Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Patrick Lucas Zagnoli de Assis

Teorema de Hahn-Banach e algumas aplicações

Juiz de Fora

2018

Patrick Lucas Zagnoli de Assis

Teorema de Hahn-Banach e algumas aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientadora: Cristiane de Andrade Mendes

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Zagnoli, Patrick Lucas de Assis.
Teorema de Hahn-Banach e algumas aplicações / Patrick Lucas Zagnoli de Assis. – 2018.
?? f.

Orientadora: Cristiane de Andrade Mendes
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2018.

1. Análise Funcional. 2. Teorema de Hanh-Banach I. Mendes, Cristiane de Andrade, orientadora. II. Teorema de Hahn-Banach e algumas aplicações.

Patrick Lucas Zagnoli de Assis

Teorema de Hahn-Banach e algumas aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Professor Dra. Cristiane de Andrade Mendes -
Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. André Arbex Hallack
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Willian Versolati Franca
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por me dar forças para poder progredir e conseguir obter mais um êxito em minha caminhada.

Agradeço o grande carinho dos meus familiares que estiveram ao meu lado nesses momentos como minha querida avó, que contribuiu substancialmente em minhas conquistas, as quais sem seu apoio talvez não conseguiria obter. À meu pai e a Mirelly minha imensa gratidão por todo apoio recebido.

Agradeço a minha orientadora Cristiane pela paciência e confiança, a qual contribuiu de maneira imensurável em meu processo de aprendizagem.

Agradeço aos meus amigos e colegas, especialmente à Alessandra, Ecila e Sérgio que estiveram ao meu lado me dando suporte durante minha vida acadêmica e contribuindo com o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora pelas diversas oportunidades ofertadas.

Agradeço aos professores do departamento de matemática que me deram suporte em todas as fases da graduação.

RESUMO

O teorema de Hahn-Banach é um fundamental teorema da análise funcional que permite, dentre certas condições, estender linearmente um funcional linear definido em um subespaço de um certo espaço vetorial para o espaço todo. Outras versões para espaços vetoriais normados, garantem extensões lineares e contínuas. Suas várias versões desenvolvidas contribuem no estudo de espaços vetoriais ordenados, operadores auto-adjuntos, espaços separáveis, operadores somáveis, dentre outros inúmeros resultados.

Palavras-chave: Análise Funcional . Funcionais lineares . Teorema de Hahn-Banach.

ABSTRACT

Hahn-Banach's theorem is a fundamental functional analysis theorem that allows, among certain conditions, to extend linearly a linear functional defined in a subspace of a certain vector space to the whole space. Other versions for normed vector spaces, guarantee linear and continuous stretches. Its various developed versions contribute to the study of ordered vector spaces, self-adjunct operators, separable spaces, summable operators, among many other results.

Key-words: Functional Analysys. Hahn-Banach Theorem.

SUMÁRIO

1) Introdução

A Análise Funcional é um ramo da matemática abstrata que teve seu desenvolvimento durante o século XX, a partir de problemas de equações diferenciais ordinárias e parciais. Esta área cumpre um importante papel de generalizar, dentre certas condições, definições e resultados estudados no ramo da Álgebra Linear. Os objetos de estudo da álgebra linear são os espaços vetoriais de dimensão finita estabelecidos sobre algum corpo de escalares, sendo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ os corpos mais utilizados. Estuda-se operadores lineares que possuem representações matriciais, onde cada entrada da matriz é um escalar do corpo sobre o qual o espaço vetorial se encontra. Em análise funcional estuda-se espaços de dimensão infinita, onde seus operadores lineares não necessariamente podem ser representados através de matrizes.

Um dos resultados mais fundamentais e que pode ser considerado um dos precursores da análise funcional é o denominado teorema de Hahn-Banach, cuja descrição e consequências são os objetos de estudo deste trabalho. Outros resultados centrais desta área da matemática são os famosos teorema de Banach-Steinhaus, teorema da aplicação aberta e teorema do gráfico fechado.

A análise funcional ao mesmo tempo que é tão abstrata, pode cumprir um papel mais concreto ao contribuir em diversos problemas da física. Algum de seus resultados que têm uma gama de aplicações possuem demonstrações significantemente simplificadas utilizando-se o axioma da escolha, o lema de Zorn, o teorema da Categoria de Baire, que são alguns resultados importantes na teoria de conjuntos.

2 Preliminares

Neste capítulo iremos apresentar definições e resultados importantes da teoria de Análise funcional. Abordaremos a definição de espaços de Banach, assim como alguns exemplos. Além disso, vamos apresentar aspectos dos chamados operadores limitados e verificaremos que essa definição coincide com a definição de um operador contínuo sobre um espaço normado. Nesta mesma seção, veremos em que condições o espaço dos operadores lineares de um espaço normado X sobre um espaço normado Y será Banach. Na última seção deste capítulo veremos uma abordagem dos chamados espaços de Hibert, que de certa forma, generalizam os espaços euclideanos, estudados no campo da álgebra linear. Ao trabalharmos com espaços normados X, consideraremos que X é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

2.1 Espaços de Banach

Definição 2.1.1. *(**Espaço Métrico**) Seja X um conjunto não vazio. Uma métrica é uma aplicação $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $(x, y) \in X \times X$ um número real $d(x, y)$, que satisfaz as seguintes propriedades para $x, y, z \in X$:*

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

*O par (X, d) é denominado de **espaço métrico**.*

Definição 2.1.2. *(**Espaço Normado**) Seja X um espaço vetorial. Uma aplicação $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ é dita uma norma em X se para todo $x, y \in X$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $\|x\| \geq 0$;
2. *A relação* $\|x\| = 0$ *implica* $x = 0$;

3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

O par $(X, \|\ \ \|)$ *é denominado de* ***espaço normado***.

Exemplo 2.1.3. *Espaços normados são exemplos de espaços métricos. Considerando* $(X, \|\ \ \|)$ *um espaço normado, definimos a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

A aplicação d é uma métrica para o espaço X. Temos que (X,d) é um espaço métrico. Além disso, dizemos neste caso, que a métrica é proveniente da norma.

Exemplo 2.1.4. *Para cada inteiro positivo n, consideramos o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$. Para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ponhamos:*

1. $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

2. $\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;

3. $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Estes são exemplos clássicos de normas no espaço euclideano $\mathbb{K}^n$.

Exemplo 2.1.5. *Seja X um espaço normado. Vamos denotar por $B(X)$ o conjunto de todas as funções limitadas que vão de X em $\mathbb{K}$. Podemos munir este conjunto com duas operações fundamentais:*
$Se\ f, g \in B(X),\ definimos\ (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in X$
$Se\ f \in B(X), \lambda \in \mathbb{K},\ definimos\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \forall x \in X.$

O conjunto $B(X)$ munido com as operações anteriores torna-se um espaço vetorial. Além disso, para cada $f \in B(X)$ podemos definir $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Afirmamos que $\|\ \ \|$ é uma norma em $B(X)$. De fato:

Demonstração. 1. Para todo $x \in X$ temos que $|f(x)| \geq 0$. Assim:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \geq 0;$$

2. Assumindo que $\|f\| = 0$ temos que $\sup_{x \in X} |f(x)| = 0$. Para cada $x \in X$, note que:

$$0 \leq |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| = 0$$

Assim, para todo $x \in X$:

$$|f(x)| = 0 \Longrightarrow f(x) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$$

3. Sejam $f \in B(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Observe que:

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \sup_{x \in X} |(\lambda f)(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |\lambda||f(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| \\ &= |\lambda| \|f\| \end{aligned}$$

4. Sejam $f, g \in B(X)$. Usando desigualdade triangular, para cada $x \in X$, sabemos que:

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

Como f, g são limitadas, para cada $x \in X$, obtemos que:

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

Logo:

$$\sup_{x \in X} |(f+g)(x)| \leq \|f\| + \|g\| \Longrightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$\square$

Concluímos que $(B(X), \| \ \|)$ é um espaço normado.

Exemplo 2.1.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$. Vamos denotar por $C[a,b]$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{K}$. Temos que $C[a,b]$ é um subespaço vetorial de $B([a,b])$. Para cada $f \in C[a,b]$ considerando $\|f\|_M = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ temos que $(C[a,b], \| \ \|_M)$ é um espaço normado.*

Definição 2.1.7. ***(Sequência de Cauchy)*** *Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é dita* ***sequência de Cauchy*** *se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Proposição 2.1.8. *Seja (X, d) um espaço métrico. Toda sequência de Cauchy em X é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Por definição, dado $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_n, x_m) < 1, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Em particular temos:

$$d(x_n, x_{n_0}) < 1, \quad \forall n \geq n_0$$

Considerando $M = \max\{d(x_{n_0}, x_1), d(x_{n_0}, x_2), \ldots, d(x_{n_0}, x_{n_0-1}), 1\}$, teremos que:

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é limitada. □

Definição 2.1.9. *(**Espaço Completo**) Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é completo se toda sequência de Cauchy em X é convergente em X.*

Definição 2.1.10. *(**Espaço de Banach**) Um espaço normado X é dito de Banach se X é um espaço métrico completo com a métrica proveniente de sua norma.*

Exemplo 2.1.11. *O espaço euclideano $\mathbb{K}^n$ munido com qualquer uma das normas:*

1. $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$;
2. $\|x\|_1 = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|, \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$;
3. $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

   é um espaço de Banach.

Exemplo 2.1.12. *O espaço $(C[a, b], \| \ \|_M)$ é um espaço de Banach. De fato:*

Demonstração. Vamos mostrar que o espaço $(C[a, b], \| \ \|_M)$ é completo. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(C[a, b], \| \ \|_M)$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \forall n, m \geq n_0$$

Assim:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \forall n, m \geq n_0 \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \forall n, m \geq n_0, \forall x \in [a, b] \ (*)$$

Por $(*)$, fixado $x \in [a, b]$ temos que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é completo, existe $y = f(x) \in \mathbb{K}$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ quando $n \to \infty$.
Vamos definir a seguinte função:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Vamos mostrar primeiramente que $f \in (C[a,b], \|\quad\|_M)$.
Dado $\varepsilon > 0$, por $(*)$ temos que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n, m \geq n_0, \forall x \in [a,b]$$

Fixando $n \in \mathbb{N}$ e fazendo $m \to \infty$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \\
|f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \\
|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b] \qquad (1)
\end{aligned}$$

Fixemos $x_0 \in [a,b]$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que f_n é contínua em $[a,b]$. Em particular, temos que f_{n_0} é contínua em $x_0 \in [a,b]$. Assim existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Daí, se $|x - x_0| < \delta$ temos que:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \\
|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| &\leq \\
|f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| &< \\
\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em x_0.
Vamos mostrar agora que $f_n \overset{\|\ \|_M}{\longrightarrow} f$.
Por (1) temos que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b]$$

Logo:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f\|_M \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0$$

□

Os próximos resultados são fundamentais para a construção de um importante exemplo de Espaço de Banach:

Lema 2.1.13. *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall\ a, b \geq 0$$

Demonstração. 1. Se $ab = 0$ então o resultado é trivial;

2. Suponhamos que $ab > 0$ (com $a > 0$ e $b > 0$).

   Observemos que:

   $ab = (a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}} = \exp(\ln[(a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}}]) = \exp(\ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}}) = \exp(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q) \overset{*}{\leq} \frac{1}{p}\exp\ln a^p + \frac{1}{q}\exp\ln b^q = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

   A desigualdade $*$ é válida, uma vez que a função exponencial é convexa. (Veja [7], capítulo 9).

$\square$

Proposição 2.1.14. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Então para todo $a_k, b_k \in \mathbb{K}$ com $k = 1, \ldots, n$ temos:*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração. Podemos assumir que $a_i \neq 0$ para algum i (o mesmo vale para os b_i). Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ fixemos:

$$A_k = \frac{|a_k|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ e } B_k = \frac{|b_k|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Observemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k^p|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)} = 1$$

Semelhantemente teremos que:

$$\sum_{k=1}^{n} B_k^q = 1$$

Pelo lema anterior temos que:

$$A_k B_k \leq \frac{A_k^p}{p} + \frac{B_k^q}{q}; \quad k = 1, \ldots, n$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} A_k B_k &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k b_k|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.15. *(**Desigualdade de Minkowski**) Sejam $p \in [1,\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$. Então para todo $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $\quad k = 1,\dots,n$ temos:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração. Se $p = 1$, pela desigualdade triangular, teremos que:

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|, \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

Daí:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k|$$

Suponhamos que $p > 1$.
Escolhamos $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1}|a_k + b_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1}(|a_k| + |b_k|) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{p-1}|b_k| \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k + b_k|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k + b_k|^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{*}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned}$$

Na desigualdade $*$, usamos que $(p-1)q = p$.
Portanto:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Como $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} > 0$ podemos dividir a expressão anterior por esse termo, donde obtemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Isto é:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\square$

Exemplo 2.1.16. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Vamos definir* l_p *como o conjunto das sequências* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *tais que a série* $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ *seja convergente. Vamos considerar esse conjunto com duas operações:*

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p \Rightarrow x + y = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Podemos mostrar que o conjunto l_p *munido com essas duas operações é um espaço vetorial. Vamos definir uma norma em* l_p, *mostrar que este é um espaço completo, a fim de concluirmos que* l_p *é Banach.*

Demonstração. $\vdash$: As operações:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p \Rightarrow x + y = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

estão bem definidas. De fato:

(i) Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p, \lambda \in \mathbb{K}$. Observemos que:
$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|^p|x_n|^p = |\lambda|^p\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$
Daí, $(\lambda x) \in l_p$.

(ii) Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$. Fixemos $n \in \mathbb{N}$.
Como $x, y \in l_p$, existem $M, N > 0$ tais que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < M \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p < N$$

Pela desigualdade de Minkowiski temos que:
$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < M^{\frac{1}{p}} + N^{\frac{1}{p}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Elevando a p obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p < (M^{\frac{1}{p}} + N^{\frac{1}{p}})^p < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \leq (M^{\frac{1}{p}} + N^{\frac{1}{p}})^p < \infty$$

Assim, $x + y \in l_p$.

Podemos mostrar que conjunto l_p munido com essas duas operações é um espaço vetorial.

Se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ vamos definir $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

$\vdash$: $\| \;\; \|_p$ é uma norma em l_p. De fato:

1. Para todo $x = (x_n) \in l_p$ temos que $|x_n| \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0;$$

2. Assumindo que $\|x\|_p = 0$ temos que $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Logo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0$$

Então:

$$|x_n|^p = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |x_n| = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x = 0$$

3. Sejam $x = (x_n) \in l_p$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \|x\|_p
\end{aligned}$$

4. Sejam $x = (x_n), y = (y_n) \in l_p$. Pela desigualdade de Minkowski, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, teremos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Isto é:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p+\|y\|_p, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Da expressão anterior segue que:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leq (\|x\|_p+\|y\|_p)^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \leq (\|x\|_p+\|y\|_p)^p$$

Logo:

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p+\|y\|_p$$

Daí, $(l_p, \| \ \ \|_p)$ é um espaço normado.

$\vdash$: $(l_p, \| \ \ \|_p)$ é completo. De fato:

Seja $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset l_p$ uma sequência de Cauchy.
Como $\{x^k\}$ é uma sequência de Cauchy em l_p, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x^k - x^l\|_p < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq n_0 \implies$$
$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^k - x_i^l|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq n_0$$

Para todo $k, l \geq n_0$ e para todo $i \in \mathbb{N}$ observamos que:

$$(|x_i^k - x_i^l|^p)^{\frac{1}{p}} = |x_i^k - x_i^l| \leq \|x^k - x^l\|_p < \varepsilon$$

Obtemos assim que a sequência coluna $\{x_i^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é completo, concluímos que $\{x_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ é convergente para cada $i \in \mathbb{N}$ fixado. Digamos $x_i^k \longrightarrow x_i$. Definindo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, mostraremos que $x \in l_p$.

Como $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy então $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Logo, existe $M > 0$ tal que:

$$\|x^k\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Consequentemente:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k\|_p \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como a função $f(y) = y^{\frac{1}{p}}$ é contínua e o somatório é finito, fazendo $k \longrightarrow \infty$, teremos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Agora, fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$$

Assim, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, donde concluímos que $x \in l_p$.
Para todo $k, l \geq n_0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ lembremos que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^k - x_i^l|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k - x^l\|_p < \varepsilon$$

Fixemos $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq n_0$. Como a função $f(y) = y^{\frac{1}{p}}$ é contínua, o somatório é finito e que a função modular é contínua, fazendo $l \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^k - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq n_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ teremos:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^k - x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq n_0$$

Logo, $x^k \overset{\|\ \|_p}{\longrightarrow} x$.

Como $(l_p, \|\ \|_p)$ é um espaço vetorial normado completo, concluímos que $(l_p, \|\ \|_p)$ é um espaço de Banach.

$\square$

Exemplo 2.1.17. *Vamos definir l_∞ como o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ tais que $\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty$. Consideraremos duas operações sobre esse conjunto:*

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \Rightarrow x + y = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Com essas duas operações temos que l_∞ é um espaço vetorial.
Assim como no exemplo anterior, vamos definir uma norma nesse espaço, mostrar que ele é um espaço completo para podermos concluir que l_∞ é um espaço de Banach.

Demonstração. $\vdash$: As seguintes operações:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \Rightarrow x + y = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

estão bem definidas em l_∞.

(i) Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty, \lambda \in \mathbb{K}$. Como $x \in l_\infty$ existe $M > 0$ tal que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq M$$

Observemos que: $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda||x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq |\lambda| M$.
Logo, $\lambda x \in l_\infty$

(ii) Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$. Como $x, y \in l_\infty$, existem $M, N > 0$ tais que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq M \ , \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \leq N$$

Observemos que:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + |y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \leq M + N$$

Assim, $x + y \in l_\infty$.

Podemos mostrar que o conjunto l_∞ munido das operações acima é um espaço vetorial.

A aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \| \ \|_\infty : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \end{array}$$

é uma norma sobre o conjunto l_∞. Basta considerarmos $X = \mathbb{N}$ no exemplo 2.1.5.

$\vdash$: $(l_\infty, \| \ \|_\infty)$ é um espaço completo. De fato:

Seja $(x^n) \subset l_\infty$ uma sequência de Cauchy em $(l_\infty, \| \ \|_\infty)$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x^n - x^m\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Segue então que:

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j^n - x_j^m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Da expressão anterior obtemos:

$$|x_j^n - x_j^m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0, \forall j \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Fixado $j \in \mathbb{N}$ temos que $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ é uma sequência de Cauchy. Como $\mathbb{K}$ é completo, existe $x_j \in \mathbb{K}$ tal que $x_j^n \longrightarrow x_j$, quando $n \longrightarrow \infty$.
Vamos definir $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, onde $x_j = \lim_{n\to\infty} x_j^n$.
Fixemos $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$. Sabendo que a função modular é contínua, fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos que:

$$|x_j^n - x_j| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \qquad (*)$$

Fixado $j \in \mathbb{N}$ temos que $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, logo é uma sequência limitada. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $K_n > 0$ tal que:

$$|x_j^n| < K_n, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Notemos que:
$|x_j| = |x_j + x_j^{n_0} - x_j^{n_0}| \leq |x_j^{n_0} - x_j| + |x_j^{n_0}| < \varepsilon + k_{n_0}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$
Logo:

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \leq \varepsilon + k_{n_0}$$

Daí $x \in l_\infty$. Além disso:

$$\|x\|_\infty \leq \varepsilon + k_{n_0}$$

Além disso, por (1) temos que: $\|x^n - x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j^n - x_j| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$

Assim, $x^n \overset{\| \ \|_\infty}{\longrightarrow} x \in l_\infty$.

