UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Sheucíer Alves de Medeiros

Geometria Tropical: uma introdução

Juiz de Fora
2022

Sheucíer Alves de Medeiros

Geometria Tropical: uma introdução

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Medeiros, Sheucíer Alves.
Geometria Tropical : uma introdução / Sheucíer Alves de Medeiros. – 2022.
62 f. : il.

Orientadora: Flaviana Andréa Ribeiro
Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Bacharelado em Matemática, 2022.

1. Geometria Tropical. 2. Teorema Fundamental da Álgebra Tropical. 3. Teorema de Bézout Tropical. I. Andréa Ribeiro, Flaviana, orient. II. Título.

Sheucíer Alves de Medeiros

Geometria Tropical: uma introdução

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovada em (dia) de (mês) de (ano)

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho às minhas mães.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Com muito carinho e amor, agradeço à minha avó (mãe) Dorinha, por todo cuidado e dedicação em todos os meus 22 anos de existência. Agradeço, de forma incondicional, à minha mamãe Hérica, por sempre acreditar em mim e por ser, além de mãe, a minha melhor amiga em todos os momentos. Vocês duas são as maiores inspirações da minha vida.

Agradeço à “minha pessoa” Sirlene, por todo apoio, carinho e amor nesses mais de 10 anos de amizade. Agradeço à minha amiga Paula, por compartilhar comigo os melhores momentos nessa universidade e por vibrar cada mínima conquista minha. Agradeço à minha gêmea Larissa, por me entender mais do que ninguém e por ser meu alicerce nesse curso. Agradeço à todos os meus amigos do grupo “O Chumbo Vem”, em especial à Rafaela, sem a qual eu não sobreviveria ao ensino remoto. Agradeço também à Maristela, a pessoa que me ajudou a arrumar a gaveta bagunçada dentro da minha cabeça, tornando tudo mais simples.

Agradeço à minha orientadora Flaviana, por incontáveis motivos. “Flavimãe”, obrigada por me acompanhar no PICMe desde o ínicio da minha graduação, por me acalmar nos momentos de desespero quando achei que tudo daria errado, por compartilhar comigo sua experiência e sabedoria, por ter me apresentado ao belíssimo mundo da Geometria Tropical e por ter aceitado me orientar neste trabalho. Você é uma grande inspiração para mim.

Agradeço a todos os professores que passaram pela minha trajetória. Agradeço a OBMEP por despertar a minha paixão pela matemática e por me proporcionar tantas oportunidades. Agradeço ao Instituto TIM e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro durante a minha formação.

Agradeço a Universidade Federal de Juiz de Fora, pelo ensino gratuito e de qualidade, e a todos os funcionários, que fizeram possível a minha formação.

“A beleza da matemática só se revela a quem a persegue mais pacientemente.” (Maryam Mirzakhani)

“Moro num país tropical, abençoado por Deus
E bonito por natureza.” (Jorge Ben Jor)

RESUMO

A Geometria Tropical é um ramo relativamente novo da Matemática, na interface da Geometria Algébrica e da Análise Combinatória, com conexão e aplicação em várias áreas do conhecimento. O objetivo deste trabalho é apresentar uma introdução à Geometria Tropical fazendo sempre que possível um paralelo com resultados da geometria clássica. Para isso, primeiramente, vamos definir e estudar os polinômios tropicais de uma variável com o objetivo de demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra Tropical. Depois, estudaremos as curvas tropicais planas e suas subdivisões duais, enunciando o Teorema da Dualidade. Por fim, apresentaremos a versão tropical de um teorema importante no estudo de curvas planas, o chamado Teorema de Bézout.

Palavras-chave: Geomteria Tropical. Teorema de Bézout Tropical.

ABSTRACT

Tropical Geometry is a relatively new branch of Mathematics, at the interface of Algebraic Geometry and Combinatorial Analysis, with connection and application in several areas of knowledge. The objective of this work is to present an introduction to Geometry Tropical making, when possible, a parallel with the results of classical geometry. For this, first, we will define and study the tropical polynomials of one variable in order to demonstrate the Fundamental Theorem of Tropical Algebra. Afterwards, we will study the plane tropical curves and their dual subdivisions, stating the Duality Theorem. Finally, we will present the tropical version of an important theorem in the study of plane curves, the so-called Bézout's Theorem.

Keywords: Tropical Geometry. Tropical Bézout's Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria tropical é uma geometria sobre a Álgebra tropical, obtida considerando-se o conjunto dos números reais munido de duas operações: a soma, que é tomar o mínimo entre os elementos e a multiplicação, que consiste em adicionar os elementos. Originalmente era chamada de Álgebra "min-plus", mas pesquisadores de informática da Universidade de Paris VII alteraram seu nome para "Álgebra tropical" em homenagem ao brasileiro que foi um dos pioneiros no assunto, o cientista da computação, Imre Simon. É um ramo relativamente novo da matemática, tendo em média 20 a 25 anos, porém já mostra inúmeros resultados positivos em seu estudo.

De um modo geral, chamamos de "tropicalização" da geometria a substituição dos objetos da geometria algébrica "clássica" por objetos mais simples do mundo tropical. Os objetos tropicais são lineares por partes e conservam naturalmente algumas propriedades dos clássicos. Assim, o mundo clássico pode ser degenerado até o mundo tropical e problemas clássicos podem ser tratados usando objetos mais simples.

O presente trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 2, intitulado Álgebra Tropical, o objetivo principal é estabelecer os conceitos e as propriedades iniciais da Álgebra tropical, além de definir os polinômios tropicais de uma variável e demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra Tropical, que é correspondente ao Teorema Fundamental da Álgebra clássica na versão tropical.

O Capítulo 3, intitulado Polinômios Tropicais de Duas Variáveis, tem como principal objetivo estender o estudo dos polinômios tropicais definido as curvas tropicais planas, suas subdivisões duais e apresentar o Teorema da Dualidade.

Por fim, o Capítulo 4, denominado Interseção Tropical, apresenta a definição de interseções entre curvas tropicais planas com o objetivo de apresentar a versão tropical do Teorema de Bézout.

2 ÁLGEBRA TROPICAL

Neste capítulo inicial apresentaremos algumas definições, resultados e exemplos necessários para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra Tropical.

2.1 ARITMÉTICA TROPICAL

No universo da álgebra tropical, definimos sobre $\mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação tropicais (denotadas por $\oplus$ e $\odot$, respectivamente) como:

$$a \oplus b = \min\{a, b\} \qquad \text{e} \qquad a \odot b = a + b.$$

Em outras palavras, a *soma tropical* de dois números é o menor deles e a *multiplicação tropical* de dois números é a soma usual dos mesmos. Vejamos alguns exemplos:

$$3 \oplus 5 = \min\{3, 5\} = 3 \qquad\qquad 4 \oplus 8 = \min\{4, 8\} = 4$$

$$5 \odot 9 = 5 + 9 = 14 \qquad\qquad 7 \odot 2 = 7 + 2 = 9$$

Note que na adição tropical o zero não é o elemento neutro, pois quando somado a qualquer outro número real positivo o resultado é zero. Aliás, diferentemente da sua correspondente clássica, a adição tropical não possui elemento neutro em $\mathbb{R}$. De fato, não existe $e \in \mathbb{R}$ tal que $a \oplus e = \min\{a, e\} = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, pois nesse caso teríamos $e > a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, o que é impossível, pois o conjunto dos números reais é ilimitado superiormente. Dessa forma, é preciso estender o conjunto dos número reais para conseguir um termo que faça o papel do elemento neutro da adição tropical. Definimos então, o conjunto dos números tropicais $\mathbb{T}$, como

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

onde $a \oplus \infty = a$ para qualquer $a \in \mathbb{T}$, ou seja, ∞ é o elemento neutro da adição tropical sobre $\mathbb{T}$, e $a \odot \infty = a + \infty := \infty$, para qualquer $a \in \mathbb{T}$. Outra diferença entre a adição clássica e a tropical, é que um elemento de $\mathbb{R}$ não possui simétrico para a operação $\oplus$, ou seja, a“subtração tropical"não está definida. De fato, o simétrico de $a \in \mathbb{T}$ seria $(-a) \in \mathbb{T}$ tal que $a \oplus (-a) = \min\{a, (-a)\} = \infty$, o que só acontece se a e $(-a)$ forem iguais a ∞.

A menos deste último fato, o conjunto dos números tropicais $\mathbb{T}$ munido das operações $\oplus$ e $\odot$ satisfaz todas as demais propriedades de um corpo, como mostraremos a seguir:

(i) As operações $\oplus$ e $\odot$ são associativas e comutativas. De fato:

- $(a \oplus b) \oplus c = \min\{\min\{a, b\}, c\} = \min\{a, b, c\} = \min\{a, \min\{b, c\}\} = a \oplus (b \oplus c)$;
- $a \oplus b = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b \oplus a$;
- $(a \odot b) \odot c = (a + b) + c = a + b + c = a + (b + c) = a \odot (b \odot c)$;

– $a \odot b = a + b = b + a = b \odot a$.

O operador $\odot$ tem prioridade quando $\oplus$ e $\odot$ ocorrem na mesma frase.

(ii) O elemento neutro da adição na álgebra tropical é ∞:

$$a \oplus \infty = \min\{a, \infty\} = a.$$

(iii) A distributividade vale para a adição e multiplicação tropicais:

$$a \odot (b \oplus c) = a + (\min\{b, c\}) = \min\{a+b, a+c\} = \min\{a \odot b, a \odot c\} = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

(iv) O elemento neutro da multiplicação na álgebra tropical é 0:

$$a \odot 0 = a + 0 = a.$$

(v) $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ é um domínio de integridade, já que $\forall a, b \in \mathbb{T}$, temos:

$$a \odot b = \infty \Rightarrow a + b = \infty \Rightarrow a = \infty \text{ ou } b = \infty;$$

(vi) Exceto ∞, todo elemento de $\mathbb{T}$ tem inverso para a operação $\odot$, $(-a)$ é o inverso de a:

$$a \odot (-a) = a + (-a) = 0.$$

Dessa forma, dizemos que $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ é um semicorpo.

2.1.1 Polinômios tropicais em uma variável

Definição 2.1.1. Um polinômio tropical em uma variável é uma soma formal

$$P(x) = \bigoplus_{i=0}^{d} a_i \odot x^i = a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus (a_2 \odot x^2) \oplus \cdots \oplus (a_d \odot x^d),$$

onde $a_0, a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{T}$.

A fim de simplificar a notação, muitas vezes neste texto escreveremos apenas $P(x) = \bigoplus_{i=0}^{d} a_i x^i$ para nos referirmos aos polinômios tropicais.

Dizemos que os polinômios tropicais $P(x) = \bigoplus_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $Q(x) = \bigoplus_{i=0}^{m} b_i x^i$ são iguais se $n = m$ e $a_i = b_i$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Definição 2.1.2. Seja $P(x) = a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus (a_2 \odot x^2) \oplus \cdots \oplus (a_d \odot x^d)$ um polinômio tropical. Definimos como grau de $P(x)$ o maior valor de n tal que $a_n \neq \infty$.

Um polinômio tropical define uma função polinomial,

$$p(x) = \bigoplus_{i=0}^{d} a_i x^i := \min_{i=0}^{d}\{a_i + ix\},$$

que é afim por partes. Duas funções polinomiais tropicais $p(x) = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $q(x) = \bigoplus\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$ são iguais quando $p(x) = q(x)$, $\forall x \in \mathbb{T}$.

Na maior parte deste texto, quando falarmos de polinômios tropicais estaremos nos referindo às funções polinomiais tropicais, exceto quando dito o contrário.

Teorema 2.1.1. *Seja* $p(x) = \bigoplus\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$*. Então,* $p(x)$ *é uma função não decrescente.*

Demonstração: Seja $p(x) = a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus \cdots \oplus (a_{n-1} \odot x^{n-1}) \oplus (a_n \odot x^n)$. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_2 > x_1$, vamos mostrar que $p(x_2) \geq p(x_1)$. Reescrevendo $p(x)$ com a notação clássica, temos:

$$p(x) = a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus \ldots \oplus (a_{n-1} \odot x^{n-1}) \oplus (a_n \odot x^n) = \min\{a_0, a_1 + x, \ldots, a_{n-1} + (n-1)x, a_n + nx\}.$$

Como $x_2 > x_1$, temos:

$$a_n + nx_2 > a_n + nx_1$$

$$a_{n-1} + (n-1)x_2 > a_{n-1} + (n-1)x_1$$

$$\vdots$$

$$a_1 + x_2 > a_1 + x_1$$

$$a_0 = a_0$$

Assim, como todos os termos são não decrescentes, o mínimo também o é. Portanto, $p(x)$ é não decrescente. Note que, se $a_0 = \infty$, então $p(x)$ é estritamente crescente. ■

Outra propriedade importante das funções definidas por polinômios tropicais é que elas são sempre contínuas.

Proposição 2.1.2. Se $p(x) = \bigoplus\limits_{i=0}^{d} (a_i \odot x^i)$, então, $p(x)$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Segue da definição de mínimo que

$$p(x) = \min\{\min\{a_0,\, a_1 + x,\, \ldots,\, a_{d-1} + (d-1)x\}, d + a_d x\}.$$

Assim, basta mostrar que uma função da forma $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, com $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, é contínua. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $g(x_0) \neq f(x_0)$, então $g(x_0) - f(x_0) > 0$ ou $g(x_0) - f(x_0) < 0$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $g(x_0) - f(x_0) > 0$. Como f e g são contínuas, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) - f(x) > 0$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Logo, $h(x) = min\{f(x), g(x)\} = f(x)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ou seja, h é contínua em x_0. Porém, se $f(x_0) = g(x_0)$, então $h(x) = f(x_0) = g(x_0)$ e, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $|f(x) - h(x_0)| < \epsilon$, para todo $|x - x_0| < \delta_1$ e $|g(x) - h(x_0)| < \epsilon$, para todo $|x - x_0| < \delta_2$. Assim, para $|x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $|\min\{f(x), g(x)\} - h(x_0)| < \epsilon$, donde concluímos que h é contínua em x_0. ■

Definição 2.1.3. Uma raiz tropical de $p(x) = \bigoplus_{i=0}^{d} a_i \odot x^i$ é qualquer número $x_0 \in \mathbb{T}$ para o qual o gráfico de $p(x)$ tem uma "quina" em x_0. Isto é, existem i, j distintos tais que:

$$p(x) = \min_{i=0}^{d}\{a_i + ix\} = a_i + ix_0 = a_j + jx_0.$$

Neste caso, dizemos que o mínimo de $p(x)$ é atingido (pelo menos) duas vezes em x_0. A multiplicidade de x_0 é o máximo de $|i - j|$ entre todos os i, j possíveis que cumpram esse mínimo.

Exemplo 2.1.1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b, c \in \mathbb{T}$. Vamos determinar as raízes polinomiais tropicais de $p(x) = (a \odot x) \oplus b$ e $q(x) = (a \odot x^2) \oplus (b \odot x) \oplus c$ e suas multiplicidades.

Temos que $p(x) = \min\{a + x, b\}$. Neste caso o polinômio terá apenas uma raiz, $x_0 = b - a$, que é o ponto em que $a + x$ e b se interceptam. De fato,

$$p(b - a) = \min\{b, b\} = b,$$

ou seja, o mínimo de $p(x)$ é atingido duas vezes em $x_0 = b - a$. Além disso, os termos $a_i + ix_0$ e $a_j + jx_0$ da Definição 2.1.3, neste caso são, respectivamente, $a + x_0$ e b, onde temos $i = 1$, e $j = 0$. Assim, a multiplicidade de x_0 é $|i - j| = |1 - 0| = 1$.

Olhando agora para $q(x)$, temos $q(x) = \min\{a + 2x, b + x, c\}$. Os candidatos à raízes são:

$$a + 2x = b + x \quad \boxed{x_0 = b - a}$$

$$a + 2x = c \quad \boxed{x_1 = \frac{c - a}{2}}$$

$$b + x = c \quad \boxed{x_2 = c - b}$$

Para que x_0 seja raiz de $q(x)$, temos que ter:

$$q(x_0) = \min\{2b - a, 2b - a, c\} = 2b - a,$$

ou seja, $2b - a < c$.

Para que x_1 seja raiz de $q(x)$, temos que ter:

$$q(x_1) = \min\left\{c, \frac{2b - a + c}{2}, c\right\} = c,$$

ou seja, $2b - a > c$.

Para que x_2 seja raiz de $q(x)$, temos que ter:

$$q(x_2) = \min\{a + 2c - 2b, c, c\} = c,$$

ou seja, $2b - a < c$.

Então, quando $2b - a < c$, temos que x_0 e x_2 são raízes de $q(x)$. A multiplicidade de x_0 é $|2 - 1| = 1$ e a multiplicidade de x_2 é $|1 - 0| = 1$. Observe a Figura 1.

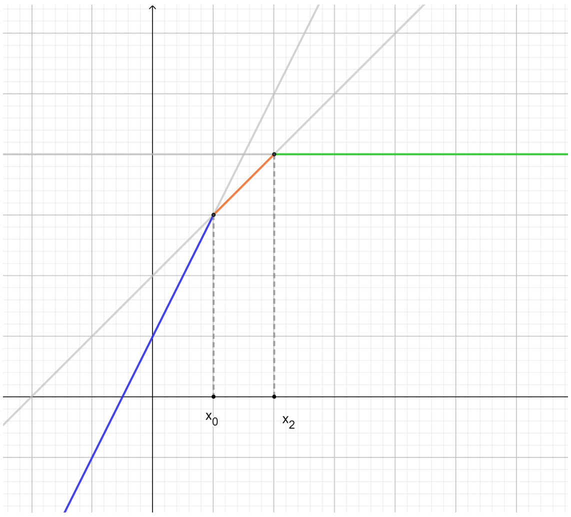


Figura 1: Gráfico de $q(x)$ quando $2b - a < c$.

Quando $2b - a > c$, temos que apenas x_1 é raiz de $q(x)$, com multiplicidade $|2 - 0| = 2$. Observe a Figura 2.

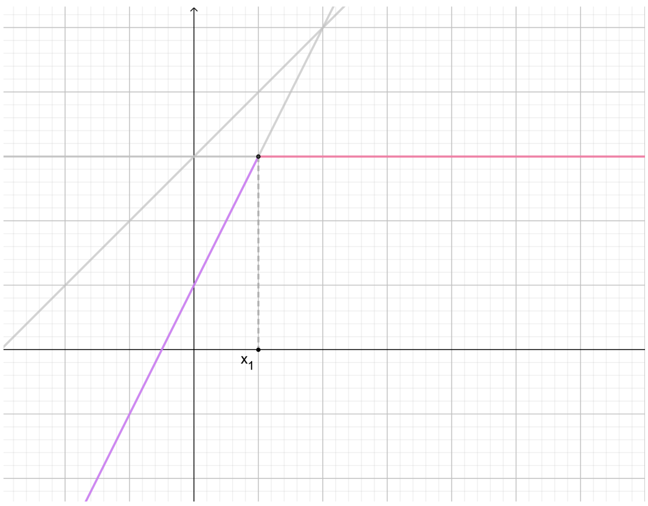


Figura 2: Gráfico de $q(x)$ quando $2b - a > c$.

Por fim, vamos analisar o que acontece com $q(x)$ quando $2b - a = c$. Neste caso, temos $q(x) = \min\{a + 2x, b + x, 2b - a\}$ e:

$$a + 2x = b + x \quad \boxed{x_0 = b - a}$$

$$a + 2x = 2b - a \quad \boxed{x_0 = b - a}$$

$$b + x = 2b - a \quad \boxed{x_0 = b - a}$$

Então, quando $2b - a = c$ temos que $q(x)$ tem uma única raiz x_0. De acordo com a Definição 2.1.3, a multiplicidade de x_0, neste caso, é dada por:

$$\max\{|2-1|, |2-0|, |1-0|\} = \max\{1, 2, 1\} = 2.$$

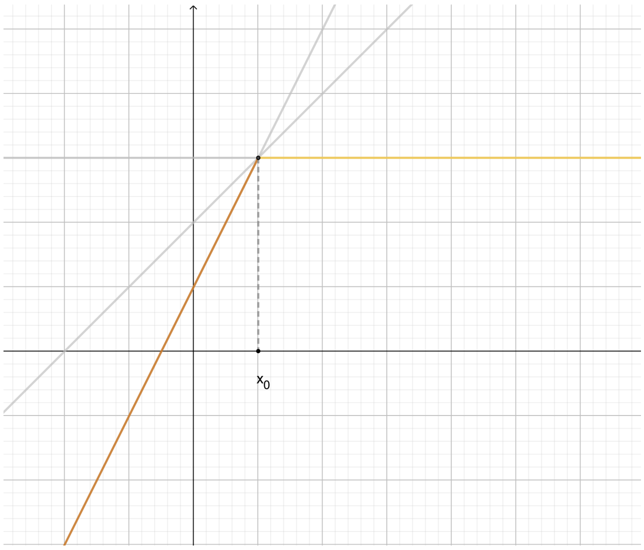


Figura 3: Gráfico de $q(x)$ quando $2b - a = c$.

O próximo resultado relaciona raízes do polinômio tropical e fatores lineares.

