UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Luca Mauad Gaio

Uma formulação categórica das representações dos grupos de Galileu e Lorentz

Juiz de Fora

2021

Luca Mauad Gaio

Uma formulação categórica das representações dos grupos de Galileu e Lorentz

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Gaio, Luca M..
Uma formulação categórica das representações dos grupos de Galileu e Lorentz / Luca Mauad Gaio. – 2021.
100 f.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti
Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2021.

1. Teoria de Categorias. 2. Grupo de Lorentz. 3. Relatividade Especial. I. Rizzuti, Bruno Ferreira, orient. II. Título.

Luca Mauad Gaio

Uma formulação categórica das representações dos grupos de Galileu e Lorentz

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Matemática.

Aprovada em (dia) de (mês) de (ano)

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Cristhiano Duarte
Wigner Centre e International Institute of Physics

Prof. Dr. Laércio José dos Santos
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Lonardo Rabelo
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho à minha avó, Teresinha de Jesus,
pelo seu desempenho incrível durante a pandemia.

AGRADECIMENTOS

À minha família, Tânia Mauad , Mário Gaio e Laura Gaio, pelo apoio e a tolerância nos momentos difíceis e pela companhia nos momentos alegres.

Aos meus amigos, Daniel Rotmeister e Giulia Fritis, por ter me ajudado com os estudos em tempos de quarentena.

Ao meu orientador, Bruno Rizzuti, e meu colaborador, Cristhiano Duarte, pelo suporte e ajuda nesse trabalho.

Ao meu Professor, Laércio dos Santos, cuja aula de Geometria Diferencial serviu de inspiração para parte desse trabalho.

Aos meus amigos, Luiz Scheffer e Paulo Amorim, pelas correções de ortografia.

Ao meu amigo, P.M., por me aguentar enquanto eu falava sobre esse trabalho.

"Der Vogel kämpft sich aus dem Ei. Das Ei ist die Welt. Wer geboren werden will, muß eine Welt zerstören. Der Vogel fliegt zu Gott. Der Gott heißt Abraxas." - Max Demian

RESUMO

Teoria de Categorias pode ser usada para analisar como diferentes objetos interagem entre si. Dessa forma, é natural pensar que existe uma grande quantidade de aplicações na física. Nesse trabalho, discutiremos os básicos de Teoria de Categorias, tentando explorar as principais definições e resultados, começando com uma discussão sobre as bases filosóficas da Teoria, passando pelas primeiras definições, chegando aos teoremas mais importantes que conectam funtores, limites e adjunções de funtores, para aplicar em um contexto físico, a saber, para analisar a estrutura da representação dos Grupos de Lorentz e Galileu no Espaço-Tempo. Dessa forma, conseguimos mostrar a conexão funtorial entre as duas de forma consistente com o Princípio da Relatividade. Como essas estruturas estão intimamente conectadas com morfismos entre referenciais, o formalismo categórico parece ser ideal para a análise e o ensino desses conceitos. Acreditamos que essa perspectiva possa fornecer grande valor pedagógico, devida a seu poder explicativo extenso. Com isso, esperamos despertar o interesse dos leitores para o tema de Categorias e ainda inspirar novos desenvolvimentos na interseção entre Categorias e física.

Palavras-Chave: Teoria de Categorias. Teoria da Relatividade. Grupos de Galileu e Lorentz

ABSTRACT

Category Theory can be used to analyse how different objects interact between themselves. It is therefore natural to think that there exists a plethora of applications in Physics. In this paper, we discuss the basic concepts of Category Theory, trying to explore the main definitions and results, beginning with a discussion about the philosophical base of the Theory, going through the first definitions and arriving to the most important theorems that connect functors, limits and adjoint functors, to apply in a physical context, namely, to analyse the structure of the representations of the Lorentz and Galileo groups. Doing this, we are able to show the functorial connection between both in such a way that remains consistent with the Principle of Relativity. Because these structures are intimatelly connected to morphisms between frames of reference, the categorical formalism seems to be the ideal start line to analyse and teach this concept, which we believe gives a great pedagogical value, as it has an extensive explicative power. With this, we hope to ignite the interest of the readers to the subject of Category Theory and hope to inspire new innovations in the intersection between categories and physics.

Keywords: Category Theory. Theory of Relativity. Galileo and Lorentz Groups.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é uma continuação natural de uma sequência de artigos sobre a filosofia operacional, onde a utilizamos para construir grandezas físicas, (1, 2, 3, 4). Para isso, definimos o espaço físico por meio de classes de equivalência de corpos rígidos, sugerindo que diferentes referenciais inerciais definem diferentes espaços. Uma consequência dessa construção, é que definições comumente usadas na física devem ser interpretados de uma maneira diferente, em particular, como faremos nesse trabalho, devemos interpretar os grupos de Lorentz e Galileu como um grupoide conectado, que, apesar de ser categoricamente equivalente a um grupo, oferece uma interpretação que se encaixa no formalismo categórico, mudando também a interpretação de que os grupos de Lorentz e Galileu representam operações de simetria no Espaço-Tempo. Assim, acreditamos que certa parte da construção feita aqui pode ser utilizada para estudar a geometria do Espaço-Tempo, que ainda não tentamos formular. Além disso, sugerimos que esse formalismo pode ter valor pedagógico, em particular, separando alguns dos conceitos que se confundem na literatura de física sobre Relatividade Especial. Geralmente, na física, não é feita uma distinção clara entre o sistema de coordenadas e as transformações de Lorentz e Galileu, o que resulta em uma mistura de conceitos que, apesar de fornecer uma forma simples de se fazer cálculos, limita o entendimento dos estruturas fundamentais sendo trabalhadas, o que restringe o entendimento daqueles interessados nos fundamentos da física, porém acreditamos que Teoria de Categorias oferece uma forma clara de separarmos esses conceitos, resolvendo esse problema.

A constituição desse trabalho é baseada principalmente nos livros (5, 6, 7, 8) que tratam de Teoria de Categorias, sendo o último uma das referências em português.[1] Além disso, existem várias tentativas de conectar Teoria de Categorias com modelos físicos. Alguns desses trabalhos podem ser encontrados em (9, 10, 11), que usamos como inspiração para o nosso texto.

Esse trabalho, está separado em duas seções principais, a primeira tratando de Teoria de Categorias e a segunda da nossa tentativa de modelar os grupos de Lorentz e Galileu, além de conceitos ligados com a Teoria da Relatividade, categoricamente. Por ser um tópico bastante extenso, não discutiremos todos os assuntos em Teoria de Categorias. Tentaremos, contudo, fornecer toda a bagagem necessária para podermos justificar nossa construção final. No final, separamos uma seção para uma discussão sobre como podemos adicionar sobre a nossa formulação dos Grupos de Lorentz e Galileu, mencionando como tentamos prosseguir a partir dela. Em especial, existe um assunto de grande importância em Categorias, conhecidos como **representáveis**. Para aqueles interessados, sugerimos os

[1] Esse trabalho está baseado principalmente em livros escritos em inglês. Dedicamos o Anexo A para colocar os termos originais em inglês e como decidimos traduzi-los.

textos (5, 7). O primeiro por apresentar brevemente e com detalhes os assuntos categóricos principais e o segundo como uma referência mais detalhada, que menciona representáveis relativamente cedo no texto.