Como $(l_\infty, \| \ \|_\infty)$ é um espaço vetorial normado completo, concluímos que $(l_\infty, \| \ \|_\infty)$ é um espaço de Banach.

□

Exemplo 2.1.18. *Definindo c_0 o conjunto das sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ tais que $x_n \longrightarrow 0 \in \mathbb{K}$, podemos garantir que c_0 é um subespaço fechado do espaço $(l_\infty, \| \ \|_\infty)$. Esta condição nos garante que c_0 munido com a norma $\| \ \|_\infty$ é também um espaço de Banach.*

2.2 Operadores Limitados

A seguir vamos apresentar algumas definições e resultados relacionados a certos tipos de operadores lineares. Vamos definir operador linear limitado e exibir uma equivalência para essa definição. Vamos ver em que condições o espaço dos operadores lineares limitados entre dois espaços normados é um espaço de Banach.

Definição 2.2.1. *(**Operador limitado**) Sejam X, Y espaços normados. Dizemos que um operador linear $T : X \to Y$ é limitado se existir $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X$.*

Teorema 2.2.2. *Sejam X, Y espaços normados. Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é contínua;*
2. *T é contínua na origem;*
3. *T é limitada.*

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2)
Se T é contínua então T é contínua em todos os pontos do domínio X. Em particular, T é contínua em $x = 0 \in X$.
(2) $\Longrightarrow$ (3)
Suponhamos que T seja contínua em $x = 0$. Por definição, para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in X; \|x\| < \delta \Longrightarrow \|T(x)\| < 1$$

Considerando $x \in X$ com x diferente de 0, tomemos $y = \frac{\delta x}{2\|x\|}$. Assim, $\|y\| < \delta$. Portanto:

$$\|y\| < \delta \Longrightarrow \|T(y)\| < 1 \Longrightarrow \left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\| < 1 \Longrightarrow \frac{\delta}{2\|x\|}\|T(x)\| < 1 \Longrightarrow \|T(x)\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$$

Considerando $C = \frac{2}{\delta} > 0$ obtemos que:

$$\|T(x)\| < C\|x\|$$

Se $x = 0$ obtemos:

$$\|T(0)\| = 0 = C\|0\|$$

Portanto:

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)
Vamos assumir que T seja limitada. Por definição, existe $C > 0$ tal que:

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X \qquad (*)$$

Para concluirmos que T seja contínua mostraremos que T é Lipschitziana.
Seja $x \in X$. Existem $y, z \in X$ tais que $x = y + z$. Por $(*)$, temos que:

$$\|T(z)\| \leq C\|z\|.$$

Daí:

$$\|T(x - y)\| \leq C\|x - y\|.$$

Usando a linearidade obtemos:

$$\|T(x - y)\| \leq C\|x - y\| \Longrightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|$$

Como T atende a condição de Lipschitz concluímos que T é uniformemente contínua e em particular, T é contínua. $\square$

Observação 2.2.3. *Seja $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado. Em X as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar são contínuas.*

Observação 2.2.4. *Considerando X um espaço normado, vamos denotar por:*

$$S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$$

a esfera unitária do espaço X.

Teorema 2.2.5. *(**Espaço B(X, Y)**) Sejam X, Y espaços normados. O espaço vetorial $B(X, Y)$ de todos os operadores lineares contínuos de X em Y é um espaço normado, com a norma definida por:*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\|$$

Demonstração.

1. Para todo $x \in S_X$ temos que $\|T(x)\| \geq 0$. Assim:

$$\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| \geq 0;$$

2. Assumindo que $\|T\| = 0$ temos que $\sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = 0$. Para cada $x \in S_X$, notemos que:

$$0 \leq \|T(x)\| \leq \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = 0$$

Assim:

$$\|T(x)\| = 0, \ \forall x \in S_X \Longrightarrow T(x) = 0, \ \forall x \in S_X$$

Seja $x \in X$ com x diferente do elemento 0. Tomando $z = \frac{x}{\|x\|}$ segue pela expressão anterior que:

$$T(z) = 0 \Longrightarrow T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\|x\|}T(x) = 0 \Longrightarrow T(x) = 0$$

Concluímos então que:

$$T(x) = 0, \ \forall x \in X$$

Portanto, $T \equiv 0$.

3. Sejam $T \in B(X, Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Observe que:

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \sup_{x \in S_X} \|(\lambda T)(x)\| \\ &= \sup_{x \in S_X} \|\lambda T(x)\| \\ &= \sup_{x \in S_X} |\lambda| \|T(x)\| \\ &= |\lambda| \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| \\ &= |\lambda| \|T\| \end{aligned}$$

4. Sejam $T, U \in B(X, Y)$. Usando desigualdade triangular, para cada $x \in S_X$, sabemos que:

$$\|(T + U)(x)\| = \|T(x) + U(x)\| \leq \|T(x)\| + \|U(x)\|$$

Como T, U são limitadas, para cada $x \in S_X$, obtemos que:

$$\|(T+U)(x)\| \leq \|T(x)\| + \|U(x)\| \leq \|T\| + \|U\|$$

Logo:

$$\sup_{x \in S_X} \|(T+U)(x)\| \leq \|T\| + \|U\| \Longrightarrow \|T+U\| \leq \|T\| + \|U\|$$

□

Teorema 2.2.6. *Sejam X, Y espaços normados. Se Y é um espaço de Banach então $B(X, Y)$ é Banach.*

Demonstração. Como $B(X, Y)$ é um espaço normado, resta-nos mostrar que $B(X, Y)$ é completo.

Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $B(X, Y)$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Sabendo que $\|T\| = \sup\limits_{x \in S_X} \|T(x)\|$, podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\sup_{x \in S_X} \|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Daí segue que:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0, \forall x \in S_X \qquad (*)$$

Fixando $x \in S_X$, por $(*)$, obtemos que $(T_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em Y. Como Y é um espaço de Banach, existe $y \in Y$ tal que $T_n(x) \longrightarrow y)$ quando $n \to \infty$. Vamos considerar $y = T(x)$.

Seja $x \in X$, $x \neq 0$ fixado. Por $(*)$ temos que $\left(T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \subset Y$ é uma sequência de Cauchy. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left\|T_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - T_m\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Usando que T_m, T_n são lineares, obtemos que:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Logo, $(T_n(x))$ é uma sequência de Cauchy em Y. Como este é um espaço de Banach, existe $y \in Y$ tal que $T_n(x) \longrightarrow y$. Vamos chamar $y = T(x)$ para $x \in X$, x diferente de 0. Se $x = 0$ temos que $T_n(x) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lim\limits_{n \to 0} T_n(x) = 0$.

De acordo com o que fizemos acima, definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} T: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & T(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} T_n(x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Para garantirmos que $T \in B(X,Y)$ devemos mostrar que T é linear e contínua.

1. T é linear. De fato:
   Sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$T(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(y) = T(x) + \lambda T(y)$$

2. T é contínua. De fato:
   Por $(*)$ temos que:

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0, \forall x \in S_X$$

   Fixando $n \in \mathbb{N}$ e fazendo $m \to \infty$ obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in S_X \quad &\Longrightarrow \\ \|T_n(x) - \lim_{m\to\infty} T_m(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in S_X \quad &\Longrightarrow \\ \|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in S_X \qquad (**) \end{aligned}$$

   Notemos que:

$$\|T(x)\| - \|T_{n_0}(x)\| \leq \|T_{n_0}(x) - T(x)\|, \quad \forall x \in S_X$$

   Usando $(**)$ e a desigualdade acima, temos:

$$\begin{aligned} \|T(x)\| \leq \|T_{n_0}(x)\| + \varepsilon, \quad \forall x \in S_X \quad &\Longrightarrow \\ \sup_{x\in S_X} \|T(x)\| \leq \|T_{n_0}\| + \varepsilon \quad &\Longrightarrow \\ \|T\| \leq \|T_{n_0}\| + \varepsilon \end{aligned}$$

   Como T é limitada concluímos que T é contínua.

Por $(**)$ temos que:

$$\|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in S_X$$

Logo:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in S_X} \|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \quad &\Longrightarrow \\ \|T_n - T\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \quad &\Longrightarrow \\ T_n \longrightarrow T \in B(X,Y) \end{aligned}$$

Portanto, $B(X,Y)$ é um espaço de Banach. $\square$

A recíproca do teorema 2.2.6 é verdadeira. Porém, para mostrarmos esse fato, vamos precisar do teorema de Hahn-Banach. Isso será feito no capítulo 4 deste trabalho.

Abaixo vamos apresentar alguns exemplos de operadores lineares limitados.

Exemplo 2.2.7. *(**Operador Identidade**) Seja X um espaço normado não-nulo. O operador linear identidade $I : X \longrightarrow X$ é um operador linear limitado com norma $\|I\| = 1$.*

Exemplo 2.2.8. *(**Operador Nulo**) Sejam X, Y espaços normados. O operador nulo $O : X \longrightarrow X$ é um operador linear limitado com norma $\|O\| = 0$.*

Exemplo 2.2.9. *Fixemos $1 \leq p < \infty$ e $\lambda = (\lambda_n) \in l_p$. A aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} D_\lambda : & l_\infty & \longrightarrow & l_p \\ & (a_n) & \longmapsto & (\lambda_n a_n) \end{array}$$

é uma aplicação linear e limitada.

Demonstração. (i) A aplicação D_λ está bem definida. De fato:

Seja $a = (a_n) \in l_\infty$. Assim, existe $M > 0$ tal que:

$$\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq M$$

Fixando $m \in \mathbb{N}$, observamos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n a_n|^p &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_n|^p |a_n|^p \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^p \|a\|_\infty^p \\ &= \|a\|_\infty^p \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^p \end{aligned}$$

Elevando a $\frac{1}{p}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\|a\|_\infty^p \sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|a\|_\infty \left(\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M \left(\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Como $\lambda = (\lambda_n) \in l_p$, existe $N > 0$ tal que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq N$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M.N$$

Logo, $(\lambda_n a_n) \in l_p$.

(ii) D_λ é linear. De fato:
Sejam $a = (a_n), b = (b_n) \in l_\infty$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned} D_\lambda(a+\alpha b) &= D_\lambda((a_n)+(\alpha b_n)) = D_\lambda((a_n+\alpha b_n)) \\ &= (\lambda_n(a_n+\alpha b_n)) = (\lambda_n a_n) + \alpha(\lambda_n b_n) \\ &= D_\lambda(a) + \alpha D_\lambda(b) \end{aligned}$$

(iii) D_λ é limitada. De fato:
Fixando $a = (a_n) \in l_\infty$ observamos que:

$$\begin{aligned} \|D_\lambda(a)\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p\|a\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\|a\|_\infty \\ &= \|\lambda\|_p\|a\|_\infty \end{aligned}$$

Logo:

$$\|D_\lambda(a)\|_p \leq \|\lambda\|_p\|a\|_\infty, \quad \forall a = (a_n) \in l_\infty$$

Portanto, D_λ é limitada.

$\square$

Exemplo 2.2.10. ***(Uma aplicação não limitada)***
Seja $X = \{x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K};\ x \text{ é uma função polinomial}\}$. Temos que X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Além disso, podemos munir esse conjunto com a seguinte norma:

$$\begin{aligned} \|\ \ \| : \ X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| = \max_{t\in[0,1]}|x(t)| \end{aligned}$$

A seguinte aplicação definida sobre $(X, \|\ \ \|)$:

$$\begin{aligned} T : \ X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto T(x) = x' \end{aligned}$$

*é uma aplicação linear que não é limitada. T é denominado de **operador derivação**.*

Demonstração. (i) T é um operador linear. De fato:

Sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$T(x + \lambda y) = (x + \lambda y)^{'} = x^{'} + (\lambda y)^{'} = x^{'} + \lambda y^{'} = T(x) + \lambda T(y)$$

(ii) O operador T não é limitado. De fato:

Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência onde:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{array}{rccc} x_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & x_n(t) = t^n \end{array}$$

2. $\|x_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t)| = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Observemos que:

$$\begin{array}{rccc} T(x_n) = x_n^{'} : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & x_n^{'}(t) = nt^{n-1} \end{array}$$

Notemos ainda que:

$$\|T(x_n)\| = \|x_n^{'}\| = \max_{t\in[0,1]} n|t|^{n-1} = n$$

Obtemos uma sequência (x_n) em S_X onde $\|T(x_n)\| \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Logo, T é um operador ilimitado.

$\square$

Definição 2.2.11. ***(Isomorfismo)*** *Sejam X, Y espaços normados. Uma aplicação linear e contínua $T : X \longrightarrow Y$ é dita um* ***isomorfismo*** *se T é bijetora e T^{-1} é contínua.*

Definição 2.2.12. ***(Isomorfismo Isométrico)*** *Sejam X, Y espaços normados. $T \in B(X,Y)$ é dito um isomorfismo isométrico se T é um isomorfismo que preserva distâncias, isto é, para cada $x \in X$ temos:*

$$\|Tx\| = \|x\|$$

Nessas condições X e Y são ditos **isometricamente isomorfos***.*

Observação 2.2.13. *Sejam X, Y espaços normados.*
A notação $X \simeq Y$ vai denotar que X, Y são isometricamente isomorfos neste trabalho.

Definição 2.2.14. ***(Espaço Dual)*** *Seja X um espaço normado. O espaço $B(X, \mathbb{K})$ representa o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos de X em $\mathbb{K}$. Esse espaço denotado por X^*, é denominado espaço dual de X.*

Observação 2.2.15. *Seja X um espaço normado. Pelo teorema 2.2.6 segue que o espaço dual $X^* = B(X, \mathbb{K})$ é um espaço de Banach.*

Vamos agora apresentar alguns exemplos de espaços duais. Um dos exemplos que será apresentado é de que o dual topológico do espaço l_1 é o espaço l_∞. Para abordarmos este exemplo, necessitamos definir base de Schauder.

Definição 2.2.16. *(**Base de Schauder**) Seja $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado. Uma sequência $(e_n) \subset X$ é dita uma base de Schauder se para cada $x \in X$ existe uma única sequência de escalares $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ que satisfaz a seguinte condição: dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ onde,*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Neste caso, vamos escrever $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Exemplo 2.2.17. *Fixemos $p \in [1, \infty)$. Consideremos $(e_n) \subset l_p$ uma sequência definida da seguinte forma:*

$$e_n = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)}_{\text{1 na posição n-ésima}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Temos que (e_n) é uma base de Schauder para o espaço l_p.

Demonstração. Sejam $x = (x_n) \in l_p$ e $\varepsilon > 0$.

Como $x \in l_p$ segue que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p - \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right| < \varepsilon^p, \quad \forall n \geq n_0$$

Da expressão anterior obtemos:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p, \quad \forall n \geq n_0$$

Por outro lado, notemos que:

$$\begin{aligned} \|x - (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)\|_p^p &= \|x - (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)\|_p^p \\ &= \|(0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_p^p \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Logo, obtemos que:

$$\|x - (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)\|_p < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \qquad (*).$$

Agora, vamos mostrar que x pode ser escrito de forma única como a série $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Suponhamos que $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ e $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n e_n$, sendo (y_n) uma sequência de escalares em

$\mathbb{K}$, onde essas séries obedecem a condição $(*)$.
Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_1$$

Existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x - (y_1e_1 + \ldots + y_ne_n)\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_2$$

Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Observamos que:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq \|(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) - (y_1e_1 + \ldots + y_ne_n)\|_p & \leq & \\ \|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|_p + \|x - (y_1e_1 + \ldots + y_ne_n)\|_p & < & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \end{array}$$

Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, concluímos que $x_k = y_k, \forall k \in \mathbb{N}$.
Assim, os escalares da representação de x são únicos. □

Exemplo 2.2.18. *O dual topológico de l_1 é o espaço l_∞.*

Demonstração. Sabemos que a sequência $(e_n) \subset l_1$ onde:

$$e_n = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)}_{\text{1 na posição n-ésima}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

é uma base de Schauder para o espaço l_1.
Dado $x = (x_k) \in l_1$, existe uma única representação:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

Seja $f \in l_1^*$. Como f é linear, notemos que:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) \\ & \overset{(*)}{=} & \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) \\ & = & \sum_{k=1}^{\infty} x_k g_k \end{array}$$

onde $g_k = f(e_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Vamos mostrar a igualdade $(*)$.
Consideremos (s_n) a sequência da parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k)$. Consideremos também

$S = f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right)$. Para n natural, notemos que:

$$\begin{aligned}
|s_n - S| &= \left|\sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) - f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right)\right| \\
&= \left|f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right)\right| \\
&= \left|f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) - f(x)\right| \\
&= \left|f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x\right)\right| \\
&\leq \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x\right\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$, já que (e_n) é base de Schauder para o espaço l_1.
Portanto, $s_n \longrightarrow S$, donde concluímos que a igualdade $(*)$ é verdadeira.
Como f é contínua, notemos que:

$$|g_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Daí:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |g_k| \leq \|f\|$$

Logo, $g = (g_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_\infty$.
Além disso:

$$\|g\|_\infty \leq \|f\| \qquad (1)$$

Por outro lado, fixemos $b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_\infty$. Definamos:

$$\begin{array}{rccc}
h: & l_1 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
& x = (x_k) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k
\end{array}$$

Queremos mostrar que $h \in l_1^*$.

(i) h está bem definida. De fato:
Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Como $b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_\infty$, existe $M > 0$ tal que:

$$\|b\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |b_k| \leq M$$

Observemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k b_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k||b_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|b\|_\infty \qquad (*)$$

Como $x = (x_k) \in l_1$, existe $N > 0$ tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq N$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ na expressão $(*)$ obtemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k b_k| \leq \|b\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq M.N$$

Logo, h está bem definida.

