de famílias de trajetórias periódicas de comprimento menor que L tem assíntotas quadráticas $N(L) \sim \pi\frac{L^2}{8}$.

□

Definição 3.21. Tomemos uma trajetória com inclinação irracional. Podemos representar a trajetória por uma palavra infinita com dois símbolos, 0, quando a partícula toca um lado horizontal, e 1, quando a partícula toca um lado vertical. Chamaremos essa sequência de 0's e 1's de **sequência de corte** (**cutting sequence**) da reta L.

Observe a trajetória desdobrada a seguir.

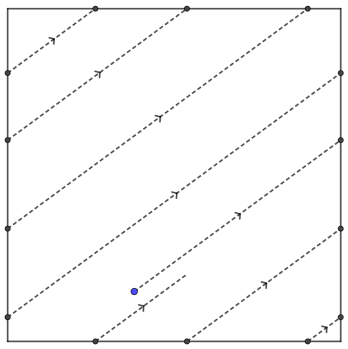
– Figura 27: Trajetória no quadrado desdobrado



Fonte: autor

O segmento dessa trajetória apresentado na figura é representado pelo seguinte segmento na sequência de corte: $(..., 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...)$. A mesma trajetória pode ser observada no quadrado com os lados identificados na figura a seguir.

– Figura 28: Trajetória no quadrado com os lados identificados



Fonte: autor

Definição 3.22. Uma sequência é dita **quasi-periódica** se cada um dos seus segmentos finitos aparecem infinitas vezes.

Teorema 3.23. *A sequência de corte w de uma reta L com inclinação irracional não é periódica, mas é quasi-periódica.*

Demonstração. Consideremos um segmento finito de w contendo p 0's e q 1's. Suponhamos que w é periódica e digamos que o período contém p_0 0's e q_0 1's. A inclinação de L é o limite, quando $n \to \infty$, das inclinações dos segmentos L_n, correspondentes aos segmentos

de w com n períodos. A inclinação de L_n é $\frac{np_0}{nq_0}$, e o limite é $\frac{p_0}{q_0} \in Q$. Contradizendo a hipótese de que a inclinação de L é irracional.

Se dois pontos do quadrado estão suficientemente próximos, então segmentos suficientemente longos das sequências de corte de trajetórias paralelas passando por esse ponto coincidem. Como a inclinação de L é irracional, a trajetória retornará a qualquer vizinhança de seus pontos infinitas vezes. Segue daí a quasi-periodicidade de w.

□

Definição 3.24. A **função de complexidade** $p(n)$ nos mostra o número de segmentos distintos de comprimento n em w. Quanto mais rápido $p(n)$ cresce, mais complexa é a sequência w. Para dois símbolos, o crescimento mais rápido possível é $p(n) = 2^n$.

Para uma reta L com uma inclinação irracional temos o seguinte resultado.

Teorema 3.25. *p(n) = 2n + 1.*

Demonstração. Como uma trajetória do bilhar com inclinação irracional chega arbitrariamente próxima de qualquer ponto no quadrado, os conjuntos dos segmentos de comprimento n das sequências de corte de quaisquer duas trajetórias paralelas coincidem. Assim, podemos encontrar a complexidade calculando o número de segmentos iniciais de comprimento n diferentes nas sequências de corte de todas as retas paralelas com dada inclinação. De fato, basta considerarmos as retas que começam na diagonal do quadrado unitário.

Particionemos o reticulado em "escadas". O k-ésimo simbolo na sequência de corte é 0 ou 1, dependendo se a reta L encontra um segmento horizontal ou vertical da k-ésima escada.

Projetemos o plano na diagonal $x + y = 0$ por L, e fatoremos a diagonal pela translação do vetor (1, -1) para obtermos o circulo S^1. As projeções dos vértices da primeira escada particionam o círculo em dois arcos irracionais. Tomemos T a rotação de S^1 pelo comprimento de um arco, ou seja, pela projeção do vetor (1,0). Cada escada consecutiva é obtida da primeira por uma translação pelo vetor (1,0). Com isso, as projeções dos vértices das n primeiras escadas são os pontos da órbita $T^i(0),\ i = 0, ..., n$. Como T é uma rotação irracional, todos esses pontos são distintos e existem $n + 1$ deles.