Proposição 2.1.3. Um número $x_0 \in \mathbb{T}$ é uma raiz tropical de multiplicidade k de um polinômio tropical $p(x)$ se existir um polinômio $q(x)$ tal que:

$$p(x) = (x \oplus x_0)^k \odot q(x).$$

Antes de fazermos a demonstração do caso geral, vamos tratar um caso particular em que $p(x)$ tem apenas dois monômios, isto é,

$$p(x) = (a_i \odot x^i) \oplus (a_j \odot x^j) = \min\{a_i + ix, a_j + jx\},$$

com $j > i$ e $a_i, a_j \in \mathbb{R}$. Seja x_0 a única raiz de $p(x)$. Então, como podemos observar na Figura 4,

$$\begin{aligned} p(x) &= (a_i \odot x^i) \oplus (a_j \odot x^j) = \min\{a_i + ix, a_j + jx\} = \begin{cases} a_j + jx, & \text{se } x \leq x_0 \\ a_i + ix, & \text{se } x \geq x_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_j + jx, & \text{se } x \leq x_0 \\ a_j + (j-i)x_0 + ix, & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}, \text{ pois } \; a_i + ix_0 = a_j + jx_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_j + (j-i)\min\{x, x_0\} + ix \\ &= (j-i)\min\{x, x_0\} + a_j + ix \\ &= (x \oplus x_0)^{(j-i)} \odot (a_j \odot x^i) \end{aligned}$$

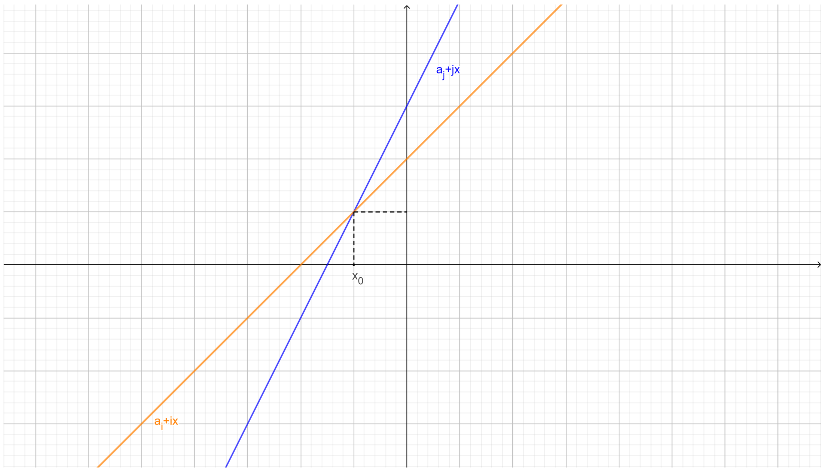


Figura 4: Caso particular - gráfico de p(x)

Demonstração: (Caso geral) Suponha que

$$p(x) = \bigoplus_{i=0}^{d} a_i \odot x^i := \min_{i=0}^{d}\{a_i + ix\} \text{ e } p(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0.$$

Suponhamos $p(x_0) = a_{i_1} + i_1x_0 = \ldots = a_{i_k} + i_kx_0$, tal que $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Observe a Figura 5.

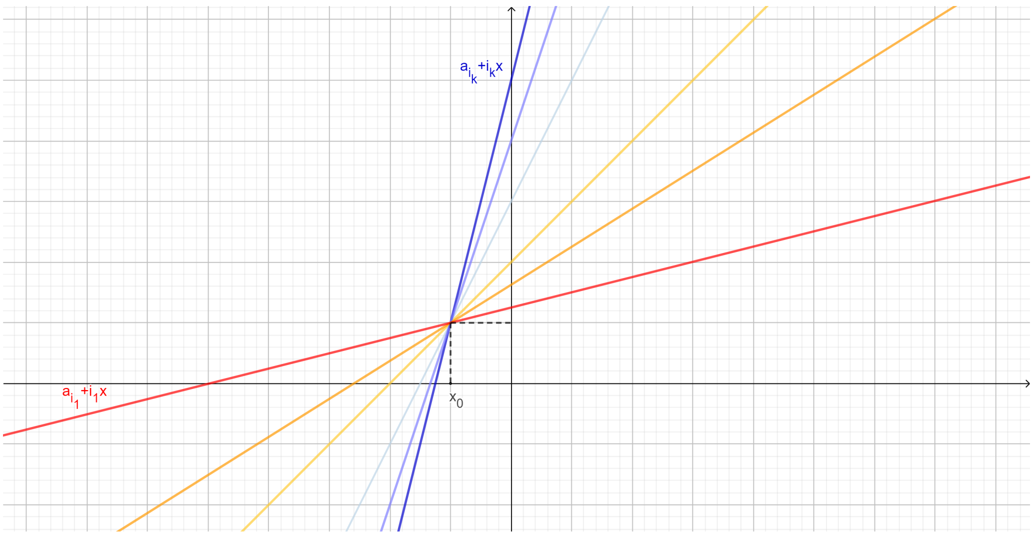


Figura 5: Caso geral

Como a função polinomial definida por $p(x)$ é o mínimo de uma quantidade finita de funções afins, o número de raízes de $p(x)$, que são as "quinas" do gráfico de $p(x)$, é finito. Assim, podemos supor que existem $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$ tais que $x_1 < x_0 < x_2$ são raízes de $p(x)$ e que não existe outra raiz entre x_1 e x_2 além de x_0. Observe que, se não existir uma raiz x_1 de $p(x)$ tal que $x_1 < x_0$, então $p(x) = a_{i_k} + i_kx$, para todo $x \leq x_0$, e do mesmo modo, se não existir uma raiz x_2 de $p(x)$ tal que $x_0 < x_2$, então $p(x) = a_{i_1} + i_1x$, para $x \geq x_0$. Então, definindo $r(x) = p(x)$, para $x \leq x_1$ e $g(x) + a_0 = p(x)$, para $x \geq x_2$, onde a_0 é o termo independente de $p(x)$, podemos escrever:

$$p(x) = \min\{a_0, a_1 + x, a_2 + 2x, \ldots, a_d + dx\} = \begin{cases} r(x), & \text{se } x \leq x_1 \\ a_{i_k} + i_k x, & \text{se } x_1 \leq x \leq x_0 \\ a_{i_1} + i_1 x, & \text{se } x_0 \leq x \leq x_2 \\ a_0 + g(x), & \text{se } x \geq x_2 \end{cases}$$

ou, equivalentemente, usando a continuidade da função $p(x)$,

$$p(x) = \begin{cases} r(x), & \text{se } x \leq x_1 \\ r(x_1) - i_k x_1 + i_k x, & \text{se } x_1 \leq x \leq x_0 \\ r(x_1) - i_k x_1 + (i_k - i_1)x_0 + i_1 x, & \text{se } x_0 \leq x \leq x_2 \\ r(x_1) - i_k x_1 + (i_k - i_1)x_0 + i_1 x_2 - g(x_2) + g(x), & \text{se } x \geq x_2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p(x) &= r(\min\{x, x_1\}) - i_k \min\{x, x_1\} + (i_k - i_1)\min\{x, x_0\} + i_1 \min\{x, x_2\} + \\ &\quad + g(x) - g(\min\{x, x_2\}) \\ &= (i_k - i_1)\min\{x, x_0\} + [r(\min\{x, x_1\}) - i_k \min\{x, x_1\} + i_1 \min\{x, x_2\} + \\ &\quad + g(x) - g(\min\{x, x_2\})] \\ &= (x \oplus x_0)^{(i_k - i_1)} \odot [r(x \oplus x_1) - i_k(x \oplus x_1) + i_1(x \oplus x_2) + g(x) - g(x \oplus x_2)]. \end{aligned}$$

Tomando $q(x) = [r(x \oplus x_1) - i_k(x \oplus x_1) + i_1(x \oplus x_2) + g(x) - g(x \oplus x_2)]$, temos:

$$p(x) = \boxed{(x \oplus x_0)^{(i_k - i_1)} \odot q(x)} .$$

Observe que $(i_k - i_1)$ é o máximo de $|i - j|$ entre todos os i, j possíveis que cumpram $p(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0$. Logo, $(i_k - i_1)$ é a multiplicidade de x_0. ■

Observação 2.1.1. Na Proposição 2.1.3, a igualdade $p(x) = (x \oplus x_0)^k \odot q(x)$ é uma igualdade de funções polinomiais, não de polinômios.

Definição 2.1.4. Dizemos que dois polinômios tropicais $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes quando representam a mesma função polinomial, ou seja, $\forall x_0 \in \mathbb{T}$, temos que $p(x_0) = q(x_0)$. Nesse caso, usaremos a notação: $p \sim q$.

Seja $\mathbb{T}[x]$ o conjunto dos polinômios tropicais em uma varíavel , isto é,

$$\mathbb{T}[x] = \left\{ \bigoplus_{i=0}^{d} a_i \odot x^i;\ a_i \in \mathbb{T} \ \text{ e } \ d \in \mathbb{N} \right\}.$$

A relação $\sim$ em $\mathbb{T}[x]$ satisfaz as seguintes propriedades:

- Reflexiva: $\forall p \in \mathbb{T}[x]$, $p \sim p$;
- Simétrica: $\forall p, q \in \mathbb{T}[x]$, $p \sim q \Rightarrow q \sim p$;

- Transitiva: $\forall p, q, g \in \mathbb{T}[x]$, $p \sim q$ e $q \sim g$, então $p \sim g$.

Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência.

Na sequência, vamos mostrar que existe uma propriedade nos coeficientes de um dado polinômio tropical $p(x)$ que garante que a igualdade das funções polinomiais implica na igualdade dos polinômios.

Definição 2.1.5. O coeficiente a_i (respectivamente, o monômio $a_i \odot x^i$) do polinômio tropical $p(x)= \bigoplus_{i=0}^{d} a_i \odot x^i$ é chamado um coeficiente mínimo (respectivamente, termo de coeficiente mínimo) se, para qualquer $b \in \mathbb{R}$, tal que $b < a_i$, o polinômio tropical $q(x)$ obtido trocando-se a_i por b não for equivalente a $p(x)$. Um polinômio tropical é chamado de polinômio de coeficientes mínimos se todos os seus coeficientes são mínimos.

Exemplo 2.1.2. Sejam $p(x) = x^2 \oplus 1x \oplus 2$ e seja $q(x) = x^2 \oplus 2x \oplus 2$ como nas Figuras 6 e 7. Então, o $2x$ em $q(x)$ não é um termo de coeficiente mínimo, uma vez que podemos trocar o 2 pelo 1 e ainda obter a mesma função polinomial. O termo $1x$, por sua vez, é um termo de coeficiente mínimo em $p(x)$, pois se trocássemos o 1 por qualquer número menor, teríamos uma função polinomial tropical diferente.

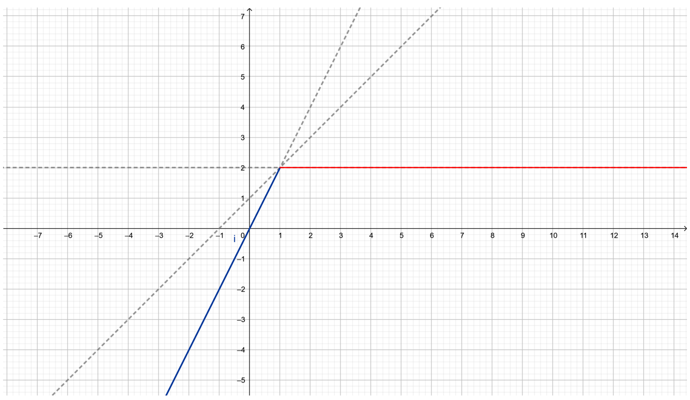


Figura 6: $p(x) = x^2 \oplus 1x \oplus 2$

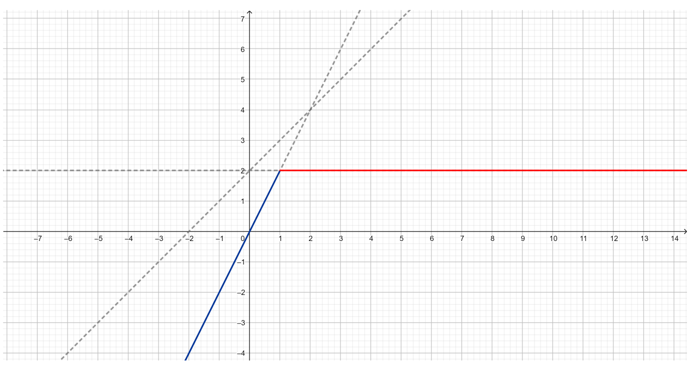


Figura 7: $q(x) = x^2 \oplus 2x \oplus 2$

Observação 2.1.2. Seja $f(x) = \bigoplus_{i=r}^{d} (a_i \odot x^i) = \min\{a_r + rx,\ a_{r+1} + (r+1)x,\ \ldots,\ a_d + dx\}$, onde $r < d$. Afirmamos que $f(x)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} a_d + dx, & \text{se } x \leq c' \\ \min\limits_{r \leq j \leq d}\{a_j + jx\}, & \text{se } c' < x < c \\ a_r + rx, & \text{se } x \geq c. \end{cases} \tag{2.1}$$

De fato, para todo par $i, j \in \{r, \ldots, d\}$ com $i \neq j$, tomemos $x_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$a_i + ix_{ij} = a_j + jx_{ij}.$$

Seja $X = \{x_{ij} \in \mathbb{R} \mid r \leq i, j \leq d,\ i \neq j\}$. Note que X é o conjunto dos pontos onde as retas $a_r + rx, \ldots, a_d + dx$ se cruzam duas a duas e, portanto é finito. Seja $c = \max X$. Vamos mostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq c$, $f(x) = a_r + rx$, isto é, $a_j + jx \geq a_r + rx$ para todo $j \in \{r, \ldots, d\}$, com $j \geq r$. Se $j = r$, não há o que fazer, então podemos supor $j > r$.

De fato,

$$x_{ij} \leq c, \quad \forall\ i, j \Rightarrow x_{rj} \leq c, \quad \forall\ j.$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq c$, temos $x_{rj} \leq c \leq x$. Pela definição de x_{rj}, temos:

$$a_r + rx_{rj} = a_j + jx_{rj} \Rightarrow x_{rj}(r - j) = a_j - a_r \Rightarrow x_{rj} = \frac{a_j - a_r}{(r - j)} = \frac{a_r - a_j}{(j - r)}.$$

Como $j > r$, temos $(j - r) > 0$. Logo:

$$\frac{a_r - a_j}{(j - r)} \leq x \Rightarrow a_r - a_j \leq (j - r)x \Rightarrow$$

$$a_r - a_j \leq jx - rx \Rightarrow a_r + rx \leq a_j + jx, \quad \forall j > r.$$

Analogamente, tomando $c' = \min X$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c'$, $f(x) = a_d + dx$, isto é, $a_j + jx \geq a_d + dx$ para todo $j \in \{r, \ldots, d\}$, com $j < d$.

Lema 2.1.4 (Definição alternativa de coeficiente mínimo). *Seja $a_i \odot x^i$ um termo de um polinômio $f(x)$, com $a_i \neq \infty$. Então a_i é um coeficiente mínimo de $f(x)$ se, e somente se, existe algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = a_i \odot x_0^i$.*

Demonstração: Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) \leq (a_j \odot x^j)$. Suponhamos que não exista $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = (a_j \odot x_0^j)$. Então, $f(x) < (a_j \odot x^j)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $\varphi(x) = f(x) - (a_j + jx)$. Note que $\varphi(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consideremos f escrita como na Observação 2.1.2.

Além disso, como $d > j$, para $x \leq c'$ temos:

$$\begin{aligned}(d-j)x &\leq (d-j)c'\\(a_d - a_j) + (d-j)x &\leq (a_d - a_j) + (d-j)c'\\\varphi(x) &\leq (a_d - a_j) + (d-j)c'\\&= a_d + dc' - (a_j + jc')\\&= f(c') - (a_j + jc')\\&= \varphi(c').\end{aligned}$$

Como $r < j$, para $x \geq c$ temos:

$$\begin{aligned}(r-j)x &\leq (r-j)c\\(a_r - a_j) + (r-j)x &\leq (a_r - a_j) + (r-j)c\\\varphi(x) &\leq (a_r - a_j) + (r-j)c\\&= a_r + rc - (a_j + jc)\\&= f(c) - (a_j + jc)\\&= \varphi(c).\end{aligned}$$

Assim, para $x \leq c'$, $\varphi(x) \leq \varphi(c') < 0$ e, para $x \geq c$, $\varphi(x) \leq \varphi(c) < 0$. Além disso, para todo $x \in [c', c]$ temos que $\varphi(x)$ é contínua, pois $f(x)$ e $aj + jx$ são contínuas e, pelo Teorema de Weierstrass, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \leq \varphi(d) < 0$ para todo $x \in [c', c]$. Então, $\sup \varphi \in \varphi(\mathbb{R})$ e, portanto, $\sup \varphi < 0$. Seja $\epsilon = |\sup \varphi|$ e $b \in \mathbb{R}$ tal que $a_j - \epsilon < b < a_j$. Temos:

$$f(x) - (j \cdot x + b) < f(x) - (j \cdot x + a_j) + \epsilon \leq 0$$

e, portanto, $f(x) < j \cdot x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como o polinômio criado substituindo a_j por b é funcionalmente equivalente a $f(x)$, a_j não é um coeficiente mínimo. Por outro lado, suponha que existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = a_j x_0^j$. Dado $b < a_j$, seja $g(x)$ o $f(x)$ com a_j trocado por b. Então, $g(x_0) \leq b x_0^j < a_j x_0^j = f(x_0)$, então g não é equivalente a f. Portanto, a_j é coeficiente mínimo. ■

Lema 2.1.5. *Sejam p e q polinômios de coeficientes mínimos. Então, p é igual a q se, e somente se, p é equivalente a q.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) É claro que $p = q$ implica $p \sim q$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $p \neq q$. Então, para algum termo $(a_i \odot x^i)$ de $p(x)$ e seu correspondente $(b_i \odot x^i)$ de $q(x)$, temos $a_i \neq b_i$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_i < b_i$. Como q é um polinômio de coeficientes mínimos, pela Definição 2.1.5, ele não pode ser equivalente a p. ■

Lema 2.1.6. *Seja* $f(x) = \bigoplus_{i=r}^{n} a_i \odot x^i$. *Então, existe um único polinômio de coeficientes mínimos* $g(x) = \bigoplus_{i=r}^{n} b_i \odot x^i$, *tal que* $f(x) \sim g(x)$. *Além disso, cada coeficientes* b_j *de* $g(x)$ *é dado por:*

$$b_j = \min\left(\{a_j\} \cup \left\{ \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k \cdot (j-i)}{k-i} \middle| r \leq i < j < k \leq n \right\}\right).$$

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que $f \sim g$. Dado x_0, note que $f(x_0) = (a_s \odot x_0^s) = a_s + s \cdot x_0$, para algum s. Além disso,

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \min_{r \leq j \leq n} \{b_j + j \cdot x_0\} \\ &= \min_{r \leq i < j < k \leq n} \left\{ a_j + j \cdot x_0, \ \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k \cdot (j-i)}{k-i} + j \cdot x_0 \right\}. \end{aligned}$$

Para quaisquer i, j e k tais que $r \leq i < j < k \leq n$, se $x_0 \geq \frac{a_i - a_k}{k-i}$, temos:

$$\begin{aligned} a_s + s \cdot x_0 &\leq a_i + i \cdot x_0 \\ &= \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + (j-i) \cdot \left(\frac{a_i - a_k}{k-i} \right) + i \cdot x_0 \\ &\leq \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + (j-i) \cdot x_0 + i \cdot x_0 \\ &= \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + j \cdot x_0. \end{aligned}$$

Analogamente, se $x_0 \leq \frac{a_i - a_k}{k-i}$, temos:

$$\begin{aligned} a_s + s \cdot x_0 &\leq a_k + k \cdot x_0 \\ &= \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + (k-j) \cdot \left(\frac{-a_i + a_k}{k-i} \right) + k \cdot x_0 \\ &\leq \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + (k-j) \cdot (-x_0) + k \cdot x_0 \\ &= \frac{a_i \cdot (k-j) + a_k(j-i)}{k-i} + j \cdot x_0. \end{aligned}$$

Como os resultados acima valem para todos i, j e k, concluímos que $g(x_0) = a_s + s \cdot x_0$. Portanto, $f(x_0) = g(x_0)$ e $f \sim g$.

Vamos mostrar agora que g é um polinômio de coeficientes mínimos. Dado um coeficiente b_j em g, suponhamos que a_j é um coeficiente mínimo de f. Pela definição de b_j, temos que $b_j \leq a_j$. Pelo Lema 2.1.4, como a_j é um coeficiente mínimo, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = (a_j \odot x_0^j)$. Então, $b_j \odot x_0^j \geq g(x_0) = f(x_0) = a_j \odot x_0^j$. Portanto, $b_j = a_j$, $g(x_0) = b_j \odot x_0^j$ e b_j é coeficiente mínimo. Agora suponhamos que a_j não é um coeficiente mínimo. Pelo Lema 2.1.4 e pela equação (2.1) obtida na Observação 2.1.2, temos que a_r e

a_n são coeficientes mínimos. Então, existem $u < j$ e $v > j$ tais que a_u e a_v são coeficientes mínimos e para qualquer t com $u < t < v$, a_t não é coeficiente mínimo.