(ii) h é uma aplicação linear. De fato:
Sejam $x = (x_k), y = (y_k) \in l_1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.
Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + \lambda y_k) b_k = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k b_k$$

Como as séries $\sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} y_k b_k$ convergem, fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + \lambda y_k) b_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} y_k b_k$$

Portanto:

$$h(x + \lambda y) = h(x) + \lambda h(y)$$

(iii) h é uma aplicação contínua. De fato:
Fixando $n \in \mathbb{N}$ observemos que:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||b_k|$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||b_k|$$

Para cada $x = (x_k) \in l_1$ notemos que:

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||b_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\|b\|_\infty \\ &= \|b\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \\ &= \|b\|_\infty \|x\|_1 \end{aligned}$$

Concluímos que h é contínua. Logo, $h \in l_1^*$.
Como $|h(x)| \leq \|b\|_\infty \|x\|_1, \forall x \in l_1$, obtemos que:

$$\sup_{x \in S_{l_1}} |h(x)| \leq \|b\|_\infty \Longrightarrow \|h\| \leq \|b\|_\infty$$

Vamos definir o seguinte operador:

$$\begin{array}{rccc} T: & l_1^* & \longrightarrow & l_\infty \\ & f & \longmapsto & g = (f(e_k)) \end{array}$$

Por construção, T é linear e bijetora.
Para cada $x \in l_1$ temos:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k g_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||g_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\|g\|_\infty \\ &= \|x\|\|g\|_\infty \end{aligned}$$

onde $g_k = f(e_k)$ para todo k natural e $g = (g_k) = (f(e_k))$.
Tomando o supremo de todos os elementos $x \in S_{l_1}$ obtemos que:

$$\|f\| \leq \|g\|_\infty \qquad (2)$$

Por (1) e (2) obtemos $\|f\| = \|g\|_\infty$.
Assim, $\|T(f)\| = \|g\|_\infty = \|f\|$ para todo $f \in l_1^*$, donde concluímos que T é uma isometria.
Portanto, l_1^* e l_∞ são isometricamente isomorfos.

$\square$

Exemplo 2.2.19. *Fixemos $p \in [1, \infty)$. O dual topológico do espaço l_p é o espaço l_q, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Uma demonstração para esse fato pode ser vista em* [1]*, capítulo 2.*

2.3 Espaços de Hilbert

A teoria de espaços com produto interna é muito vasta e possui características em comum com o espaço euclideano. Espaços com produto interno são exemplos de espaços normados. Os chamados espaços de Hilbert são espaços normados completos, cuja norma é proveniente de um produto interno. Os espaços de Hilbert são de extrema importância no estudo de aplicações lineares e não-lineares em análise funcional.

Definição 2.3.1. ***(Produto Interno)*** *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. A aplicação $\langle\ \ \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ que goza das seguintes propriedades:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X$;

2. $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in X;$

3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad \forall x, y \in X;$

4. $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle, \quad \forall x, y, z \in X;\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

é denominada produto interno sobre o espaço X.

Observação 2.3.2. *Se X é um espaço vetorial que admite um produto interno $\langle\ \rangle$, então o par $(X, \langle\ \rangle)$ é dito um espaço com produto interno.*

Definição 2.3.3. ***(Norma proveniente de um produto interno)*** *Seja $(X, \langle\ \rangle)$ um espaço com produto interno. Definindo:*

$$\begin{array}{rccc} \|\ \|: & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

obtemos uma norma para o espaço X. O espaço $(X, \|\ \|)$ é um espaço normado, onde a norma é proveniente do produto interno.

Observação 2.3.4. *Quando uma norma é proveniente de um produto interno vale a lei do paralelogramo:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

A seguinte desigualdade é de extrema importância no estudo de espaços com produto interno.

Proposição 2.3.5. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Seja $(X, \langle\ .\ \rangle)$ um espaço com produto interno. Então:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}, \quad \forall x, y \in X$$

Demonstração. Sejam $x, y \in X$. Se $\langle y, y\rangle = 0$ então $y = 0$. Daí:

$$\begin{array}{rcl} \langle x, y\rangle & = & \langle x, 0\rangle = 0 \\ |\langle x, y\rangle| & = & |0| = 0 \\ |\langle x, y\rangle| & \leq & \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \end{array}$$

Vamos assumir sem perda de generalidade que $y \neq 0$. Definamos o seguinte vetor em X:

$$z = x - \frac{\langle x, y\rangle y}{\langle y, y\rangle}$$

Sabemos que $\langle z, z\rangle \geq 0$. Observe que:

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle z, z\rangle &= \\
\left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle y}{\langle y, y\rangle}, x - \frac{\langle x, y\rangle y}{\langle y, y\rangle}\right\rangle &= \\
\langle x, x\rangle - \frac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle &= \\
\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} &= \\
\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle|^2 &\leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \Longrightarrow \\
|\langle x, y\rangle| &\leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}
\end{aligned}$$

□

Definição 2.3.6. ***(Espaço de Hilbert)*** *Um espaço com produto interno é dito um espaço de Hilbert se ele é um espaço de Banach com respeito à norma proveniente de seu produto interno.*

Observação 2.3.7. *Assumindo que $(X, \langle \, . \, \rangle)$ é um espaço de Hilbert, a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser reescrita como:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in X$$

Exemplo 2.3.8. ***(Exemplos de espaços de Hilbert)***

1. *O Espaço $\mathbb{K}^{\mathbf{n}}$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}$$

onde $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$.

2. *Seja l_2 o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{K}$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge.*

Observemos que a aplicação:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2 \longmapsto \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em l_2.

Temos que l_2 é um espaço de Hilbert com o produto interno definido como :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

onde $x = (x_n), y = (y_n) \in l_2$

Exemplo 2.3.9. *Consideremos o seguinte funcional linear $f : l_2 \to \mathbb{R}$ definido como:*

$$f(x) = \langle x, \alpha\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \alpha_j$$

onde $\alpha = (\alpha_n)$ é um elemento fixado de l_2.
Temos que o funcional linear f definido em l_2 é limitado. De fato:
Seja $x \in l_2$.

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j \alpha_j\right| = |\langle x, \alpha\rangle| \leq \|x\|\|\alpha\| \Rightarrow |f(x)| \leq \|x\|\|\alpha\|$$

Assim, para todo $x \in S_{l_2}$ teremos:

$$|f(x)| \leq \|\alpha\| \Longrightarrow \sup_{x\in S_{l_2}} |f(x)| \leq \|\alpha\| \Longrightarrow \|f\| \leq \|\alpha\|$$

Por outro lado, observamos que:

$$\left|f\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right)\right| = \frac{|\langle\alpha, \alpha\rangle|}{\|\alpha\|} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\alpha\|} = \|\alpha\|$$

Logo:

$$\|f\| = \|\alpha\|$$

O seguinte resultado, de relevante importância, será enunciado sem sua demonstração:

Teorema 2.3.10. ***(Teorema de Riesz)*** *Cada funcional linear limitado f em um espaço de Hilbert H pode ser representado em termos de produto interno por:*

$$f(x) = \langle x, z\rangle,$$

onde z depende de f e é unicamente determinado por f e sua norma satisfaz:

$$\|z\| = \|f\|$$

A demonstração do teorema de Riesz pode ser visto em [1], capítulo 3.

Proposição 2.3.11. *Seja H um espaço de Hilbert. A aplicação definida como:*

$$\begin{array}{rccc} A: & H^* & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & A(f) = z \end{array}$$

onde z é dado pela representação de Riesz é bijetiva, conjugada linear e limitada.

Demonstração.

1. A é injetiva. De fato:
   Sejam $f_1, f_2 \in H^*$ tais que $A(f_1) = A(f_2)$. Daí, temos que $z_1 = z_2$. Além disso, dado $x \in X$ temos que:
   $$f_1(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle = f_2(x), \quad \forall x \in X.$$
   Logo, $f_1 = f_2$.

2. A é sobrejetiva. De fato:
   Dado $z \in H$, definamos $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $f(x) = \langle x, z \rangle$, $\forall x \in H$. Sabemos que f é um funcional linear limitado. Temos ainda que $z = A(f)$.

3. A é conjugada linear. De fato:
   Sejam $f_1, f_2 \in H^*$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Observemos que:
   $(\alpha f_1 + \beta f_2)(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \alpha\langle x, z_1 \rangle + \beta\langle x, z_2 \rangle = \langle x, \overline{\alpha} z_1 \rangle + \langle x, \overline{\beta} z_2 \rangle = \langle x, \overline{\alpha} z_1 + \overline{\beta} z_2 \rangle$.
   Assim, temos que:
   $$A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \overline{\alpha} z_1 + \overline{\beta} z_2 = \overline{\alpha} A(f_1) + \overline{\beta} A(f_2).$$

4. A é limitada. De fato:
   Para cada $f \in H^*$ temos que:
   $$\|A(f)\| = \|z\| \overset{(*)}{=} \|f\|$$
   A igualdade $(*)$ segue pelo teorema de Riesz.

□

Proposição 2.3.12. *Seja H um espaço de Hilbert. Definindo o produto interno:*

$$\begin{array}{rccc} \langle\ \rangle: & H^* \times H^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (f_1, f_2) & \longmapsto & \langle f_1, f_2 \rangle = \langle A(f_2), A(f_1) \rangle \end{array}$$

onde A é a aplicação dada na Proposição 2.3.11, temos que H^* é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.6 temos que $H^* = B(H, \mathbb{K})$ é completo, já que $\mathbb{K}$ é um espaço completo. Vamos mostrar que a aplicação $\langle\ \rangle$ é um produto interno para H^* e que a norma em H^* é proveniente desse produto interno.

(i) $\langle \ \rangle$ é um produto interno para H^*. De fato:

1. Sejam $f_1, f_1 \in H^*$. Então:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle A(f_2), A(f_1) \rangle = \langle z_2, z_1 \rangle \geq 0$$

onde z_1, z_2 são dados pela representação de Riesz.

2. Seja $f \in H^*$ tal que $\langle f, f \rangle = 0$. Assim:

$$\langle A(f), A(f) \rangle = 0 \Longrightarrow \langle z, z \rangle = 0 \Longrightarrow z = 0$$

onde z é dado pela representação de Riesz. Isto significa que para cada $x \in H$:

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$$

Logo, $f \equiv 0$.

3. Sejam $f_1, f_2 \in H^*$ e $z_1, z_2 \in H$ dados pela representação de Riesz. Temos que:

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \langle A(f_2), A(f_1) \rangle \\ &= \langle z_2, z_1 \rangle \\ &= \overline{\langle z_1, z_2 \rangle} \\ &= \overline{\langle A(f_1), A(f_2) \rangle} \\ &= \overline{\langle f_2, f_1 \rangle} \end{aligned}$$

4. Sabendo que A é conjugada linear, observemos que:

$$\begin{aligned} \langle (f_1 + \lambda f_2), f_3 \rangle &= \langle A(f_3), A(f_1 + \lambda f_2) \rangle \\ &= \langle A(f_3), A(f_1) + \overline{\lambda} A(f_2) \rangle \\ &= \overline{\langle A(f_1) + \overline{\lambda} A(f_2), A(f_3) \rangle} \\ &= \overline{\langle A(f_1), A(f_3) \rangle + \overline{\lambda} \langle A(f_2), A(f_3) \rangle} \\ &= \langle A(f_3), A(f_1) \rangle + \lambda \langle A(f_3), A(f_2) \rangle \\ &= \langle f_1, f_2 \rangle + \lambda \langle f_2, f_3 \rangle \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \ \rangle$ é um produto interno em H^*.

(ii) A norma em H^* é proveniente desse produto interno. De fato:

$$\sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\langle Af, Af \rangle} = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \|z\| \overset{(**)}{=} \|f\|$$

para cada $f \in H^*$. (Na igualdade $(**)$ utilizamos o teorema de Riesz).

$\square$

3 Teorema de Hahn-Banach

O resultado que será apresentado neste capítulo foi demonstrado por H. Hahn em 1927. Posteriormente, foi demonstrado de uma forma mais geral por Banach em 1929. Por fim, em 1938, teve sua versão generalizada para espaços vetoriais complexos por H. F. Bohneblust e A. Sobeczyk.

Este importante teorema nos diz que considerando um funcional linear em um subespaço M de um certo espaço vetorial X sob o corpo $\mathbb{K}$, podemos estendê-lo, sobre certas condições, para todo o espaço X. As versões para espaços normados permitem realizar extensões lineares e contínuas. Já as versões geométricas do Teorema de Hanh-Banach nos garantem separar subconjuntos de um espaço normado, através de hiperplanos.

Alguns conceitos importantes devem ser definidos previamente para entendermos as demonstrações dos resultados subsequentes, como se segue:

Definição 3.0.1. *(**Funcional sublinear**) Denominamos **funcional sublinear** um funcional real p sobre um espaço vetorial X que goza das seguintes propriedades:*

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \; \forall \; x, y \in X;$
- $p(\alpha x) = \alpha p(x), \; \forall \; \alpha \geq 0$ *em* $\mathbb{R}$ *e* $x \in X.$

Definição 3.0.2. *(**Conjunto parcialmente ordenado**) Um conjunto M é dito **parcialmente ordenado** quando sobre ele está definido uma ordem parcial, que é uma relação binária simbolizada por $\leq$ e que satisfaz as seguintes propriedades:*

1 *Reflexividade:* $a \leq a, \; \forall \; a \in M;$

2 *Anti-simetria: se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$, *então* $a = b, \forall \; a, b \in M;$

3 *Transitividade: se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$, *então* $a \leq c, \forall \; a, b, c \in M.$

Definição 3.0.3. *(**Cadeia**) Um conjunto M é dito **cadeia** ou **conjunto totalmente ordenado** quando M é um conjunto parcialmente ordenado e seus elementos são dois a dois comparáveis.*

Observação 3.0.4. *Dois elementos x, y em uma cadeia $(M, \leq)$ são ditos comparáveis se:*

$$a \leq b \text{ ou } b \leq a$$

Definição 3.0.5. ***(Cota superior)*** *Seja $(M, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $C \subset M$. Dizemos que $a \in M$ é uma **cota superior** do conjunto C quando $x \leq a, \ \ \forall x \in C$.*

Definição 3.0.6. ***(Elemento Maximal)*** *Sejam $(M, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $z \in M$. Dizemos que z é um **elemento maximal** de M se a condição $z \leq b$ para algum $b \in M$, acarretar $z = b$.*

Axioma 3.0.7. ***(Lema de Zorn)*** *Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que cada cadeia $C \subset M$ tenha uma cota superior. Então M tem pelo menos um elemento maximal.*

3.1 Teorema de Hahn-Banach

Teorema 3.1.1. *Sejam X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear sobre X. Seja f um funcional linear definido sobre o subespaço Z de X que satisfaz:*

$$f(x) \leq p(x) \ \ \forall \ x \in Z.$$

Então f tem uma extensão linear $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz:

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \ \ \forall \ x \in X.$$

Demonstração. Dividiremos essa demonstração em passos:

Passo 1: Seja E o conjunto de todas as extensões lineares g, de f, satisfazendo a condição:

$$g(x) \leq p(x) \ \ \forall \ x \in D(g)$$

onde $D(g)$(domínio de g) é um subespaço vetorial de X.
$E \neq \emptyset$, já que $f \in E$. Em E definimos uma ordem parcial: $g \leq h$ significa que h é uma extensão de g. Por definição, $D(h) \supset D(g)$ e $h(x) = g(x)$, $\forall \ x \in D(g)$.
Para qualquer cadeia $C \subset E$ definimos $\hat{g}(x) = g(x)$ se $x \in D(g)$. Assim $\hat{g}$ é um funcional linear com domínio $D(\hat{g}) = \bigcup\limits_{g \in C} D(g)$.

Passo 2: $D(\hat{g})$ é um subespaço vetorial de X.
De fato,

(a) Como $D(\hat{g}) = \bigcup\limits_{g \in C} D(g)$, temos que $0_X \in D(\hat{g})$, pois $0_X \in D(g)$, $\forall \ g \in C$.

(b) Sejam $x, y \in D(\hat{g})$, com $x \in D(g)$ e $y \in D(h)$ onde $g, h \in C$. Então $g \leq h$ ou $h \leq g$. Daí, $D(g) \subset D(h)$ ou $D(h) \subset D(g)$. Supondo, sem perda de generalidade, que $D(g) \subset D(h)$, temos $x, y \in D(h)$. Uma vez que $D(h)$ é um subespaço vetorial temos que $x + y \in D(h) \subset D(\hat{g})$. Logo, $x + y \in D(\hat{g})$.

(c) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in D(\hat{g})$. Então, existe $h \in C$ tal que $x \in D(h)$. Como $D(h)$ é um subespaço vetorial de X, temos que $\lambda x \in D(h) \subset D(\hat{g})$. Logo, $\lambda x \in D(\hat{g})$.

Segue de $(a) - (c)$ que $D(\hat{g})$ é um subespaço vetorial de X.

Passo 3: $\hat{g}$ está bem definida.
De fato, seja $x_0 \in D(g_1) \cap D(g_2)$, com $g_1, g_2 \in C$. Como C é uma cadeia, temos que $g_1 \leq g_2$ ou $g_2 \leq g_1$. Suponhamos, sem perda de generalidade que $g_1 \leq g_2$. Então, $D(g_1) \subset D(g_2)$ e daí $g_2(x) = g_1(x)$, $\forall\ x \in D(g_1)$. Em particular, $g_2(x_0) = g_1(x_0)$. Logo, $\hat{g}$ está bem definida.

Passo 4: $\hat{g}$ é linear. De fato

(a) Sejam $x, y \in D(\hat{g})$, com $x \in D(g)$ e $y \in D(h)$. Portanto $g, h \in C$. Então $D(g) \subset D(h)$ ou $D(h) \subset D(g)$, já que C é uma cadeia. Suponhamos, sem perda de generalidade que $D(g) \subset D(h)$. Temos, assim, $x, y \in D(h)$ e, portanto:

$$\hat{g}(x + y) = h(x + y) = h(x) + h(y) = \hat{g}(x) + \hat{g}(y)$$

(b) Seja $x \in D(\hat{g})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, existe $h \in C$ tal que $x \in D(\hat{h})$. Assim, $\alpha x \in D(h)$ e $\hat{g}(\alpha x) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = \alpha \hat{g}(x)$.