2 Básicos de Teoria de Categorias

2.1 Uma breve introdução histórica

O conceito de Categorias surgiu de um trabalho feito pelos matemáticos Sauders Mac Lane e Samuel Eilenberg em 1942 com o título "*Natural isomorphisms in group theory*" (12). Nele, Mac Lane e Eilenberg fizeram uma colaboração para aplicar processos computacionais de grupos desenvolvidos por Mac Lane a um problema de Topologia Algébrica proposto por Eilenberg. Os métodos usados eram aqueles encontrados em Teoria de Extensão de Grupos aplicados em grupos de Homologia. No desenvolvimento do trabalho, se tornou claro para eles que alguns homomorfismos de grupos poderiam ser classificados como "naturais". Assim, com a intenção de fomalizar o conceito de uma "Transformação Natural", Mac Lane e Eilenberg escreveram um artigo chamado "*General theory of natural equivalences*" (13). Para definir formalmente uma Transformação Natural, era necessário definir o domínio e o contra-domínio dessa transformação, que foram denominadas funtores. Pela mesma razão, foi necessário definir Categoria como uma estrutura sobre a qual funtores são definidos.

Inicialmente, Categorias foram deixadas de lado, já que o foco do trabalho era o estudo de Transformações Naturais. Elas eram tratadas apenas como um conceito auxiliar, útil para a manipulação de funtores. Essa atitude puramente prática para esse conceito está relacionada também com o fato de que Categorias não estavam bem-definidas pelo modelo axiomático ZFC (isso é, o modelo axiomático de Zermelo-Frenkel com o Axioma da Escolha), pois não seria possível definir uma Categoria de conjuntos, já que não existe um "conjunto de conjuntos". Mac Lane e Eilenberg, consideraram o uso do sistema axiomático NBG (isso é, o modelo axiomático de Von Neumann-Bernays-Gödel), onde a distinção entre conjuntos e classes poderia fornecer uma fundação mais sólida para a definição de Categoria.

Durante os anos iniciais dessa Teoria, isso é, nos anos 50, o estudo de Categorias se reduzia ao estudo de Transformações Naturais em estruturas Algébricas (onde encontramos vários exemplos). No final dos anos 50 e começo dos 60, o matemático Lawvere, sugeriu que seria possível usar Categorias nas áreas de lógica e nas própria Fundação da Matemática (14). Indo para Berkeley e estudando lógica sob Alfred Tarski e seus alunos, Lawvere tinha como objetivo principal encontrar uma fundação melhor para a Mecânica de meios contínuos. Sobre isso, Lawvere disse[1]

[1] "The foundation of the continuum physics of general materials, in the spirit of Truesdell, Noll, and others, involves powerful and clear physical ideas which unfortunately have been submerged under a mathematical apparatus including not only Cauchy sequences and countably additive measures, but also *ad hoc* choices of charts for manifolds and of inverse limits of Sobolev Hilbert spaces, to get at the simple nuclear spaces of intensively and extensively variable quantities. But, as Fichera lamented, all this apparatus gives often a very uncertain

"A fundação da Física Contínua de materiais gerais, no espírito de Truesdell, Noll, e outros envolve ideias físicas poderosas e claras que infelizmente foram submersas em um aparato matemático, incluindo não só sequências de Cauchy e medidas aditivas enumeráveis, mas também escolhas *ad hoc* de parametrizações para variedades e de limites inversos de Espaços de Hilbert de Sobolev, para chegar nos simples espaços nucleares de grandezas variáveis intensas e extensas. Porém, como Fichera lamentava, todo esse aparato se encaixa frequentemente mal nos fenômenos. Esse aparato pode ajudar na resolução de certos problemas, mas os problemas e os axiomas necessários podem ser enunciados de forma direta e clara? E isso não resultaria em uma descrição mais simples e igualmente rigorosa? Essas eram as questões para as quais eu havia começado a aplicar o método de topos nas minhas aulas de 1967 em Chicago. Era claro que era necessária certo trabalho na própria noção de topos para atingir esse objetivo. Eu passei 1961-62 com os lógicos de Berkeley , acreditando que escutar os experts em fundações pudesse ser um caminho para esclarecer questões fundamentais. (Talvez meu primeiro professor Truesdell teve uma convicção similar 20 anos antes, quando ele tinha passado um ano com os lógicos de Princeton.) Apesar da minha crença ter diminuído, aprendi sobre construções como o Forçamento de Cohen que também parecia necessitar de uma simplificação se quiséssemos que grande números de pessoas as entendessem bem o suficiente para avançar nesses assuntos (15)."

Assim, Lawvere completou a sua tese de doutorado, orientado por Eilenberg, sobre as fundações da Álgebra Universal, propondo desenvolver uma nova teoria sobre uma "Categoria de Categorias" em vez de utilizar uma base em teoria de conjuntos. Esse trabalho demonstrou que Teoria de Categorias apresentava características mais fundamentais do que era pensado antes. Como exemplo, podemos ver uma breve explicação de como podemos criar uma teoria axiomática baseada em Categorias em (16). Com isso, Categorias começaram a ser aplicadas em diversas áreas, como Lógica e Computação.

A fala de Lawvere representa bem uma das principais motivações desse trabalho,

---

fit to the phenomena. This apparatus may well be helpful in the solution of certain problems, but can the problems themselves and the needed axioms be stated in a direct and clear manner? And might this not lead to a simpler, equally rigorous account? These were the questions to which I began to apply the topos method in my 1967 Chicago lectures. It was clear that work on the notion of topos itself would be needed to achieve the goal. I had spent 1961-62 with the Berkeley logicians, believing that listening to experts on foundations might be a road to clarifying foundational questions. (Perhaps my first teacher Truesdell had a similar conviction 20 years earlier when he spent a year with the Princeton logicians.) Though my belief became tempered, I learned about constructions such as Cohen forcing which also seemed in need of simplification if large numbers of people were to understand them well enough to advance further."

já que ele resultou de uma tentativa de fornecer uma explicação alternativa para conceitos fundamentais utilizados na física. À medida que estudamos Categorias, percebemos que existem diversas aplicações na física que se encaixam perfeitamente nesse formalismo, o que é um tanto surpreendente, considerando que suas origens se encontram em Matemática Pura que, frequentemente, parece não ter aplicações no mundo real. Por outro lado, talvez essa coincidência seja evidência de uma correlação entre Matemática Pura e Física mais profunda, o que se alinha com o que é sugerido em (17). De qualquer forma, é inquestionável a grande aplicabilidade de Teoria de Categorias em Física, como vemos em (10, 9, 18).

2.2 Conceitos fundamentais

Como dito anteriormente, o conceito de Categorias está relacionado com a própria base da matemática e, portanto, devemos tomar bastante cuidado quando tentamos descrever as bases sobre as quais essa teoria deve ser construída. Sabemos também de (16) que é possível escrever um sistema axiomático baseado apenas em Categorias. Apesar disso, vamos daremos aqui uma fundação para a Teoria de Categorias baseada na Teoria de Conjuntos, mais especificamente, vamos precisar de algumas extensões para o sistema ZFC como NBG e MK, que introduzem o conceito de classes. Como esse não é o foco desse trabalho, vamos dar apenas algumas introduções heurísticas para alguns termos que usaremos adiante.