Seja $x_0 = (a_u - a_v)/(v - u)$. Vamos mostrar que $f(x_0) = a_u \odot x_0^u$. Suponhamos, por absurdo, que $f(x_0) \neq a_u \odot x_0^u$. Então $f(x_0) = a_w \odot x_0^w < a_u \odot x_0^u$ para algum w. Pelo Lema 2.1.4, a_w é um coeficiente mínimo, então não pode ser tal que $u < w < v$, por nossa suposição em u e v.

Se $w < u$, para $x \geq x_0$ temos

$$\begin{aligned}
a_w + w \cdot x &= a_w + u \cdot x - (u - w) \cdot x \\
&\leq a_w + u \cdot x - (u - w) \cdot x_0 \\
&= a_w + w \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\
&< a_u + u \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\
&= a_u + u \cdot x,
\end{aligned}$$

e, para $x < x_0$,

$$\begin{aligned}
a_v + v \cdot x &= a_v + u \cdot x + (v - u) \cdot x \\
&< a_v + u \cdot x + (v - u) \cdot x_0 \\
&= a_v + v \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\
&= a_u + u \cdot x_0 + u \cdot (x - x_0) \\
&= a_u + u \cdot x.
\end{aligned}$$

Então, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a_u x^u$. Logo, pelo Lema 2.1.4, a_u não é coeficiente mínimo, o que contradiz nossa suposição. Se $w > v$, um argumento similar mostra que a_v não é um coeficiente mínimo, novamente contradizendo a suposição.

Portanto,

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= a_u + u \cdot x_0 \\
&= a_u + u \cdot \left(\frac{a_u - a_v}{v - u} \right) \\
&= \frac{a_u \cdot (v - j) + a_v \cdot (j - u)}{v - u} + j \cdot \left(\frac{a_u - a_v}{v - u} \right) \\
&= c + j \cdot x_0, \text{ onde } c = \frac{a_u \cdot (v - j) + a_v \cdot (j - u)}{(v - u)}.
\end{aligned}$$

Então, $b_j \leq c$, pela definição de b_j, e $c \odot x_0^j = f(x_0) = g(x_0) \leq b_j \odot x_0^j$. Portanto, $b_j = c$, $g(x_0) = b_j x_0^j$ e b_j é coeficiente mínimo.

A unicidade de g é consequência direta do Lema 2.1.5. ∎

Lema 2.1.7. *Seja*

$$p(x) = (a_n \odot x^n) \oplus (a_{n-1} \odot x^{n-1}) \oplus \ldots \oplus (a_r \odot x^r),$$

onde cada a_i é não infinito. Seja $d_i = (a_{i-1} - a_i)$ a diferença entre dois coeficientes consecutivos. Então, $p(x)$ é um polinômio de coeficientes mínimos se, e somente se, a diferença entre coeficientes consecutivos é não decrescente, isto é, se

$$d_n \leq d_{n-1} \leq \ldots \leq d_{r+1}.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que p tenha um conjunto de coeficientes consecutivos cuja diferença é decrescente, isto é, $(a \odot x^{i+1})$, $(b \odot x^i)$ e $(c \odot x^{i-1})$ são termos consecutivos de $p(x)$ tais que $b - a > c - b$, ou seja, $d_{i+1} > d_i$. Então, $b > (a + c)/2$. Vamos mostrar que $p(x_0) < b \odot x_0^i$ para todo x_0, significando que b não é um coeficiente mínimo.

Dado x_0, se $x_0 \leq (c - a)/2$, então:

$$\begin{aligned} a \odot x_0^{i+1} &= (i+1)x_0 + a = ix_0 + x_0 + a \\ &\leq ix_0 + \frac{c-a}{2} + a = ix_0 + \frac{c+a}{2} \\ &< ix_0 + b = b \odot x_0^i\ , \end{aligned}$$

então, $p(x_0) \leq a \odot x_0^{i+1} < b \odot x_0^i$. Analogamente, se $x_0 \geq (c - a)/2$, então:

$$\begin{aligned} c \odot x_0^{i-1} &= (i-1)x_0 + c = ix_0 - x_0 + c \\ &\leq ix_0 - \left(\frac{c-a}{2}\right) + c = ix_0 + \frac{c+a}{2} \\ &< ix_0 + b = b \odot x_0^i\ , \end{aligned}$$

então, $p(x_0) \leq c \odot x_0^{i-1} < b \odot x_0^i$.

Portanto, b não é um coeficiente mínimo e $p(x)$ não é um polinômio de coeficientes mínimos.

Dessa forma, se temos $p(x)$ um polinômio de coeficientes mínimos, então as diferenças entre coeficientes consecutivos de $p(x)$ têm que ser não decrescentes.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que as diferenças entre os coeficientes de $p(x)$ são não decrescentes. Como $a_n, a_r \neq \infty$, a_n e a_r são coeficientes mínimos. Sejam a_i um coeficiente de p, com $r < i < n$, e $x_0 = (a_{i-1} - a_{i+1})/2$. Vamos mostrar que $p(x_0) = a_i \odot x_0^i$, ou seja, a_i é um coeficiente mínimo. Para isto, devemos mostrar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $ix_0 + a_i \leq kx_0 + a_k$. Isto é óbvio se $k = i$. Suponha $k > i$. Como $(a_t - a_{t+1}) \leq (a_s - a_{s+1})$ para todo $t \geq s$, temos:

$$(a_i - a_{i+2}) = (a_i - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_{i+2}) \leq 2 \cdot (a_i - a_{i+1})$$

$$(a_i - a_{i+3}) = (a_i - a_{i+2}) + (a_{i+2} - a_{i+3}) \leq 3 \cdot (a_i - a_{i+1})$$

Por indução, obtemos que $(a_i - a_k) \leq (k-i)(a_i - a_{i+1})$.

Logo,

$$\begin{aligned}(a_i - a_k) &\leq (k-i)\cdot(a_i - a_{i+1})\\ &= \frac{1}{2}\cdot(2\cdot(a_i - a_{i+1}))\cdot(k-i)\\ &= \frac{1}{2}\cdot((a_i - a_{i+1}) + (a_i - a_{i+1}))\cdot(k-i)\\ &\leq \frac{1}{2}\cdot((a_{i-1} - a_i) + (a_i - a_{i+1}))\cdot(k-i)\\ &= \frac{a_{i-1} - a_{i+1}}{2}\cdot(k-1) = x_0\cdot(k-i).\end{aligned}$$

Assim, $i\cdot x_0 + a_i \leq k\cdot x_0 + a_k$. Um argumento similar vale para $k < i$. Então, $(a_i \odot x_0^i) \leq (a_k \odot x_0^k)$ para todo k. Isto significa que $p(x_0) = a_i \odot x_0^i$, então a_i é um coeficiente mínimo. Portanto, p é um polinômio de coeficientes mínimos. ■

De posse de todos esses resultados, somos capazes de demonstrar o equivalente ao Teorema Fundamental da Álgebra no universo tropical.

Teorema 2.1.8. ***(Teorema Fundamental da Álgebra Tropical)***

Seja

$$p(x) = (a_n \odot x^n) \oplus (a_{n-1} \odot x^{n-1}) \oplus \ldots \oplus (a_r \odot x^r)$$

um polinômio tropical de coeficientes mínimos. Então $p(x)$ pode ser escrito de forma única como o produto de fatores lineares, isto é:

$$p(x) = a_n \odot x^r \odot (x \oplus d_n) \odot (x \oplus d_{n-1}) \odot \ldots \odot (x \oplus d_{r+1}), \tag{2.2}$$

onde $d_i = a_{i-1} - a_i$ é a diferença entre dois coeficientes consecutivos.

Demonstração: Como $p(x)$ é um polinômio de coeficientes mínimos, as diferenças entre os coeficientes consecutivos são não decrescentes, isto é, $d_n \leq d_{n-1} \leq \ldots \leq d_{r+1}$. Conhecendo essas desigualdades, podemos expandir (2.2) obtendo:

$$\begin{aligned}&a_n \odot x^r \odot (x \oplus d_n) \odot (x \oplus d_{n-1}) \odot \ldots \odot (x \oplus d_{r+1})\\ &= [(a_n \odot x^{r+1}) \oplus (a_n \odot d_n \odot x^r)] \odot (x \oplus d_{n-1}) \odot \ldots \odot (x \oplus d_{r+1})\\ &= [(a_n \odot x^{r+2}) \oplus (a_n \odot d_{n-1} \odot x^{r+1}) \oplus (a_n \odot d_n \odot x^{r+1}) \oplus (a_n \odot d_n \odot d_{n-1} \odot x^r)]\odot\\ &\odot \ldots \odot (x \oplus d_{r+1})\\ &= \{(a_n \odot x^{r+2}) \oplus [a_n \odot x^{r+1} \odot (d_{n-1} \oplus d_n)] \oplus (a_n \odot d_n \odot d_{n-1} \odot x^r)\} \odot \ldots \odot (x \oplus d_{r+1})\\ &= \{(a_n \odot x^{r+2}) \oplus [a_n \odot x^{r+1} \odot \min\{d_{n-1}, d_n\}] \oplus (a_n \odot d_n \odot d_{n-1} \odot x^r)\} \odot \ldots \odot (x \oplus d_{r+1})\\ &= [(a_n \odot x^{r+2}) \oplus (a_n \odot d_n \odot x^{r+1}) \oplus (a_n \odot d_n \odot d_{n-1} \odot x^r)] \odot \ldots \odot (x \oplus d_{r+1})\\ &\vdots\end{aligned}$$

$= (a_n \odot x^n) \oplus (a_n \odot d_n \odot x^{n-1}) \oplus (a_n \odot d_n \odot d_{n-1} \odot x^{n-2}) \oplus \ldots \oplus (a_n \odot d_n \odot d_{n-1} \odot \ldots \odot d_{r+1} \odot x^r)$.

Mas o coeficiente do termo x^i neste polinômio é:

$$\begin{aligned} a_n \odot d_n \odot d_{n-1} \odot \ldots \odot d_{i+1} &= a_n + d_n + d_{n-1} + \ldots + d_{i+1} \\ &= a_n + a_{n-1} - a_n + a_{n-2} - a_{n-1} + \ldots + a_i - a_{i-1} \\ &= \cancel{a_n} + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n} + \cancel{a_{n-2}} - \cancel{a_{n-1}} + \ldots + a_i - \cancel{a_{i-1}} \\ &= a_i. \end{aligned}$$

Então, o polinômio (2.2) é igual ao polinômio $p(x) = (a_n \odot x^n) \oplus (a_{n-1} \odot x^{n-1}) \oplus \ldots \oplus (a_r \odot x^r)$.

Agora, suponhamos que exista outro jeito de escrever $p(x)$ como um produto de fatores lineares, o qual chamaremos de $g(x)$. Note que se $g(x) = \bigoplus_{i=r'}^{n'} (b_i \odot x^i)$ for a expansão de $g(x)$, então temos $r' = r$ e $n' = n$. Assim, podemos escrever:

$$g(x) = a'_n \odot x^r \odot (x \oplus d'_n) \odot (x \oplus d'_{n-1}) \odot \ldots \odot (x \oplus d'_{r+1}),$$

tal que $d'_n \leq d'_{n-1} \leq \ldots \leq d'_{r+1}$, após a reindexação dos d'_i, se necessário. Expandindo este produto obtemos

$$g(x) = (b_n \odot x^n) \oplus (b_{n-1} \odot x^{n-1}) \oplus \ldots \oplus (b_r \odot x^r)$$

$= (a'_n \odot x^n) \oplus (a'_n \odot d'_n \odot x^{n-1}) \oplus (a'_n \odot d'_n \odot d'_{n-1} \odot x^{n-2}) \oplus \ldots \oplus (a'_n \odot d'_n \odot d'_{n-1} \odot \ldots \odot d'_{r+1} \odot x^r)$.

Note que as diferenças entre coeficientes os consecutivos de $g(x)$ são não decrescentes,

$$\begin{aligned} b_{n-1} - b_n &= a'_n + d'_n - a'_n \\ &= d'_n \leq d'_{n-1} \\ &= a'_n + d'_n + d'_{n-1} - a'_n - d'_n \\ &= b_{n-2} - b_{n-1}, \end{aligned}$$

então, pelo Lema 2.1.7, g é um polinômio de coeficientes mínimos. Além disso, claro que $p \neq g$, então pelo Lema 2.1.5, p não é funcionalmente equivalente a g. Portanto, a fatoração é única. ■

Observação 2.1.3. O Teorema 2.1.8 mostra que as raízes de $p(x)$ são as diferenças entre os coeficientes consecutivos. Como todo polinômio é equivalente a um polinômio de coeficientes mínimos, isto prova que todo polinômio tropical pode ser fatorado em termos lineares.

3 POLINÔMIOS TROPICAIS DE DUAS VARIÁVEIS

3.1 CURVAS TROPICAIS PLANAS

É natural que queiramos estender o estudo dos polinômios tropicais para polinômios com mais de uma variável. Por isso, neste capítulo, iremos explorar os polinômios tropicais de duas variáveis e as curvas definidas por eles, chamadas *curvas tropicais planas*.

Definição 3.1.1. Um polinômio tropical de duas variáveis é uma expressão da forma

$$p(x,y) = \bigoplus_{i+j=0}^{d} (a_{i,j} \odot x^i \odot y^j) = \min_{i,j}\{a_{i,j} + ix + jy\}.$$

Definição 3.1.2. Definimos o ***grau*** de

$$p(x,y) = \bigoplus_{i+j=0}^{d} (a_{i,j} \odot x^i \odot y^j)$$

como sendo o máximo das somas $i+j$ para os coeficientes $a_{i,j} \neq \infty$.

Definição 3.1.3. A curva tropical definida pelo polinômio

$$p(x,y) = \bigoplus_{i+j=0}^{d} (a_{i,j} \odot x^i \odot y^j),$$

denotada por T_p, é o conjunto dos pontos (x_0, y_0) de $\mathbb{T}^2$ (ou $\mathbb{R}^2$) para os quais existam pares $(i,j) \neq (k,l)$ que verifiquem $p(x_0,y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0 = a_{k,l} + kx_0 + ly_0$, ou seja,

$$T_p = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2;\ p(x,y) = a_{i,j} + ix + jy = a_{k,l} + kx + ly,\ \text{para pares } (i,j) \neq (k,l)\}.$$

Para a visualização de uma curva tropical, primeiro observamos que cada monômio $p_{ij}(x,y) = a_{i,j} + ix + jy$ do polinômio tropical $p(x,y) = \min_{i,j}\{a_{i,j} + ix + jy\}$ define uma função afim em $\mathbb{R}^2$ cujo gráfico é um plano em $\mathbb{R}^3$. O gráfico Γ_p da função definida por p é então uma união de superfícies planas (semiplanos ou polígonos), ou seja, uma superfície poliédrica. A curva tropical T_p é a projeção das arestas (interseção de dois planos) de Γ_p.

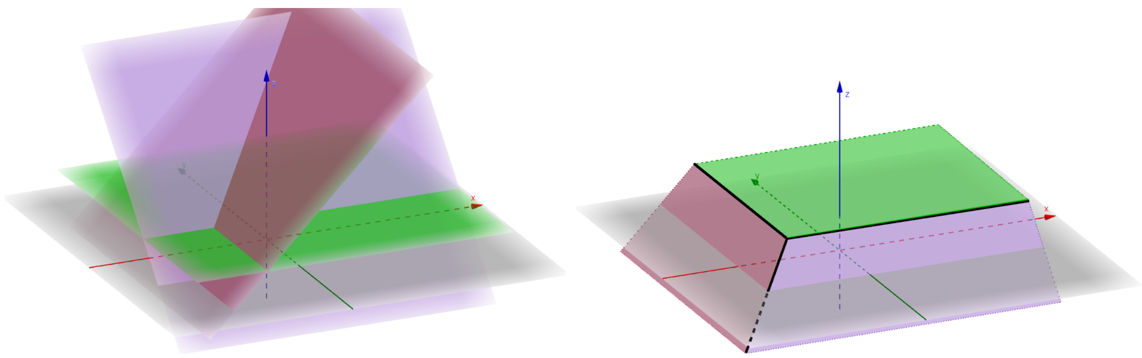


Figura 8: Superfície poliédrica gráfico de $p(x,y) = \min\{x+3, y+2, 1\}$

Chamamos a atenção para o fato de que que as funções afins definidas pelos monômios de um polinômio tropical de duas variáveis são da forma $ax + by + c$, com $c \in \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{N}$.

Curvas tropicais em $\mathbb{T}^2$ definidas por polinômios de grau um são chamadas de ***retas tropicais***. No exemplo a seguir mostraremos como é a representação geométrica de uma reta tropical.

Exemplo 3.1.1. Seja $p(x, y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c = \min\{a + x, b + y, c\}$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Temos que T_p é formada pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem:

(a) $a + x = b + y$ e $a + x \leq c$ que resulta em $y = x + a - b$ e $x \leq c - a$. Assim, os pontos da semirreta

$$\boxed{\{(x, x + a - b)|\ x \leq (c - a)\}}$$

fazem parte da curva tropical T_p.

(b) $a + x = c$ e $c \leq b + y$ que resulta em $x = c - a$ e $y \geq c - b$. Assim, os pontos da semirreta

$$\boxed{\{(c - a, y)|\ y \geq (c - b)\}}$$

fazem parte da curva tropical T_p.

(c) $b + y = c$ e $c \leq a + x$ que resulta em $y = c - b$ e $x \geq c - a$. Assim, os pontos da semirreta

$$\boxed{\{(x, c - b)|\ x \geq (c - a)\}}$$

fazem parte da curva tropical T_p.

A união das semirretas dos itens (a), (b) e (c) forma a reta tropical T_p, representada na Figura 9.

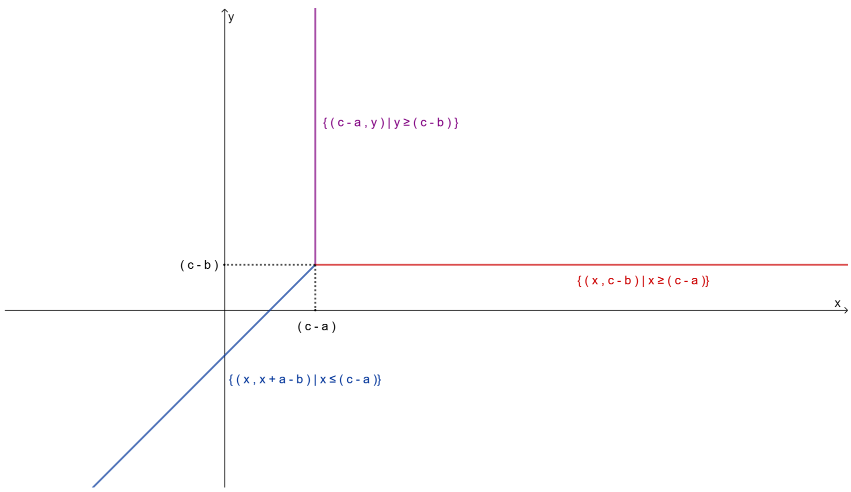


Figura 9: Reta tropical definida por $p(x, y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c$

A Figura 10 representa o gráfico Γ_p do polinômio $p(x,y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c$ em $\mathbb{R}^3$, cuja projeção das arestas em $\mathbb{R}^2$ é a reta tropical.

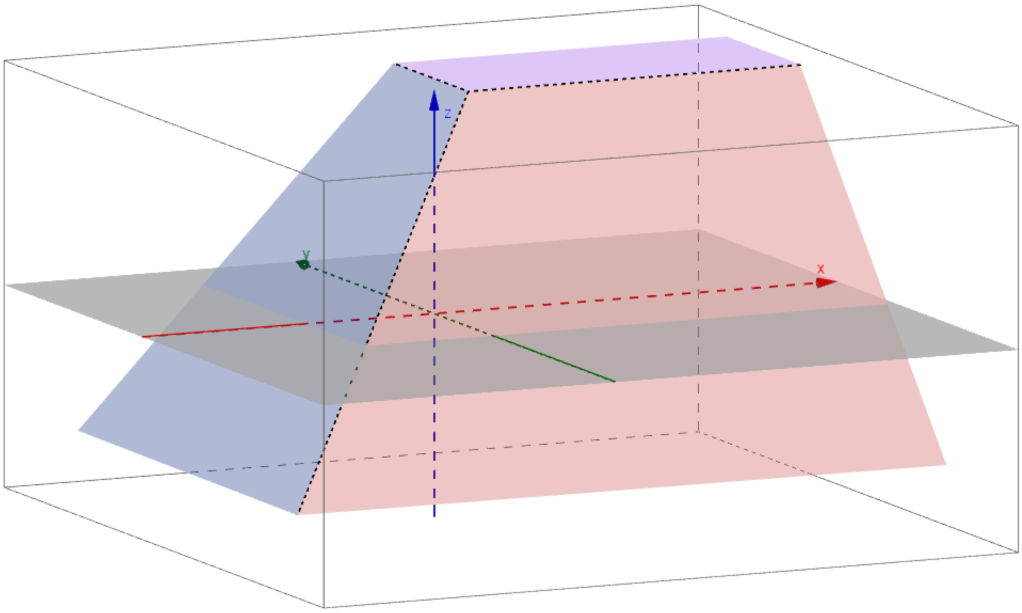


Figura 10: Gráfico Γ_p de $p(x,y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c$

Observação 3.1.1. No polinômio $p(x,y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c$ do exemplo anterior, se tivéssemos $a = \infty$, $b = \infty$ ou $c = \infty$, a reta tropical definida por $p(x,y)$ seria uma reta usual do $\mathbb{R}^2$. De fato, para $a = \infty$, teríamos:

$$p(x,y) = (\infty \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c = \min\{\infty + x, b + y, c\} =$$
$$= \min\{\infty, b + y, c\} = \min\{b + y, c\}.$$

Nesse caso, a reta tropical seria a projeção, em $\mathbb{R}^2$, da reta definida pela interseção dos planos $b + y - z = 0$ e $z = c$, ou seja, seria a reta $y = c - b$, representada na Figura 11.