Passo 5: Determinando $\tilde{f}$.
Para garantirmos que $\hat{g} \in E$, nos resta mostrar que $\hat{g}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(\hat{g})$. De fato, observemos que:

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall g \in C, \forall x \in D(g)$$

Daí, por definição de $\hat{g}$, obtemos:

$$\hat{g}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in D(g) \subset \bigcup_{h \in C} D(h) = D(\hat{g})$$

Notemos que $g \leq \hat{g}$, $\forall\ g \in C$, já que $D(g) \subset D(\hat{g}) = \bigcup_{h \in C} D(h)$ e $\hat{g}(x) = g(x)$, $\forall\ x \in D(g)$. Assim, $\hat{g}$ é uma cota superior para C. Pelo Lema de Zorn, E possui um elemento maximal, digamos $\tilde{f} \in E$. Desta forma:

$$\begin{cases} \tilde{f} \text{ é um funcional linear;} \\ \tilde{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in D(f); \\ \tilde{f}(x) \leq p(x) \quad \forall\ x \in D(\tilde{f}). \end{cases}$$

Passo 6: Vamos mostrar que o domínio de $\tilde{f}$ é X, ou seja, $D(\tilde{f}) = X$.
Suponhamos que $D(\tilde{f}) \subsetneq X$. Consideremos $y_1 \in X - D(\tilde{f})$ e seja $Y_1 = D(\tilde{f}) \oplus [y_1]$, onde $[y_1]$ é o subespaço vetorial gerado por y_1. Como $0 \in D(\tilde{f})$ temos que $y_1 \neq 0$.
Para qualquer $x \in Y_1$ podemos escrever: $x = y + \alpha y_1$, $y \in D(\tilde{f})$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora, definimos g_1 sobre Y_1 como: $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$, onde c é uma constante real.
Vamos mostrar que g_1 é um funcional linear. De fato, para α, $\gamma \in \mathbb{R}$, sejam $x, z \in Y_1$, assim $x = y + \alpha y_1$ e $z = w + \gamma y_1$. Temos:

$$\begin{aligned}
g_1(x+z) &= g_1(y + \alpha y_1 + w + \gamma y_1) \\
&= g_1((y+w) + (\alpha+\gamma)y_1) \\
&\triangleq \tilde{f}(y+w) + (\alpha+\gamma)c \\
&= \tilde{f}(y) + \tilde{f}(w) + \alpha c + \gamma c \\
&= (\tilde{f}(y) + \alpha c) + (\tilde{f}(w) + \gamma c) \\
&= g_1(y + \alpha y_1) + g_1(w + \gamma y_1) \\
&= g_1(x) + g_1(z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(\beta x) &= g_1(\beta(y + \alpha y_1)) \\
&= g_1(\beta y + \beta\alpha y_1) \\
&\triangleq \tilde{f}(\beta y) + \beta\alpha c \\
&= \beta(\tilde{f}(y) + \alpha c) \\
&= \beta g_1(y + \alpha y_1) \\
&= \beta g_1(x).
\end{aligned}$$

Se $y \in D(\tilde{f}) \subsetneq D(g_1)$, temos $g_1(y) = g_1(y + 0y_1) = \tilde{f}(y) + 0.c = \tilde{f}(y)$. Desse modo, g_1 estende $\tilde{f}$ e $g_1 \neq \tilde{f}$, pois $D(\tilde{f}) \subsetneq D(g_1)$.
Agora, mostraremos que $g_1 \in E$ para algum $c \in \mathbb{R}$, isto é, vamos mostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g_1(x) \leq p(x)$, $\forall\ xD(g_1)$.
Sejam $y, z \in D(\tilde{f})$. Então:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y-z) &\leq p(y-z) \\
&\leq p(y + y_1 - y_1 - z) \\
&\leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z)
\end{aligned}$$

Assim,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y),$$

onde $y_1 \in X - D(\tilde{f})$ é fixado. Disso, temos:

$$\sup_{z \in D(\tilde{f})} [-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z)] \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y).$$

Daí,

$$\sup_{z \in D(\tilde{f})} [-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z)] \leq \inf_{y \in D(\tilde{f})} [p(y + y_1) - \tilde{f}(y)].$$

Tomando $m_0 = \sup_{z \in D(\tilde{f})} [-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z)]$ e $m_1 = \inf_{y \in D(\tilde{f})} [p(y + y_1) - \tilde{f}(y)]$, segue que $m_0 \leq m_1$.

Para $c \in \mathbb{R}$ com $m_0 \leq c \leq m_1$ obtemos:

1. $-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq m_0 \leq c$;
2. $c \leq m_1 \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y)$.

Por fim, seja $x = y + \alpha y_1 \in Y_1$. Analisemos os casos:

Caso 1: $\alpha < 0$.

Considerando $z = \frac{y}{\alpha}$, com $y \in D(\tilde{f})$, temos por 1 que:

$$\begin{array}{rcl} -p(-y_1 - \dfrac{y}{\alpha}) - \tilde{f}(\dfrac{y}{\alpha}) & \leq & c \\ \alpha p\left(-y_1 - \dfrac{y}{\alpha}\right) + \alpha \tilde{f}\left(\dfrac{y}{\alpha}\right) & \leq & -\alpha c \\ -(-\alpha) p\left(-y_1 - \dfrac{y}{\alpha}\right) + \alpha \tilde{f}\left(\dfrac{y}{\alpha}\right) & \leq & -\alpha c \\ -p(\alpha y_1 + y) + \tilde{f}(y) & \leq & -\alpha c. \end{array}$$

Logo, $g_1(x) = g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(\alpha y_1 + y) = p(x)$.

Caso 2: $\alpha = 0$.

Para $\alpha = 0$ segue que $x = y \in D(\tilde{f})$. Assim,
$g_1(x) = g_1(y + 0.y_1) = \tilde{f}(y) + 0.c = \tilde{f}(y) \leq p(y) = p(x)$.

Caso 3: $\alpha > 0$.

Na expressão 2., substituindo y por $\frac{y}{\alpha}$ teremos:

$$\begin{array}{rcl} c & \leq & p\left(\dfrac{y}{\alpha} + y_1\right) - \tilde{f}\left(\dfrac{y}{\alpha}\right) \\ \alpha c & \leq & \alpha p\left(\dfrac{y}{\alpha} + y_1\right) - \alpha \tilde{f}\left(\dfrac{y}{\alpha}\right) \\ \alpha c & \leq & p(y + \alpha y_1) - \tilde{f}(y). \qquad (*) \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_1(y+\alpha y_1) \\ &\triangleq \tilde{f}(y)+\alpha c \\ &\overset{*}{\leq} p(y+\alpha y_1) \\ &= p(x) \\ \therefore g_1(x) &\leq p(x). \end{aligned}$$

Concluímos então que $g_1(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in D(g_1)$. Logo, $g_1 \in E$. Mas, sendo g_1 extensão de $\tilde{f}$ e $g_1 \neq \tilde{f}$, temos uma contradição com o fato de $\tilde{f}$ ser elemento maximal de E. Portanto, $D(\tilde{f}) = X$. Isso conclui nossa demonstração.

$\square$

Observação 3.1.2. *A demonstração do Teorema de Hahn-Banach foi construída utilizando-se o Lema de Zorn como verdade. De fato, se na expressão $g_1(y+\alpha y_1) = \tilde{f}(y)+\alpha c$ tomássemos f ao invés de $\tilde{f}$, obteríamos para cada $c \in \mathbb{R}$ uma extensão linear g_1 de f para o subespaço $Z_1 = D(f) \cup [y_1]$ e nós poderíamos escolher c tal que $g_1(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in Z_1$, como podemos ver ao final da demonstração com f no lugar de $\tilde{f}$.*
Se $X = Z_1$, não há nada a se fazer.
Se $X \neq Z_1$ nós podemos tomar $y_2 \in X - Z_1$ e repetir o processo para estender f em $Z_2 = Z_1 \cup [y_2]$ e assim por diante...
Isso nos da uma sequência de subespaços Z_j, tais que $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$ e extensões lineares de f: $g_1, g_2, \ldots$, com $g_j(x) \leq p(x)$, $\forall j \in \mathbb{N}$.
Se $X = Z_n$, faríamos n passos. Se $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j$ poderíamos utilizar a técnica de indução matemática. Porém, se X não tem tal representação, precisamos do Lema de Zorn para a demonstração aqui apresentada.

3.2 Teorema de Hahn-Banach Generalizado

Teorema 3.2.1. *Seja X um espaço vetorial real ou complexo e p um funcional (de valores reais) sobre X, o qual é subaditivo, isto é, para todo $x, y \in X$, temos:*

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Seja f um funcional linear definido num subespaço Z de X e que satisfaz:

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall\ x \in Z.$$

Então f tem uma extensão $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$, satisfazendo:

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad \forall\ x \in X.$$

Observação 3.2.2. *Sejam X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $p : X \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional subaditivo. Então, $p(x) \geq 0$, para todo $x \in X$. De fato:*
Da definição de p temos que:

$$p(0.x) = |0|p(x) = 0.p(x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Por outro lado, para qualquer $x \in X$, notemos que:

$$\begin{aligned} 0 = p(0) &= p(x + (-x)) \\ &\leq p(x) + p(-x) \\ &\overset{2}{=} p(x) + p(x) = 2.p(x) \end{aligned}$$

Daí:

$$0 \leq 2.p(x) \Longrightarrow 0 \leq p(x), \quad \forall x \in X$$

Demonstração. A prova desse resultado será dividida em dois casos:

Caso 1: X é um espaço vetorial real.
Seja X um espaço vetorial real. Observamos que $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$, $\forall\ x \in Z$. Pelo Teorema 3.1.1 existe uma extensão linear $\tilde{f}$ de Z para X tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall\ x \in X.$$

A partir disso, teremos:

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x).$$

Assim,

$$\tilde{f}(x) \geq -p(x).$$

Portanto, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$.

Caso 2: X é um espaço vetorial complexo.
Como f é funcional de valores complexos, podemos escrever f na forma $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $x \in Z$, onde f_1 e f_2 são funcionais lineares que assumem valores reais. Vamos considerar primeiramente X e Z como sendo espaços vetoriais reais e denotamos esses espaços por X_r e Z_r, respectivamente. Isso significa que restringimos a multiplicação por escalares complexos à multiplicação por escalares reais.
Como f é linear em Z temos que f_1 e f_2 são funcionais lineares em Z_r. Além disso, $f_1(x) \leq |f(x)|$, $\forall\ x \in Z_r$, pois a parte real de um número complexo não pode exceder

seu valor absoluto. Uma vez que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall\ x \in Z$, segue que $f_1(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in Z_r$.
De acordo com o Teorema 3.1.1, f_1 admite uma extensão $\tilde{f}_1$ de Z_r para X_r, tal que $\tilde{f}_1(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in X_r$.

Analisemos, agora, o funcional f_2.
Observemos que para cada $x \in Z$ tem-se:

$$\begin{array}{rcl} if_1(x) - f_2(x) & = & i[f_1(x) + if_2(x)] \\ & = & if(x) \\ & = & f(ix) \\ & = & f_1(ix) + if_2(x). \end{array}$$

A parte real de ambos os lados da expressão anterior nos diz que:

(a) $-f_2(x) = f_1(ix) \Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix), \quad \forall x \in Z.$
Portanto:

(b) $f(x) = f_1(x) - if_1(ix).$

Vamos escrever $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)$, $\forall\ x \in X$. Mostraremos, então, que $\tilde{f}$ satisfaz as condições do teorema.

1. $\tilde{f}$ estende f.
   Para $z \in Z$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(z) & = & \tilde{f}_1(z) - i\tilde{f}_1(iz) \\ & = & f_1(z) - if_1(iz) \\ & = & f_1(z) + if_2(x) \\ & = & f(z). \end{array}$$

2. $\tilde{f}$ é um funcional linear sobre o espaço vetorial X.
   (a) Para $x, y \in X$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(x+y) & = & \tilde{f}_1(x+y) - i\tilde{f}_1(i(x+y)) \\ & = & \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(y) - i\tilde{f}_1(ix+iy) \\ & = & \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(y) - i[\tilde{f}_1(ix) + \tilde{f}_1(iy)] \\ & = & \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(y) - i\tilde{f}_1(ix) - i\tilde{f}_1(iy) \\ & = & \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix) + [\tilde{f}_1(y) - i\tilde{f}_1(iy)] \\ & = & \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_1(y). \end{array}$$

(b) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim, $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\alpha x) &= \tilde{f}((a+bi)x) \\
&= \tilde{f}_1(ax + bix) - i\tilde{f}_1(iax - bx) \\
&= a\tilde{f}_1(x) + b\tilde{f}_1(ix) - i[a\tilde{f}_1(ix) - b\tilde{f}_1(x)] \\
&= (a+bi)[\tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix)] \\
&= \alpha\tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

3. $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$.
   Para qualquer x tal que $\tilde{f}(x) = 0$ temos que $|\tilde{f}(x)| = 0 \leq p(x)$, pois $0 \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$.
   Por outro lado, seja $x \in X$ tal que $\tilde{f}(x) \neq 0$. Usando a forma polar para complexos, podemos escrever:

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|e^{i\theta}.$$

   Então:

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\theta} = \tilde{f}(xe^{-i\theta})$$

   Como $|\tilde{f}(x)|$ é real temos:

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(xe^{-i\theta}) = \tilde{f}_1(xe^{-i\theta}) \leq p(xe^{-i\theta}) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

□

3.3 Teorema de Hahn-Banach para Espaços Normados

Teorema 3.3.1. *Seja f um funcional linear limitado sobre um subespaço Z de um espaço normado X. Então existe um funcional $\tilde{f} \in X^*$ que estende f. Além disso:*

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z,$$

onde $\|\tilde{f}\|_X = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)|$, $\|\tilde{f}\|_Z = \sup\limits_{\substack{x\in Z\\ \|x\|=1}} |f(x)|$.

Demonstração. Se $Z = \{0\}$ então $f = 0$ e extensão $\tilde{f} = 0$. Seja $Z \neq \{0\}$.
Usaremos o Teorema de Hahn-Banach. Assim, devemos encontrar um funcional p adequado. Para todo $x \in Z$ temos: $|f(x)| \leq \|f\|_Z\|x\|$. Tomemos $p(x) = \|f\|_Z\|x\|$. Note que p é definido para todo x em X. Além disso:

1. $p(x+y) = \|f\|_Z\|x+y\| \leq \|f\|_Z(\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in Z$;

2. $p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x), \ \forall \alpha \in \mathbb{K}; \ \forall x \in Z.$

Portanto, aplicando o Teorema 3.2.1, concluímos que existe um funcional $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que é uma extensão de f e satisfaz

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\|, \quad \forall \ x \in X.$$

Tomando o supremo para todo $x \in X$ de norma 1, obtemos a desigualdade:

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z.$$

Logo:

$$\|\tilde{f}\|_X \leq \|f\|_Z \qquad (1)$$

Por outro lado, como $\tilde{f}$ estende f, temos:

$$\|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| = \|\tilde{f}\|_X.$$

Daí:

$$\|f\|_Z \leq \|\tilde{f}\|_X \qquad (2)$$

Portanto, de (1) e (2) concluímos que:

$$\|f\|_Z = \|\tilde{f}\|_X$$

□

Observação 3.3.2. *Para espaços de Hilbert, conseguir a extensão é mais simples.*
De fato, seja H um espaço de Hilbert e Z um subespaço fechado de H. Consideremos $f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear limitado. Pelo Teorema de Riesz, existe $z \in Z$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$, $\forall x \in Z$, onde $\|f\| = \|z\|$.
Definamos $\tilde{f} : H \longrightarrow \mathbb{K}$ por $\tilde{f}(x) = \langle x, z \rangle$. Temos que $\tilde{f}$ é linear e limitado, pois

$$|\tilde{f}(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|z\| \|x\|$$

e, ainda,

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leq \|z\| = \|f\|.$$

Uma vez que $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$ (já que $\tilde{f}$ estende f), obtemos $\|\tilde{f}\| = \|f\| = \|z\|$.

Note que, conforme observado acima, em espaços de Hilbert a extensão requer o Teorema de Riesz e não depende do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.3.3. *Sejam X um espaço normado e $x_0 \neq 0$ um elemento qualquer de X. Então existe um funcional $\tilde{f} \in X^*$ tal que:*

$$\|\tilde{f}\| = 1 \qquad e \qquad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Demonstração. Vamos considerar o subespaço $Z \subset X$ da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rccc} f: & Z & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x = \alpha x_0 & \longmapsto & f(x) = \alpha\|x_0\| \end{array}$$

Mostraremos que f é linear. De fato:
Dados $x, y \in Z$ e $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$, com $x = \alpha x_0$ e $y = \beta x_0$ temos:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(\alpha x_0 + \beta x_0) \\ &= f((\alpha+\beta)x_0) \\ &= (\alpha+\beta)\|x_0\| \\ &= \alpha\|x_0\| + \beta\|x_0\| \\ &= f(\alpha x_0) + f(\beta x_0) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f(\lambda\alpha x_0) \\ &= \lambda\alpha\|x_0\| \\ &= \lambda f(\alpha x_0) \\ &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Agora, verificaremos que f é limitada e tem norma $\|f\| = 1$. De fato:

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|, \ \forall x \in Z$$

Tomando o supremo dos elementos em Z de norma 1, obtemos:

$$\|f\|_X = \sup_{\substack{x\in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in Z \\ \|x\|=1}} \|x\| = 1.$$

O Teorema 3.3.1 nos diz que f tem uma extensão linear $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{K}$, onde $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$.
Em particular, $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Corolário 3.3.4. *Para cada x em um espaço normado X, temos*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f\in X^* \\ f\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Assim, se x_0 é tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, segue que $x_0 = 0$.

Demonstração. Do teorema anterior, escrevendo x ao invés de x_0 com $x_0 \neq 0$ temos:

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|\tilde{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|.$$

Por outro lado, como f é limitado, $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, $\forall\ x \in X$. Assim, obtemos:

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|\|x\|}{\|f\|} = \|x\|$$

$$\therefore \|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Se $x = 0$, temos $f(x) = 0$, $\forall f \in X^*$. Logo

$$\|x\| = 0 = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Se $f(x) = 0$, $\forall f \in X^*$, então $\sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \dfrac{|f(x)|}{\|f\|} = 0$, o que implica $\|x\| = 0$ e, consequentemente, $x = 0$. □

3.4 Formas Geométricas

Nesta seção apresentaremos duas formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach. Todos os espaços utilizados nesta seção são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

3.4.1 Preliminares

Para a compreensão e demonstração dos principais teoremas dessa seção apresentaremos, primeiramente, algumas definições e resultados fundamentais.

Definição 3.4.1. *Seja X um espaço normado.*

1. *Um ponto $a \in X$ é dito de* ***aderência*** *quando a é o limite de alguma sequência de pontos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$;*

2. *Chama-se* ***fecho*** *de X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos de aderência;*

3. *X é* ***fechado*** *quando $X = \overline{X}$;*

4. *Um conjunto $F \subset X$ é dito* ***denso*** *em X se $\overline{F} = X$.*

5. *Um* ***hiperplano*** *é um conjunto da forma :*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\},$$

onde f é um funcional linear sobre X não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Diz-se então que H é um hiperplano da equação $[f = \alpha]$.

6. *Dizemos que $C \subset X$ é um subconjunto* ***convexo*** *de X se dados $x, y \in C$, temos $tx + (1-t)y \in C$ para todo $t \in [0,1]$.*

Proposição 3.4.2. *O hiperplano da equação $[f = \alpha]$ é fechado se, e somente se, f é um funcional linear contínuo.*

Demonstração. Seja H o hiperplano de equação $[f = \alpha]$.
($\Leftarrow$) Seja f um funcional linear contínuo no espaço normado X. Queremos mostrar que $H \supset \overline{H}$, já que a outra inclusão é óbvia.
Seja $x \in \overline{H}$. Assim, existe uma sequência (x_n) em H tal que $x_n \longrightarrow x$.
Uma vez que $x_n \in H$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então $f(x_n) = \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade de f segue que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Assim, pela unicidade do limite, concluímos que $f(x) = \alpha$. Logo $x \in H$.
Como $x \in H$ foi tomado arbitrário, $\overline{H} \subset H$ e, portanto, H é fechado.