Começamos com o conceito mais básico: conjuntos. Vamos assumir que existem certos objetos chamados conjuntos, que são os mesmos que usamos no dia-a-dia. Assumimos também que, para conjuntos A, B e uma família $(X_i)_{i\in I}$, onde I é um conjunto, as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) Para cada propriedade P, podemos criar o conjunto $\{a \in A \mid P(a)$ (a tem a propriedade P)$\}$.

(ii) Podemos criar o conjunto $\mathscr{P}(A)$ de todos os subconjuntos de A, chamado **conjunto das partes** de A.

(iii) Existe o conjunto $\{A, B\}$, cujos elementos são A e B.

(iv) Existe o **par ordenado** (A, B).

(v) Existe a **união** $A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ ou } c \in B\}$.

(vi) Existe a **interseção** $A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ e } c \in B\}$.

(vii) Existe o **produto cartesiano** $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

(viii) Existe o **complementar relativo** $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$.

(ix) Existe o conjunto B^A das funções[2] $f : A \to B$.

(x) Existe a **imagem** da função índice $\{X_i \mid i \in I\}$.

(xi) Existe a **união** $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \mid x \in X_i \text{ para algum } i \in I\}$.

(xii) Existe a **interseção** $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \mid x \in X_i \ \forall i \in I\}$.

(xiii) Existe o **produto cartesiano** $\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \ \forall i \in I\}$.

(xiv) Existe a **união disjunta** $\dot{\bigcup}_{i \in I} (X_i \times \{i\})$.

Além dessas propriedades, pedimos que seja possível criar os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Frequentemente, teremos que tratar de Categorias como: "a Categoria dos Conjuntos", "a Categoria dos Espaços Vetoriais", "a Categoria dos Espaços Topológicos" e inclusive "a Categoria das Categorias", entre outras. Porém, sabemos que não existe uma entidade como "o Conjunto dos Conjuntos", pelo paradoxo de Russell. Para formalizar essa ideia, vamos introduzir o conceito de classes, como introduzido no sistema NBG.

Definição 2.2.1. *Uma classe é uma "coleção" tal que*

(i) seus membros são chamados conjuntos[3]*;*

*(ii) para cada propriedade P, podemos criar a **classe de todos os conjuntos com propriedade** P;*

(iii) dadas n classes $X_1, X_2, \cdots, X_n$, a ênupla $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ é uma classe;

(iv) todo conjunto é uma classe;

(v) não existe uma aplicação sobrejetiva de um conjunto para uma classe.

[2] Usamos função no sentido usual definido em Teoria de Conjuntos. Evitamos a definição formal por brevidade.

[3] A palavra conjunto aqui está sendo usada no sentido de Teoria Axiomática de Conjuntos, onde consideramos apenas conjuntos como objetos não-definidos. Ao longo do texto, denominaremos os membros de classes pela palavra "elementos", como é comum para conjuntos. A motivação para isso é poder definir conjuntos como um caso particular de classes, como mencionaremos mais adiante. Para uma construção mais detalhada, veja (19).

Da propriedade (iv), podemos caracterizar uma classe como **própria**, quando ela não é um conjunto e a propriedade (v) sugere que existe uma diferença de "tamanho" entre classes e conjuntos, ou seja, conjuntos são, em alguns contextos, chamados de **classes pequenas** e classes próprias são chamadas de **classes grandes**.

A propriedade (ii) sugere que existe uma classe maior que todas as outras: a classe de todos os conjuntos. Chamamos essa classe de **Universo** e é denotada por $\mathcal{U}$.

Finalmente, em alguns contextos, precisamos de uma noção maior do que a de classes. Assim, introduzimos o conceito de um **conglomerado** que devem satisfazer as seguintes propriedades:

1. toda classe é um conglomerado;

2. para cada propriedade P, podemos formar o conglomerado de todas as classes com a propriedade P;

3. conglomerados são fechados para as operações análogas às que temos para conjuntos como união, interseção, etc.;

4. conglomerados devem satisfazer o **Axioma da Escolha para Conglomerados**[4]: para cada aplicação sobrejetiva entre conglomerados $f : X \to Y$, existe uma aplicação injetiva $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id_Y$.

Após essa nota sobre Teoria de Conjuntos e as bases sobre a qual estamos construindo nossas definições, podemos começar com os básicos de Teoria de Categorias.

2.3 Categorias

Começamos com a definição de Categorias. A motivação principal é encontrar uma maneira de analisar como certas estruturas de certo tipo interagem entre si. Assim, temos a

Definição 2.3.1. *Uma* ***Categoria*** *é uma quádrupla* $\mathcal{A} = (\mathcal{O}, \hom, id, \circ)$, *onde*

(i) $\mathcal{O}$ *é uma classe cujos elementos são chamados objetos de* $\mathcal{A}$*;*

(ii) hom *é uma classe tal que,*

  (a) para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{O}$*, existe uma classe de* ***mapas*** *(ou* ***morfismos*** *ou* ***setas****)* $f : A \to B$ *de* A *para* B*, denotada por* $\mathcal{A}(A, B)$*, que são disjuntos par a par;*

[4] O Axioma da Escolha para Conglomerados é uma forma mais forte do Axioma da Escolha em ZFC.

(b) *para cada trinca de objetos $A, B, C \in \mathcal{O}$, temos uma operação*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A,B) \times \mathcal{A}(B,C) &\longrightarrow \mathcal{A}(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

*chamada **composição**, que é associativa, isso é, para $A, B, C, D \in \mathcal{O}$ e $f \in \mathcal{A}(A,B)$, $g \in \mathcal{A}(B,C)$ e $h \in \mathcal{A}(C,D)$, temos $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;*

(c) *para cada objeto $A \in \mathcal{O}$, existe um mapa $id_A : A \to A$ chamada **identidade** tal que, para cada $f \in \mathcal{A}(A,B)$, $1_B \circ f = f \circ 1_A = f$.*

Observação 2.3.1. Podemos também denotar $\mathcal{O}$ por ob$\mathcal{A}$.

Observação 2.3.2. Para objetos $A, B \in$ ob$\mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}(A,B)$, dizemos que A é o **domínio** e B é o **contra-domínio** de f.

Frequentemente vamos usar as mesmas notações que usamos para conjuntos quando tratamos de Categorias. Por exemplo, podemos escrever $A \in \mathcal{A}$ para denotar um objeto de $\mathcal{A}$ ou $f \in \mathcal{A}$ para denotar um mapa (desde que o domínio e o contra-domínio estejam explícitos).

Apresentamos agora alguns exemplos de Categorias.

1) A Categoria **Set** tem como objetos conjuntos e, para objetos (conjuntos) $A, B \in$ **ob(Set)**, o conjunto **Set**(A,B) é o conjunto das funções entre A e B, a operação composição é a própria composição entre funções e, para cada conjunto, a identidade é a função identidade no conjunto.

2) A Categoria **Grp** tem como objetos grupos e seus morfismos são homomorfismos de grupos.

3) A Categoria **Ring** tem anéis como objetos e homomorfismos de anéis como morfismos.