Analogamente, para $b = \infty$, teríamos:

$$p(x,y) = (a \odot x) \oplus (\infty \odot y) \oplus c = \min\{a + x, \infty + y, c\} =$$
$$= \min\{a + x, \infty, c\} = \min\{a + x, c\},$$

e, nesse caso, a reta tropical seria a projeção no $\mathbb{R}^2$ da reta dada pela interseção dos planos $a + x - z = 0$ e $z = c$, ou seja, seria a reta $x = c - a$, representada na Figura 12.

Finalmente, para $c = \infty$,

$$p(x,y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus \infty =$$
$$= \min\{a + x, b + y, \infty\} = \min\{a + x, b + y\}.$$

Então, a reta tropical seria a projeção no $\mathbb{R}^2$ da interseção dos planos $a + x - z = 0$ e $b + y - z = 0$, que é a reta $y = x + a - b$, dada na Figura 13.

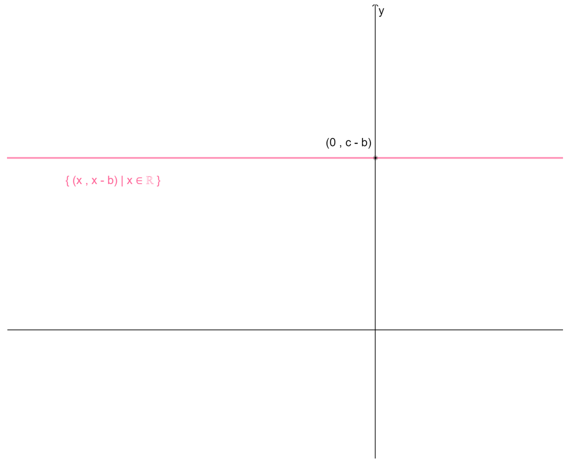


Figura 11: Reta tropical definida por $p(x, y) = (\infty \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus c$

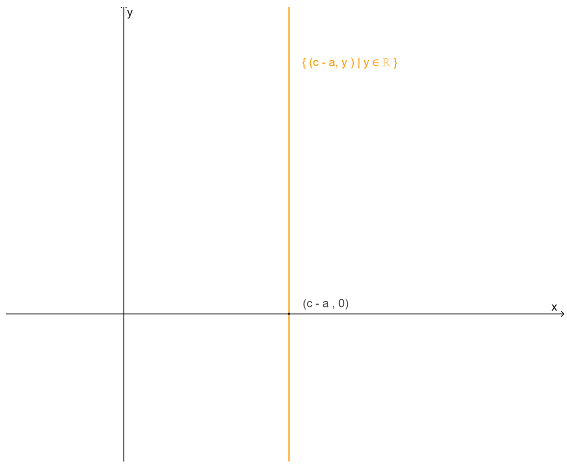


Figura 12: Reta tropical definida por $p(x, y) = (a \odot x) \oplus (\infty \odot y) \oplus c$

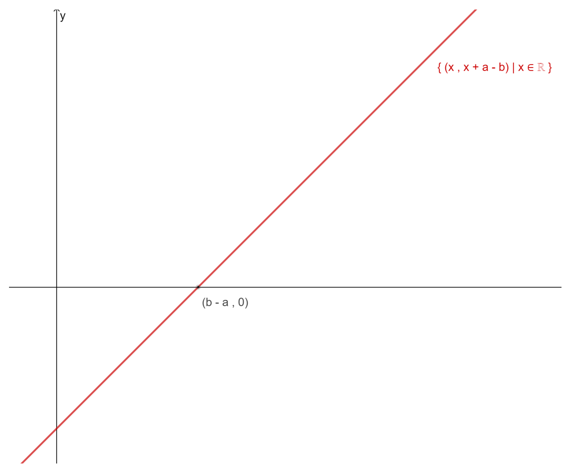


Figura 13: Reta tropical de $p(x, y) = (a \odot x) \oplus (b \odot y) \oplus \infty$

Chamamos as retas tropicais que coincidem com retas usuais do $\mathbb{R}^2$ de *degeneradas*.

A seguir, daremos um exemplo de uma curva tropical definida por um polinômio tropical de grau dois.

Exemplo 3.1.2. Considere o polinômio tropical de grau dois dado por:

$$p(x,y) = x^2 \oplus (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3 = \min\{2x, x+y, 2y+2, 1+x, 3\}.$$

A curva tropical T_p definida por $p(x,y)$ é constituída de pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos quais o mínimo de $p(x,y)$ é atingido pelo menos duas vezes, ou seja, pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ onde pelo menos dois monômios se igualam e $p(x,y)$ atinge seu mínimo.

Um ponto $(x,y) \in T_p$ se, e somente se, satisfaz uma das condições a seguir.

(a) $$\begin{cases} 2x &= x+y \\ 2x &\leq 2y+2 \\ 2x &\leq 1+x \\ 2x &\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x \leq y+1 \\ x \leq 1 \\ x \leq 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 \leq 1 \\ x \leq 1 \\ x \leq 3/2. \end{cases}$$

Como todas as inequações acima são satisfeitas quando $x \leq 1$, a semirreta

$$\boxed{\{(x,x) |\ x \leq 1\}}$$

está contida na curva tropical T_p. Geometricamente, interceptamos os planos $2x - z = 0$ e $x + y - z = 0$, obtendo a reta $r(x) = \{(x, x, 2x); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Depois, analisamos para quais valores de x essa reta está totalmente abaixo dos demais planos que compõe $p(x,y)$. Observe que:

- $r(x)$ é paralela ao plano $2y + 2 - z = 0$ e está contida no semiespaço inferior definido pelo plano $z = 2y + 2$ (Figura 14).

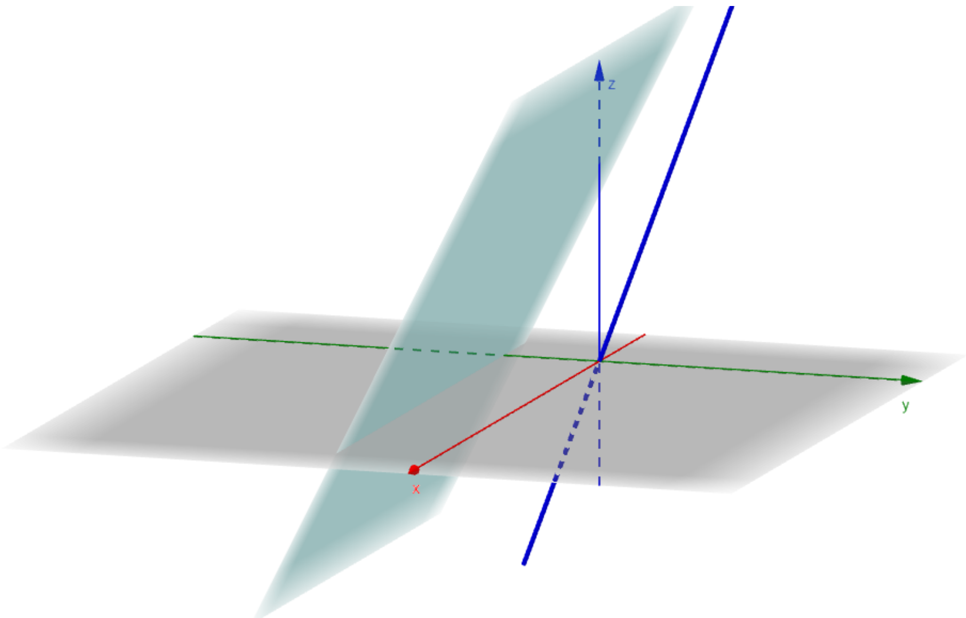


Figura 14: Reta $r(x)$ e plano $2y + 2 - z = 0$

- $r(x)$ intercepta o plano $1 + x - z = 0$ no ponto $A = (1, 1, 2)$ e está abaixo dele sempre que $z = 2x \leq 1$, ou seja, para todo $x \leq 1$ (Figura 15).

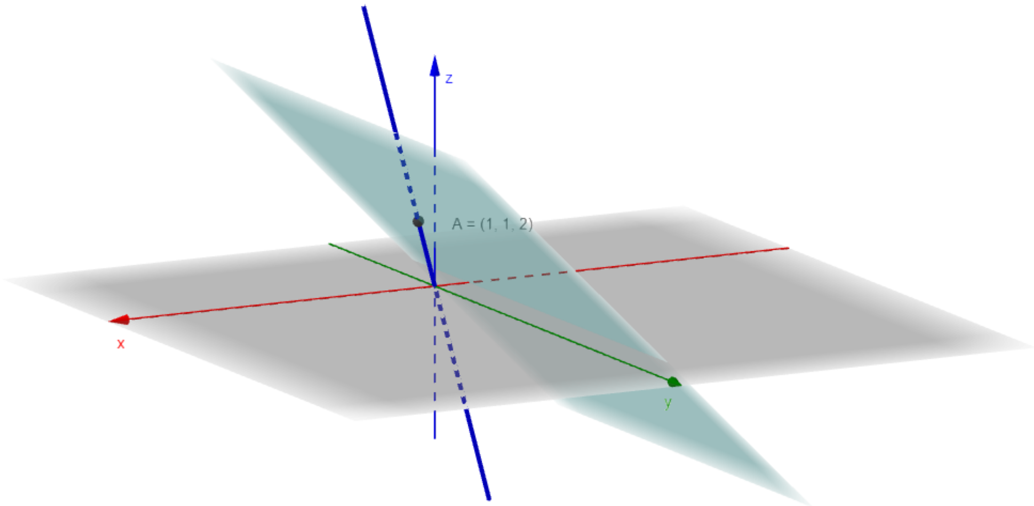


Figura 15: Posição relativa da reta $r(x)$ e plano $1 + x - z = 0$

– $r(x)$ intercepta o plano $z = 3$ no ponto $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$ e $r(x)$ está abaixo do plano $z = 3$ sempre que $x \leq \frac{3}{2}$ (Figura 16).

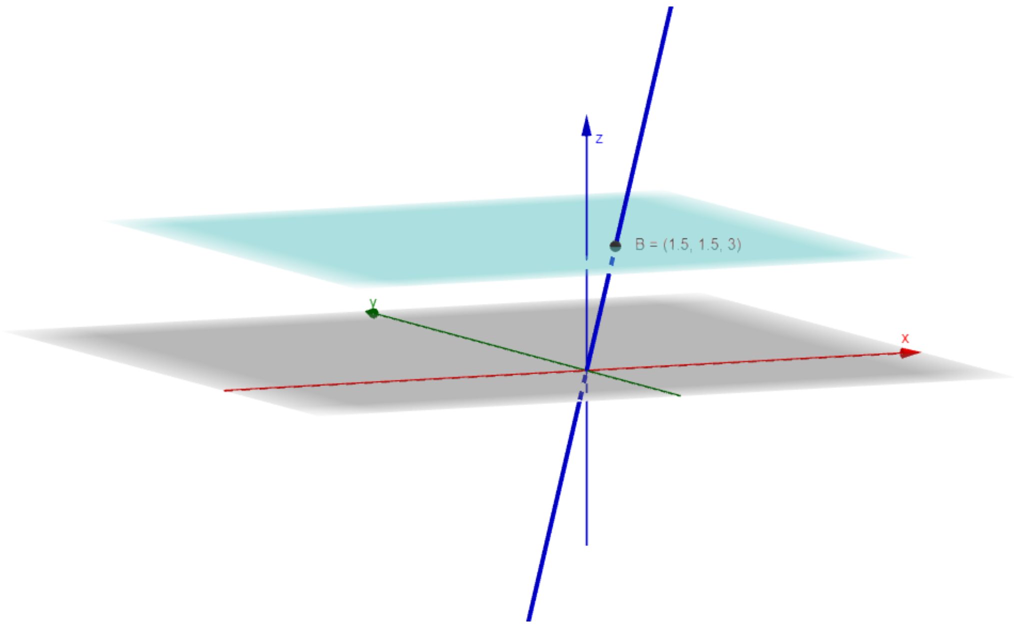


Figura 16: Posição relativa da reta $r(x)$ e do plano $z = 3$

Assim, para $x \leq 1$, $r(x)$ está no semiespaço inferior definido pelos planos $z = 2y + 2$, $z = 1 + x$ e $z = 3$. Projetando $r(x) = \{(x, x, 2x) | x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ no plano $z = 0$, obtemos a semirreta $\{(x, x) | x \leq 1\} \in \mathbb{R}^2$.

(b) $$\begin{cases} 2x & = 2y + 2 \\ 2x & \leq x + y \\ 2x & \leq 1 + x \\ 2x & \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x \leq x + y \\ x \leq 1 \\ x \leq 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x \leq x + x - 1 = 2x - 1 \\ x \leq 1 \\ x \leq 3/2. \end{cases}$$

Como a primeira inequação não tem solução, nenhum ponto da reta $y = x - 1$ está na curva tropical T_p. Geometricamente, assim como no item (a), interceptamos os planos $2x - z = 0$ e $2y + 2 - z = 0$, obtendo a reta $r(x) = (2x, 2x - 1, 4x) \in \mathbb{R}^3$. Porém, $r(x)$ está contida no semiespaço superior definido pelo plano $x + y - z = 0$ (Figura 17). Então, a projeção dessa reta não pode faz parte da curva T_p.

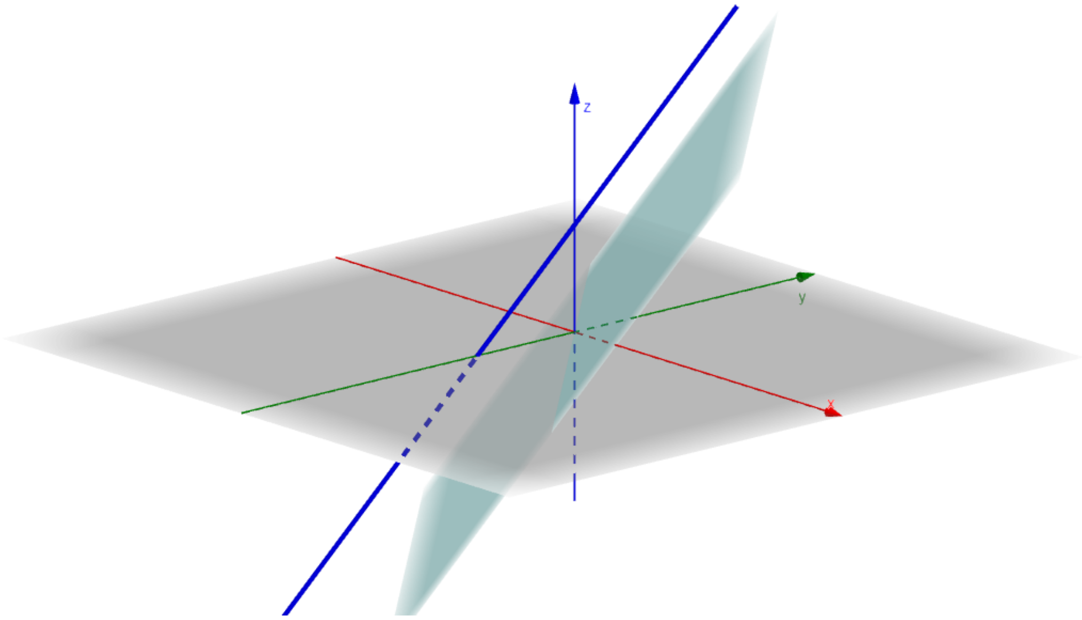


Figura 17: Reta $r(x) = (2x, 2x - 1, 4x)$ e plano $x + y - z = 0$

$$\textbf{(c)} \begin{cases} 2x & = x + 1 \\ 2x & \leq x + y \\ 2x & \leq 2y + 2 \\ 2x & \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \leq y \\ x \leq y + 1 \\ x \leq 3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 \leq y \\ 0 \leq y \\ x \leq 3/2. \end{cases}$$

Neste caso, todas as inequações são satisfeitas quando $y \geq 1$. Assim, a semirreta

$$\boxed{\{(1, y)|\ y \geq 1\}}$$

está contida na curva tropical T_p.

$$\textbf{(d)} \begin{cases} 2x & = 3 \\ 2x & \leq x + y \\ 2x & \leq 2y + 2 \\ 2x & \leq x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ x \leq y \\ x \leq y + 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ 3/2 \leq y \\ 1/2 \leq y \\ x \leq 1. \end{cases}$$

Como a última inequação não tem solução, nenhum ponto da reta $x = 3/2$ está na curva tropical T_p.

$$\textbf{(e)}\begin{cases} x+y &= 2y+2\\ x+y &\leq 2x\\ x+y &\leq 1+x\\ x+y &\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x-2\\ x\geq y\\ y\leq 1\\ x\leq 5/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-2\\ x\geq y\\ x\leq 3\\ x\leq 5/2. \end{cases}$$

Como todas as inequações acima são satisfeitas quando $x \leq 5/2$, a semirreta

$$\boxed{\left\{(x, x-2)|\ x \leq \frac{5}{2}\right\}}$$

está contida na curva tropical T_p.

$$\textbf{(f)}\begin{cases} x+y &= 1+x\\ x+y &\leq 2x\\ x+y &\leq 2y+2\\ x+y &\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1\\ x\geq y\\ y\geq x-2\\ x\leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1\\ x\geq y\\ x\leq 3\\ x\leq 2. \end{cases}$$

Como todas as inequações acima são satisfeitas quando $1 \leq x \leq 2$, o segmento de reta

$$\boxed{\{(x, 1)|\ 1 \leq x \leq 2\}}$$

está contido na curva tropical T_p.

$$\textbf{(g)}\begin{cases} x+y &= 3\\ x+y &\leq 2x\\ x+y &\leq 2y+2\\ x+y &\leq 1+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3-x\\ x\geq y\\ y\geq x-2\\ y\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3-x\\ x\geq 3/2\\ x\leq 5/2\\ x\geq 2. \end{cases}$$

Como todas as inequações acima são satisfeitas quando $2 \leq x \leq 5/2$, o segmento de reta

$$\boxed{\left\{(x, 3-x)|\ 2 \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}}$$

está contido na curva tropical T_p.

$$\textbf{(h)}\begin{cases} 2y+2 &= 1+x\\ 2y+2 &\leq 2x\\ 2y+2 &\leq x+y\\ 2y+2 &\leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y+1\\ x\geq y+1\\ x\geq y+2\\ y\leq 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+1\\ y\geq 0\\ y\geq 1\\ y\leq 1/2 \end{cases}$$

Como não é possível ter ao mesmo tempo $y \geq 1$ e $y \leq 1/2$, não existem valores de y para os quais todas as inequações acima são satisfeitas. Assim, nenhum ponto da reta $x = 2y + 1$ está na curva tropical T_p.

$$
\text{(i)} \begin{cases} 2y+2 & = 3 \\ 2y+2 & \leq 2x \\ 2y+2 & \leq x+y \\ 2y+2 & \leq 1+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ x \geq y+1 \\ x \geq y+2 \\ x \geq 2y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ x \geq 3/2 \\ x \geq 5/2 \\ x \geq 2 \end{cases}
$$

Como todas as inequações acima são satisfeitas quando $x \geq 5/2$, o segmento de reta

$$
\boxed{\left\{ \left(x, \frac{1}{2} \right) \mid x \geq \frac{5}{2} \right\}}
$$

está contido na curva tropical T_p.

$$
\text{(j)} \begin{cases} 3 & = 1+x \\ 3 & \leq 2x \\ 3 & \leq x+y \\ 3 & \leq 2y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq 3/2 \\ y \geq 3-x \\ y \geq 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq 3/2 \\ y \geq 1 \\ y \geq 1/2 \end{cases}
$$

Como todas as inequações acima são satisfeitas quando $y \geq 1$, a semirreta

$$
\boxed{\{(2, y) | \ y \geq 1\}}
$$

está contida na curva tropical T_p.

A união de todas as semirretas e segmentos de reta dos itens (a), (c), (e), (f), (g), (i) e (j) é a curva tropical T_p, que pode ser vista na Figura 18.