Para descrever os segmentos iniciais de comprimento n das sequências de corte, começamos com uma reta pela origem (0,0) e transladamos paralelamente pela diagonal do

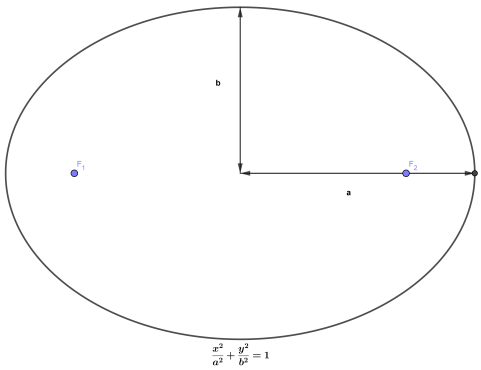
quadrado unitário na direção do ponto (-1,1). Os segmentos de comprimento da sequência de corte mudam quando a reta passa por um vértice de uma das primeiras n escadas. Como vimos, ocorrem $n+1$ desses eventos, portanto $p(n) = n+1$. □

3.3 BILHAR NA ELIPSE

Nesta seção nos basearemos em (7).

Consideremos agora a elipse $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0\}$. Podemos realizar uma parametrização a partir do comprimento de arco r, considerando $r = 0$ no ponto $(a, 0)$ e orientando r no sentido anti-horário.

– Figura 29: Bilhar na elipse



Fonte: autor

Teorema 3.26. *Se a trajetória passa por um dos focos então, após colidir com ∂D a partícula passará pelo outro foco.*

Demonstração. Pelo Teorema de Poncelet, $\nabla f(X)$ bissecta o ângulo F_1XF_2 e é perpendicular à tangente. Com isso, uma trajetória que passa por um dos focos irá passar pelo outro foco após colidir com ∂D. □

Afirmação 1. *Toda trajetória passando pelos focos F_1 e F_2 converge para o eixo maior da elipse (o eixo x).*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $F_1 = (-f, 0)$ e $F_2 = (f, 0)$. Fixemos uma trajetória do bilhar que passa por $(f, 0)$ e r_1 a reta que a contém. Se o coeficiente angular m_1 da reta r_1 é igual a zero, não temos nada a provar. Suponhamos então que a mesma tenha coeficiente angular $m_1 < 0$. Seja (x_1, y_1) o ponto de colisão

que r_1 faz com a elipse. Note que $x_1 > f$ e $y_1 < 0$, e ainda , $m_1 = \frac{y_1}{x_1 - f}$. Considere r_2 a outra reta que contém a trajetória consecutiva após a colisão. A reta r_2 passa pelo foco $(-f, 0)$. Denotemos o ponto da próxima colisão por (x_2, y_2). Observe também que $x_2 < -f, y_2 > 0 > y_1$ e $m_2 = \frac{y_2}{x_2 - (-f)}$, logo $m_1 < m_2$. Uma outra reta r_3 cujo ponto de colisão é (x_3, y_3) tem como coeficiente angular $m_3 = \frac{y_3}{x_3 - f}$ e satisfaz $x_3 > x_2$ e $y_3 < y_2$ assim $m_1 < m_2 < m_3$. Continuando esse processo, obtemos uma sequência crescente e limitada superiormente $m_1 < m_2 < m_3 < ... < 0$, logo tal sequência $(m_j)_{j \in N}$ possui limite. Assim, a o movimento tende para dois segmentos com a mesma inclinação, já que o coeficiente angular dos segmentos tendem para o limite, com um ponto em comum onde ocorre a colisão, e cada um dos segmentos deve passar por um dos focos. Mas como os segmentos tem a mesma inclinação e um ponto em comum segue que eles são coincidentes, assim temos um segmento que passa pelos dois focos, ou seja, esse segmento deve ser o eixo maior da elipse. Portanto, a trajetória converge para o eixo maior da elipse.