4) $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ tem espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ como objetos e aplicações lineares como morfismos.

5) A Categoria **Rel** tem como objetos pares (X,R), onde X é um conjunto e R é uma relação em X. Os morfismos são aplicações que preservam a relação, isso é, dados objetos $(X,R),(Y,S) \in$ **Rel**, um mapa $f : (X,R) \to (Y,S)$ é uma função $f : X \to Y$ tal que, xRx' implica que $f(x)Sf(x')$.

6) Em geral, **Alg**(Ω) tem como objetos Ω-álgebras e Ω-homomorfismos como mapas, onde $\Omega = \{n_i \in \mathbb{N} \mid i \in I \text{ um conjunto}\}$. Uma Ω-álgebra é definida como um

par $(A, (\omega_i)_{i\in I})$, onde cada $\omega_i : A^{n_i} \to A$ é uma operação n-ária em A e um Ω-homomorfismo $f : (A, (\omega_i)_{i\in I}) \to (\hat{A}, (\hat{\omega}_i)_{i\in I})$ é uma função $f : A \to \hat{A}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A^{n_i} \arrow[r, "f^{n_i}"] \arrow[d, "\omega_i"] & \hat{A}^{n_i} \arrow[d, "\omega_i"] \\ A \arrow[r, "f"] & \hat{A} \end{tikzcd}$$

comuta.

7) **Top** é uma Categoria com espaços topológicos como objetos e aplicações contínuas como morfismos.

8) Dadas duas Categorias $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, podemos definir uma Categoria $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, cujos objetos são pares (A, B), onde $A \in \mathrm{ob}\mathscr{A}$ e $B \in \mathrm{ob}\mathscr{B}$ e, para $(A, B), (A', B') \in \mathrm{ob}(A \times B)$ os mapas são pares (f, g), onde $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$.

9) Dizemos que uma Categoria $\mathscr{A}$ é **discreta**, quando, para cada par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$, tais que $A \neq B$, temos $\mathscr{A}(A, B) = \varnothing$. Graficamente, Categorias discretas podem ser representadas por

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] & B \arrow[loop above, "id_B"] & C \arrow[loop above, "id_C"] & \cdots \end{tikzcd}$$

10) Existe a Categoria **1**, que possui apenas um elemento e o único morfismo é a identidade.

Os exemplos $2-6$ são chamados mais especificamente de **construtos**. Informalmente, os objetos da Categoria são conjuntos com certas estruturas adicionadas e cujos mapas mantêm essa estrutura entre objetos. Existe uma definição formal para estrutura, que pode ser encontrada em (20). Nesse trabalho vamos usar palavras como estruturas e propriedades no sentido usado normalmente em contextos matemáticos.

Categorias podem ser caracterizadas de acordo com seus "tamanhos". Uma **Categoria pequena** é uma Categoria cuja classe de objetos é um conjunto (classe pequena), caso contrário, dizemos que é uma **Categoria grande**. Além disso, podemos dizer que uma Categoria $\mathscr{A}$ é **localmente pequena**, quando, para cada par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$, a classe $\mathscr{A}(A, B)$ é um conjunto.

Essa última definição é inspirada por um fato notável sobre Categorias, a saber, que elas podem ser definidas omitindo-se objetos. Intuitivamente, isso pode ser feito, pois existe uma bijeção entre as identidades na Categoria e os seus objetos. Para uma definição de Categoria independente de objetos, sugerimos o livro (6). Devido à essa definição, conseguimos construir um sistema axiomático independente do ZFC, baseado em Teoria de Categorias. Os exemplos que demos anteriormente, são Categorias localmente pequenas. Veremos mais adiante também exemplos de Categorias pequenas, mas não avançaremos no tópico de Categorias grandes, já que elas demandam um nível de detalhe muito maior e fogem dos nossos objetivos nesse trabalho. Brevemente, um exemplo de Categoria grande é a Categoria **Cat**, cujos objetos são Categorias pequenas.

Retornamos agora, para as características categóricas mais básicas. A seguinte definição será fundamental para o final do nosso trabalho.

Definição 2.3.2. *Dada uma Categoria $\mathcal{A}$ e objetos $A, B \in \mathcal{A}$. Dizemos que um mapa $f \in \mathcal{A}(A, B)$ é um* ***isomorfismo****, quando existe um mapa $g \in \mathcal{A}(B, A)$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. Nesse caso escrevemos $A \cong B$.*

Dada g como na definição acima, podemos chamá-la a inversa de f, que denotaremos por f^{-1}, devido à seguinte

Proposição 2.3.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria e $A, B \in \mathcal{A}$. Se $f : A \to B$ é um isomorfismo em $\mathcal{A}$, então f^{-1} é única*

Demonstração: Sejam $g, g' \in \mathcal{A}(B, A)$ tais que $g' \circ f = g \circ f = id_A$ e $f \circ g' = f \circ g = id_B$. Assim, temos que

$$g' = g' \circ id_B = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g = id_A \circ g = g.$$

Logo, a inversa de f é única. □

Nos exemplos anteriores, podemos encontrar isomorfismos. Por exemplo,

1) Na Categoria **Set**, isomorfismos são funções bijetivas.

2) Em **Grp**, isomorfismos são isomorfismos de grupos.

3) Em **Ring**, isomorfismos são isomorfismos de anéis.

4) Em $\mathbf{Vect}_{\mathcal{K}}$, temos isomorfismos lineares.

5) Em **Top**, os isomorfismos são homeomorfismos.

Um exemplo importante de Categoria que surge da definição de isomorfismo é o de um grupo. Dado um grupo G qualquer, podemos interpretar G como uma Categoria com um único objeto e cujos todos os mapas são isomorfismos. Mais precisamente, denotamos por A o único objeto da Categoria $\mathcal{G}$. Assim, temos que $G = \mathcal{G}(A, A)$, isto é, os elementos do grupo passam a ser vistos como mapas na Categoria, o produto no grupo se torna a composição na Categoria e a identidade do grupo se torna o mapa identidade na Categoria $\mathcal{G}$. Essa definição de grupos pode ser vista no seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above] \arrow[loop left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Note que, aqui não exigimos nada sobre o objeto. Nos primeiros exemplos de Categorias que demos aqui, os objetos ou são conjuntos puros ou conjuntos que possuem algum tipo de estrutura, porém esse não é necessariamente o caso. Por exemplo, considerando o grupo diedral D_n, o objeto na Categoria pode ser interpretado como um polígono de n lados e os morfismos como as operações de simetria sobre ele. Esse é um belo fato sobre Teoria de Categorias que leva a Teoria de Grupos para suas origens como as operações de simetria em certos objetos.

Esse exemplo, juntamente com a observação que fizemos sobre a definição de Categorias independente de objetos, nos mostra um fato importante: objetos não são fundamentais em uma Categoria. De fato, poderíamos ignorar completamente o objeto no exemplo acima. As estruturas de interesse são todas encontradas no conjunto dos morfismos. Usualmente, eles são mantidos simplesmente por um motivo prático, a saber, a manipulação de Categorias se torna mais simples quando consideramos objetos, além de estarmos acostumados com a ideia de que um morfismo necessita de um domínio e um contra-domínio.