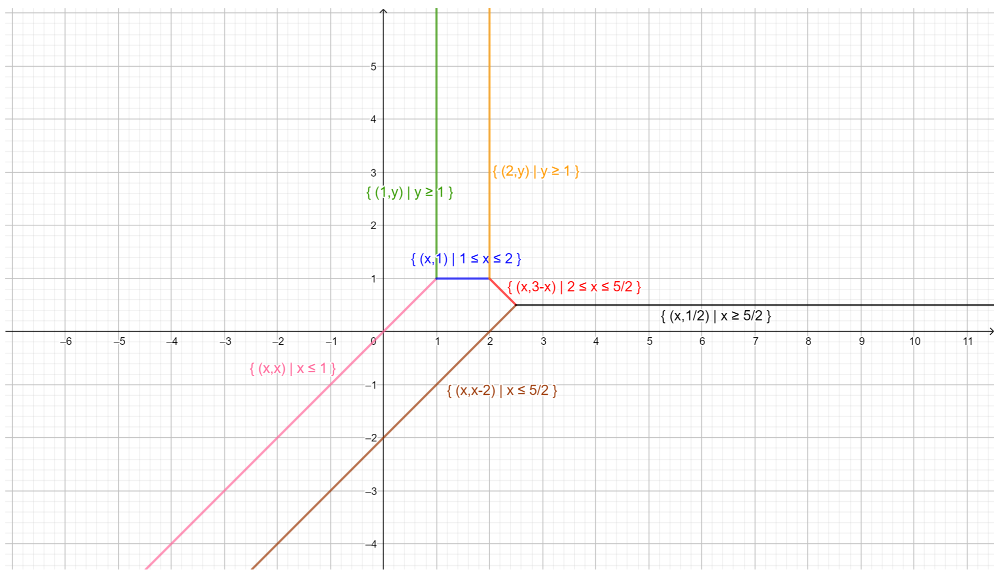


Figura 18: Curva Tropical T_p

A superfície poliédrica representada na Figura 19 é o gráfico Γ_p da função polinomial definida por $p(x, y)$ em $\mathbb{R}^3$. A curva tropical T_p, representada na Figura 20, é a projeção em $\mathbb{R}^2$ das arestas de Γ_p.

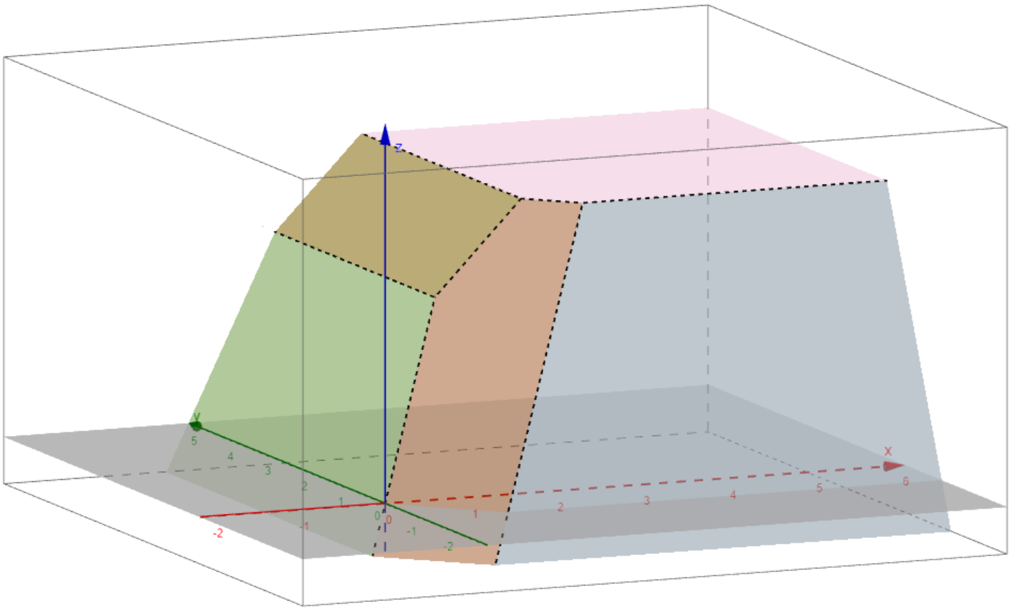


Figura 19: Gráfico Γ_p do polinômio tropical $p(x, y)$

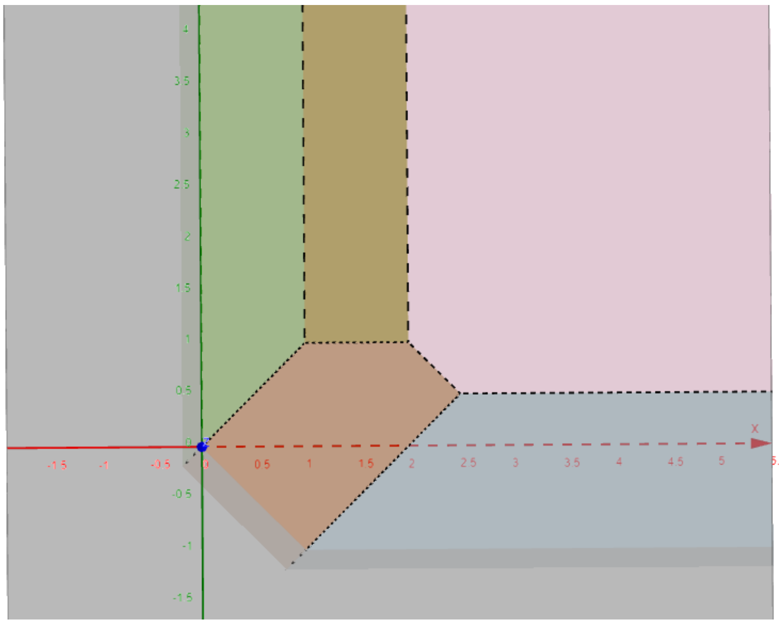


Figura 20: Curva Tropical T_p vista como a projeção das arestas de Γ_p no $\mathbb{R}^2$

Definição 3.1.4. Uma curva tropical T_p é formada pela união de segmentos de reta ou semirretas, chamados *arestas*, e de pontos, onde estas arestas se interceptam, chamados *vértices*.

O conjunto T_p contém um número finito de arestas e um número finito de vértices. Cada aresta de T_p é um segmento que conecta dois vértices ou uma semirreta com um vértice como fim. No segundo caso, chamamos a aresta em questão de *raio* de T_p.

Definição 3.1.5. Seja T_p a curva tropical definida por

$$p(x,y) = \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p} (a_{i,j} \odot x^i \odot y^j),$$

onde Λ_p é uma coleção finita de pontos em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas são números inteiros positivos. Seja E uma aresta de T_p e $\hat{E}$ a aresta de Γ_p (gráfico da função polinomial definida por p) cuja projeção é E. A aresta $\hat{E}$ é adjacente a duas faces de Γ_p contidas em gráficos de duas funções afins

$$p_{i,j} : (x,y) \to a_{i_1,j_1} + i_1 x + j_1 y \quad \text{e} \quad p_{k,l} : (x,y) \to a_{i_2,j_2} + i_2 x + j_2 y,$$

onde (i_1, j_1) e (i_2, j_2) pertecem a Λ_p. Chamamos de ***peso*** de E o número de pontos inteiros contidos no segmento que conecta os pontos (i_1, j_1) e (i_2, j_2), menos 1.

Exemplo 3.1.3. No polinômio $p(x,y)$ do Exemplo 3.1.2, a aresta $E_1 := \left\{\left(x, \frac{1}{2}\right) | x \geq \frac{5}{2}\right\}$ de T_p é a projeção da aresta $\hat{E}_1 := \left\{\left(x, \frac{1}{2}, 3\right) \mid x \geq \frac{5}{2}\right\}$ de Γ_p, que é adjacente às faces

$$z = 2y + 2 = 2 + 0x + 2y \quad \text{e} \quad z = 3 = 3 + 0x + 0y$$

de Γ_p. Então, neste caso, temos $(i_1, j_1) = (0,2)$ e $(i_2, j_2) = (0,0)$. O segmento que conecta os pontos $(0,0)$ e $(0,2)$ possui três pontos inteiros, a saber, $(0,0)$, $(0,1)$ e $(0,2)$. Então, o peso da aresta E_1 de T_p é $3 - 1 = 2$.

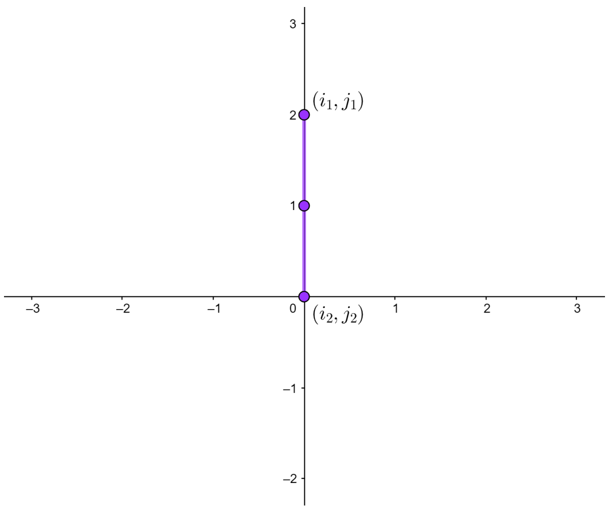


Figura 21: Pontos inteiros do segmento que conecta $(0,0)$ e $(0,2)$

Não é difícil verificar que o peso de cada uma das arestas restantes da curva tropical T_p do Exemplo 3.1.2 é igual a 1.

Quando o peso de uma aresta for maior do que 1, indicaremos seu valor na respectiva aresta. Assim, a curva tropical T_p será representada como na Figura 22, indicando que a aresta $E_1 = \left\{\left(x, \frac{1}{2}\right) | x \geq \frac{5}{2}\right\}$ possui peso 2 enquanto as demais arestas possuem peso 1.

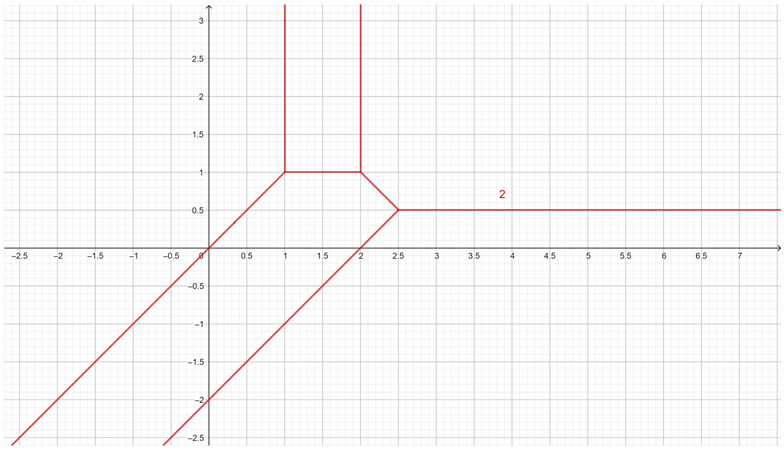


Figura 22: Curva tropical T_p com as arestas e seus respectivos pesos

A partir de agora, sempre que nos referirmos à curva tropical definida por um polinômio tropical $p(x, y)$, estaremos falando da união dos vértices e arestas de T_p onde as arestas são fornecidas com seus respectivos pesos.

Definição 3.1.6. Seja $p(x, y) = \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p}(a_{i,j} \odot x^i \odot y^j)$ um polinômio tropical. Para cada $(i, j) \in \Lambda_p$, chamamos de ***região*** o conjunto:

$$\sigma_{(i,j)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y) = a_{i,j} \odot x^i \odot y^j\}.$$

Ou seja, a região $\sigma_{(i,j)}$ é o lugar geométrico dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ onde o mínimo da função definida pelo polinômio tropical $p(x, y)$ é assumido no monômio $a_{i,j} \odot x^i \odot y^j$.

Afirmamos que a união das regiões definidas pelo polinômio tropical $p(x, y)$ é todo o $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(i,j)\in\Lambda_p} \sigma_{(i,j)}.$$

De fato, dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $p(x_0, y_0)$ atinge o mínimo em pelo menos um monômio $a_{k,l} + kx + ly$ e, assim, $(x_0, y_0) \in \sigma_{(k,l)}$. Note que, se $p(x_0, y_0)$ atinge o mínimo em dois monômios ou mais, então (x_0, y_0) pertence à curva tropical T_p, por definição. Assim, a interseção de duas regiões $\sigma_{(i,j)}$ e $\sigma_{(k,l)}$ ou é vazia, ou é uma semirreta (ou segmento de reta) que compõe a curva tropical T_p. Dessa forma, podemos dizer que T_p define uma subdivisão do $\mathbb{R}^2$ em regiões. Chamaremos de Θ_p a subdivisão do $\mathbb{R}^2$ definida por T_p.

No exemplo a seguir, mostraremos como encontrar as regiões definidas pelo polinômio tropical do Exemplo 3.1.2.

Exemplo 3.1.4. Para o polinômio tropical $p(x, y) = x^2 \oplus (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3$, temos as seguintes regiões:

$$\sigma_{(2,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = a_{2,0} \odot x^2 \odot y^0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = 2x\}$$
$$\sigma_{(1,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = a_{1,1} \odot x^1 \odot y^1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = x+y\}$$
$$\sigma_{(0,2)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = a_{0,2} \odot x^0 \odot y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = 2+2y\}$$
$$\sigma_{(1,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = a_{1,0} \odot x^1 \odot y^0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = 1+x\}$$
$$\sigma_{(0,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = a_{0,0} \odot x^0 \odot y^0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = 3\}$$

Como vimos no Exemplo 3.1.2, o gráfico Γ_p do polinômio $p(x,y)$ é a superfície poliédrica representada na Figura 23.

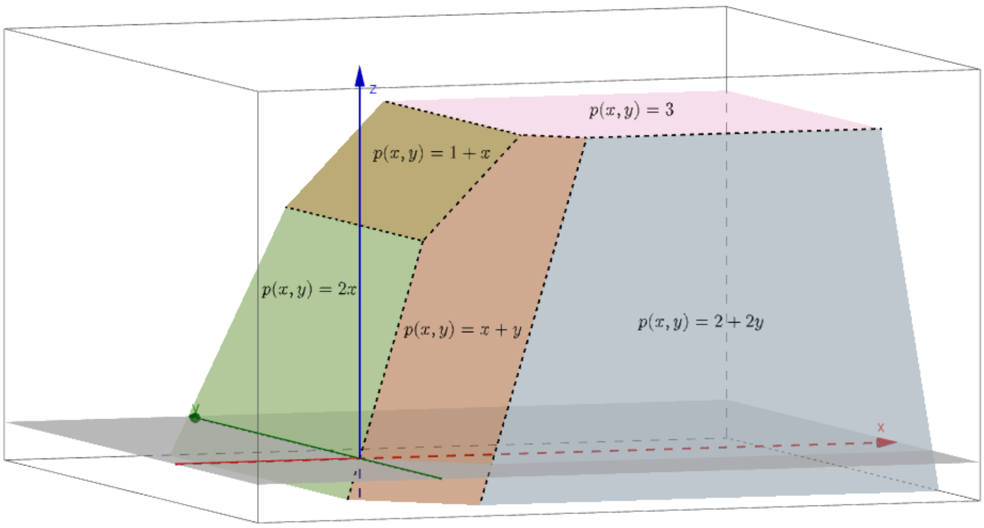


Figura 23: Gráfico Γ_p do polinômio tropical $p(x,y)$

Assim, o conjunto $\sigma_{(2,0)}$ é a projeção da face verde de Γ_p, $\sigma_{(1,1)}$ é a projeção da face laranja, $\sigma_{(0,2)}$ é a projeção da face azul, $\sigma_{(1,0)}$ é a projeção da face amarela e $\sigma_{(0,0)}$ é a projeção da face rosa. Na Figura 24 estão representadas as regiões definidas por $p(x,y)$.

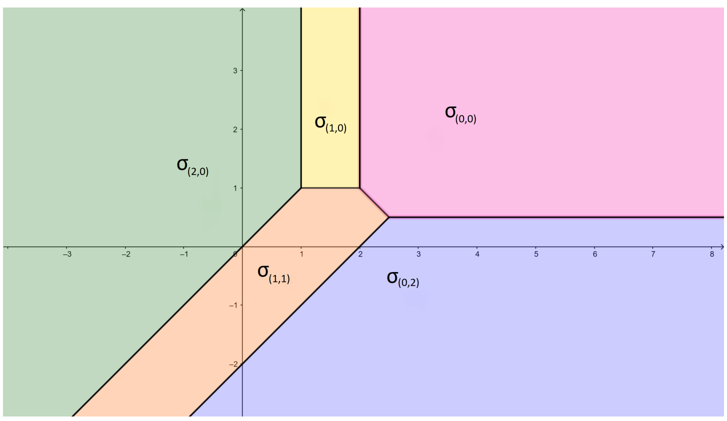


Figura 24: Subdivisão Θ_p do $\mathbb{R}^2$ formada pela curva tropical T_p

3.1.1 Subdivisão Dual

Nesta seção vamos definir as chamadas ***subdivisões duais*** das curvas tropicais e estudar algumas de suas propriedades. Como veremos mais adiante, o termo dual vem de uma relação de dualidade existente entre esses novos objetos e a subdivisão Θ_p definida anteriormente pela curva tropical T_p, ou seja, é possível estabelecer uma bijeção entre os elementos de Θ_p e os elementos da subdivisão dual definida por T_p. Antes de avançar, no entanto, precisaremos de algumas definições e resultados sobre conjuntos convexos.

Definição 3.1.7. Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando dados dois pontos $c_1, c_2 \in C$, o ponto $c_3 = \alpha c_1 + (1-\alpha)c_2 \in C$, para cada $\alpha \in [0,1]$.

Definição 3.1.8. Dado $x_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \in [0,1]$ e $i = 1, \ldots, p$, tais que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, o ponto $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ é chamado ***combinação convexa*** **dos pontos** $x_i \in \mathbb{R}^n$**,** com parâmentros α_i, $i = 1, \ldots, p$.

Lema 3.1.1. *Qualquer subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.*

Demonstração: Se C um subespaço do $\mathbb{R}^n$, então para todo $x, y \in C$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

(a) $x + y \in C$;

(b) $\alpha x \in C$.

Em particular, para todo $\alpha \in [0,1]$, temos:

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \alpha x + y - \alpha y = \alpha(x-y) + y \in C,$$

pois y, $(x-y)$ pertencem a C por (a) e $\alpha(x-y) \in C$ por (b). ∎

Teorema 3.1.2. *Sejam $C_1, C_2, \cdots, C_k$ conjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_k$$

é um conjunto convexo.

Demonstração: Se $C = \emptyset$, então é convexo por vacuidade. Caso contrário, sejam $x, y \in C$. Tomemos $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Se $x, y \in C = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_k$, então $x, y \in C_i$ para cada $i = 1, \cdots, k$. Logo, para cada i, temos $\alpha_1 x + \alpha_2 y \in C_i$, pela convexidade de C_i. Então, pela definição de interseção de conjuntos, segue que $\alpha_1 x + \alpha_2 y \in C$, o que mostra que C é convexo. ∎

Definição 3.1.9. Sejam C_1 e C_2 subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Definimos a soma de C_1 e C_2, denotada por $C_1 + C_2$, por:

$$C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 |\ c_1 \in C_1 \text{ e } c_2 \in C_2\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Lema 3.1.3. *Sejam C_1 e C_2 subconjuntos convexos do $\mathbb{R}^n$. Então, $C_1 + C_2$ é convexo.*

Demonstração: Se C ou C for vazio, o resultado é imediato, uma vez que $C + \emptyset = C$ para todo $C \subset \mathbb{R}^n$. Por outro lado, para $C_1 \neq \emptyset$ e $C_2 \neq \emptyset$, sejam $x, y \in C_1 + C_2$ e $\alpha \in [0, 1]$. Por definição, $x = x_1 + x_2$, onde $x_1 \in C_1$ e $x_2 \in C_2$ e $y = y_1 + y_2$, onde $y_1 \in C_1$ e $y_2 \in C_2$. Seja $z = (1 - \alpha)x + \alpha y$. Assim:

$$\begin{aligned} z &= (1-\alpha)x + \alpha y \\ &= (1-\alpha)(x_1 + x_2) + \alpha(y_1 + y_2) \\ &= (1-\alpha)x_1 + \alpha y_1 + (1-\alpha)x_2 + \alpha y_2. \end{aligned}$$

Sejam $z_1 = (1 - \alpha)x_1 + \alpha y_1$ e $z_2 = (1 - \alpha)x_2 + \alpha y_2$. Temos que $z = z_1 + z_2$ onde $z_1 \in C_1$ e $z_2 \in C_2$, pela convexidade de C_1 e C_2. Portanto, $C_1 + C_2$ é um conjunto convexo. ■

Teorema 3.1.4. *Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se, e somente se, para quaisquer $p \in \mathbb{N}$, $x_i \in C$ e $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, p$, tais que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, a combinação convexa $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$ pertence a C.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in C$ para quaisquer $p \in \mathbb{N}$, $x_i \in C$ e $\alpha_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, p$, tais que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$. Em particular, para $p = 2$, temos:

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in C,$$

onde $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$. Assim, podemos escrever $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, e:

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1)x_2 \in C.$$

Logo, pela Definição 3.1.7, C é convexo.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, sejam C convexo e $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$, onde p, α_i e x_i satisfazem as hipóteses do enunciado.