($\Rightarrow$) Suponhamos H fechado.
Seja $\mathcal{C}(H)$ o complementar de H em X. Como H é fechado segue que $\mathcal{C}(H)$ é aberto.
Seja $x_0 \in \mathcal{C}(H)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(x_0) < \alpha$. Como $\mathcal{C}(H)$ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset \mathcal{C}(H)$, onde:

$$B(x_0, \delta) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \delta\}.$$

$\vdash$: $f(x) < \alpha$, $\forall x \in B(x_0, \delta)$.
De fato, suponhamos, por contradição, que $f(x_1) > \alpha$ para algum $x_1 \in B(x_0, \delta)$. Consideremos o segmento $S = \{(1-t)x_0 + tx_1 : t \in [0,1]\}$. Seja $y = (1-t)x_0 + tx_1$, onde $t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$. Temos que $0 < t < 1$, caso $f(x_1) > \alpha > f(x_0)$. De fato:

$$\begin{aligned} f(x_1) > \alpha > f(x_0) &\implies \\ f(x_1) - f(x_0) > \alpha - f(x_0) &\implies \\ 0 < \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} < 1 &\implies \\ 0 < t < 1 & \end{aligned}$$

Logo, $y \in S$. Assim:

$$\begin{aligned} f(y) &= f[(1-t)x_0 + tx_1] \\ &= (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \\ &= f(x_0) + t[f(x_1) - f(x_0)] \\ &= f(x_0) + \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}\,[f(x_1) - f(x_0)] \\ &= f(x_0) + \alpha - f(x_0) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Porém, como $B(x_0, \delta)$ é convexa segue que $S \subset B(x_0, \delta) \subset \mathcal{C}(H)$. Logo, $f(y) \neq \alpha$ uma contradição.
Portanto, $f(x) < \alpha$, $\forall x \in B(x_0, \delta)$.

$\vdash$: $f(x_0 + sz) < \alpha$, $\forall z \in B[0,1]$, $s = \frac{\delta}{2} > 0$.
De fato, tomemos $x = x_0 + sz$.
Notemos que $\|x - x_0\| = \|x_0 + sz - x_0\| = \|sz\| = s\|z\| \leq s = \frac{\delta}{2} < \delta$. Assim:
$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) < \alpha \Rightarrow f(x_0 + sz) < \alpha$, $\forall z \in B[0,1]$.

$\vdash$: f é limitado.
De fato, conforme a afirmação anterior, temos:

$$\begin{aligned} f(x_0 + sz) &< \alpha & \forall z \in B[0,1] \\ f(x_0) + sf(z) &< \alpha & \forall z \in B[0,1] \\ f(z) &< \frac{\alpha - f(x_0)}{s} & \forall z \in B[0,1]. \end{aligned}$$

Observemos, ainda, que $z \in B[0,1] \Rightarrow -z \in B[0,1]$. Assim, para todo $z \in B[0,1]$:

$$|f(z)| = \begin{cases} f(z) & \text{se } f(z) \geq 0 \\ -f(z) = f(-z) & \text{se } f(z) < 0 \end{cases}$$

Portanto, $|f(z)| = f(\pm z) < \frac{\alpha - f(x_0)}{s}$ $\forall z \in B[0,1]$.

Aplicando o supremo, obtemos:

$$\sup_{\|z\|=1} |f(z)| \leq \frac{\alpha - f(x_0)}{s}$$

Portanto, f é limitado.

Assim, temos que f é um funcional linear contínuo. $\square$

Definição 3.4.3. *Sejam $A, B \subset X$, onde X é um espaço vetorial normado. Dizemos que o hiperplano H da equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido*

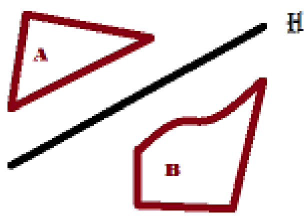
- ***amplo*** *se :*

$$f(x) \leq \alpha, \forall x \in A \text{ e } f(x) \geq \alpha, \forall x \in B;$$

- ***estrito*** *se :*

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } f(x) < \alpha - \varepsilon, \forall x \in A \text{ e } f(x) > \alpha + \varepsilon, \forall x \in B.$$

Observação 3.4.4. *A definição anterior pode ser interpretada geometricamente uma vez que a separação significa que os conjuntos A e B estão situados em lados distintos mediante ao hiperplano H:*



3.4.2 Primeira Forma Geométrica

Para demonstrarmos o resultado principal desta seção precisamos de duas ferramentas:

Lema 3.4.5. *Sejam X espaço normado e $C \subset X$ um conjunto convexo e aberto tal que $0 \in C$. Para todo $x \in X$ define-se:*

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}.$$

Então o funcional p atende:

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in X$ *e* $\lambda > 0$;
2. $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$;
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in X$;
4. *Existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \forall x \in X$.

O funcional $p(x)$ é chamado funcional de Minkowski.

Demonstração. 1. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $x \in X$.
$p(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}\lambda x \in C\}$.

Observemos que $\alpha^{-1}\lambda = \gamma^{-1} \Leftrightarrow \alpha^{-1} = \gamma^{-1}\lambda^{-1} \Leftrightarrow \alpha^{-1} = (\lambda\gamma)^{-1} \Leftrightarrow \alpha = \lambda\gamma$.

$\vdash$: $\inf\{\lambda\gamma > 0 : \gamma^{-1}x \in C\} = \lambda \inf\{\gamma > 0 : \gamma^{-1}x \in C\}$.

De fato, denotemos por $M = \{\lambda\gamma > 0 : \gamma^{-1}x \in C\}$, $N = \{\gamma > 0 : \gamma^{-1}x \in C\}$, $m = \inf M$ e $n = \inf N$.
Vamos mostrar que $m = \lambda n$.
Como $n = \inf N$ segue que $n \leq \gamma$ tal que $\gamma^{-1}x \in C$. Assim, $\lambda n \leq \lambda\gamma$ tal que $\gamma^{-1}x \in C$. Logo, λn é cota inferior para o conjunto M e, por definição de ínfimo, temos $\lambda n \leq m$ e, assim, $n \leq \lambda^{-1}m$.
Suponhamos $n < \lambda^{-1}m$. Logo, existe $\gamma_0 \in N$ tal que $n \leq \gamma_0 < \lambda^{-1}m$. Sendo assim, $\lambda\gamma_0 < m$. Noutras palavras, existe $\gamma_0 > 0$ tal que $\gamma_0^{-1}x \in C$ onde $\lambda\gamma_0 > 0$ e $\lambda\gamma_0 < m$. Isto é, $\lambda\gamma_0 \in M$ e $\lambda\gamma_0 < m = \inf M$, absurdo.
Assim, $\lambda n = m$.

2. Mostraremos que os conjuntos C e $C' = \{x \in X : p(x) < 1\}$ são iguais.

Seja $x \in C$. Como C é aberto, por hipótese, $(1+\varepsilon)x \in C$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Consideremos $A = \{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$.
Tomando $\alpha^{-1} = (1+\varepsilon)$ temos que $\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon} > 0$ e, como $\alpha^{-1}x \in C$ segue que $\alpha \in A$.
Logo, $p(x) = \inf A \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Portanto, $C \subset C'$.
Reciprocamente, seja $x \in C'$. Assim, $x \in X$ e $p(x) < 1$.
Como $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$, existe $0 < \alpha_0 < 1$ tal que $\alpha_0^{-1}x \in C$. Assim, pela convexidade de C e pelo fato de $0 \in C$, concluímos que $x = \alpha_0(\alpha_0^{-1}x) + (1-\alpha_0)0 \in C$. Portanto $C' \subset C$ e, daí, $C' = C$.

3. Sejam $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$. Note que $p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) = \frac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} < 1$ e $p\left(\frac{y}{p(y)+\varepsilon}\right) = \frac{p(y)}{p(y)+\varepsilon} < 1$.
Assim, pelo item anterior, $\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$.
Como C é convexo temos $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ $\forall t \in [0,1]$. Em particular, para $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, temos:

$$\frac{(p(x)+\varepsilon)x}{(p(x)+p(y)+2\varepsilon)(p(x)+\varepsilon)} + \frac{(p(y)+\varepsilon)y}{(p(x)+p(y)+2\varepsilon)(p(y)+\varepsilon)} = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C.$$

Novamente, pelo item anterior,

$$p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} < 1$$
$$\Rightarrow \quad p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad p(x+y) \leq p(x)+p(y).$$

4. Como $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$, então $p(x) \geq 0$.
   Como C é aberto e $0 \in C$ então existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset C$. Assim, sejam $x \in X$ e $y = \frac{r}{2\|x\|}x$. Então:
   $$\|y\| = \frac{r}{2\|x\|}\|x\| = \frac{r}{2} < r$$
   Logo, $y \in B(0,r)$.
   Agora, tomando $\alpha_0 = \frac{2\|x\|}{r} > 0$ temos que $\alpha_0^{-1}x = \frac{r}{2\|x\|}x = y \in B(0,r) \subset C$.
   Dessa maneira, para $M = \frac{2}{r}$, temos que $0 \leq p(x) \leq \alpha_0 = M\|x\|$.

□

Lema 3.4.6. *Sejam X espaço normado e $C \subset X$ um conjunto convexo, aberto e não-vazio. Se $x_0 \notin C$ então existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in C$.*
Em particular, o hiperplano de equação $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ de C no sentido amplo.

Demonstração. Temos duas possibilidades:

- $0 \in C$, ou
- $0 \notin C$.

Se $0 \in C$ consideremos p o funcional de Minkowski, $G = x_0\mathbb{R} = \{x_0 r : r \in \mathbb{R}\}$ e o funcional $g : G \to \mathbb{R}$ definido por $g(x_0 r) = r$.
Segue do Lema anterior que $p(x_0) \geq 1$.

$\vdash$: $g(y) \leq p(y)$, $\forall y \in G$.

De fato, se $r \leq 0$ então $g(y) = g(x_0 r) = r \leq 0 \leq p(x_0 r) = p(y)$.
Caso contrário, se $r > 0$, então $g(y) = g(x_0 r) = r = r \cdot 1 \leq r \cdot p(x_0) = p(x_0 r) = p(y)$.
Sendo p um funcional sublinear de X e g um funcional linear que está definido para o subespaço $G = [x_0]$ satisfazendo $g(y) \leq p(y)$, $\forall y \in G$ segue, do Teorema de Hahn-Banach, que existe uma extensão linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$ e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in G$.
Em particular, como $x_0 = x_0 \cdot 1 \in G$, temos $f(x_0) = g(x_0) = g(x_0 \cdot 1) = 1$.
Pelo lema anterior, existe $M > 0$ tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Logo,

$$\sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} f(\pm x) \leq \sup_{\|x\|=1} p(\pm x) \leq \sup_{\|x\|=1} M\|\pm x\| = \sup_{\|x\|=1} M\|x\| = M$$

Isto é, f é limitado e, portanto, contínuo. Daí $f \in X^*$.

Por fim, seja $x \in C$. Logo, $f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0)$, ou seja, $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in C$.

Vamos supor agora que $0 \notin C$. Fixando $y \in C$ vamos considerar o conjunto:

$$D = \{x - y : x \in C\}$$

Temos:

1. $0 \in D$;
2. D é convexo;
3. D é aberto;
4. $y_0 = x_0 - y \notin D$.

De fato,

1. Como $y \in C$ temos que $0 = y - y \in D$
2. Sejam $w, z \in D$. Logo, existem w_0 e z_0 em C tais que $w = w_0 - y$ e $z = z_0 - y$. Como C é convexo segue que $tw_0 + (1-t)z_0 \in C$, $t \in [0,1]$. Consequentemente, com $t \in [0,1]$, teremos:

$$\begin{array}{rcl} (tw_0 + (1-t)z_0) - y & \in & D \\ (tw_0 + (1-t)z_0) - y + 0 & \in & D \\ (tw_0 + (1-t)z_0) - y + ty - ty & \in & D \\ tw_0 - ty + (1-t)z_0 - (1-t)y & \in & D \\ t(w_0 - y) + (1-t)(z_0 - y) & \in & D \\ tw + (1-t)z & \in & D. \end{array}$$

   Portanto, D é convexo.

3. $D = \{x - y; x \in C\}$ é aberto.
   Seja $z_0 = w_0 - y \in D$, com $w_0 \in C$. Como C é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B = B(w_0, \delta) \subset C$. Afirmamos que $B(w_0 - y, \delta) \subset B - \{y\}$.
   De fato, se $z \in B - \{y\}$, então $z = x - y$, com $x \in B$. Então $\|z - (w_0 - y)\| = \|x - y - w_0 + y\| = \|x - w_0\| < \delta$ pois $x \in B$. Logo, $B - \{y\} \subset B(w_0 - y, \delta)$.
   Por outro lado, se $z \in B(w_0 - y, \delta)$, podemos escrever $\|z - (w_0 - y)\| < \delta$. Chamando $z_0 = z + y$, temos $z = z_0 - y$. Além disso:

$$\|z_0 - w_0\| = \|z + y - w_0\| = \|z - (w_0 - y)\| < \delta$$

Ou seja, $z_0 \in B$. Logo, $z = z_0 - y \in B - \{y\}$ e temos $B(w_0 - y, \delta) \subset B - \{y\}$. Podemos ver também que $B(w_0 - y, \delta) = B - \{y\} \subset C - \{y\} = D$. Assim, D é aberto.

4. $y_0 \notin D$, pois se $y_0 = x_0 - y \in D$ então $x_0 \in C$ o que contraria a hipótese de que $x_0 \notin C$.

Segue de (1) $-$ (4) da parte anterior da demonstração, que existe $h \in X^*$ tal que $h(z) < h(y_0)$, $\forall z \in D$. Dessa maneira, temos:

$$\begin{aligned} x \in C \Rightarrow x - y \in D &\Rightarrow h(x-y) < h(x_0 - y) \\ &< h(x_0 - y) \Rightarrow h(x) - h(y) \\ &< h(x_0) - h(y) \Rightarrow h(x) < h(x_0),\ \forall x \in C \end{aligned}$$

□

Podemos, agora, enunciar e demonstrar a Primeira forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.4.7. *Sejam X um espaço normado, $A, B \subset X$ dois conjuntos disjuntos, convexos e não-vazios. Se A e B são abertos, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido amplo.*

Demonstração. Seja $C = A - B = \{a - b; a \in A \text{ e } b \in B\}$.
Como A e B são convexos, segue que C é convexo.

$\vdash$: C é não-vazio e aberto.
De fato, temos por hipótese que A e B são não-vazios e abertos. Ainda, $C = A - B = \bigcup_{y \in B} (A - \{y\})$. Logo $C \neq \emptyset$ e aberto uma vez que C é a reunião de conjuntos abertos.
Ainda, $0 \notin C$, pois, do contrário, existiriam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $0 = a - b$, ou seja, $a = b$, contrariando a hipótese de A e B serem disjuntos.Portanto, pelo lema anterior, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(0) = 0$, $\forall x \in C$.
Isso nos diz que $f(a - b) < f(0) = 0, \forall a \in A,\ \forall b \in B$. Usando a linearidade de f temos que:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) < 0, \forall a \in A,\ \forall b \in B &\implies \\ f(a) < f(b), \forall a \in A,\ \forall b \in B &\implies \\ \sup_{a \in A} f(a) < f(b), \forall b \in B &\implies \\ f(a) \leq \sup_{a \in A} f(a) \leq \inf_{b \in B} f(b) \leq f(b), \forall a \in A, \forall b \in B &\implies \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \frac{\sup f(a) + \inf f(b)}{2}$, temos:

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b), \ \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Logo, o hiperplano $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido amplo.

□

3.4.3 Segunda Forma Geométrica

Teorema 3.4.8. *Sejam $A \subset X$ e $B \subset X$ dois conjuntos convexos, não-vazios e disjuntos. Suponhamos que A seja fechado e que B seja compacto. Então, existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.*

Demonstração. Temos $A, B \subset X$; $A \cap B = \emptyset$; $A = \overline{A}$.
Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos $B(0, \varepsilon) = \{x \in X; \, \|x\| < \varepsilon\}$. Observemos que:

(i) $B(0, \varepsilon)$ é não-vazio. De fato, $0 \in B(0, \varepsilon)$;

(ii) $B(0, \varepsilon)$ é aberto;

(iii) $B(0, \varepsilon)$ é convexo.

Consideremos, agora, $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$. Segue que:

(i) $A_\varepsilon \neq \emptyset$, pois existe $a = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{0}_{\in B(0,\varepsilon)} \in A_\varepsilon$,já que $A \neq \{0\}, B(0, \varepsilon) \neq \emptyset$;

(ii) A_ε é aberto.
De fato, de $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ temos que $A_\varepsilon - A = B(0, \varepsilon)$ que é aberto.
Assim, seja $x_\varepsilon \in A_\varepsilon$, onde $x_\varepsilon = x + b_1$, $x \in A$, $b_1 \in B(0, \varepsilon)$. Logo, $x_\varepsilon - x = b_1$, ou seja, $x_\varepsilon - x \in A_\varepsilon - A$.
Como $A_\varepsilon - A = B(0, \varepsilon)$ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_\varepsilon - x, \delta) \subset A_\varepsilon - A$.
Seja $z \in B(x_\varepsilon, \delta)$ e tomemos $y = z - x$. Daí,

$$\|y - (x_\varepsilon - x)\| = \|z - x - (x_\varepsilon - x)\| = \|z - x_\varepsilon\| < \delta,$$

ou seja, $y \in B(x_\varepsilon - x, \delta) \subset A_\varepsilon - A$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} y = z - x \quad &\Rightarrow \quad z = x + y, \quad x \in A, y \in A_\varepsilon - A = B(0, \varepsilon) \\ &\Rightarrow \quad z \in A + B(0, \varepsilon) = A_\varepsilon \\ &\Rightarrow \quad B(x_\varepsilon, \delta) \subset A_\varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) A_ε é convexo.

Sejam $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in A_\varepsilon$, assim:

$x_\varepsilon = x + b_1$, $x \in A$, $b_1 \in B(0,\varepsilon)$

$y_\varepsilon = y + b_2$, $y \in A$, $b_2 \in B(0,\varepsilon)$

Seja $t \in [0,1]$.

$z_\varepsilon = (1-t)x_\varepsilon + ty_\varepsilon = (1-t)(x+b_1) + t(y+b_2) = (1-t)x + ty + (1-t)b_1 + tb_2$.

Como A e $B(0,\varepsilon)$ são conjuntos convexos temos que $(1-t)x + ty \in A$ e $(1-t)b_1 + tb_2 \in B(0,\varepsilon)$. Logo, $z_\varepsilon \in A_\varepsilon$.

Portanto, A_ε é convexo.

Analogamente, mostramos que o conjunto $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$ é não-vazio, aberto e convexo.

Afirmamos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, A_ε e B_ε são conjuntos disjuntos.

De fato, caso $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon > 0$, então segue que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{\frac{1}{n}} \cap B_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $z_n \in A_{\frac{1}{n}} \cap B_{\frac{1}{n}}$. Desse modo, temos:

$z_n \in A_{\frac{1}{n}} = A + B(0, \frac{1}{n}) \Rightarrow z_n = a_n + x_n$,

$z_n \in B_{\frac{1}{n}} = B + B(0, \frac{1}{n}) \Rightarrow z_n = b_n + y_n$,

onde $a_n \in A$, $x_n \in B(0, \frac{1}{n})$, $b_n \in B$ e $y_n \in B(0, \frac{1}{n})$.