□

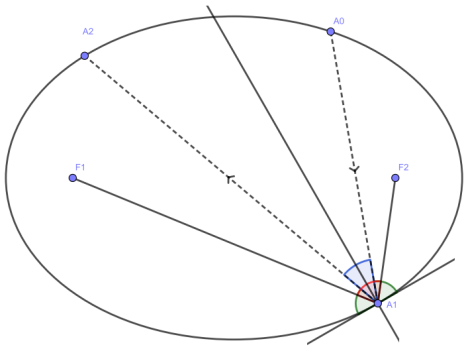
Lema 3.27. *Sejam A_0A_1 e A_1A_2 segmentos consecutivos da mesma trajetória do bilhar elíptico com focos F_1 e F_2. Então, os ângulos $A_0A_1A_2$ e $F_1A_1F_2$ tem a mesma bissetriz.*

Demonstração. Pela lei de reflexão, os ângulos que A_0A_1 e A_1A_2 fazem com a reta tangente à elipse no ponto A_1 são iguais. Se A_0, A_1 e A_2 não são colineares, o ângulo que A_0A_1 faz com a reta bissetriz de $\widehat{A_0A_1A_2}$ é igual ao ângulo que A_1A_2 faz com a mesma bissetriz. Se A_0, A_1 e A_2 são colineares, o ângulo que A_0A_1 faz com a reta bissetriz de $\widehat{A_0A_1A_2}$ também é igual ao ângulo que A_1A_2 faz com a mesma bissetriz, já que nesse caso $A_0A_1 = A_1A_2$.

Sejam $\theta = \widehat{A_0A_1F_1}$ e $\gamma = \widehat{F_2A_1A_2}$. Se $\theta = \gamma$ então as bissetrizes dos ângulos $A_0A_1A_2$ e $F_1A_1F_2$ coincidem. Agora, os ângulos que F_1A_1 e F_2A_1 fazem com a tangente à curva no ponto A_1 são iguais, o que prova que $\theta = \gamma$.

Logo a igualdade entre os ângulos verificada prova que as bissetrizes coincidem. □

– Figura 30: Representação do Lema 3.27



Fonte: autor

Proposição 3.28. *Se a trajetória da partícula cruza o segmento entre os dois focos F_1 e F_2 então após colidir com o bordo a partícula cruza esse segmento novamente. Da mesma forma, se a partícula cruza o eixo maior fora do segmento entre os focos, digamos à esquerda de F_1, então após colidir com o bordo cruzará o eixo maior à direita de F_2.*

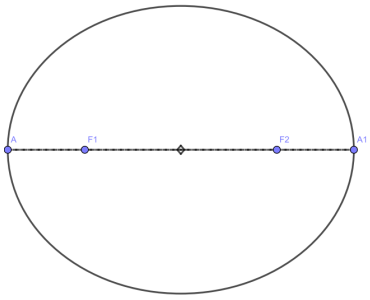
Demonstração. Sejam A_0A_1 e A_1A_2 segmentos consecutivos da mesma trajetória. Segue do lema que $\widehat{A_0A_1A_2}$ e $\widehat{F_1A_1F_2}$ tem a mesma bissetriz. Logo, se A_0A_1 intercepta F_1F_2, então A_1A_2 também intercepta F_1F_2. Se A_0A_1 não intercepta F_1F_2, então A_1A_2 também não intercepta F_1F_2. Por indução sobre n, sendo $A_0, ..., A_n$ os pontos em que a trajetória colide com o bordo ∂D, prova-se que se um dos segmentos da trajetória intersectar F_1F_2 então os restantes também o intersectam. Analogamente, se mostra que se um dos segmentos da trajetória não intersectar F_1F_2 então os restantes também não o intersectam. □

Dessa forma podemos distinguir dois tipos de trajetórias.