Se $p = 1$, temos $\alpha_1 = 1$ e, portanto, $x = x_1 \in C$.

Suponhamos que qualquer combinação convexa de quaisquer $j \geq 1$ pontos de C pertença a C. Vamos mostrar que para $p = j + 1$, $x \in C$.

Se $\alpha_{j+1} = 1$, então $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots j$. Neste caso, temos:

$$x = \sum_{i=1}^{j+1} \alpha_i x_i = x^{j+1} \in C.$$

Seja $\alpha_{j+1} \in [0,1)$. Como $1 - \alpha_{j+1} > 0$, podemos escrever:

$$x = \sum_{i=1}^{j+1} \alpha_i x_i = (1-\alpha_{j+1}) \sum_{i=1}^{j+1} \frac{\alpha_i x_i}{(1-\alpha_{j+1})}$$
$$= (1-\alpha_{j+1}) \sum_{i=1}^{j} \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_{j+1})} x_i + \alpha_{j+1} x_{j+1}$$
$$= (1-\alpha_{j+1}) y + \alpha_{j+1} x_{j+1},$$

onde

$$y = \sum_{i=1}^{j} \frac{\alpha_i}{(1-\alpha_{j+1})} x_i.$$

Seja $\beta_i = \alpha_i/(1-\alpha_{j+1})$. Então, $\beta_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, j$, e como

$$1 = \sum_{i=1}^{j+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i + \alpha_{j+1},$$

segue que:

$$\sum_{i=1}^{j} \beta_i = (1-\alpha_{j+1})^{-1} \sum_{i=1}^{j} \alpha_i = (1-\alpha_{j+1})^{-1}(1-\alpha_{j+1}) = 1.$$

Portanto, y é uma combinação convexa de j pontos de C. Pela hipótese de indução, $y \in C$. Além disso, mostramos que x é uma combinação convexa de dois pontos de C, y e x_{j+1}. Como C é convexo, obtemos que $x \in C$, o que completa a prova. ∎

Definição 3.1.10. (***Envoltória Convexa***) Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto. A envoltória convexa (ou fecho convexo) de C, denotada por $conv(C)$, é o menor conjunto convexo que contém C. Ou, equivalentemente, a interseção de todos os conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contêm C.

Definição 3.1.11. Dado o polinômio tropical

$$p(x,y) = \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p} (a_{i,j} \odot x^i \odot y^j),$$

onde Λ_p é uma coleção finita de pontos de $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas são números inteiros positivos, denotamos Δ_p a envoltória convexa de Λ_p em $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$\Delta_p = conv(\Lambda_p) \subset \mathbb{R}^2.$$

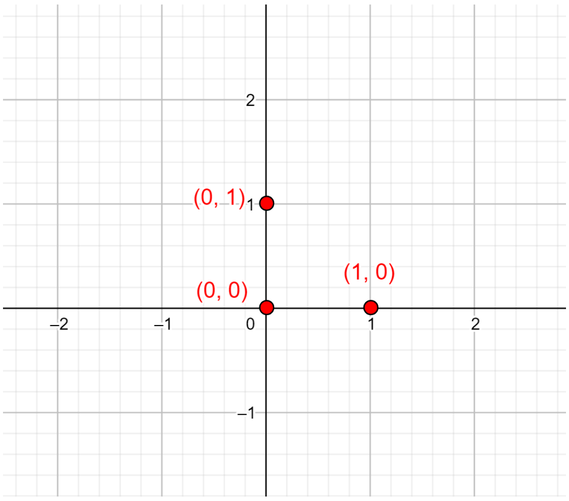
Exemplo 3.1.5. Considere o polinômio tropical

$$s(x,y) = (3 \odot x) \oplus (2 \odot y) \oplus 5.$$

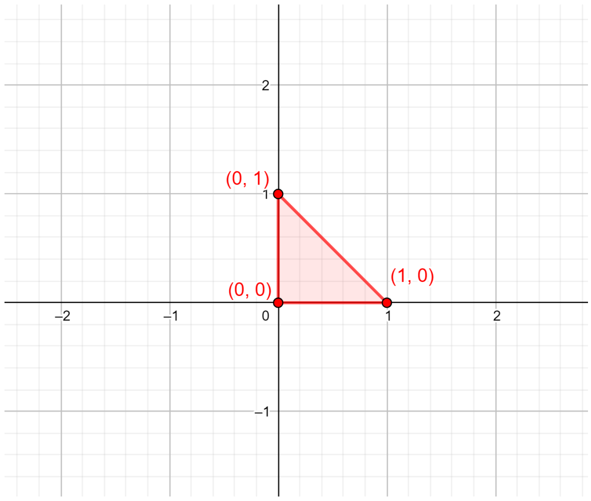
Neste caso, temos

$$\Lambda_s = \{(0,0), (0,1), (1,0)\},$$

como na Figura 25a. A envoltória convexa Δ_s desse conjunto é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$, que pode ser visto na Figura 25b.



(a) Pontos do conjunto Λ_s



(b) Envoltória convexa Δ_s

Figura 25: Conjunto Λ_s e sua envoltória convexa

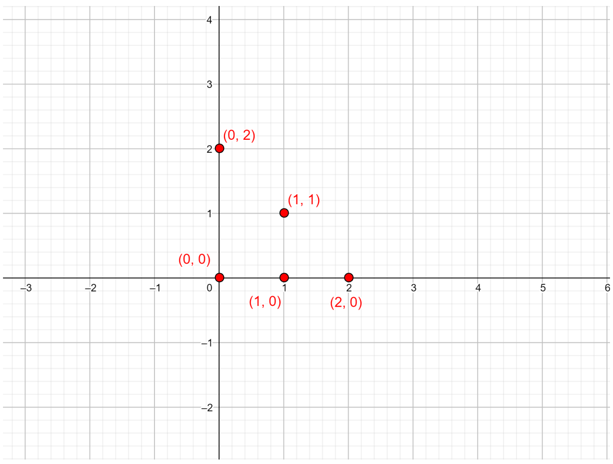
Exemplo 3.1.6. Para o polinômio

$$p(x,y) = x^2 \oplus (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3$$

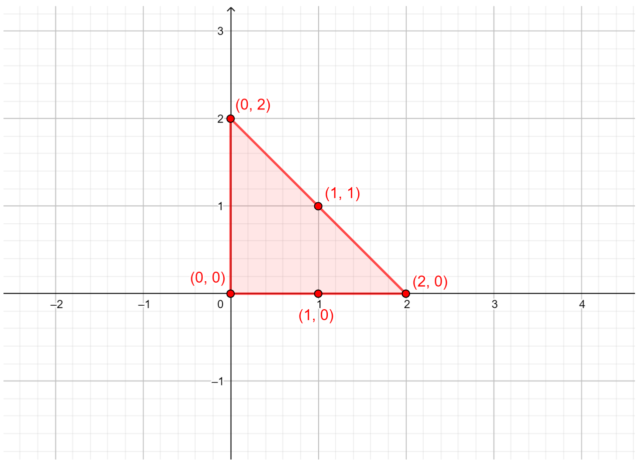
do Exemplo 3.1.2, temos

$$\Lambda_p = \{(0,0),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0)\},$$

como na Figura 26*a*. A envoltória convexa Δ_p desse conjunto é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ e $(2,0)$, que pode ser visto na Figura 26*b*.



(a) Pontos do conjunto Λ_p



(b) Envoltória convexa Δ_p

Figura 26: Conjunto Λ_p e sua envoltória convexa

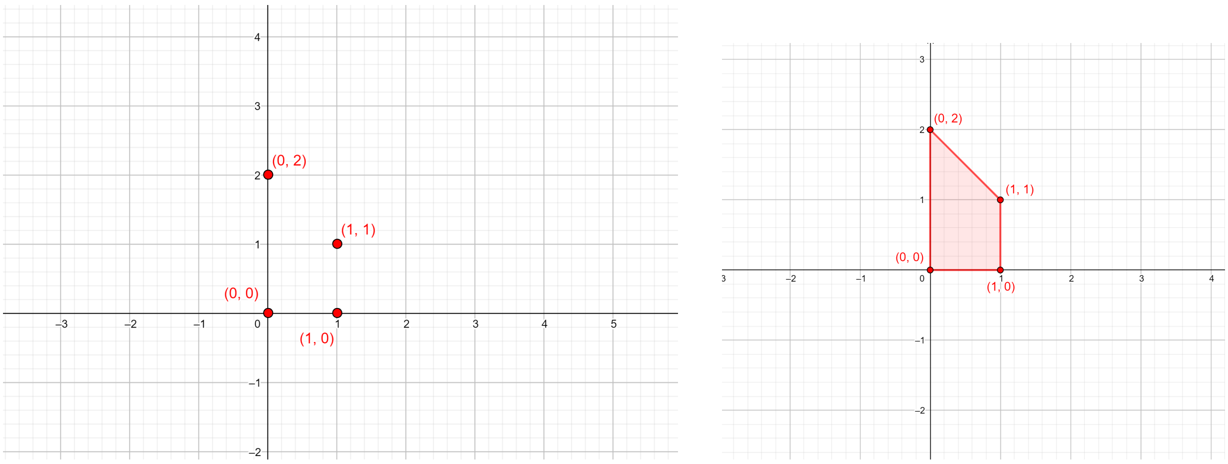
Exemplo 3.1.7. Agora, considere o polinômio

$$r(x,y) = (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3.$$

Neste caso, temos

$$\Lambda_r = \{(0,0),(1,0),(0,2),(1,1)\},$$

como na Figura 27*a*. A envoltória convexa Δ_r desse conjunto é o polígono da Figura 27*b*.



(a) Pontos do conjunto Λ_r (b) Envoltória convexa Δ_r

Figura 27: Conjunto Λ_r e sua envoltória convexa

Observação 3.1.2. Se tivermos $p(x,y)$ um polinômio tropical de grau d onde $a_{0,0} \neq \infty$, $a_{0,d} \neq \infty$ e $a_{d,0} \neq \infty$, então a envoltória convexa Δ_p de Λ_p em $\mathbb{R}^2$ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,d)$ e $(d,0)$. Note que no polinômio

$$r(x,y) = (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3$$

temos $a_{2,0} = \infty$. Assim, mesmo r tendo grau 2, a envoltória convexa Δ_r não é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ e $(2,0)$, como vimos no Exemplo 3.1.7.

A partir de agora, para simplificar, todos os polinômios de grau d considerados neste texto vão satisfazer $a_{0,0} \neq \infty$, $a_{0,d} \neq \infty$ e $a_{d,0} \neq \infty$.

Definição 3.1.12. Seja $p(x,y) = \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p}(a_{i,j} \odot x^i \odot y^j)$ um polinômio tropical. Considere o conjunto:

$$V_p = \{(i,j,a_{i,j});\ (i,j) \in \Lambda_p\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Como V_p é constituído por uma quantidade finita de pontos no $\mathbb{R}^3$, a envoltória convexa $conv(V_p)$ é um polígono, ou um poliedro, em $\mathbb{R}^3$. Quando olhamos $conv(V_p)$ de baixo, vemos as faces que são chamadas de *faces inferiores*. A projeção das faces inferiores de $conv(V_p)$ em $\mathbb{R}^2$ está contida em Δ_p e fornece uma subdivisão de Δ_p, que chamamos de subdivisão dual Φ_p. Ver (6), *Tropical Geometry*.

Exemplo 3.1.8. Considere o polinômio tropical $s(x,y) = (3 \odot x) \oplus (2 \odot y) \oplus 5$. Neste caso, temos $V_s = \{(1,0,3),(0,1,2),(0,0,5)\}$ (Figura 28).

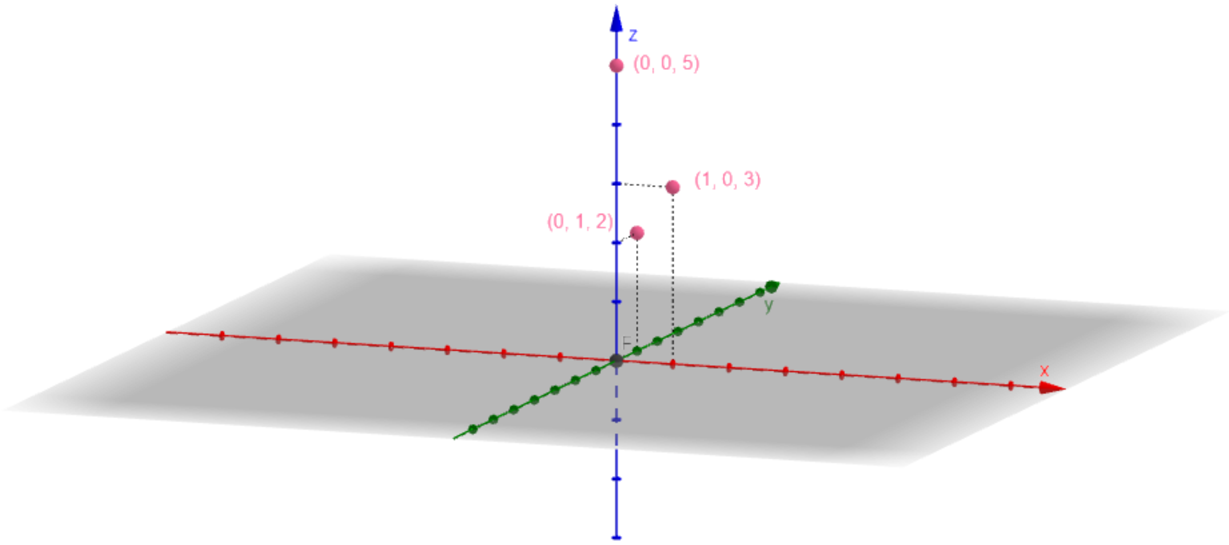


Figura 28: Conjunto V_s do polinômio $s(x,y) = (3 \odot x) \oplus (2 \odot y) \oplus 5$

Assim, $conv(V_s)$ é o triângulo de vértices $(1,0,3), (0,1,2), (0,0,5)$ em $\mathbb{R}^3$, como podemos ver na Figura 29.

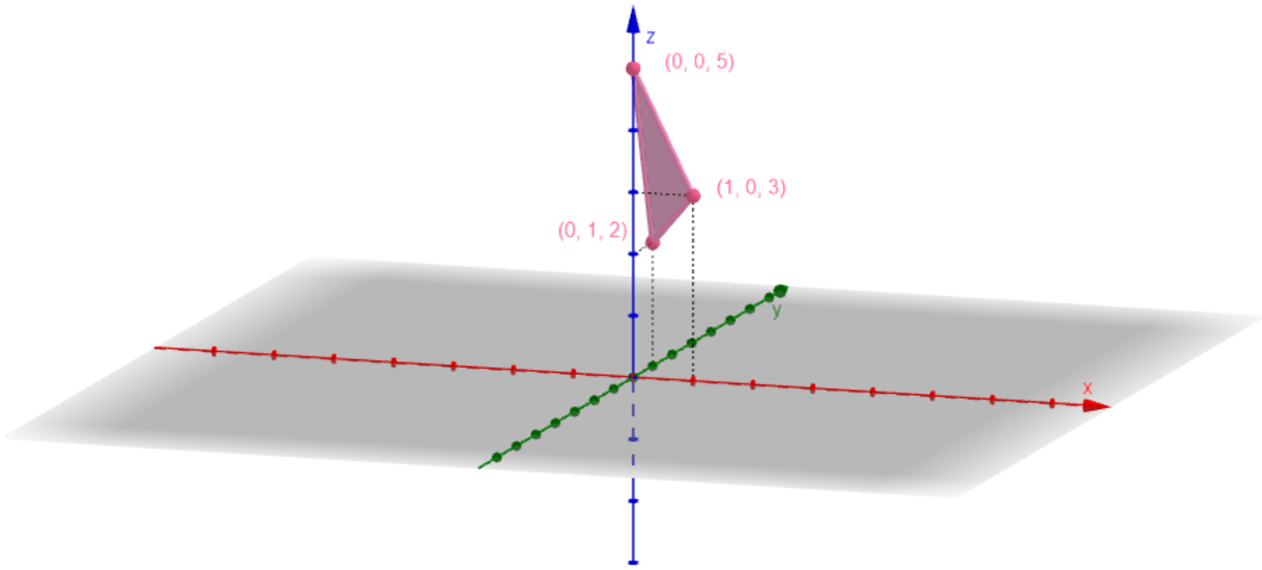


Figura 29: Envoltória convexa do polinômio $s(x,y) = (3 \odot x) \oplus (2 \odot y) \oplus 5$

Vemos que $conv(V_s)$ possui apenas uma face. Assim, a subdivisão Φ_s de Δ_s é igual ao próprio triângulo Δ_s. observe a Figura 30.

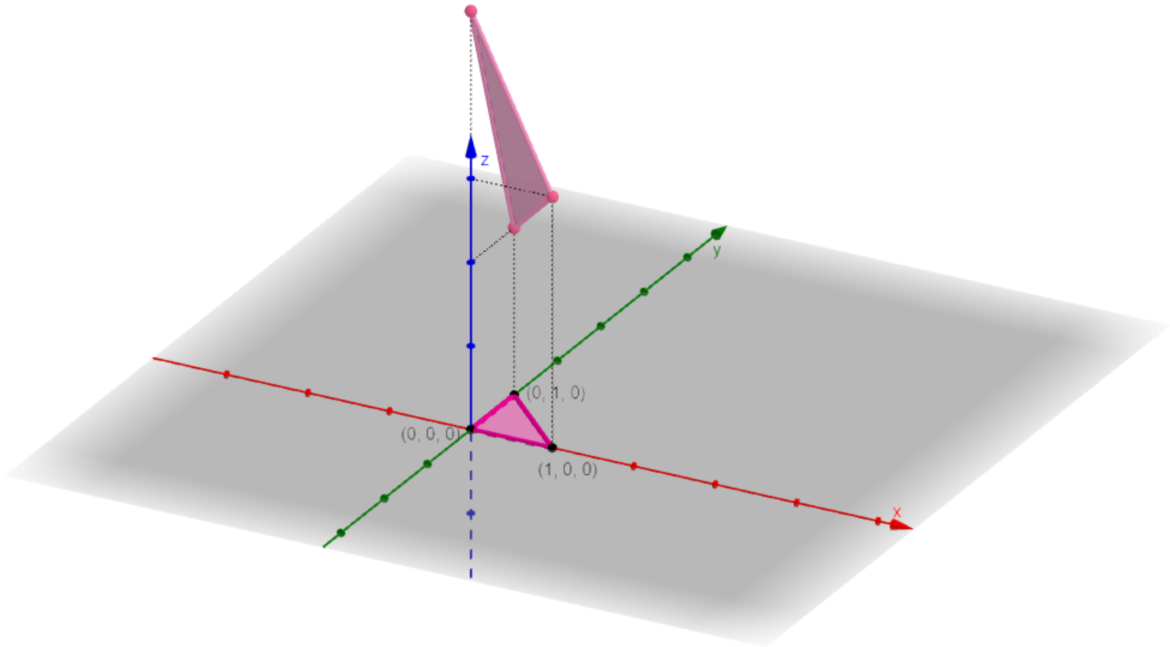


Figura 30: Projeção de $conv(V_s)$ no plano $\mathbb{R}^2$ obtendo a subdivisão Φ_s

Representamos na Figura 31 a curva tropical $s(x, y) = (3 \odot x) \oplus (2 \odot y) \oplus 5$ e sua subdivisão dual.

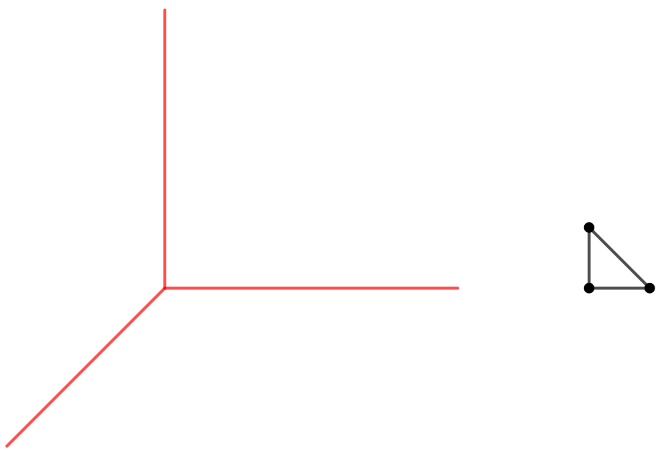


Figura 31: Curva tropical T_s e sua subdivisão dual

Exemplo 3.1.9. Considere o polinômio $p(x,y) = x^2 \oplus (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3$ do Exemplo 3.1.2. Neste caso, temos $V_p = \{(2,0,0),(1,1,0),(0,2,2),(1,0,1),(0,0,3)\}$. Observe a Figura 32.