Uma vez que (b_n) é uma sequência em B, então existe subsequência (b_{n_k}) tal que $b_{n_k} \to b \in B$, pois B é compacto. Em A consideremos a subsequência (a_{n_k}) de (a_n). Note que:

$\|a_{n_k} - b_{n_k}\| = \|z_{n_k} - x_{n_k} - z_{n_k} + y_{n_k}\| = \|y_{n_k} - x_{n_k}\| \leq \|y_{n_k}\| + \|x_{n_k}\| < \frac{1}{nk} + \frac{1}{nk} = \frac{2}{nk}$.

Assim:

$\|a_{n_k} - b\| = \|a_{n_k} - b_{n_k} + b_{n_k} - b\| \leqslant \|a_{n_k} - b_{n_k}\| + \|b_{n_k} - b\| \longrightarrow 0$.

Então, $a_{n_k} \longrightarrow b$ e, como A é fechado, $b \in A$, ou seja, $b \in A \cap B$. Absurdo!

Logo, $A_\varepsilon \bigcap B_\varepsilon = \emptyset$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Como $A_\varepsilon, B_\varepsilon \subset X$ são conjuntos convexos, não-vazios e disjuntos(para um certo $\varepsilon > 0$ adequado), pelo Teorema 3.4.7, existe um hiperplano fechado que separa A_ε e B_ε no sentido amplo. Seja $[f = \alpha]$ tal hiperplano. Segue que:

$f(t_\varepsilon) \leq \alpha \leq f(y_\varepsilon)$, $\forall t_\varepsilon \in A_\varepsilon$, $\forall y_\varepsilon \in B_\varepsilon$.

Onde $x_\varepsilon = x + b_1$, $y_\varepsilon = y + b_2$, $x \in A$, $y \in B$ e $b_1, b_2 \in B(0,\varepsilon)$.

Em particular, dado $z \in B(0,1)$, temos que:

$$\|z\varepsilon\| = \varepsilon\|z\| < \varepsilon.1 = \varepsilon$$

Isto é, $z\varepsilon \in B(0, \varepsilon)$. Para $x \in A$ e $y \in B$, temos:

$$x + z\varepsilon \in A_\varepsilon; x - z\varepsilon \in A_\varepsilon \tag{3.1}$$

$$y + z\varepsilon \in B_\varepsilon; y + z\varepsilon \in B_\varepsilon \tag{3.2}$$

De (3.1), para todo $x \in A$ e $z \in B(0,1)$ temos:

$$\begin{aligned} f(x + z\varepsilon) \leq \alpha &\implies \\ f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha &\implies \\ f(z) \leq \frac{\alpha - f(x)}{\varepsilon} & \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} f(x - z\varepsilon) \leq \alpha &\implies \\ f(x) - \varepsilon f(z) \leq \alpha &\implies \\ -f(z) \leq \frac{\alpha - f(x)}{\varepsilon} & \end{aligned}$$

Assim:

$$|f(z)| \leq \frac{\alpha - f(x)}{\varepsilon}, \ \forall z \in B(0,1), \ \forall x \in A$$

De onde vem que:

$$\begin{aligned} \|f\| \leq \frac{\alpha - f(x)}{\varepsilon}, \quad \forall x \in A &\implies \\ f(x) \leq \alpha - \varepsilon\|f\|, \quad \forall x \in A & \end{aligned}$$

Usando (3.2), para todo $y \in B$ e $z \in B(0,1)$:

$$\begin{aligned} f(y + z\varepsilon) \geq \alpha &\implies \\ f(y) + \varepsilon f(z) \geq \alpha &\implies \\ f(z) \geq \frac{\alpha - f(y)}{\varepsilon} &\implies \\ -f(z) \leq \frac{f(y) - \alpha}{\varepsilon} & \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} f(y - z\varepsilon) \geq \alpha &\implies \\ f(y) - \varepsilon f(z) \geq \alpha &\implies \\ -f(z) \geq \frac{\alpha - f(y)}{\varepsilon} &\implies \\ f(z) \leq \frac{f(y) - \alpha}{\varepsilon} & \end{aligned}$$

Então:

$$|f(z)| \leq \frac{f(y) - \alpha}{\varepsilon}, \ \forall z \in B(0,1), \ \forall y \in B$$

De onde vem que:

$$\begin{aligned} \|f\| \leq \frac{f(y)-\alpha}{\varepsilon}, \quad \forall y \in B \implies \\ f(y) \geq \alpha + \varepsilon \|f\|, \quad \forall y \in B \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(x) \leq \alpha - \varepsilon\|f\|, \quad \forall x \in A &\implies \\ f(x) + \varepsilon\|f\| \leq \alpha, \quad \forall x \in A &\implies \\ f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|f\| < f(x) + \varepsilon\|f\| \leq \alpha, \quad \forall x \in A &\implies \\ f(x) < \alpha - \frac{\varepsilon}{2}\|f\|, \quad \forall x \in A \quad (*) & \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} f(y) \geq \alpha + \varepsilon\|f\|, \quad \forall y \in B &\implies \\ f(y) - \varepsilon\|f\| \geq \alpha, \quad \forall y \in B &\implies \\ f(y) - \frac{\varepsilon}{2}\|f\| > f(y) - \varepsilon\|f\| \geq \alpha, \quad \forall y \in B &\implies \\ f(y) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\|f\|, \quad \forall y \in B \qquad (**) & \end{aligned}$$

As desigualdades $(*)$ e $(**)$ nos dizem que o hiperplano $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido estrito. □

O próximo resultado é muito útil para se provar que um subespaço vetorial é denso.

Corolário 3.4.9. *Se $F \subset X$ é um subespaço vetorial tal que $\overline{F} \neq X$, então existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que*

$$f(x) = \langle f, x \rangle = 0, \quad \forall\ x \in F.$$

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \overline{F}$.
Aplicaremos o Teorema 3.4.8, com $A = \overline{F}$ e $B = \{x_0\}$. Observemos que $A, B \subset X$, $A \cap B = \varnothing$ e A, B são convexos. Assim, existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa $\overline{F}$ e $\{x_0\}$ no sentido estrito, isto é:

$$\begin{aligned} f(a) < \alpha - \varepsilon \ \leq \alpha \leq \ \alpha + \varepsilon < f(x_0), \quad \forall a \in A. \\ f(a) \ < \alpha < \ f(x_0), \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

Ainda, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in F$ temos $\lambda x \in F$, já que é subespaço vetorial de X. Assim:

$$f(\lambda x) < \alpha, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F \implies \lambda f(x) < \alpha, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F$$

Desse modo, concluímos que $f(x) = 0, \forall x \in F$.

□

4) Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações do Teorema de Hahn-Banach. Uma das aplicações apresentadas garante a extensão de funcionais lineares positivos em espaços vetoriais normados. A segunda aplicação do teorema será para demonstrar que operadores lineares limitados têm a mesma norma que seus adjuntos. Nas seguintes seções, o teorema de Hahn-Banach nos auxiliará no estudo dos espaços reflexivos e espaços separáveis.

4.1 Espaços Vetoriais Normados

Nesta seção, vamos apresentar um resultado(teorema 4.1.13) que trata da extensão de funcionais lineares positivos e que utiliza o teorema de Hahn-Banach em sua demonstração. Usaremos espaços vetoriais reais em toda a seção.

Definição 4.1.1. *(**Espaço Vetorial Ordenado**) Um espaço vetorial ordenado é um par $(E, \leq)$, onde E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\leqslant$ é uma relação em E satisfazendo:*

(a) $x \leq x$, $\forall x \in E$;

(b) *Se* $x \leq y$ *e* $y \leq z$ *então* $x \leq z$;

(c) *Se* $x \leq y$ *e* $z \in E$, *então* $x + z \leq y + z$;

(d) *Se* $x \leq y$ *e* $\alpha \in [0, +\infty)$ *então* $\alpha x \leq \alpha y$.

Definição 4.1.2. *(**Wedge**) Se E é um espaço vetorial, um Wedge é um subconjunto não-vazio $P \subset E$ tal que:*

(a) *Se* $x, y \in P$ *então* $x + y \in P$;

(b) *Se* $x \in P$ *e* $\alpha \in [0, +\infty)$ *então* $\alpha x \in P$.

Proposição 4.1.3. *(i) Se $(E, \leq)$ é um espaço vetorial ordenado e $P = \{x \in E; x \geq 0\}$, então P é um Wedge.*

(ii) Sejam P um Wedge no espaço vetorial real E e $\leq$ é definido sobre E por

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

Então $(E, \leq)$ é espaço vetorial ordenado.

Demonstração. (i) (a) Sejam $x, y \in P$. Assim $x, y \geq 0$.
Pela propriedade (c) da definição 4.1.1 temos:

$$y = 0 + y \leq x + y$$

Como $0 \leq y$ e $y \leq x + y$, pelo item (b) da definição 4.1.1, segue que $0 \leq x + y$.
Então, $x + y \in P$.

(b) Seja $x \in P$, $\alpha \in [0, \infty)$. Então:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \\ \alpha \cdot 0 &\leq \alpha \cdot x \quad (propriedade(d)) \\ 0 &\leq \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha x \in P$.

(ii) (a) $x \leq x$. De fato, $x \leq x \Leftrightarrow x - x = 0 \in P$.
$0 \in P$, pois $x \in P$, $\alpha = 0$ implicam $0.x = 0 \in P$.

(b) Sejam $x, y, z \in E$. Observemos que:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

$$y \leq z \Leftrightarrow z - y \in P$$

Como P é Wedge temos $(y - x) + (z - y) \in P$. Daí, $z - x \in P$. Portanto, $x \leq z$.

(c) Sejam $x, y, z \in E$.

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow y - x \in P \\ &\Leftrightarrow y - x - z + z \in P \\ &\Leftrightarrow (y + z) - (x + z) \in P \\ &\Leftrightarrow (x + z) \leq (y + z). \end{aligned}$$

(d) Sejam $x, y \in E$, $\alpha \in [0, \infty)$.

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow y - x \in P \\ &\Rightarrow \alpha(y - x) \in P \\ &\Rightarrow \alpha y - \alpha x \in P \\ &\Leftrightarrow \alpha x \leq \alpha y. \end{aligned}$$

□

Definição 4.1.4. *Se* $(E, \leq)$ *é um espaço vetorial ordenado então* $P = \{x \in E; x \geq 0\}$ *é chamado de* ***Wedge de elementos positivos****.*

Proposição 4.1.5. *Sejam* $(E, \leq)$ *um espaço vetorial ordenado e* P *um Wedge de elementos positivos. Então,* $P \bigcap (-P) = \{0\}$ *se, e somente se, dados* $x, y \in E$ *tais que* $x \leq y$ *e* $y \leq x$ *tem-se* $x = y$*.*

Demonstração. $(\Longleftarrow)$ Temos $P = \{x \in E; x \geq 0\}$ e $-P = \{-x; x \in P\}$.
Seja $x \in P \bigcap (-P)$. Então $x \in P$ e $x \in -P$.
$x \in -P \Rightarrow -x \in P$.
$x \in P \Rightarrow 0 \leq x$.
$x \in P \Rightarrow 0 \leq -x \Rightarrow x + 0 \leq x + (-x) \Rightarrow x \leq 0$.
Como $0 \leq x$ e $x \leq 0$ concluímos que $x = 0$.

$(\Longrightarrow)$ Suponhamos que $P \bigcap (-P) = \{0\}$.
Sejam $x, y \in E$ tais que $x \leq y$ e $y \leq x$.
$x \leq y \Rightarrow 0 \leq y - x \Rightarrow y - x \in P$.
$y \leq x \Rightarrow 0 \leq x - y \Rightarrow 0 \leq -(y - x) \Rightarrow -(y - x) \in P \Rightarrow y - x \in -P$.
Logo, $y - x \in P \bigcap (-P) = \{0\}$. Portanto, $x = y$. □

Definição 4.1.6. *Um cone em* $(E, \leq)$ *é um Wedge* P *tal que* $P \bigcap (-P) = \{0\}$*.*

Definição 4.1.7. *Se* $(E, \leq)$ *é um espaço vetorial ordenado, um subconjunto* A *de* E *é dito* ***cofinal*** *se para todo* $x \geq 0$ *em* E*, existe um* $a \in A$ *tal que* $a \geq x$*.*
Um elemento e *de* E *é uma* ***unidade de ordem*** *se para todo* $x \in E$ *existe um inteiro positivo* n *tal que* $-ne \leq x \leq ne$*.*

Definição 4.1.8. *Se* $(E, \leq)$ *e* $(F, \leq)$ *são espaços vetoriais ordenados e* $T : E \longrightarrow F$ *é uma aplicação linear, então* T *é positivo se* $T(x) \geq 0$ *toda vez que* $x \geq 0$*.*

Lema 4.1.9. *Sejam* $(E, \leq)$ *um espaço vetorial ordenado,* P *um Wedge de elementos positivos e* F *um subespaço vetorial de* E *que é cofinal. Então,* $E_1 = F + P - P$ *é um subespaço vetorial de* E*.*

Demonstração. Temos que $P = \{x \in E; x \geq 0\}$ e $-P = \{-x; x \in P\}$.

1. Como $0 \in F$, $0 \in P$ e $0 \in -P$ temos que $0 = 0 + 0 - 0 \in E_1$.

2. Sejam $x, y \in E_1$. Assim, existem $f_1, f_2 \in F$, $p_1, p_2 \in P$ e $p_3, p_4 \in -P$ tais que:

$$x = f_1 + p_1 + p_3$$

$$y = f_2 + p_2 + p_4$$

Assim:

$$x + y = \underbrace{\underbrace{f_1 + f_2}_{\in F} + \underbrace{p_1 + p_2}_{\in P} + \underbrace{p_3 + p_4}_{\in -P}}_{\in E_1}$$

Logo, $x + y \in E_1$.

3. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E_1$. Existem $f \in F$, $p_1 \in P$ e $p_2 \in -P$ tais que:

$$x = f + p_1 + p_2$$

Assim:

$$\lambda x = \underbrace{\lambda f}_{\in F} + \lambda p_1 + \lambda p_2$$

Queremos garantir que $\lambda x \in E_1$.
Se $\lambda \geq 0$ temos $\lambda p_1 \in P$ e $\lambda p_2 \in -P$.
Vamos supor que $\lambda < 0$. Logo, $-\lambda > 0$. Observemos que:

$$\begin{array}{rcl} p_1 \in P & \overset{P \text{ é } Wedge}{\Longrightarrow} & -\lambda p_1 \in P \Longrightarrow \lambda p_1 \in -P \\ p_2 \in -P & \Longrightarrow & -p_2 \in P \overset{P \text{ é } Wedge}{\Longrightarrow} (-\lambda)(-p_2) \in P \Longrightarrow \lambda p_2 \in P \end{array}$$

Podemos escrever então:

$$\lambda x = \underbrace{\lambda f}_{\in F} + \underbrace{\lambda p_1}_{\in P} + \underbrace{\lambda p_2}_{\in -P} \in E_1$$

$\square$

Lema 4.1.10. *Sejam $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado e E_1 o conjunto definido no Lema 4.1.9. Então, $E_1 = F - P = F + P$.*

Demonstração. Temos que $E_1 = F + P - P$ como no 4.1.9.
Fixando $x \in E_1$ temos que existem $f \in F$, $p_1 \in P$ e $p_2 \in -P$ tais que $x = f + p_1 + p_2$.
Como F é cofinal, existe $y \in F$ tal que $y \geq p_1$.
Observemos que $y \geq p_1 \Longrightarrow y - p_1 \geq 0$. Daí $y - p_1 \in P$.
Assim, $p_1 = y - (y - p_1) \in F - P$.
Logo, $x = \underbrace{f + p_2}_{\in F-P} + \underbrace{p_1}_{\in F-P} \in (F - P) + (F - P) \subset (F - P)$ acarretando que $E_1 \subset F - P$.
Por outro lado, temos que $F - P \subset E_1$, donde concluímos que $E_1 = F - P$.

Como E_1, F são subespaços vetoriais de E temos que $-E_1 = E_1$ e $-F = F$. Seja $x \in E_1$. Como já demonstrado, temos que $E_1 = F - P$, assim existem $f \in F$ e $p \in -P$

tais que $x = f + p$. Observemos que:

$$\begin{aligned} f + p = x \in E_1 &\implies \\ -(f+p) = -x \in E_1 &\implies \\ -f - p = -x \in E_1 &\implies \\ -x = \underbrace{-f}_{\in F} + \underbrace{-p}_{\in P} & \end{aligned}$$

Logo, $E_1 \subset F + P$.
Por outro lado, fixando $y \in F + P$ temos que $y = f + p$, onde $f \in F$ e $p \in P$. Como:

$$y = \underbrace{\underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{p}_{\in P} + \underbrace{0}_{\in -P}}_{\in E_1}$$

segue que $F + P \subset E_1$. Portanto, $E_1 = F + P$. □

Lema 4.1.11. *Sejam $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado e E_1 o conjunto definido no Lema 4.1.9. Então, dado $x \in E_1$ existem $y_1, y_2 \in F$ tais que $y_2 \leq x \leq y_1$.*

Demonstração. Seja $x \in E_1$. Pelo lema 4.1.10 existem $y_1 \in F$ e $p_1 \in -P$ tais que $x = y_1 + p_1$. Observemos que:

$$x = y_1 + p_1 \Longrightarrow p_1 = x - y_1 \Longrightarrow x - y_1 \in -P \Longrightarrow y_1 - x \in P \longrightarrow y_1 - x \geq 0 \Longrightarrow y_1 \geq x$$

Por outro lado, como $E_1 = F + P$, existem $y_2 \in F$ e $p_2 \in P$ tais que $x = y_2 + p_2$. Observemos que:

$$x = y_2 + p_2 \Longrightarrow p_2 = x - y_2 \Longrightarrow x - y_2 \in P \Longrightarrow x - y_2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq y_2$$

Logo, $y_2 \leq x \leq y_1$. □

Lema 4.1.12. *Sejam $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado, E_1 o conjunto definido no Lema 4.1.9 e $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. Definindo $q : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional dado por $q(x) = \inf\{f(y);\, y \in F,\, y \geqslant x\}$, temos que q é sublinear.*

Demonstração. **i)** O funcional

$$\begin{array}{rccc} q: & E_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & q(x) = \inf\{f(y);\ y \in F;\ y \geq x\} \end{array}$$

está bem definido. De fato:
Seja $x \in E_1$. O Lema 4.1.11 nos garante que existe $y \in F$ tal que $y \geq x$. Para todo $y \in F$, onde $y \geq x$ observamos que:
$y \geq x \Rightarrow y - x \geq x - x \Rightarrow y - x \geq 0 \Rightarrow f(y - x) \geq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

Como $f(y) \geq f(x)$ para todo $y \in F$ tal que $y \geq x$, existe $\inf\{f(y);\ y \in F;\ y \geq x\}$. Portanto, q está bem definida.

ii) Sejam $x_1, x_2 \in E_1$

$q(x_1 + x_2) = inf\{f(y); y \in F, y \geqslant x_1 + x_2\}$

$q(x_1) = inf\{f(y); y \in F, y \geqslant x_1\}$

$q(x_2) = inf\{f(y); y \in F, y \geqslant x_2\}$

Consideremos os seguintes conjuntos:

$S = \{f(y); y \in F, y \geqslant x_1 + x_2\}$

$S_1 = \{f(y); y \in F, y \geqslant x_1\}$

$S_2 = \{f(y); y \in F, y \geqslant x_2\}$

Seja $s_1 \in S_1$, então $s_1 = f(y_1)$, $y_1 \in F$ e $y_1 \geqslant x_1$

Seja $s_2 \in S_2$, então $s_2 = f(y_2)$, $y_2 \in F$ e $y_2 \geqslant x_2$

Observemos que:

$$\begin{aligned} y_1 \geqslant x_1 \quad &\Rightarrow \quad y_1 + y_2 \geqslant x_1 + y_2 \geqslant x_1 + x_2 \\ &\Rightarrow \quad y_1 + y_2 \geqslant x_1 + x_2 \end{aligned}$$

$f(y_1 + y_2) \in S \Rightarrow s_1 + s_2 = f(y_1) + f(y_2) \in S \Rightarrow S_1 + S_2 \subset S$

Como $S_1 + S_2 \subset S$, temos que $inf\ S \leqslant inf\ S_1\ +\ inf\ S_2$

Assim, $q(x_1 + x_2) \leqslant q(x_1) + q(x_2)$

iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $x \in E_1$

$q(\lambda x) = \{f(y), y \in F, y \geqslant \lambda x\}$

$\lambda q(x) = \lambda\{f(y); y \in F\ \ e\ \ y \geqslant x\}$

Consideremos os conjuntos:

$S_1 = \{f(y);\ \ y \in F,\ \ y \geqslant \lambda x\}$

$S_2 = \{f(y);\ \ y \in F,\ \ y \geqslant x\}$

a) Considerando $\lambda \neq 0$

Seja $s_1 \in S_1$, assim $s_1 = f(y_1)$ com $y_1 \in F$ e $y_1 \geqslant \lambda x$

Como $\lambda \neq 0$, temos:

$\underbrace{\lambda^{-1} y_1}_{\in F} \Rightarrow f(\lambda^{-1} y_1) \in S_2$

Assim:

$s_1 = f(y_1) = f(\lambda\lambda^{-1} y_1) = \lambda f(\lambda^{-1} y_1) \in \lambda S_2$

Portanto, $S_1 \subset \lambda S_2$

b) Considerando $\lambda = 0$

$S_1 = \{f(y);\ \ y \in F,\ \ y \geqslant 0\}$

Como $0 \in F$ e $f(0) = 0$ por f ser linear, concluímos que $inf\ S_1 = 0$

Ora, $\lambda q(x) = \lambda\ inf\ S_2$.