Definição 3.29. Trajetórias que interceptam o segmento F_1F_2 são denominadas **trajetórias interiores**, enquanto as trajetórias que cruzam o eixo maior da elipse fora do segmento F_1F_2 são denominadas **trajetórias exteriores**.

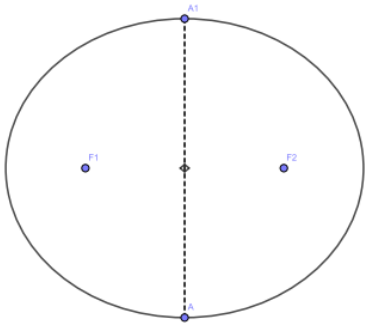
O bilhar na elipse também admite órbitas periódicas. Vejamos alguns exemplos:

– Figura 31: Exemplo 1 de órbita do bilhar na elipse com período 2



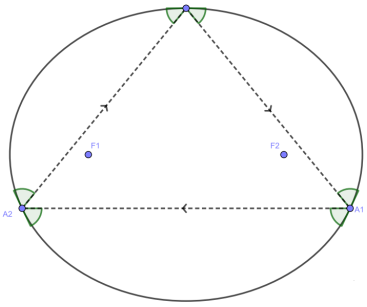
Fonte: autor

– Figura 32: Exemplo 2 de órbita do bilhar na elipse com período 2



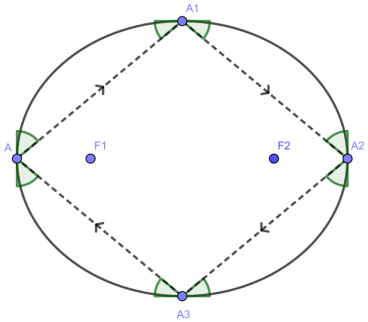
Fonte: autor

– Figura 33: Exemplo de órbita do bilhar na elipse com período 3



Fonte: autor

– Figura 34: Exemplo de órbita do bilhar na elipse com período 4

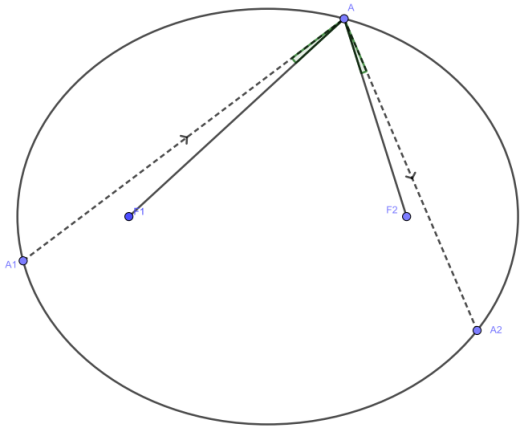


Fonte: autor

Teorema 3.30. *Seja ϵ a elipse com focos F_1 e F_2. Para cada trajetória exterior existe uma elipse com focos F_1 e F_2 que é tangente a cada lado dessa trajetória. Para cada trajetória interior existe uma hipérbole com focos F_1 e F_2 que é tangente a cada lado dessa trajetória. Chamamos essas cônicas de cáusticas do bilhar na elipse.*

Demonstração. Dada ϵ a elipse de focos F_1 e F_2. Sejam A_1, A e A_2 pontos dessa elipse tais que A_1A e AA_2 são dois segmentos consecutivos da mesma trajetória. Assuma que A_1A não intercepta F_1F_2. Segue do Lema 3.27 que $\widehat{A_1AF_1} = \widehat{A_2AF_2}$.