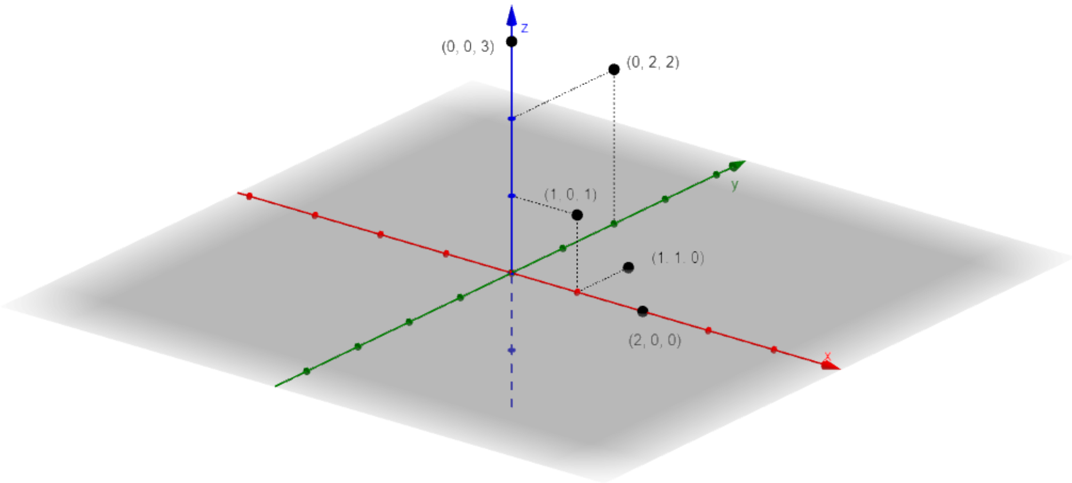


Figura 32: Conjunto V_p do polinômio $p(x,y)$

A envoltória convexa $conv(V_p)$ desses pontos é o poliedro das Figuras 33 e 34, que está representado sob ângulos diferentes em cada uma das imagens.

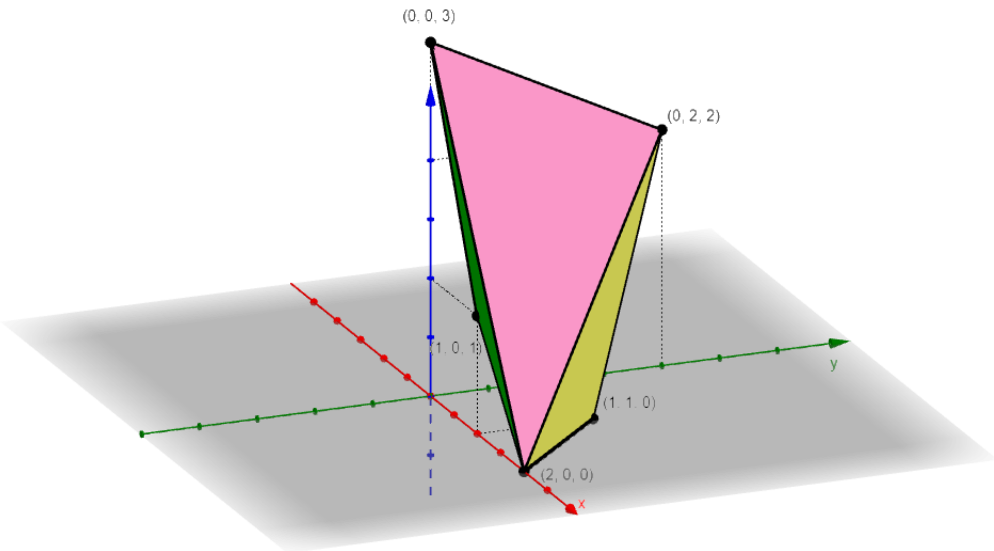


Figura 33: Envoltória convexa $conv(V_p)$

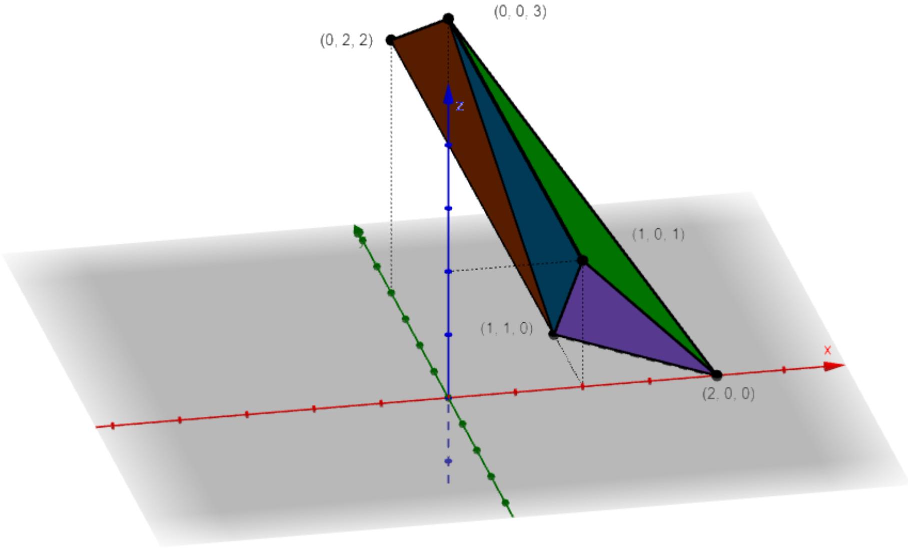


Figura 34: Envoltória convexa $conv(V_p)$

Quando olhamos $conv(V_p)$ de baixo, vemos apenas as faces roxa, azul e marrom, que são as faces inferiores. Veja na Figura 35 o poliedro visto de baixo.

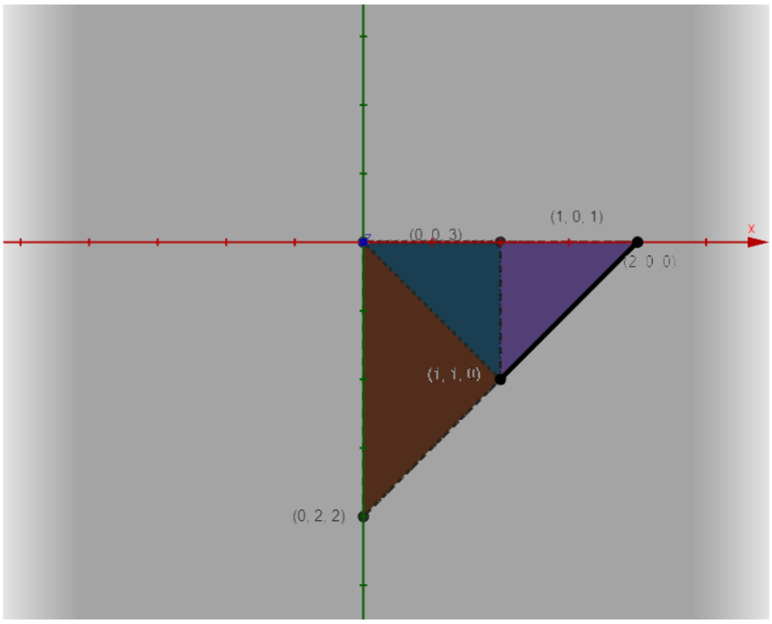


Figura 35: $conv(V_p)$ visto de baixo

Assim, a subdivisão Φ_p de Δ_p é a projeção das faces inferiores de $conv(V_p)$ em $\mathbb{R}^2$, representada na Figura 36.

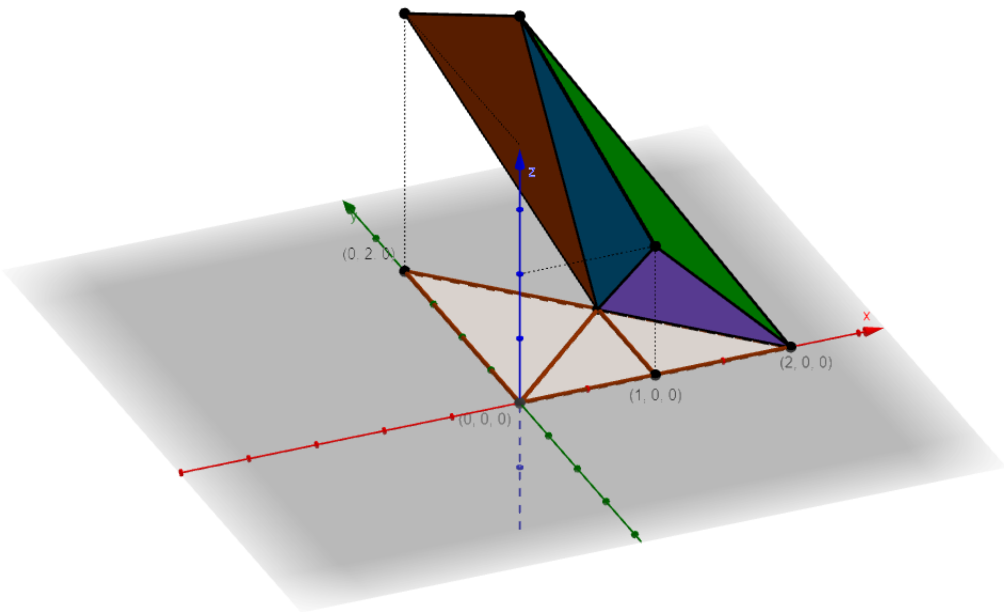


Figura 36: Subdivisão Φ_p de Δ_p

Representamos na Figura 37 a curva tropical $p(x, y) = x^2 \oplus (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3$ e sua subdivisão dual.

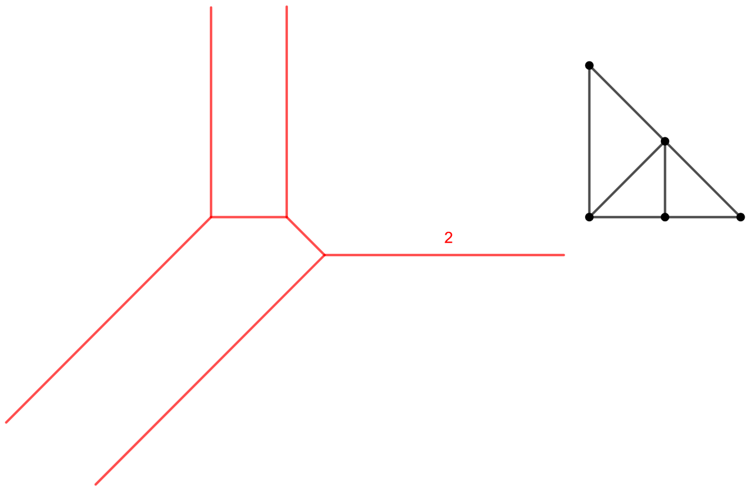


Figura 37: Curva tropical T_p e sua subdivisão dual

Exemplo 3.1.10. As figuras 38 e 39 são mais exemplos de curvas tropicais e suas subdivisões duais. O polinômio tropical que define cada curva está dado na legenda de cada imagem.

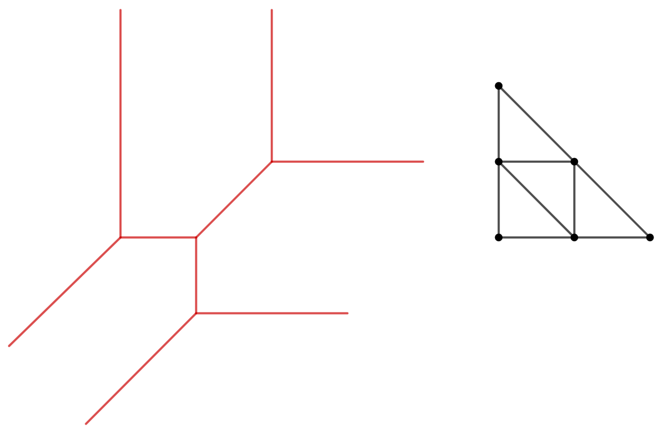


Figura 38: $(1 \odot y^2) \oplus (1 \odot x^2) \oplus (x \odot y) \oplus y \oplus x \oplus 1$

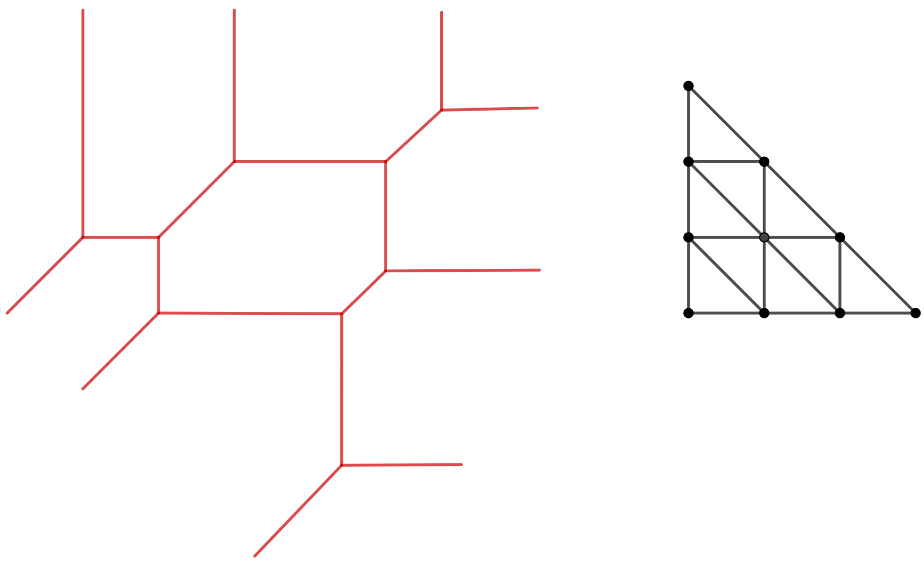


Figura 39: $y^2 \oplus (-1 \odot x^3) \oplus (3 \odot x^2) \oplus (-2 \odot x)$

Definição 3.1.13. A projeção de cada uma das faces inferiores de $conv(V_p)$ define um polígono Π na subdivisão dual Φ_p. Chamamos de *vértices* e *arestas* da subdivisão dual, respectivamente, os vértices e arestas dos polígonos $\Pi \subset \Phi_p$.

A subdivisão Θ_p do $\mathbb{R}^2$, definda pela curva tropical T_p, é constituída por três elementos: as arestas, os vértices e as regiões. Chamamos esses elementos de ***células de*** Θ_p. Do mesmo modo, a subdivisão Φ_p de Δ_p também é constituída por três elementos: as arestas, os vértices e os polígonos $\Pi \subset \Phi_p$, que são chamados de ***células de*** Φ_p.

Definição 3.1.14. Seja σ uma célula de Θ_p. Definimos o conjunto $\Lambda_\sigma \subset \Lambda_p$ como:

$$\Lambda_\sigma = \{(i,j) \in \Lambda_p : \sigma \subseteq \sigma_{(i,j)}\}.$$

Seja E uma aresta da curva tropical T_p. Então E é a projeção de uma aresta $\hat{E}$ em Γ_p que está contida na interseção entre dois planos, $a_{i,j} + ix + jy$ e $a_{k,l} + kx + ly$. Assim, temos que E está contida nas regiões $\sigma_{(i,j)}$ e $\sigma_{(k,l)}$, e portanto $\Lambda_E = \{(i,j),(k,l)\}$, ou seja, possui apenas dois elementos. É claro que para cada região $\sigma_{(i,j)}$ de Θ_p, o conjunto $\Lambda_{\sigma_{(i,j)}} = \{(i,j)\}$, ou seja, possui apenas um elemento. Agora, se V é um vértice de T_p, o conjunto Λ_V possui um número n de elementos, que depende da quantidade de arestas que saem de V.

Teorema 3.1.5 (***Teorema da dualidade***). *Para qualquer polinômio tropical*

$$p(x,y) = \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p} (a_{i,j} \odot x^i \odot y^j)$$

tal que Δ_p é não degenerado (isto é, não está contido em uma linha reta), existe uma dualidade entre Θ_p e Φ_p no seguinte sentido. Existe uma bijeção, invertendo inclusão, B entre os elementos de Φ_p e os elementos de Θ_p, tal que:

(a) Para cada aresta E de Θ_p, o elemento $B(E)$ é uma aresta de Φ_p, e as arestas E e $B(E)$ são perpendiculares;

(b) Para cada região $\sigma_{(i,j)}$ de Θ_p, o elemento $B(\sigma_{(i,j)})$ é um vértice de Φ_p;

(c) Para cada vértice V de Θ_p, o elemento $B(V)$ é um polígono Π de Φ_p.

Demonstração: A função B é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} B : \Theta_p &\to \Phi_p \\ \sigma &\mapsto B(\sigma) = conv(\Lambda_\sigma), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde σ é uma célula de Θ_p.

As demonstrações de que $B(\sigma)$ é uma célula de Φ_p, isto é, que B está bem definida, e que B é uma bijeção, podem ser encontradas em (6). A afirmação de que E e $B(E)$ são perpendiculares mostraremos a seguir.

(a) Segue da definição, que uma aresta E de Θ_p é dada por $E = \sigma_{(i,j)} \cap \sigma_{(k,l)}$, ou seja, Λ_E possui apenas dois elementos, (i,j) e (k,l). Dessa forma, $B(E) = conv(\Lambda_E)$ é um segmento de reta liga esses pontos. Por outro lado, E é a projeção da aresta $\hat{E}$ de Γ_p contida na interseção dos planos $z = a_{i,j} + ix + jy$ e $z = a_{k,l} + kx + ly$. Como

$(i,j) \neq (k,l)$, podemos supor sem perda de generalidade que $j - l \neq 0$ e que

$$\begin{aligned} a_{i,j} + ix + jy &= a_{k,l} + kx + ly \\ (j-l)y &= (a_{k,l} - a_{i,j}) + (k-i)x \\ y &= \frac{(a_{k,l} - a_{i,j})}{(j-l)} + \frac{(k-i)}{(j-l)}x. \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\hat{E} \subset r(x,y) := \left\{ \left(x, \frac{(a_{k,l} - a_{i,j})}{(j-l)} + \frac{(k-i)}{(j-l)}x, a_{i,j} + ix + jy \right) | x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Então, E está contida na projeção de $r(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$, que é a reta

$$r'(x) = \left(x, \frac{(a_{k,l} - a_{i,j})}{(j-l)} + \frac{(k-i)}{(j-l)}x \right).$$

O coeficiente angular de $r'(x)$ é $m_1 = (k-i)/(j-l)$. Como o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (i,j) e (k,l) é $m_2 = (j-l)/(i-k)$, temos:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{(k-i)}{(j-l)} \cdot \frac{(j-l)}{(i-k)} = -1,$$

ou seja, as retas que contém as arestas E de Θ_p e $B(E)$ de Φ_p, são perpendiculares, e portanto, as próprias arestas também são perpendiculares.

(b) Observamos que, como para toda região $\sigma_{(i,j)}$ de Θ_p o conjunto $\Lambda_{\sigma_{(i,j)}}$ possui apenas um elemento, o (i,j), temos que $B(\sigma_{(i,j)}) = conv(\Lambda_{\sigma_{(i,j)}}) = (i,j)$, ou seja, um ponto. Como $B(\sigma_{(i,j)})$ é uma célula de Φ_p, $B(\sigma_{(i,j)})$ só pode ser um vértice de Φ_p.

(c) Por fim, como B é bijeção, temos que se V é um vértice de Θ_p, $B(V)$ só pode ser um polígono Π de Φ_p.

■

Exemplo 3.1.11. A Figura 40 representa a dualidade entre Θ_p e Φ_p do polinômio do Exemplo 3.1.2. Note que, cada vértice de T_p está associado à um triângulo de Φ_p (vértices e triângulos de mesma cor são correspondentes), cada aresta de T_p está associada à uma aresta de Φ_p e este par é perpendicular (arestas de mesma cor são correspondentes) e cada região definida por T_p está associada à um vértice de Φ_p (regiões em branco e vértices em preto).

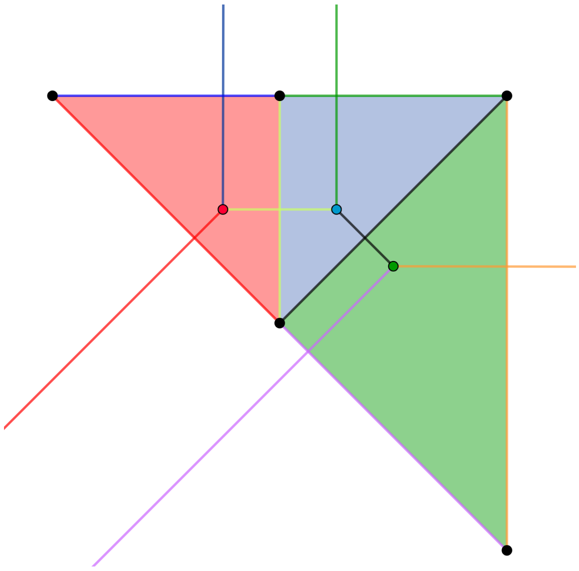


Figura 40: Representação da dualidade entre Θ_p e Φ_p

4 INTERSEÇÃO TROPICAL

A geometria tropical se interessa, principalmente, em fornecer um modelo simples da geometria algébrica. Por exemplo, teoremas básicos sobre a interseção de curvas tropicais precisam de uma bagagem algébrica claramente mais simples que os seus homólogos clássicos. Neste capítulo, vamos ilustrar esse princípio com o ***Teorema de Bézout***.

Existem duas propriedades elementares das retas clássicas que queremos estudar na geometria tropical, a saber:

(1) Duas retas genéricas se cruzam em um único ponto;

(2) Por dois pontos diferentes no plano passa uma única reta.