Como $S_2 = \{0\}$, concluímos que $\lambda q(x) = 0$.

Portanto, $q(\lambda x) = \lambda q(x)$.

Seja $s_2 \in S_2$, assim $s_2 = f(y_2)$ com $y_2 \in F$ e $y_2 \geqslant x$.
$\lambda p_2 = \lambda f(y_2) = f(\lambda y_2) \in S_1$ e $y_2 \geqslant x \Rightarrow \lambda y_2 \geqslant \lambda x$.
Concluímos que $\lambda\ S_2 \subset S_1$.
Logo, $q(\lambda x) = \lambda q(x)$, $\forall\ x \in E_1$.

$\square$

Teorema 4.1.13. *Sejam $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado e F um subespaço vetorial de E que é cofinal. Se $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo, então existe um funcional linear positivo $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}|_F = f$.*

Demonstração. Vamos definir o conjunto $E_1 = F + P - P$, onde $P = \{x \in E; x \geq 0\}$ e $-P = \{-x; x \in P\}$. Pelo lema 4.1.9 temos que E_1 é um subespaço vetorial de E.
Pelo Lema 4.1.10 temos que $E_1 = F + P = F - P$. Daí:

$$F \subset (F + P) \subset E_1$$

donde concluímos que F é subespaço de E_1.
O Lema 4.1.12 nos possibilita definir um funcional sublinear $q : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$q(x) = \inf\{f(y); y \in F,\ y \geqslant x\}$$

$\vdash$: $f(y) \leq q(y), \quad \forall y \in F$.De fato:
Fixando $y \in F$ considere todos os elementos $y_1 \in F$ tais que $y_1 \geq y$. Usando que f é um funcional linear positivo, observemos que:

$$\begin{aligned} y \leq y_1 &\Longrightarrow \\ 0 \leq y_1 - y &\Longrightarrow \\ 0 \leq f(y_1 - y) &\Longrightarrow \\ 0 \leq f(y_1) - f(y) &\Longrightarrow \\ f(y) \leq f(y_1), &\quad \forall y_1 \geq y \end{aligned}$$

Assim:

$$f(y) \leq \inf\{f(y_1); y_1 \in F,\ y_1 \geq y\} = q(y)$$

Pelo teorema de Hanh-Banach 3.1.1 existe um funcional linear $\tilde{f} : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} &(1)\quad \tilde{f}(x) \leq q(x), \quad \forall x \in E_1 \\ &(2)\quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in F \end{aligned}$$

$\vdash$: $\tilde{f} : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é positivo.De fato:
Seja $x \geq 0$. Assim, $-x + x \leq -x$, ou seja, $0 \geq -x$.

Observemos que:

$$\begin{array}{rcl} q(-x) & = & \inf\{f(y); y \in F, y \geq -x\} \\ & = & \inf\{f(y); y \in F, y + x - y \geq -x + x - y\} \\ & = & \inf\{f(y); y \in F, x \geq -y\} \end{array}$$

Como $0 \in F$ e $0 \leq x$ segue que $q(-x) \leq f(0)$. Então:

$$\begin{array}{rl} \tilde{f}(-x) \leq q(-x) \leq f(0) = 0 & \Longrightarrow \\ \tilde{f}(-x) \leq 0 & \Longrightarrow \\ -\tilde{f}(x) \leq 0 & \Longrightarrow \\ 0 \leq \tilde{f}(x) & \end{array}$$

Portanto, $\tilde{f}$ é positivo. □

4.2 Operadores Adjuntos

Nesta seção vamos estudar os chamados operadores adjuntos. Dados X, Y espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado, apresentaremos a definição do operador adjunto $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$. Mostraremos que este operador é linear e limitado. Além disso, utilizando uma das consequências do teorema de Hahn-Banach, mostraremos que $\|T\| = \|T^*\|$

Definição 4.2.1. *Seja $T : X \to Y$ um operador linear limitado, onde X, Y são espaços normados. O* ***operador adjunto*** *T é definido por:*

$$\begin{array}{rccccc} T^* : & Y^* & \longrightarrow & X^* & & \\ & g & \longmapsto & T^*g : & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & x & \longmapsto & g(T(x)) \end{array}$$

Teorema 4.2.2. *Seja $T : X \to Y$ um operador linear limitado, onde X, Y são espaços normados. O operador adjunto T^* é linear e limitado. Além disso:*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Demonstração. (i) O operador

$$\begin{array}{rccccc} T^* : & Y^* & \longrightarrow & X^* & & \\ & g & \longmapsto & T^*g : & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & x & \longmapsto & g(T(x)) \end{array}$$

é linear. De fato, sejam $g_1, g_2 \in Y^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(T^*(\alpha g_1 + \beta g_2))(x) &\triangleq (\alpha g_1 + \beta g_2)T(x) \\
&= \alpha g_1(T(x)) + \beta g_2(T(x)) \\
&= \alpha(T^*(g_1))(x) + \beta(T^*(g_2))(x) \\
&= [\alpha T^*(g_1) + \beta T^*(g_2)](x), \ \forall x \in X.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^*(g_1) + \beta T^*(g_2)$$

(ii) T^* é limitado.
Fixando $g \in Y^*$, observemos que:

$$|T^*g(x)| = |g(T(x))| \leq \|g\|\|T(x)\| \leq \|g\|\|T\|\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Obtemos então que:

$$\|T^*g\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |T^*g(x)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|g\|\|T\|\|x\| = \|g\|\|T\|$$

Tomando o supremo de todos $g \in S_{Y^*}$ obtemos:

$$\|T^*\| \leq \|T\|$$

(iii) Mostraremos agora que $\|T^*\| = \|T\|$.
Agora, por (ii), basta mostrarmos que: $\|T^*\| \geq \|T\|$.
Pelo Teorema 3.3.3, para todo $x_0 \in X$, com x_0 não nulo, existe $g_0 \in Y^*$ tal que: $\|g_0\| = 1$ e $g_0(T(x_0)) = \|T(x_0)\|$.
Assim, $g_0(T(x_0)) = (T^*g_0)(x_0)$ pela definição de operador T^*.
Escrevendo $f_0 = T^*g_0$, obtemos:

$$\|T(x_0)\| = |g_0(T(x_0))| = |f_0(x_0)| \leq \|f_0\| \, \|x_0\| = \|T^*g_0\| \, \|x_0\| \leq \|T^*\| \, \|g_0\| \, \|x_0\|$$

Como $\|g_0\| = 1$ temos que, para todo $x_0 \in X$, $\|T(x_0)\| \ \leq \ \|T^*\| \, \|x_0\|$ (isto inclui $x_0 = 0$). Sendo T limitado, temos $\|T(x_0)\| \ \leq \ \|T\| \, \|x_0\|$.
Como $\|T\| = \inf\{C > 0; \ \|T(x)\| \leq C\|x\|, \ \ \forall x \in X\}$ segue que $\|T^*\| \geq \|T\|$.
Portanto, $\|T^*\| \ = \|T\|$.

□

4.3 Espaços Reflexivos

Vimos que se X é um espaço de Banach então seu espaço dual X^* também é Banach. Consideremos agora $X^{**} = \{f : X^* \to \mathbb{K}; \ f \textit{ linear e contínuo}\}$ o chamado espaço bidual do espaço X. Como $X^{**} = B(X^*, \mathbb{K})$ e $\mathbb{K}$ é espaço de Banach, pelo teorema 2.2.6, concluímos que X^{**} é Banach. Nesta seção vamos definir os espaços reflexivos e utilizar ao longo da seção, consequências do teorema de Hahn-Banach.

Lema 4.3.1. *Para cada x fixado no espaço normado X a aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} g_x: & X^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & g_x(f) = f(x) \end{array}$$

é um funcional linear e contínuo. Além disso, $\|g_x\| = \|x\|$.

Demonstração. Fixemos $x \in X$.

(i) g_x é linear. De fato:
Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned} g_x(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) &= (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x) \\ &= \varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) \\ &= g_x(\varphi_1) + \lambda g_x(\varphi_2) \end{aligned}$$

Assim, g_x é uma aplicação linear.

(ii) g_x é contínua. De fato: Vamos mostrar que g_x atende a condição de Lipschtiz. Para cada $\varphi \in X^*$ observemos que:

$$|g_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$$

Daí:

$$|g_x(\varphi)| \leq \|x\|\|\varphi\|$$

Portanto, g_x é contínua.

(iii) $\|g_x\| = \|x\|$.
Segue pela definição de norma de um operador linear limitado que:

$$\|g_x\| = \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq 0}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \sup_{\substack{f \in X \\ f \neq 0}} \frac{\|f\|\|x\|}{\|f\|} = \|x\|$$

Pelo teorema 3.3.3, existe um funcional $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$.
Daí concluímos que $\|g_x\| = \|x\|$.

$\square$

Lema 4.3.2. *Vamos definir a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{rcccccc} C: & X & \longrightarrow & X^{**} & & & \\ & x & \longmapsto & C(x) = g_x : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

A aplicação C é um isomorfismo isométrico do espaço normado X sobre o espaço normado $C(X)$. Essa aplicação é denominada ***aplicação canônica****.*

Demonstração. Por definição de C temos:

$$\begin{array}{rcccccc} C: & X & \longrightarrow & X^{**} & & & \\ & x & \longmapsto & C(x) = g_x : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Pelo Lema 4.3.1 segue que C está bem definida.

(i) C é linear. De fato:
Se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in X$ observemos que:

$$g_{\alpha x+\beta y}(f) = f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y) = \alpha g_x(f)+\beta g_y(f) = (\alpha g_x+\beta g_y)(f), \ \forall f \in X^*.$$

Assim:

$$C(\alpha x + \beta y)(f) = g_{\alpha x+\beta y}(f) = (\alpha g_x + \beta g_y)(f) = (\alpha C(x) + \beta C(y))(f), \quad \forall f \in X^*.$$

Daí:

$$C(\alpha x + \beta y) = \alpha C(x) + \beta C(y)$$

(ii) C é injetiva. De fato:
Suponhamos que $C(x) = C(y)$. Assim:

$$\begin{aligned} C(x)(f) = C(y)(f), \ \forall f \in X^* &\implies \\ (C(x) - C(y))(f) = 0, \ \forall f \in X^* &\implies \\ (g_x - g_y)(f) = 0, \ \forall f \in X^* &\implies \\ g_{x-y}(f) = 0, \ \forall f \in X^* &\implies \\ f(x - y) = 0, \ \forall f \in X^* & \end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.3.4 segue que $x - y = 0$, donde concluímos que $x = y$.

Assim, C é uma bijeção de X sobre $C(X)$.

(iii) $\|C(x)\| = \|x\|, \quad \forall x \in X.$

Pelo lema 4.3.1 segue que:

$$\|C(x)\| = \|g_x\| = \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Logo, C é um isomorfismo isométrico. □

Definição 4.3.3. *(**Espaços Reflexivos**) O espaço normado X é dito* **reflexivo** *se $C(X) = X^{**}$, onde $C : X \to X^{**}$ é a aplicação canônica.*
Se X é reflexivo, ele é isometricamente isomorfo a X^{**}.

Teorema 4.3.4. *Se um espaço normado X é reflexivo então ele é completo (daí um Espaço de Banach).*

Demonstração. Sabemos que o espaço bidual X^{**} é um espaço de Banach, daí completo. Sendo X um espaço reflexivo sabemos que $X^{**} = C(X)$. Pelo lema 4.3.2 temos que a aplicação $C : X \to C(X)$ é um isomorfismo e, como $C(X) = X^{**}$ é completo, segue que X é completo. □

Teorema 4.3.5. *Todo espaço de Hilbert H é reflexivo.*

Demonstração. Queremos mostrar que a aplicação $C : H \to H^{**}$ é sobrejetiva. A aplicação $A : H^* \to H$ definida na Proposição 2.3.11 é bijetiva, linear conjugada e limitada. Lembremos também que H^* é um espaço de Hilbert, munido com o produto interno definido na Proposição 2.3.12.

Pelo teorema da representação de Riesz, existe um único $f_0 \in H^*$ tal que $g(f) = \langle f, f_0 \rangle$. Assim:

$$g(f) = \langle f, f_0 \rangle = \langle Af_0, Af \rangle \qquad (1)$$

Por outro lado,temos que $f(x) = \langle x, z \rangle$ onde $z = A(f)$. Escrevendo $x_0 = A(f_0)$ teremos:

$$\langle Af_0, Af \rangle = \langle x_0, z \rangle = f(x_0), \forall f \in H^* \qquad (2)$$

De (1) e (2) obtemos que $g(f) = f(x_0)$, ou ainda, $g = C(x_0)$ pela definição de C. Sendo $g \in H^{**}$ arbitrário, temos que C é sobrejetiva, então H é reflexivo. □

4.4 Espaços Separáveis

Nesta seção vamos definir espaços separáveis e apresentar alguns exemplos clássicos. Utilizaremos uma das versões do Teorema de Hahn-Banach para mostrarmos o teorema central dessa seção, que nos diz que se um espaço dual topológico de um certo espaço normado é separável então o próprio espaço é separável.

Definição 4.4.1. *(**Conjunto denso**) Um subconjunto M de um espaço métrico X é dito **denso**, quando $\overline{M} = X$.*

Definição 4.4.2. *(**Espaço Separável**) Seja Xum espaço normado. X é dito **separável** se existir um subconjunto $M \subset X$ enumerável e denso em X.*

Observação 4.4.3. *M é denso em X, quando $\forall\, x \in X$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$.*

Exemplo 4.4.4.

1. *$\mathbb{R}$ é separável.*
   O conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é enumerável e além disso $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (isto é, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

2. *$\mathbb{C}$ é separável.*
   Considerando o conjunto $A = \{a + bi; a, b \in \mathbb{Q}\}$, temos que A é enumerável, além disso, $\overline{A} = \mathbb{C}$.

3. *Um espaço métrico discreto X é separável se, e somente se, X é enumerável.*

   Suponhamos X um espaço métrico discreto (isto é, todos os seus elementos são isolados) é separável. Como X é separável existe um subconjunto $M \subset X$ enumerável e denso em X. Suponhamos que $M \neq X$. Assim existe $x \in X$ onde $x \notin M$. Como x é isolado existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_x) = \{x\}$. Mas sendo $\overline{M} = X$ temos que para todo $x \in X$ e para todo $\delta > 0$, $B(x, \delta)\ \cap M \neq \emptyset$, contradição com o fato de que $B(x, \varepsilon_x) \cap M = \{x\} \cap M = \emptyset$. Logo, $M = X$ e, portanto, X é enumerável.

   Reciprocamente, suponhamos X enumerável. Como X é um espaço discreto, X é fechado. Sendo X enumerável e $\overline{X} = X$ segue que X é separável.

4. *O espaço l_p, $1 \leq p < +\infty$, é separável.*
   Seja $M = \{y \in l_p;\ y = (a_1,\ a_2, ...,\ a_n,\ 0,\ 0, ...);\ a_i \in \mathbb{Q};\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

   (i) M é enumerável.
   Observemos que:
   $$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$
   , onde $M_n = \{(x_1,\ x_2, ...,\ x_n,\ 0,\ 0, ...);\ x_i \in \mathbb{Q}\}$.
   $M_1 = \{\ (x_1, 0, 0, ...);\ x_1 \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}$;
   $M_2 = \{\ (x_1,\ x_2, 0, 0, ...);\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
   E a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

   (ii) M é denso em l_p.
   De fato, sejam dados $x = (\xi_j) \in l^p$ e $\varepsilon > 0$. Como a série
   $$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p$$

converge, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}, \quad \forall n > n_0$$

Como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, *para cada* $\xi_j \in \mathbb{R}$ *podemos obter* $a_j \in \mathbb{Q}$ *o tão próximo quanto se queira de* ξ_j.
Assim, podemos encontrar $y = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, 0, 0, \ldots) \in M$ *tal que*

$$|\xi_j - a_j| < \left(\frac{\varepsilon^p}{2n_0}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daí,

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - a_j|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Segue então que:

$$\begin{aligned}
d^p(x,y) = \|x-y\|_p^p &= \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \\
&= \sum_{j=1}^{n_0} |\xi_j - \eta_j|^p + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \\
&= \sum_{j=1}^{n_0} |\xi_j - \eta_j|^p + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_j|^p \\
&< \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \\
&= \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Desse modo, $d(x,y) < \varepsilon$, *donde concluímos que* $y \in B(x,\varepsilon) \bigcap M$. *Portanto,* $\overline{M} = l_p$. *Como* M *é enumerável e* $\overline{M} = l_p$, *segue que* l_p *é separável.*

5. *O espaço* l_∞ *não é separável.*
Lembremos que se $x \in l_\infty$ *então* $\|x\| = sup\{|x_j|;\ j \in \mathbb{N}\}$.
Seja $y = (a_1,\ a_2,\ a_3, ...)$ *uma sequência tal que* $a_i \in \{0,1\}, \quad i \in \mathbb{N}$. *Notemos que* $\|y\| = sup\{|a_j|;\ j \in \mathbb{N}\} \leq 1$. *Assim,* $y \in l_\infty$.