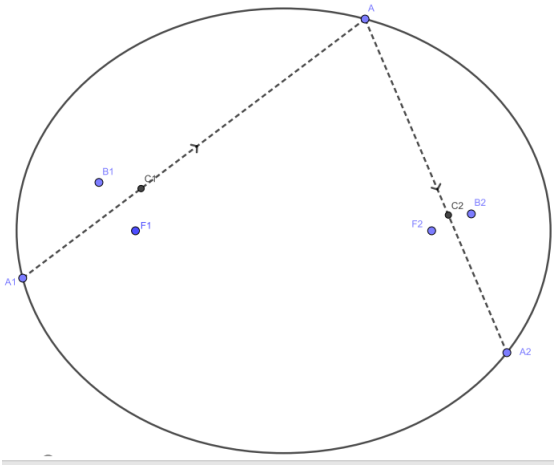
– Figura 35: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 1



Fonte: autor

Refletindo F_1 relativamente a A_1A obtemos B_1 e refletindo F_2 relativamente a AA_2 obtemos B_2. Sejam $C_1 = B_1F_2 \cap A_1A$ e $C_2 = B_2F1 \cap AA_2$.

– Figura 36: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 2



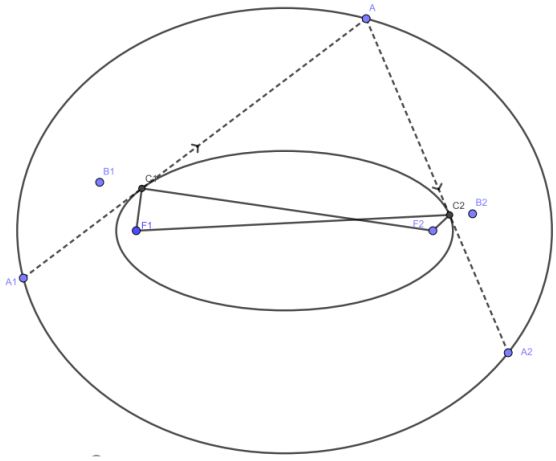
Fonte: autor

Considere a elipse ϵ_1 com focos F_1 e F_2 passando por C_1. Temos $\widehat{F_2C_1A} = \widehat{F_1C_1A_1}$, pois $\widehat{AC_1F_2} = \widehat{A_1C_1B_1}$(ângulos opostos pelo vértice) e $\widehat{A_1C_1B_1} = \widehat{A_1C_1F_1}$ (pela simetria).

Pelo Teorema 2.8, ϵ_1 é tangente a A_1A em C_1. Da mesma forma, uma elipse ϵ_2 é tangente a A_2A em C_2. Se mostrarmos que a elipse ϵ_1 é igual à elipse ϵ_2, o teorema fica provado para o caso de trajetórias exteriores. De fato, queremos mostrar que $|F_1C_1| + |C_1F_2| = |F_1C_2| + |C_2F_2|$, o que se reduz a $|B_1F_2| = |F_1B_2|$.

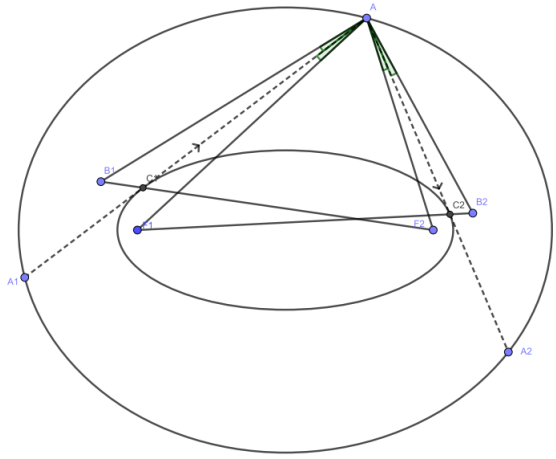
Note que $\widehat{B_1AA_1} = \widehat{A_1AF_1} = \widehat{F_2AA_2} = \widehat{A_2AB_2}$, assim os triângulos B_1AF_2 e F_1AB_2 são congruentes. Portanto, $|B_1F_2| = |F_1B_2|$ como queríamos.