Retirando o requisito de que cada morfismo em grupo, visto como Categoria, seja um isomorfismo, obtemos uma representação categórica para um monóide, isto é, um conjunto com uma operação binária, cujos elementos não necessariamente possuem uma inversa.

Monóides têm sido muito utilizados em Teoria de Recursos (11). Dizemos que uma **Teoria de Recurso** é um monóide simétrico. O exemplo clássico para essa Teoria é o recurso **Chem** de átomos e transformações químicas. Quando consideramos uma transformação química como

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O,$$

vemos que a soma é representada em um monóide pela operação binária e a seta representa o sinal de igual no monóide. É claro que, já no exemplo acima, vemos a necessidade de certas estruturas mais delicadas, como uma forma de quantizar dado recurso, isto é, alguma maneira de expressarmos que $2H_2$ representa uma quantidade maior de recursos do que H_2. Além disso, considerando certas transformações mais delicadas como

$$2O_3 \xrightarrow{\text{luz UV}} 3O_2,$$

precisamos ainda de maneiras de representarmos o uso do catalisador luz UV. Essa área tem ganhado muita popularidade em áreas relacionadas à física como Teoria Quântica de Informação e Termodinâmica (21, 22, 23).

Antes de partir para o próximo exemplo, vamos relembrar algumas definições. Consideremos um conjunto M e uma relação R em M. Para todos $a, b, c \in M$, dizemos que R é:

(a) **reflexiva** quando aRa;

(b) **transitiva** quando aRb e $bRc \Rightarrow aRc$;

(c) **anti-simétrica** quando aRb e $bRa \Rightarrow a = b$;

(d) **conexa** quando aRb ou bRa.

Assim, dizemos que R é

1. uma **pré-ordem** quando é reflexiva e transitiva;

2. uma **ordem parcial** quando é reflexiva, transitiva e anti-simétrica;

3. uma **ordem total** quando é transitiva, anti-simétrica e conexa (note que a conectividade implica na reflexividade).

Com as definições acima, podemos partir para o nosso último exemplo de conjunto que pode ser visto como Categoria é um conjunto pré-ordenado (ou parcialmente ordenado ou totalmente ordenado). Consideremos um conjunto $(S, \leq)$ pré-ordenado. Definimos a Categoria $\mathcal{S}$, cujos objetos são os elementos de S e, dados objetos $a, b \in \mathcal{S}$, temos que $\mathcal{S}(a, b)$ é o conjunto vazio ou um conjunto unitário. No primeiro caso, escrevemos que $a \nleq b$ e no segundo, dizemos que $a \leq b$. Assim, dado $a \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}(a, a) = \{id_a\}$, ou seja, $a \leq a$. Agora, dados $a, b, c \in \mathcal{S}$ tais que $a \leq b$ e $b \leq c$, existem únicos $f \in \mathcal{S}(a, b)$ e $g \in \mathcal{S}(b, c)$ e pela composição na Categoria, temos $g \circ f \in \mathcal{S}(a, c)$, isso é, $a \leq c$. Portanto, a pré-ordem é mantida na Categoria. Note que nesse exemplo os morfismos na categoria não são aplicações como na maioria dos exemplos de categorias que demos aqui. Nesse caso, os mapas são apenas uma forma de descrevermos propriedades de um conjunto - que já sabemos como descrever por conjuntos - no formalismo categórico. Assim, esse exemplo fornece uma boa representação do nível de abstração utilizado em Teoria de Categorias.

Terminamos os conceitos básicos de Categorias com uma definição fundamental.

Definição 2.3.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Definimos a* ***Categoria dual*** *de $\mathcal{A}$, denotada por $\mathcal{A}^{op}$, tal que $ob(\mathcal{A}) = ob(A^{op})$ e, dados objetos $A, B \in \mathcal{A}^{op}$ e $f \in \mathcal{A}^{op}(A, B)$, então $f \in \mathcal{A}(B, A)$. As identidades são mantidas, e a lei de composição é dada por $g \circ^{op} f = f \circ g$, onde $\circ^{op}$ é a composição em $\mathcal{A}^{op}$ e $\circ$ a composição em $\mathcal{A}$.*

Assim, a Categoria dual de $\mathcal{A}$ mantém os objetos de $\mathcal{A}$ e troca a orientação das setas. Veremos alguns exemplos de como Categorias duais se comportam quando mencionarmos funtores. Por enquanto, apresentamos uma ideia em Teoria de Categorias, baseada na definição acima.

Princípio da Dualidade: Seja P uma propriedade. Se P é válida para todas as Categorias, então P^{op} é válido para todas as Categorias.

Informalmente, P^{op} é a propriedade obtida quando trocamos o sentido de todas as setas que aparecem no enunciado de P. O princípio nos fornece uma maneira simples de obtermos resultados análogos para Categorias duais.

2.4 Funtores

Como foi dito anteriormente, objetos em Teoria de Categorias tomam um papel secundário, sendo o principal interesse estudar o comportamento dos morfismos entre os objetos. Seguindo essa ideia, vamos descrever agora como podemos mapear Categorias. Assim, introduzimos o conceito de funtor.

Definição 2.4.1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias. Um* ***funtor*** *$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ consiste de:*

(i) uma função[5] $ob(\mathcal{A}) \to ob(\mathcal{B})$, que associa a cada objeto A de $\mathcal{A}$ um objeto de $\mathcal{B}$, denotado por $F(A)$;

(ii) para cada par de objetos $A, A' \in \mathcal{A}$, temos uma função $\mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A'))$, que associa a cada mapa $f : A \to A'$ um mapa $F(f) : F(A) \to F(A')$, tal que

(a) para $A, A', A'' \in \mathcal{A}$ e $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ em $\mathcal{A}$, temos $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$[6];

(b) para $A \in \mathcal{A}$, $F(id_A) = id_{F(A)}$.

Observação 2.4.1. Na Categoria **Cat**, apresentada anteriormente, os morfismos são funtores entre Categorias pequenas.

Do fato que, um funtor preserva compostas e identidades, conseguimos a seguinte

5 Aqui, usamos a palavra função para uma aplicação entre classes. Como esse conceito coincide com o de função para classes pequenas, estamos usando o mesmo termo para ambos.

6 Usamos a mesma notação para a lei de composição em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, mas elas podem ser leis diferentes.

Proposição 2.4.1. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Categorias, $A, A' \in \mathcal{A}$ e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor. Se $f : A \to A'$ é um isomorfismo em $\mathcal{A}$, então $F(f) : F(A) \to F(A')$ é um isomorfismo tal que $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$.*

Demonstração: Como f é um isomorfismo, existe $f^{-1} \in \mathcal{A}(A', A)$ tal que $f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_{A'}$. Assim, temos

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(id_A) = id_{F(A)}$$

e

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(id_{A'}) = id_{F(A')},$$

ou seja, $F(f)$ é um isomorfismo e, pela unicidade do morfismo inverso, temos que $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$. $\square$

Consideremos, agora, alguns exemplos importantes de funtores, que usaremos adiante.

1) Dada uma Categoria $\mathcal{A}$, o funtor identidade, $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, é definido por $id_{\mathcal{A}}(A) = A$, para todo $A \in \mathcal{A}$ e $id_{\mathcal{A}}(f) = f$ para toda $f \in \mathcal{A}(A, B)$.