Vamos associar a sequência (y_n) *com um número real* $\hat{y}$ *cuja representação é:*

$$\hat{y} = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + ...$$

Sabemos que o intervalo $[0,1]$ *é não-enumerável. Ainda, cada* $\hat{y}$ *representa unicamente um número pertencente ao intervalo* $[0,1]$. *Assim, existem sequências não-enumeráveis de zeros e uns.*
A métrica em l_∞ *mostra que a distância entre dois desses elementos (sequências) distintos é 1.*
Para cada $\hat{y}$, *tomando* $r = \frac{1}{3}$, *temos que as bolas de centro* $\hat{y}$ *e raio* $r = \frac{1}{3}$ *não se*

interceptam e, desse modo, temos um conjunto não-enumerável delas.
Se M é qualquer conjunto denso em l_∞, cada uma das bolas que não se interceptam devem conter algum elemento de M. Daí M não pode ser enumerável. Como M é um conjunto denso arbitrário, temos que l_∞ não possui subconjuntos densos enumeráveis. Logo, l_∞ não é separável.

Proposição 4.4.5. *Se M é um espaço métrico separável então todo subconjunto de M é separável.*

Demonstração. Como M é separável, existe $E \subset M$ um subconjunto enumerável e denso. Seja $S \subset M$. Queremos mostrar que existe $E_1 \subset S$ enumerável tal que $\overline{E_1} = S$.
Sejam $e \in E$, $r \in \mathbb{Q}$ com $r > 0$.
Construiremos um conjunto E_1 formado pela escolha de um elemento $s \in B(e,r) \cap S$ sempre que $B(e,r) \cap S \neq \emptyset$. Para $s \in B(e,r) \cap S$, denotamos o elemento s escolhido por $(s)_{e,r}$.
Definamos $E_1 = \{(s)_{a,b}\}$, onde $a \in E$, $b \in \mathbb{Q}_+^*$.

(i) E_1 é enumerável uma vez que $E \times \mathbb{Q}_+^*$ é enumerável (pois E e $\mathbb{Q}_+^*$ são enumeráveis) e $E_1 \cong E \times \mathbb{Q}_+^*$.

(ii) E_1 é denso em S.
Sejam $x \in S$ e $\delta > 0$. Como $x \in S \subset M$ e $\overline{E} = M$, existe uma sequência $(e_n) \subset E$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $e_n \to x$.
Vamos tomar $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r_0 < \frac{\delta}{3}$.
Como $e_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $e_{n_0} \in B(x, r_0)$, $\forall\, n \geq n_0$.
Sendo $d = d(x, e_{n_0})$ vamos tomar $r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $d < r_1 < \frac{\delta}{2}$.
$B(e_{n_0}, r_1) \subset B(x, \delta)$.
De fato, seja $y \in B(e_{n_0}, r_1)$.
$d(y,x) \leq d(y, e_{n_0}) + d(x, e_{n_0}) < r_1 + d < r_1 + r_1 = 2r_1 < 2\frac{\delta}{\delta} = \delta$.
Logo, $\overline{E_1} = S$.

$\square$

Lema 4.4.6. *Sejam X um espaço normado, $Y \subset X$ um subespaço próprio e fechado de X, $x_0 \in X - Y$ fixado e $\delta = d(x_0, Y)$. Então, existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que:*

(i) $\tilde{f}(y) = 0, \;\; \forall\, y \in Y$;

(ii) $\tilde{f}(x_0) = \delta$;

(iii) $\|\tilde{f}\| = 1$.

Demonstração. Vamos considerar Z o espaço gerado por Y e por x_0, isto é, $Z = Y \oplus [x_0]$. Definimos sobre Z um funcional f:

$$\begin{array}{rccc} f: & Z & \to & \mathbb{K} \\ & z & \mapsto & \alpha\delta \end{array}$$

onde $z = y + \alpha x_0$.

(i) f é linear.
Sejam $z_1, z_2 \in Z$. Assim existem $y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tais que $z_1 = y_1 + \alpha_1 x_0$, $z_2 = y_2 + \alpha_2 x_0$. Assim:

$$\begin{aligned} f(z_1 + z_2) &= f((y_1 + \alpha_1 x_0) + (y_2 + \alpha_2 x_0)) \\ &= f((y_1 + y_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) x_0) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)\delta \\ &= \alpha_1\delta + \alpha_2\delta \\ &= f(y_1 + \alpha_1 x_0) + f(y_2 + \alpha_2 x_0) \\ &= f(z_1) + f(z_2). \end{aligned}$$

Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$, $z_1 \in Z$. Observemos que $z_1 = y_1 + \alpha_1 x_0$ onde $y_1 \in Y$ *e* $\alpha_1 \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda z) &= f(\lambda(y_1 + \alpha_1 x_0)) \\ &= f(\lambda y_1 + \lambda\alpha_1 x_0) \\ &\triangleq \lambda\alpha_1\delta \\ &= \lambda(\alpha_1\delta) \\ &= \lambda f(y_1 + \alpha_1 x_0) \\ &= \lambda f(z). \end{aligned}$$

(ii) f é limitada.
Fixemos $z \in Y \oplus [x_0]$. Então, $z = y + \alpha x_0$, onde $y \in Y$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha = 0$ temos $f(z) = f(y + 0.x_0) = 0$. Nessas condições:

$$|f(z)| = 0 \leq \|y + 0.x_0\| = \|z\|$$

Consideremos $\alpha \neq 0$.
Sabemos que $\delta = d(x_0, Y) = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\|$. Como Y é subespaço de X temos que $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\tilde{y} \in Y$. Daí:

$$|f(z)| = |f(y + \alpha x_0)| = |\alpha\delta| = |\alpha|\delta = |\alpha| \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\|$$

Além disso:

$$|\alpha| \inf_{\tilde{y} \in Y} \|\tilde{y} - x_0\| \leq |\alpha| \left\| -\frac{1}{\alpha} y - x_0 \right\| = \|y + \alpha x_0\| = \|z\|$$

Assim, temos que $|f(z)| \leq \|z\|$.
Tomando o supremo de todos elementos $z \in Z$ com $\|z\| = 1$ obtemos $\|f\| \leq 1$ $(*)$.

(iii) O funcional $f : Z \to \mathbb{K}$, onde $f(z) = f(y + \alpha x_0) = \alpha\delta$, deverá satisfazer:

1. $\|f\| = 1$;
2. $f(y) = 0 \;\; \forall\, y \in Y$;
3. $f(x_0) = \delta$.

Como $Z = Y \oplus [x_0]$, cada $z \in Z$ possui uma representação do tipo $z = y + \alpha x_0$, onde $y \in Y$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como Y é fechado e $\delta > 0$ temos $f \neq 0$.

3 Para $\alpha = 1$ e $y = 0$, teremos $f(1.x_0) = 1.\delta = \delta > 0$.

2 Para $\alpha = 0$ temos $z = y + 0.x_0$ e, portanto, $f(z) = 0$.
Logo, $f(y) = 0, \;\; \forall\, y \in Y$.

1 Mostraremos que $\|f\| = 1$.
$\vdash$: Y contém uma sequência (y_n) tal que $\|y_n - x_0\| \to \delta$. De fato:
Pela definição de ínfimo, para $n = 1$ existe $y_1 \in Y$ tal que $\delta \leq |y_1 - x_0| < \delta + 1$.
Para $n = 2$ existe $y_2 \in Y$ tal que $\delta \leq |y_2 - x_0| < \delta + \frac{1}{2}$.
Por indução, teremos $y_n \in Y$ tal que $\delta \leq |y_n - x_0| < \delta + \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Seja $z_n = y_n - x_0$. Observemos que $f(z_n) = -\delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso:

$$\|f\| = \sup_{\substack{z \in Z \\ z \neq 0}} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(z_n)|}{\|z_n\|} = \frac{\delta}{\|z_n\|} \to \frac{\delta}{\delta} = 1$$

quando $n \to \infty$.
Então $\|f\| \geq 1$, donde concluímos por $(*)$ que $\|f\| = 1$.
Pele teorema 3.3.1, existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ e $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$. Assim:

(i) $\tilde{f}(y) = f(y) = 0, \;\; \forall y \in Y$;
(ii) $\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \delta$;
(iii) $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$.

$\square$

Proposição 4.4.7. *Seja X um espaço normado. Então, X é separável se, e somente se, S_X é separável.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Supondo X separável, existe um subconjunto $M \subset X$ enumerável e denso em X. Vamos considerar o conjunto $N = \left\{ \frac{x}{\|x\|};\; x \in M \right\} \subset S_X$.

N é enumerável por definição, já que M é enumerável.

Seja $x \in S_X$. Sendo M denso em X, existe uma sequência $(x_n) \subset M$ tal que que $x_n \longrightarrow x$. Considerando a sequência $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ para todo $x_n \neq 0$ observamos que $(y_n) \subset N$ e $y_n \longrightarrow x$. Portanto, $\overline{N} = S_X$. Assim, S_X é separável.

$(\Longleftarrow)$ Considerando S_X separável segue que existe um subconjunto $M \subset S_X$ enumerável e denso em X. Considerando $qM = \{qx;\ x \in M\}$ com $q \in \mathbb{Q}$ definimos $Y = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} qM$.

Como Y é definido como uma união enumerável de conjuntos enumeráveis segue que Y é enumerável.

Fixemos $z \in X$ com $z \neq 0$. Temos que $\|z\| = r \in \mathbb{R}_+^*$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existe uma sequência $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $q_n \longrightarrow r$.
Observemos que $\frac{z}{r} \in S_X$. Portanto, existe uma sequência $(w_n) \subset M$ tal que $w_n \longrightarrow \frac{z}{r}$.
Tomando $z_n = q_n w_n$ obtemos que:

$$z_n = q_n w_n \longrightarrow r\frac{z}{r} = z \Longrightarrow z_n \longrightarrow z$$

Concluímos que $\overline{Y} = X$. Logo, X é enumerável. □

Teorema 4.4.8. *Se o espaço dual X^* de um espaço normado X é separável, então X é separável.*

Demonstração. Como X^* é separável então S_{X^*} é separável, pela Proposição 4.4.7. Seja $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso em S_{X^*}.

$\vdash$: Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S_X$ tal que $f_n(x_n) > \frac{1}{2}$. De fato:
Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Notemos que:

$$\|f_n\| = \sup_{x \in S_X} |f_n(x)| = 1$$

Por definição de supremo, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe $x_n \in S_X$ tal que $\|f_n\| - \frac{1}{2} < f_n(x_n) \leq \|f_n\|$.
Assim:

$$\begin{aligned} \|f_n\| - \frac{1}{2} < f_n(x_n) \leq \|f_n\| \quad &\Longrightarrow \\ 1 - \frac{1}{2} < f_n(x_n) \leq 1 \quad &\Longrightarrow \\ \frac{1}{2} < f_n(x) \leq 1 \quad & \end{aligned}$$

Seja $Y = \overline{[x_n;\ n \in \mathbb{N}]}$.
$\vdash$: Y é separável. De fato:
Sejam $A = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
O conjunto $S = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_k a_k;\ k \in \mathbb{N};\ \lambda_k \in B;\ a_k \in A \right\}$ é enumerável, já que os conjuntos

A, B são enumeráveis. Vamos mostrar que S é denso em Y.
Sejam $x \in Y$ e $\varepsilon > 0$. Como $x \in Y$ existe uma sequência $(x_n) \subset [x_n;\ n \in \mathbb{N}]$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0$$

Em particular, $\|x_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Observemos que $x_{n_0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ onde $\lambda_i \in \mathbb{K}; a_i \in A$.

Fixemos $1 \leq i \leq k$. Como B é denso em $\mathbb{K}$ existe $b_i \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$|\lambda_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Tomando $y = \sum_{i=1}^{k} b_i a_i$ temos que $y \in S$. Além disso:

$$\begin{aligned}
\|y - x\| &= \|y - x + x_{n_0} - x_{n_0}\| \\
&\leq \|y - x_{n_0}\| + \|x_{n_0} - x\| \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - b_i) a_i\right\| + \|x_{n_0} - x\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i - b_i| \|a_i\| + \|x_{n_0} - x\| \\
&= \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i - b_i| + \|x_{n_0} - x\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Daí $y \in B(x, \varepsilon) \cap S$, donde concluímos que S é denso em Y.

$\vdash$: $X = Y$.
Suponhamos que $X \neq Y$. Assim, existe $x_0 \in X - Y$. Pelo lema 4.4.6 existe $\tilde{f} \in X^*$ tal que $\|\tilde{f}\| = 1$ e $f(\tilde{y}) = 0$ para todo $y \in Y$.
Como $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ é denso em S_{X^*} existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - \tilde{f}\| < \frac{1}{4}$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
|\tilde{f}(x_n)| &= \\
|\tilde{f}_n(x_n) - (\tilde{f}_n(x_n) - \tilde{f}(x_n))| &\geq \\
|\tilde{f}_n(x_n)| - |\tilde{f}_n(x_n) - \tilde{f}(x_n)| &\geq \\
|\tilde{f}_n(x_n)| - \|f_n - \tilde{f}\| \|x_n\| &> \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Absurdo, pois $\tilde{f}(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, X possui um subconjunto enumerável e denso em X. Portanto, X é separável.

$\square$

Observação 4.4.9. *A recíproca do Teorema 4.4.8 não é verdadeira. De fato, sabemos que o espaço l_1 é separável, porém seu dual topológico é o espaço l_∞, que não é separável.*

4.5 Uma observação sobre $B(X,Y)$

O Teorema 2.2.6 visto no capítulo 2 nos dizia que se X fosse um espaço normado, Y um espaço de Banach, então $B(X,Y)$ seria Banach. Pretendemos nesta seção apresentar a recíproca deste resultado. Necessitaremos de uma consequência do teorema de Hahn-Banach.

Teorema 4.5.1. *Sejam X, Y espaços normados. Se $B(X,Y)$ é Banach então Y também é Banach.*

Demonstração. Como Y é um espaço normado, por hipótese, resta mostrarmos que Y é completo. Seja $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Pelo Teorema 3.3.3, existe um funcional $f \in X^*$ tal que

$$\begin{cases} \|f\| = 1 & (1) \\ f(x_0) = \|x_0\| \end{cases}$$

Em particular, tomando $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ temos que $f(y_0) = 1$.
Definamos o seguinte operador:

$$\begin{array}{rccccc} T: & Y & \longrightarrow & B(X,Y) & & \\ & y & \longmapsto & T(y): & X & \longrightarrow & Y \\ & & & & x & \longmapsto & f(x).y \end{array}$$

(i) T está bem definida. De fato:
Fixemos $y \in Y$. Sejam $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned} T(y)(x_1 + \lambda x_2) &= f(x_1 + \lambda x_2)(y) \\ &= f(x_1)y + \lambda f(x_2)y \\ &= T(y)(x_1) + \lambda T(y)(x_2) \end{aligned}$$

Logo, $T(y)$ é linear. Vamos mostrar que $T(y)$ é contínua. De fato:

$$\begin{aligned} \|T(y)(x)\| &= \|f(x)y\| \\ &= |f(x)|\|y\| \\ &\leq \|f\|\|x\|\|y\| \\ &\overset{(1)}{=} \|x\|\|y\|, \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Logo, $T(y) \in B(X,Y)$. Notemos que:

$$\sup_{x \in B_X} \|T(y)(x)\| \leq \|y\|, \quad \forall y \in Y \qquad (*)$$

(ii) T é linear. De fato:

Sejam $y_1, y_2 \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Assim:

$$\begin{array}{rcl} T(y_1 + \lambda y_2)(x) & = & f(x)(y_1 + \lambda y_2) \\ & = & f(x)y_1 + \lambda f(x) y_2 \\ & = & T(y_1)(x) + \lambda T(y_2)(x) \\ & = & (T(y_1) + \lambda T(y_2))(x), \quad \forall x \in X \end{array}$$

Portanto:

$$T(y_1 + \lambda y_2) = T(y_1) + \lambda T(y_2)$$

(iii) T é contínua. De fato:

Por $(*)$ temos que:

$$\|T(y)\| = \sup_{x \in B_X} \|T(y)(x)\| \leq \|y\|, \quad \forall y \in Y$$

Então:

$$\|T\| = \sup_{y \in B_Y} \|T(y)\| \leq 1$$

Isto é:

$$\|T\| \leq 1 \qquad (**)$$

Portanto, T é contínua.

Sejam $(y_n) \subset Y$ uma sequência de Cauchy e $\varepsilon > 0$.
Por definição, existe $n_0 \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\|y_n - y_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Observemos que:

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = \|T(y_n - y_m)\| \leq \|T\| \|y_n - y_m\| \overset{(**)}{\leq} \|y_n - y_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Logo, $(T(y_n))$ é uma sequência de Cauchy em $B(X, Y)$. Como $B(X, Y)$ é Banach, existe $S \in B(X, Y)$ tal que:

$$T(y_n)^{\|} \overset{\|_{B(X,Y)}}{\longrightarrow} S \qquad (2)$$

Consideremos $y = S(y_0)$. Observemos que:

$$\begin{array}{rcl} \|y_n - y\| & \overset{(1)}{=} & \|f(y_0).y_n - S(y_0)\| \\ & = & \|T(y_n)(y_0) - S(y_0)\| \\ & = & \|(T(y_n) - S)(y_0)\| \\ & \leq & \|T(y_n) - S\| \|y_0\| \overset{(2)}{\longrightarrow} 0 \end{array}$$

Portanto, $y_n \longrightarrow y = S(y_0) \in Y$, donde concluímos que Y é Banach. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] KREYSZIG,E. Introductory Functional Analysis with Applications,1978.

[2] BRÉZIS, H. - Analyse Functionnelle, Théorie et applications - Masson, Paris, 1983.

[3] CONWAY, J - A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlim , 1985.

[4] RUDIN, W. Functional Analysis. New York: McGraw-Hill, 1973.

[5] POMBO JR., D. P. - Introdução à Análise Funcional.

[6] LIMA, E. L. Espaços Métricos, IMPA, 2011.

[7] LIMA, E. L. Análise Real-Funções de Uma Variável-Volume 1: Rio de Janeiro: Impa, 2013.

[8] LIMA, E. L. - Curso de Análise, Volume 2 - Projeto Euclides, IMPA-CNPq, Rio de Janeiro, 1981.