– Figura 37: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 3



Fonte: autor

– Figura 38: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 4

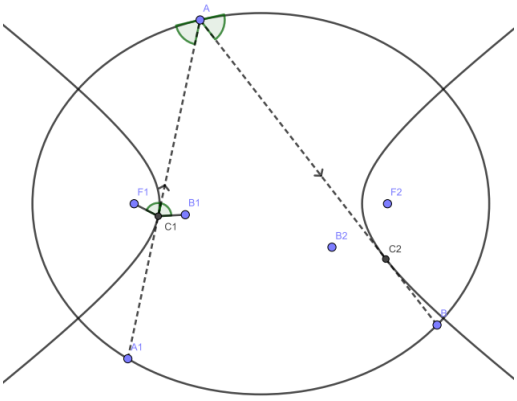


Fonte: autor

Suponhamos agora que A_1A intercepta o segmento F_1F_2. Com a mesma notação refletimos F_1 e F_2 em relação a A_1A e AA_2 respectivamente e obtemos B_1 e B_2. Denotemos por C_1 a intersecção da reta determinada por F_2 e B_1 com o segmento A_1A e por C_2 a intersecção da reta determinada por F_1 e B_2 com o segmento AA_2. Consideremos uma hipérbole h_1 com focos F_1 e F_2 passando por C_1. Como $\widehat{F_1C_1A} = \widehat{B_1C_1A}$, então, pela Proposição 2.4, h_1 é tangente a A_1A. Analogamente, uma outra hipérbole h_2 é tangente a AA_2 em C_2. Vamos mostrar que as duas hipérboles são as mesmas. De fato, queremos mostrar que $|d(F_1, C_1) - d(F_2, C_1)| = |d(F_2, C_2) - d(F_1, C_2)|$. Note que $|d(F_1, C_1) - d(F_2, C_1)| = |d(F_1, C_1) - (d(F_2, B_1) + d(B_1, C_1))| = d(F_2, B_1)$, pois $d(B_1, C_1) = d(F_1, C_1)$ (pela simetria) e $|d(F_1, C_2) - d(F_2, C_2)| = |d(F_1, B_2) - (d(F_2, C_2) - d(B_2, C_2))| = d(F_1, B_2)$. Assim, basta mostrar que $d(F_2, B_1) = d(F_1, B_2)$. Temos que os triângulos F_1AB_2 e

B_1AF_2 são congruentes, pois $|AF_1| = |AB_1|$, $|AF_2| = |AB_2|$ e $\widehat{F_1AB_2} = \widehat{B_1AF_2}$. Portanto, $d(F_1, B_2) = d(F_2, B_1)$.

– Figura 39: Demostração da existência das cáusticas no bilhar na elipse: Passo 5

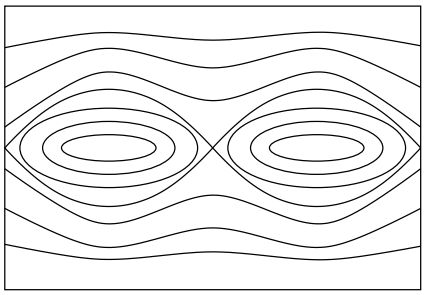


Fonte: autor

□

A seguir temos o espaço de colisão do bilhar na elipse.

– Figura 40: Espaço de colisão do bilhar na elipse



Fonte: Regis Castijos Alves Soares Junior

As trajetórias com cáustica elíptica estão em uma curva fechada em M, essas curvas são representadas por "ondas horizontais" no espaço de colisão. Cada curva é invariante pela aplicação F.

As trajetórias com cáustica hiperbólica estão em duas curvas fechadas em M, uma dentro de cada metade da curva com forma-∞ no espaço de colisão.

As trajetórias que passam pelos focos são representadas pela forma-∞.

Observação 3.31. Em cada curva invariante, a aplicação F é conjugada a uma rotação por algum ângulo (denominado ângulo de rotação). O número de rotação muda continuamente e monotonicamente com a curva invariante. A ação da aplicação F em cada curva invariante pode ser analisada explicitamente e o ângulo de rotação pode ser calculado analiticamente.