2) Dados grupos $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$, vistos como Categorias, um funtor $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um homomorfismo de grupos. Com efeito, seja $G \in \mathcal{G}$ o único objeto de $\mathcal{G}$ e $H \in \mathcal{H}$ o único objeto de $\mathcal{H}$, temos que $\Phi(G) = H$. Assim, dados $f, g \in \mathcal{G}(G, G)$, temos que

$$\Phi(g \circ f) = \Phi(g) \circ \Phi(f),$$

ou seja, Φ preserva o produto de grupos.

3) Analogamente, um funtor entre monóides $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ vistos como Categorias, é um homomorfismo de monóides.

4) Dadas Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, dado qualquer objeto de $B \in \mathcal{B}$, podemos definir o funtor constante como, $C_B : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ por $C_B(A) = B$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e, para $C_B \in \mathcal{A}(A, A')$, $F(f) = id_B$.

5) Dados uma Categoria localmente pequena $\mathcal{A}$ e um objeto $A \in \mathcal{A}$, podemos definir o **hom-funtor covariante**, $\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$, onde

$$\mathcal{A}(A, -)(B) = \mathcal{A}(A, B)$$

e, para $f \in \mathcal{A}(B, C)$,

$$\mathcal{A}(A, -)(f) = \mathcal{A}(A, f) : \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, C),$$

onde $\mathcal{A}(A, f)$ é definida por $\mathcal{A}(A, f)(g) = f \circ g$.

6) Analogamente, dados uma Categoria localmente pequena $\mathcal{A}$ e um objeto $A \in \mathcal{A}$, podemos definir o **hom-funtor contravariante**, $\mathcal{A}(-,A) : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Set}$, onde

$$\mathcal{A}(-,A)(B) = \mathcal{A}(B,A)$$

e, para $f \in \mathcal{A}^{op}(B,C)$,

$$\mathcal{A}(-,A)(f) = \mathcal{A}(f,A) : \mathcal{A}(B,A) \to \mathcal{A}(C,A),$$

onde $\mathcal{A}(f,A)$ é definida por $\mathcal{A}(f,A)(g) = g \circ f$.

7) Dadas Categorias localmente pequenas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, podemos definir o funtor composto por

$$G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C},$$

definido em objetos por $G \circ F(A) = G(F(A))$ e em morfismos $f : A \to A'$ por $G \circ F(f) = G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(A'))$.

Como vemos nos exemplos acima, funtores são tipos de mapeamentos entre estruturas matemáticas, que em certos casos coincidem com a própria noção de função, como vemos nos exemplos 2) e 3) (similarmente a eles, um funtor entre conjuntos pré-ordenados, vistos como Categorias, é uma função que preserva ordem). Seguindo essa ideia, gostaríamos de definir algum tipo de propriedade análoga ao conceito de aplicação injetiva e sobrejetiva. Assim, temos as seguintes definições:

Definição 2.4.2. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias. Um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dito **fiel**, quando, para $A, A' \in \mathcal{A}$ a função $\mathcal{A}(A,A') \to \mathcal{B}(F(A),F(A'))$ é injetiva.*

Definição 2.4.3. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias. Um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dito **pleno**, quando, para $A, A' \in \mathcal{A}$ a função $\mathcal{A}(A,A') \to \mathcal{B}(F(A),F(A'))$ é sobrejetiva.*

Seguindo o paralelo com Teoria de Conjuntos, podemos pensar em certas formas de inclusão de Categorias.

Definição 2.4.4. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Categorias. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **subCategoria** de $\mathcal{B}$ quando*

(i) $ob\mathcal{A} \subseteq ob\mathcal{B}$;

(ii) para cada par de objetos $A, A' \in ob\mathcal{A}$, temos $\mathcal{A}(A,A') \subseteq \mathcal{B}(A,A')$;

(iii) para cada objeto $A \in ob\mathcal{A}$, $id_A \in \mathcal{B}(A,A)$ (isso é, a identidade em $\mathcal{A}$ é mesma identidade de $\mathcal{B}$);

(iv) para cada par de morfismos $f : A \to A'$ e $g : A' \to A''$ a composta $g \circ_{\mathcal{A}} f = g \circ_{\mathcal{B}} f$ (isso é, a composição em $\mathcal{A}$ é a restrição da composição em $\mathcal{B}$).

Temos ainda um caso especial da definição acima.

Definição 2.4.5. *Uma subCategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ é dita uma **subCategoria plena** quando, para cada par de objetos $A, A' \in ob\mathcal{A}$, tivermos $\mathcal{A}(A, A') = \mathcal{B}(A, A')$.*

Definição 2.4.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma subCategoria da Categoria $\mathcal{B}$. Definimos o **funtor inclusão** $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ por:*

(i) para cada objeto A em $\mathcal{A}$, $\iota(A) = i(A)$, onde $i : ob\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ denota a aplicação inclusão de conjuntos;

(ii) para cada morfismo $f : A \to A'$, $\iota(f) = j(f)$, onde $j : \mathcal{A}(A, A') \hookrightarrow \mathcal{B}(A, A')$ é a aplicação inclusão de conjuntos.

Como a aplicação inclusão é injetiva, temos que o funtor ι é fiel. Além disso, ele será pleno se, e somente se $\mathcal{A}$ é uma subCategoria plena.

Podemos citar os seguintes exemplos de subCategorias:

1. Toda Categoria $\mathcal{A}$ pode ser vista como uma Categoria plena de $\mathcal{A}$.

2. Dadas Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, temos que a classe de objetos de $\mathcal{B}$ dados por $F(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, junto com os morfismos $F(f)$, com $f : A \to A'$ em $\mathcal{A}$ forma uma subCategoria de $\mathcal{B}$. Assim, seguindo a notação de conjuntos, chamamos essa subCategoria de **imagem** de F por $\mathcal{A}$ e a denotamos por $F(\mathcal{A})$.

3. A Categoria **Ab**, de grupos abelianos, é uma subCategoria plena da Categoria **Grp**.

4. Por sua vez, a Categoria **Grp** é uma subCategoria de **Mon**, a Categoria de monóides.

5. As subCategorias de um grupo G (visto como uma Categoria) são os subgrupos de G. Analogamente, as subCategorias de um Monóide são submonóides.

6. Consideremos as seguintes Categorias:

   (a) **Top** de espaços topológicos e aplicações contínuas;

   (b) **Haus** de espaços de Hausdorff e aplicações contínuas;

   (c) **Tych** de espaços de Tychonoff e aplicações contínuas.

Temos que **Tych** é uma subCategoria plena de **Haus** e, por sua vez, **Haus** forma uma subCategoria plena de **Top**.