Primeiro, vamos considerar a interseção de duas retas tropicais. Para a maioria dos pares de retas, obtemos exatamente um ponto de interseção, mas há duas exceções notáveis, conforme ilustrado na Figura 41.

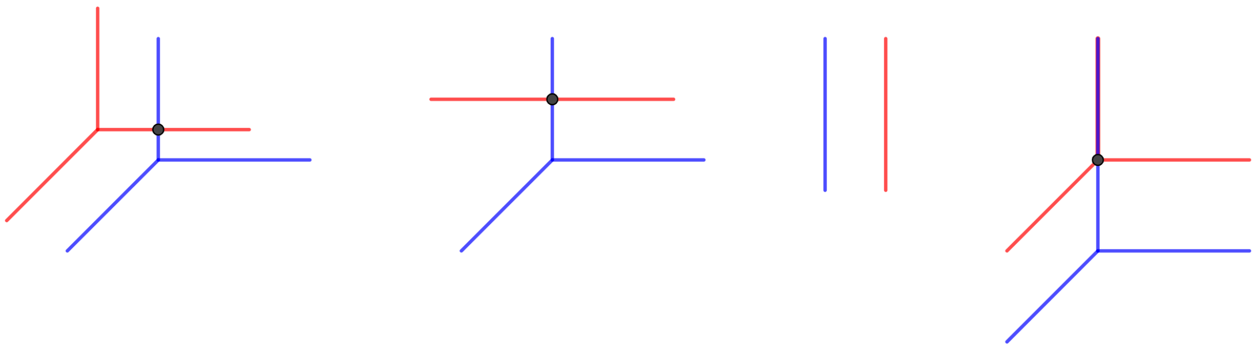


Figura 41: Interseções de retas tropicais

Nas duas primeiras imagens da Figura 41 obtemos um único ponto de interseção, a terceira mostra duas retas tropicais degeneradas paralelas que não possuem interseção, e a quarta mostra duas retas distintas tropicais que se interceptam em infinitos pontos.

Lema 4.0.1. *Sejam* $p(x,y) = \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p}(a_{i,j}\odot x^i \odot y^j)$ *um polinômio tropical e* $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função afim definida por*

$$(i,j) \mapsto \alpha i + \beta j + \gamma,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *são constantes. Então, a curva tropical definida por*

$$q(x,y) = \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p} ((a_{i,j} + L(i,j)) \odot x^i \odot y^j)$$

pode ser obtida a partir da curva tropical T_p *por translação pelo vetor* $(-\alpha, -\beta)$.

Demonstração: Pela forma que $q(x,y)$ foi definida, temos

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p} (a_{i,j} + \alpha i + \beta j + \gamma + ix + jy) = \min_{(i,j)\in\Lambda_p} \{a_{i,j} + \alpha i + \beta j + \gamma + ix + jy\} \\ &= \gamma + \min_{(i,j)\in\Lambda_p} \{a_{i,j} + (\alpha + x)i + (\beta + y)j\} = \gamma + \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p} (a_{i,j} + (\alpha + x)i + (\beta + y)j) \\ &= \gamma + \bigoplus_{(i,j)\in\Lambda_p} (a_{i,j} \odot (\alpha + x)^i \odot (\beta + y)^j) = \gamma + p(x + \alpha, y + \beta). \end{aligned}$$

Note que somar γ a polinômio tropical $p(x,y)$ é transladar verticalmente seu gráfico, Γ_p. Mas, translações verticais de Γ_p não alteram sua projeção no $\mathbb{R}^2$, ou seja, as curvas tropicais definidas por $p(x,y)$ e $p(x,y) + \delta$ são iguais. Finalmente, observamos que

$$(x_0, y_0) \in T_p = Proj_{\mathbb{R}^2}(\Gamma_p) \Leftrightarrow (x_0 - \alpha, y_0 - \beta) \in T_q = Proj_{\mathbb{R}^2}(\Gamma_q),$$

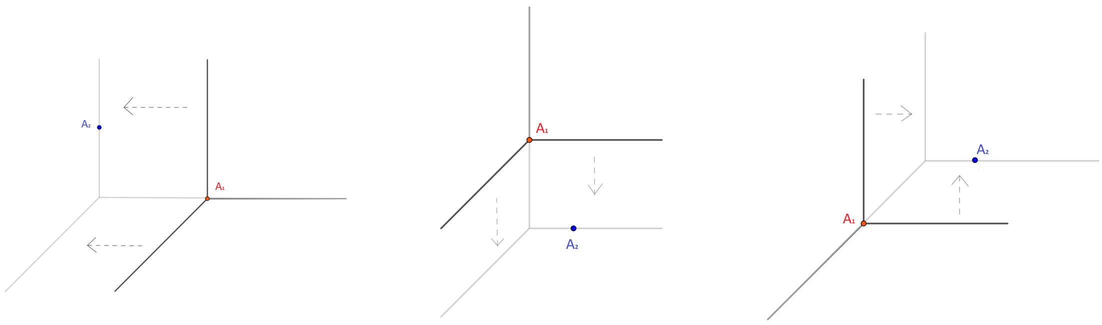
ou seja,

$$(x_0, y_0) \in T_p \Leftrightarrow (x_0, y_0) + (-\alpha, -\beta) \in T_q.$$

Portanto, a curva T_q pode ser obtida a partir da curva T_p por uma translação pelo vetor $(-\alpha, -\beta)$. ■

Proposição 4.0.2. Dado qualquer par de pontos distintos $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$, existe uma reta tropical que passa por A_1 e A_2. Além disso, essa reta é única se, e somente se, os pontos não estiverem em uma reta clássica comum com vetor diretor $(-1,-1)$, $(1,0)$ ou $(0,1)$.

Demonstração: Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$. Para todo $c \in \mathbb{T}$ o polinômio tropical $p(x,y) = (c - x_1) \odot x \oplus (c - y_1) \odot y \oplus c$ é uma reta tropical cujo vértice é A_1. Tomando $c = 0$ temos $p(x,y) = (-x_1 \odot x) \oplus (-y_1 \odot y) \oplus 0$. Se A_2 estiver em um dos raios de T_p, provamos a existência. Se não, A_2 está contido em uma das regiões de Θ_p. Se $A_2 \in \sigma_{(1,0)}$, ao transladar T_p ao longo da reta $y = y_1$ para a esquerda, mantemos A_1 como ponto de T_p e os raios $\{(x, x + y_1 - x_1) | x \leq x_1\}$ e $\{(x_1, y) | y \geq y_1\}$ varrem toda a região $\sigma_{(1,0)}$. Assim, em algum momento, um desses raios vai interceptar o ponto A_2 (Figura 42a), provando a existência de uma reta tropical que intercepta A_1 e A_2. Os casos para $A_2 \in \sigma_{(0,1)}$ e $A_2 \in \sigma_{(0,0)}$ são análogos, onde no primeiro transladamos T_p ao longo da reta $x = x_1$ para baixo (Figura 42b) e no segundo transladamos T_p ao longo da reta $y = x + y_1 - x_1$ na direção nordeste (Figura 42c). Se pudermos encontrar duas retas tropicais diferentes contendo A_1 e A_2, então as duas retas têm um raio em comum, e a unicidade segue.



(a) (b) (c)

Figura 42: Translações da reta tropical sobre cada um de seus raios

■

Lema 4.0.3. *Sejam T_p e T_q as curvas tropicais definidas pelos polinômios $p(x,y)$ e $q(x,y)$, respectivamente. Então:*

$$T_p \cup T_q = T_r,$$

onde T_r é a curva tropical definida pelo polinômio tropical $r(x,y) = p(x,y) \odot q(x,y)$.

Demonstração: Primeiro, vamos mostrar que $T_r \subset T_p \cup T_q$.

Sejam $p(x,y) = \min\limits_{(i,j)\in\Lambda_p}\{a_{i,j} + ix + jy\}$ e $q(x,y) = \min\limits_{(k,l)\in\Lambda_q}\{b_{k,l} + kx + ly\}$, então $r(x,y)$ é dado por:

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \min_{(i,j)\in\Lambda_p}\{a_{i,j} + ix + jy\} \odot \min_{(k,l)\in\Lambda_q}\{b_{k,l} + kx + ly\} \\ &= \min_{(i,j)\in\Lambda_p}\{a_{i,j} + ix + jy\} + \min_{(k,l)\in\Lambda_q}\{b_{k,l} + kx + ly\} \\ &= \min_{\substack{(i,j)\in\Lambda_p \\ (k,l)\in\Lambda_q}}\{a_{i,j} + ix + jy + b_{k,l} + kx + ly\}. \end{aligned}$$

Seja $(x_0, y_0) \in T_r$. Então, existem $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \Lambda_p$ e $(k_1, l_1), (k_2, l_2) \in \Lambda_q$ tais que:

$$\begin{aligned} a_{i_1,j_1} + i_1x_0 + j_1y_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 &= a_{i_2,j_2} + i_2x_0 + j_2y_0 + b_{k_2,l_2} + k_2x_0 + l_2y_0 \\ &\leq a_{i,j} + ix_0 + jy_0 + b_{k,l} + kx_0 + ly_0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

para todo $(i,j) \in \Lambda_p$ e $(k,l) \in \Lambda_q$. Suponhamos que $(x_0, y_0) \notin T_p$. Então, existe $(i_3, j_3) \in \Lambda_p$ tal que:

$$a_{i_3,j_3} + i_3x_0 + j_3y_0 < a_{i,j} + ix_0 + jy_0,$$

para todo $(i,j) \in \Lambda_p$ tal que $(i,j) \neq (i_3, j_3)$. Em particular, se $(i_3, j_3) \neq (i_1, j_1)$, temos:

$$a_{i_3,j_3} + i_3x_0 + j_3y_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 < a_{i_1,j_1} + i_1x_0 + j_1y_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0,$$

o que contradiz a equação 4.1. Analogamente, se $(i_3, j_3) \neq (i_2, j_2)$, contradizemos a equação 4.1. Portanto, $(i_1, j_1) = (i_2, j_2) = (i_3, j_3)$. De posse deste fato, podemos reescrever a equação 4.1 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_{i_3,j_3} + i_3x_0 + j_3y_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 &= a_{i_3,j_3} + i_3x_0 + j_3y_0 + b_{k_2,l_2} + k_2x_0 + l_2y_0 \\ &\leq a_{i,j} + ix_0 + jy_0 + b_{k,l} + kx_0 + ly_0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $(i,j) \in \Lambda_p$ e $(k,l) \in \Lambda_q$. Daí, concluímos que

$$b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 = b_{k_2,l_2} + k_2x_0 + l_2y_0.$$

Suponhamos que $q(x_0, y_0)$ não atinja o mínimo em $b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0$. Então, existe $(k_3, l_3) \in \Lambda_q$ tal que:

$$b_{k_3,l_3} + k_3x_0 + l_3y_0 < b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0.$$

Porém, se isso acontece, temos:

$$a_{i_3,j_3} + i_3x_0 + j_3y_0 + b_{k_3,l_3} + k_3x_0 + l_3y_0 < a_{i_3,j_3} + i_3x_0 + j_3y_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0,$$

o que contradiz a equação 4.2. Portanto,

$$\begin{aligned} b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 &= b_{k_2,l_2} + k_2x_0 + l_2y_0 \\ &\leq b_{k,l} + kx_0 + ly_0, \end{aligned}$$

para todo $(k,l) \in \Lambda_q$, ou seja, $(x_0, y_0) \in T_q$. Assim, $T_r \subset T_p \cup T_q$.

Agora vamos mostrar que $T_p \cup T_q \subset T_r$. Seja $(x_0, y_0) \in T_p \cup T_q$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $(x_0, y_0) \in T_p$. Então, existem $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \Lambda_p$ tais que $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ e:

$$\begin{aligned} a_{i_1,j_1} + i_1x_0 + j_1y_0 &= a_{i_2,j_2} + i_2x_0 + j_2y_0 \\ &\leq a_{i,j} + ix_0 + jy_0, \end{aligned}$$

para todo $(i,j) \in \Lambda_p$. Tomemos $b_{k_1,l_1}+k_1x_0+l_1y_0$ tal que $b_{k_1,l_1}+k_1x_0+l_1y_0 \leq b_{k,l}, +kx_0+ly_0$ para todo $(k,l) \in \Lambda_q$. Então:

$$\begin{aligned} a_{i_1,j_1} + i_1x_0 + j_1y_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 &= a_{i_2,j_2} + i_2x_0 + j_2y_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 \\ &\leq a_{i,j} + ix_0 + jy_0 + b_{k_1,l_1} + k_1x_0 + l_1y_0 \\ &\leq a_{i,j} + ix_0 + jy_0 + b_{k,l} + kx_0 + ly_0, \end{aligned}$$

para todo $(i,j) \in \Lambda_p$ e $(k,l) \in \Lambda_q$. Portanto, $(x_0, y_0) \in T_r$, e $T_p \cup T_q \subset T_r$.

Assim, temos que $T_p \cup T_q = T_r$. ■

Definição 4.0.1. Sejam T_1 e T_2 duas curvas tropicais em posição geral, isto é, T_1 e T_2 se interceptam apenas em pontos internos das arestas. Seja A um ponto de interseção de T_1 com T_2. A multiplicidade tropical de A como ponto de intersecção de T_1 com T_2 é a área do paralelogramo dual a A na subdivisão dual a $T_1 \cup T_2$.

Teorema 4.0.4 (***Versão tropical do Teorema de Bézout***). *Sejam T_1 e T_2 duas curvas tropicais de grau d_1 e d_2 em posição geral. Então, a soma das multiplicidades tropicais dos pontos de intersecção de T_1 e de T_2 é igual a d_1d_2.*

Demonstração: Seja $T_3 = T_1 \cup T_2$. Como T_1 e T_2 estão em posição geral, cada ponto $A \in T_1 \cap T_2 = T_3$ é um vértice de T_3 e, portanto, tem um polígono dual correspondente em Φ_{T_3}. Este polígono dual deve ser um paralelogramo cujos pares de arestas paralelas correspondem às arestas de T_1 e T_2 que se interceptam em A. Se $p_1(x, y)$ e $p_2(x, y)$ são, respectivamente, os polinômios que definem as curvas T_1 e T_2, pelo Lema 4.0.3, temos que o polinômio $p_3(x, y)$ que define a curva T_3 é dado por $p_3(x, y) = p_1(x, y) \odot p_2(x, y)$. Dessa forma, o grau da curva T_3 é a soma dos graus de T_1 e T_2, ou seja, $d_1 + d_2$. Assim, Δ_{T_3} é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(d_1 + d_2, 0)$ e $(0, d_1 + d_2)$, cuja área é dada por:

$$\text{Área de } \Delta_{T_3} = \frac{(d_1 + d_2)^2}{2}.$$

Na subdivisão dual Φ_{T_3} de Δ_{T_3} existem três tipos de polígonos:

- Os correspondentes aos vértices de T_1;
- Os correspondentes aos vértices de T_2;
- Os correspondentes aos pontos de interseção entre T_1 e T_2.

As somas das áreas dos polígonos que correspondem aos vértices de T_1 é a área de Δ_{T_1}, que é $d_1^2/2$. Analogamente, as somas das áreas dos polígonos que correspondem aos vértices de T_2 é a área de Δ_{T_2}, que é $d_2^2/2$. Então, a soma das áreas dos polígonos correspondentes aos pontos de interseção de T_1 e T_2, ou equivalentemente, a soma das multiplicidades tropicais dos pontos de de interseção de T_1 e T_2, é dada por:

$$\text{Área de } \Delta_{T_3} - \text{Área de } \Delta_{T_1} - \text{Área de } \Delta_{T_2} = \frac{d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2}{2} - \frac{d_1^2}{2} - \frac{d_2^2}{2} = d_1d_2.$$

∎

Exemplo 4.0.1. Vamos analisar a interseção entre as curvas tropicais T_p e T_q definidas, respectivamente, pelos polinômios $p(x, y) = x^2 \oplus (x \odot y) \oplus (2 \odot y^2) \oplus (1 \odot x) \oplus 3$ e $q(x, y) = (1 \odot x) \oplus (7/2 \odot y) \oplus 4$. Na Figura 43, podemos ver a curva tropical T_p (em vermelho), a curva tropical T_q (em azul) e A, o único ponto de interseção entre elas. Sabemos que $T_p \cup T_q$ é uma curva tropical definida pelo polinômio tropical $s(x, y) = p(x, y) \odot q(x, y)$, cuja subdivisão dual também está representada na Figura 43.

O polígono da subdivisão dual corresponte ao vértice A da curva T_s é o quadrado cinza, cuja área é 2. Portanto, a multiplicidade de A é dois. Assim, a soma das multiplicidades tropicais dos pontos de interseção de T_p e de T_q é igual a 2, o que já era esperado pelo Teorema de Bézout, pois $p(x, y)$ e $q(x, y)$ tem graus 2 e 1, respectivamente.

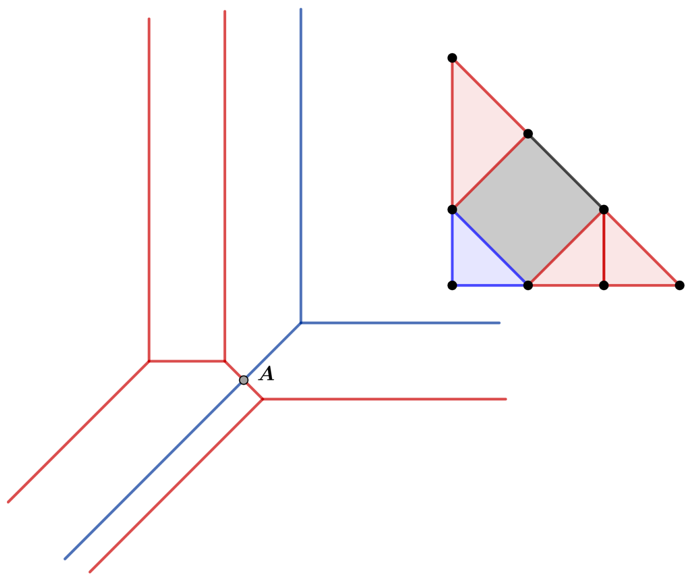


Figura 43: Curva tropical $T_s = T_p \cup T_q$ e sua subdivisão dual

Abaixo apresentamos mais um exemplo de interseção de curvas tropicais em posição geral.

Exemplo 4.0.2. A Figura 44 representa uma curva tropical formada pela união de uma curva de grau 2 (em vermelho) e de uma reta tropical (em azul) e sua subdivisão dual.

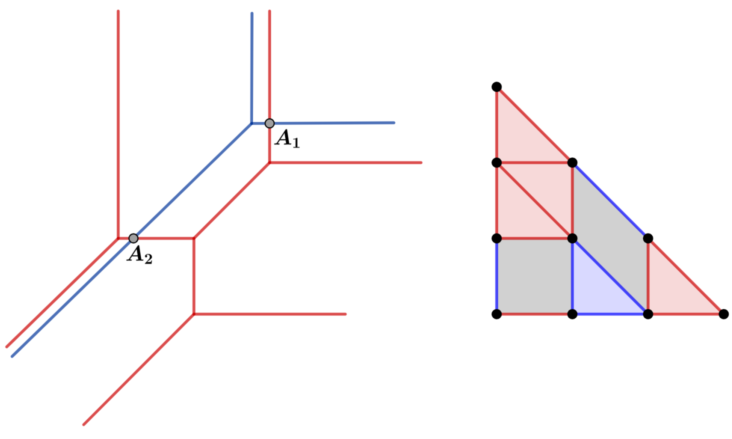


Figura 44: Interseção de uma curva tropical de grau 2 e uma reta tropical

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma introdução à Geometria Tropical, fazendo um paralelo com alguns resultados da geometria euclidiana e também da geometria projetiva. Dentre outros resultados, apresentamos dois teoremas clássicos dessas geometrias que continuam válidos na Geometria Tropical, a saber, o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema de Bézout.

REFERÊNCIAS

1 AMORIM, Renan Gomes de. **Introdução à Análise Convexa : Conjuntos e Funções Convexas**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013.

2 BRUGALLÉ, Erwan. **Um pouco de Geometria Tropical**. Tradução por: Edem Amorin e Nicolas Puignau. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, n. 46, p. 27-40, junho de 2009. Disponivél em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n46_Artigo04.pdf. Acesso em: 6 ago. 2022.

3 GRIGG, Nathan B. **Factorization of tropical polynomials in one and several variables**. 2007. Department of Mathematics - Brigham Young University. Disponível em: https://silo.tips/download/factorization-of-tropical-polynomials-in-one-and-several-variables-nathan-b-grig. Acesso em 6 ago. 2022.

4 ITENBERG, Ilia. **Introduction à la géométrie tropicale**. Disponível em: http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08-01.pdf. Acesso em 6 ago. 2022.

5 MACLAGAN, Diane; STURMFELS, Bernd. **Introduction to Tropical Geometry**. American Mathematical Society, 2015.

6 MIKHALKIN, Grigory; RAU, Johannes. **Tropical Geometry**. 2018. Disponível em: https://www.math.uni-tuebingen.de/user/jora/downloads/main.pdf. Acesso em: 4 ago. 2022.