Teorema 3.32. *A aplicação de colisão $F : M \to M$ do bilhar na elipse não é ergódica.*

Demonstração. As trajetórias com cáustica hiperbólica estão em duas curvas fechadas em M, uma dentro de cada metade da curva com forma-∞ no espaço de colisão, como pode ser visto na figura acima. A aplicação F transforma cada oval em uma oval idêntico com a outra metade da forma-∞. Assim a união das duas ovais é invariante por F e cada oval é invariante por F^2. Com isso, o bilhar na elipse admite uma função não constante F-invariante, portanto a aplicação F não é ergódica. $\square$

4 CONCLUSÃO

Analisamos nos capítulos anteriores diversas propriedades dinâmicas encontradas nos bilhares no círculo, na elipse e no quadrado, como a presença de órbitas períodicas, a ocorrência de cáusticas, a não ergodicidade dos bilhares no círculo e na elipse, e extensão para o fluxo bem como a análise da complexidade para o bilhar no quadrado.

Os três tipos de bilhares estudados não apresentam comportamento caótico, porém realizando determinadas deformações em suas fronteiras é possível obtermos exemplos de bilhares com dinâmica caótica, como por exemplo o bilhar do estádio de Bunimovich (16), formado a partir de uma mesa retangular com dois lados opostos substituidos por semi-círculos focalizadores. Para os interessados em conhecer mais sobre esse assunto podemos considerar o estudo da consequência de deformações nos bilhares apresentados, além da análise de outras propriedades estatísticas sobre bilhares, como por exemplo o estudo do decaimento de correlações, que determina o quão caótico é o comportamento de um sistema.

REFERÊNCIAS

1 BIRKHOFF, George D. Proof of Poincaré's geometric theorem. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v.14, n.1, p. 14–22, 1913.

2 BIRKHOFF, George D. **Dynamical Systems**. New York: A.M.S. Colloquium Publications, 1927.

3 BIRKHOFF, George D. On the periodic motions of dynamical systems. **Acta Math**, v.50, n.1, p. 359–379, 1927.

4 BOULOS, Paulo; DE CAMARGO, Ivan. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

5 BUNIMOVICH, Leonid A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. **Commun. Math. Phys.**, v.65, n.3, p. 295-312, 1979.

6 CHERNOV, Nikolai; MARKARIAN, Roberto. **Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

7 CHERNOV, Nikolai; MARKARIAN, Roberto. **Chaotic billiards**. American Mathematical Soc., 2006.

8 FERNANDEZ, Pedro J. **Medida e Integração**. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

9 LOWRY-DUDA, David. On some variants of the Gauss circle problem. **arXiv preprint arXiv:1704.02376**, 2017.

10 MAÑÉ, Ricardo. **Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.

11 POINCARÉ, Henri. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. **Bulletin astronomique, Observatoire de Paris**, v.2, n.1, p. 109-118, 1885.

12 POINCARÉ, Henri. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta Math**, v.13, n.1, p. A3-A270, 1890.

13 POINCARÉ, Henri. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**, Vols. I,II,III. Paris, 1892, 1893, 1899.

14 POINCARÉ, Henri. Sur un théoreme de géométrie. **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo**, v.33, n.1, p. 375-407, 1912.

15 POINCARÉ, Henri. **Calcul des probabilités**. Paris: Gauthier-Villars, 1912.

16 SAA, Alberto; TELES, Renato S. **Bilhares**: Aspectos Físicos e Matemáticos. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

17 SINAI, Yakov G. On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics. **Doklady Akademii Nauk**, v.153, n.6, p. 1261-1264, 1963.

18 SINAI, Yakov G. Dynamical systems with elastic reflections. **Russ. Math. Surveys**, v.25, no.2, p.137-189, 1970.

19 SINAI, Yakov G. **Introduction to Ergodic Theory**. Princeton University Press, 1976.

20 TABACHNIKOV, Serge. **Geometry and Billiards**. American Mathematical Soc., 2005.