Note que não precisamos dizer nada sobre a função $ob\mathcal{A} \to ob\mathcal{B}$, quando definimos funtores plenos e fiéis pois, como já observamos anteriormente, existe uma bijeção entre os objetos e as identidades. Dessa forma, temos a

Proposição 2.4.2. *Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor entre as Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Se F é fiel (pleno), então a função $ob\mathcal{A} \to ob\mathcal{B}$ é injetiva (sobrejetiva).*

Demonstração: Sejam $I_{\mathcal{A}} = \{id_A \mid A \in ob\mathcal{A}\}$ e $I_{\mathcal{B}} = \{id_{\mathcal{B}} \mid B \in ob\mathcal{B}\}$, os conjuntos das identidades de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Assim, a função

$$\varphi_{\mathcal{A}} : I_{\mathcal{A}} \to ob\mathcal{A},$$

definida por $\varphi_{\mathcal{A}}(id_A) = A$, é bijetiva. De fato, se tivermos $A = A'$, então, temos $id_A = id_{A'}$, pela unicidade da identidade. Além disso, pela definição de Categoria, dado um objeto A de $\mathcal{A}$, existe id_A tal que $\varphi_{\mathcal{A}}(id_A) = A$. Portanto, $\varphi_{\mathcal{A}}$ e $\varphi_{\mathcal{B}}$ são bijetivas. Por hipótese, para cada par de objetos $A, A' \in \mathcal{A}$, a função

$$\Gamma_{(A,A')} : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A'))$$

é injetiva (sobrejetiva). Dessa forma, dado um objeto $A \in \mathcal{A}$, a restrição

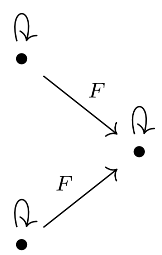
$$\Gamma_{(A,A)}|_{I_{\mathcal{A}}} : I_{\mathcal{A}} \to I_{F(\mathcal{A})}$$

também será. Assim, para um objeto $A \in \mathcal{A}$, a composta

$$\varphi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Gamma_{(A,A)}|_{I_{\mathcal{A}}} \circ \varphi_{\mathcal{B}} : ob\mathcal{A} \to ob\mathcal{B}$$

é injetiva (sobrejetiva). □

É importante observar a diferença entre os conceitos de um funtor pleno ou fiel e o de uma função injetiva ou sobrejetiva. Para ilustrar essa distinção, consideremos uma Categoria discreta $\mathcal{A}$ com apenas dois objetos. Um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathbf{1}$ é fiel, porém, as duas identidades de $\mathcal{A}$ são levadas na identidade de $\mathbf{1}$. Podemos representar esse exemplo com o seguinte diagrama:



Assim, vemos que o conceito de fidelidade e plenitude podem ser considerados "locais", já que eles dizem respeito a forma como o funtor atua em uma "parte" da Categoria. Maiores detalhes sobre "localidade" da plenitude serão tratados em breve, veja a Definição 2.4.8.

Definição 2.4.7. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor. Dizemos que F é um **isomorfismo** quando existe um funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $G \circ F = id_{\mathcal{A}}$ e $F \circ G = id_{\mathcal{B}}$. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são Categorias **isomorfas** e denotamos por $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.*

Proposição 2.4.3. *Se $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo tal que $G \circ F = id_{\mathcal{A}}$ e $F \circ G = id_{\mathcal{B}}$ com $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, então G é o único funtor com essa propriedade.*

Demonstração: Consideremos $G, G' : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tais que $G' \circ F = G \circ F = id_{\mathcal{A}}$ e $F \circ G' = F \circ G = id_{\mathcal{B}}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} G' \circ F = G \circ F &\Rightarrow (G' \circ F) \circ G = (G \circ F) \circ G \\ &\Rightarrow G' \circ (F \circ G) = G \circ (F \circ G) \\ &\Rightarrow G' \circ id_{\mathcal{B}} = G \circ id_{\mathcal{B}} \\ &\Rightarrow G' = G. \end{aligned}$$

□

Pelo resultado acima, podemos falar **da** inversa de F e, nesse caso, denotamos G por F^{-1}.

Proposição 2.4.4. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias. $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo se, e somente se, F é fiel, pleno e uma bijeção nos objetos.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Sejam $A, A' \in \mathcal{A}$ objetos. Consideremos a função

$$\mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A')).$$

Dados $f, g \in \mathcal{A}(A, A')$ tais que $F(f) = F(g)$, então temos que

$$F(f) = F(g) \Rightarrow F^{-1}(F(f)) = F^{-1}(F(g)) \Rightarrow f = g,$$

ou seja, F é injetiva. Seja, agora, $h \in \mathcal{B}(F(A), F(A'))$. Assim, o mapa

$$F^{-1}(h) : A = F^{-1}(F(A)) \to F^{-1}(F(A')) = A',$$

i.e., $F^{-1}(h) \in \mathcal{A}(A, A')$. Além disso,

$$F(F^{-1}(h)) = h$$

e, portanto, $\mathscr{A}(A, A') \to \mathscr{B}(F(A), F(A'))$ é sobrejetiva.

($\Leftarrow$) Já vimos que, se F for fiel e pleno, então a função entre os objetos de $\mathscr{B}$ é injetiva e sobrejetiva e, portanto, bijetiva. Assim, para cada objeto $B \in \mathscr{B}$ existe um único objeto $A \in \mathscr{A}$ tal que $F(A) = B$. Além disso, como F é pleno e fiel, para cada $g : B \to B'$, existe um único morfismo $f : A \to A'$, com $F(A) = B$ e $F(A') = B'$ tal que $F(f) = g$. Dessa forma, podemos definir um funtor $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que, para cada $B \in \mathscr{B}$ e $g : B \to B'$ tal que,

(i) G(B) = A, com A sendo o único A com $F(A) = B$;

(ii) G(g) = f, com f sendo o único mapa $f : A \to A'$ com $F(f) : F(A) = B \to B' = F(A')$.

Finalmente, por construção, temos que $G \circ F = id_{\mathscr{A}}$ e $F \circ G = id_{\mathscr{B}}$. Logo, $G = F^{-1}$ e, portanto, F é um isomorfismo.

□

Podemos encontrar alguns exemplos simples de Categorias isomorfas a partir dos exemplos dados anteriormente.

1. Dados dois grupos isomorfos, vistos como Categorias, já sabemos que um homomorfismo entre eles é um funtor. Assim, um isomorfismo entre grupos pode ser visto como um isomorfismo de Categorias.

2. Analogamente, um isomorfismo entre monóides pode ser interpretado como um isomorfismo de Categorias.

Existe um outro conceito quando tratamos da aplicação entre os objetos de duas Categorias, relacionado com a sobrejetividade.

Definição 2.4.8. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ duas Categorias e $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor. Dizemos que F é **essencialmente sobrejetivo (em objetos)** quando, para todo $B \in \mathscr{B}$, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $F(A) \cong B$.*

Essa definição permite definir uma relação entre duas Categorias mais fraca do que isomorfismo, que veremos mais adiante.

Introduziremos agora um conceito fundamental da matemática, formalizado categoricamente: estrutura. Frequentemente, dizemos algo como "um grupo é um conjunto munido de uma operação de multiplicação com as propriedades: ...", porém raramente diferenciamos entre um grupo, por exemplo, e o conjunto "base" sobre o qual definimos a operação de multiplicação. O processo de retirar a estrutura de certo conjunto, fornecendo o conjunto base dele, é funtorial, assim como o processo de adicionar estrutura.

Existem algumas definições possíveis para estrutura que podemos encontrar em Teoria de Modelos. Para uma breve discussão do assunto sugerimos (24), enquanto em (25) encontramos uma discussão mais detalhada do assunto.

Primeiramente, devemos separar algumas ideias que normalmente consideramos como estrutura. Fazendo isso, percebemos que podemos agrupar estruturas de certos modos diferentes. Para exemplificar, consideremos $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{K}$.

1) **Propriedade:** é uma característica intrínseca do objeto. No caso de $\mathscr{H}$, a completude do espaço é uma propriedade.

2) **Estrutura:** é algum tipo de objeto adicionado. Em $\mathscr{H}$, o produto interno é uma estrutura.

3) **Coisa**[7]**:** é algum outro conjunto adicionado paralelamente ao objeto principal. Para $\mathscr{H}$ uma coisa adicionada é o corpo $\mathbb{K}$.

Não entraremos muito na diferença entre esses conceitos, mas gostaríamos de chamar atenção para eles nesse trabalho, uma vez que frequentemente misturamos todas essas definições em palavras como "propriedade" ou "estrutura". De fato, esses termos se confundem frequentemente. Por exemplo, note que a completude de um espaço é uma propriedade, porém ela é definida a partir de sequências que, por sua vez, necessitam de uma topologia, que é uma estrutura. Além disso, a própria estrutura de um produto interno é um mapeamento com contradomínio sendo a coisa $\mathbb{K}$.

Definição 2.4.9. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ Categorias e $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor. F é chamado de **funtor esquecimento**, quando "esquece" alguma estrutura, propriedade ou coisa. Mais precisamente:*

*(i) F **esquece somente propriedade**, quando é fiel e pleno;*

*(ii) F **esquece somente estrutura**, quando é essencialmente sobrejetivo e fiel;*

*(iii) F **esquece somente coisas**, quando é essencialmente sobrejetivo e pleno.*

Nesse trabalho, quando tratarmos de funtores esquecimento, geralmente estaremos nos referindo a funtores da forma $U : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$, que são funtores que esquecem todas as

[7] Usamos a palavra coisa como tradução da palavra inglesa *"stuff"*. Não encontramos nenhum texto em português que tratasse desse termo e optamos por essa tradução, por estar associada a ideia de "coisa pública", ou seja, tudo o que está ligado ao governo.

estruturas acima e fornece apenas o conjunto base do objeto do domínio do funtor. Como exemplos de funtores esquecimento, temos

1) $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ atua em um grupo fornecendo o conjunto dos elementos do grupo sem a operação de produto, e atua em homomorfismos de grupos fornecendo apenas a função definida pelo homomorfismo.

2) $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ atua da mesma forma que o funtor acima, fornecendo os conjuntos e as funções de base quando tratamos de anéis.

3) O funtor $U : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}$ esquece a estrutura vetorial e fornece o conjunto base de cada espaço e, para cada transformação liner em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, esquece a linearidade da aplicação e passa a ser vista como uma função entre conjuntos.

4) O funtor $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Ab}$ leva espaços vetoriais nos grupos abelianos, esquecendo o corpo sobre o qual o espaço vetorial é construído e a operação de multiplicação por escalar. Assim, esse funtor esquece coisas e estrutura (note que não esquece somente um ou outro).

5) O funtor $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, o funtor inclusão, simplesmente esquece que um grupo é abeliano. Dessa forma, esse funtor esquece somente propriedade (de fato, esse funtor é pleno e fiel).

Analogamente ao que fazemos com funtores esquecimento, podemos adicionar estrutura a um conjunto. Essa ideia é um pouco menos intuitiva do que o que fazemos com funtores esquecimento. Por exemplo, podemos tomar um conjunto e criar , a partir dele, um grupo, que chamamos de grupo livre. Esse processo é porém um tanto mais complicado do que tomar um grupo e esquecer a operação de produto nele. Veremos, porém, que existem alguns resultados sobre Categorias que nos permitem garantir a existência de um funtor livre a partir de um funtor esquecimento.

Como um exemplo de um funtor livre, podemos considerar o exemplo que deu origem a seu nome, a saber, o funtor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$, que, para cada conjunto, fornece o grupo livre gerado por ele e leva funções em homomorfismos, definidos em cada letra de cada palavra encontrada no grupo livre. Mais precisamente, consideremos os conjuntos $S = \{w, x, y, z\}$ e $T = \{u, v\}$ e a função $f : \{w, x, y, z\} \to \{u, v\}$, definida por $f(w) = f(x) = f(y) = u$ e $f(z) = u$. Denotando o funtor livre por $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$, os elementos do grupo $F(S)$, chamadas palavras, são escritos como uma sequência dos elementos de S, por exemplo, yw^2x^2zy, onde as potências denotam o mesmo elemento seguidos, ou seja, $x^3 = xxx$. Além disso, colocamos também inversos de cada elemento e uma identidade e, de forma que $g^{-1}g = e$, para todo $g \in S$. Assim, f se torna um homomorfismo de grupos quando, atuamos com f em cada letra da palavra, isso é,

$$f(yw^2x^2zy) = f(y)f(w)^2f(x)^2f(z)f(y) = uu^2u^2vu = u^5vu.$$

Portanto, o funtor livre, define, de fato, um funtor.

Uma construção análoga pode ser feita para espaços vetoriais. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. O funtor livre $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ é definido da seguinte maneira:

(i) para cada conjunto $S \in \mathbf{Set}$, o espaço vetorial $F(S)$ é definido como o espaço gerado por somas

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s,$$

onde $\lambda_s \in \mathbb{K}$ $\forall s \in S$ e existe apenas um número finito de $\lambda_s \neq 0$. Além disso, definimos a soma e a multiplicação por escalar, por

$$\sum_{s \in S} \lambda_s s + \sum_{s \in S} \mu_s s = \sum_{s \in S} (\lambda_s + \mu_s) s;$$

e, para $k \in \mathbb{K}$,

$$k \sum_{s \in S} \lambda_s s = (k\lambda_s) s;$$

(ii) para cada função $f : S \to T$, definimos a aplicação linear $F(f) : F(S) \to F(T)$ por

$$F(f)(\sum_{s \in S} \lambda_s s) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s).$$

Assim, esse mapa é de fato linear, pois

$$\begin{aligned} F(f)(\sum_{s \in S} \lambda_s s + \sum_{s \in S} \mu_s s) &= F(f)(\sum_{s \in S} (\lambda_s + \mu_s) s) \\ &= \sum_{s \in S} (\lambda_s + \mu_s) f(s) \\ &= \sum_{s \in S} \lambda_s f(s) + \sum_{s \in S} \mu_s f(s) \\ &= F(f)(\sum_{s \in S} \lambda_s s) + F(f)(\sum_{s \in S} \mu_s s); \end{aligned}$$

e, para $k \in \mathbb{K}$,

$$F(f)(k \sum_{s \in S} \lambda_s s) = F(f)(\sum_{s \in S} (k\lambda_s) s) = \sum_{s \in S} (k\lambda_s) f(s) = k \sum_{s \in S} \lambda_s f(s) = kF(f)(\sum_{s \in S} \lambda_s s).$$

Logo, F define um funtor.

Podemos fazer isso também para espaços vetoriais, isso é, dado um conjunto podemos definir um espaço livre gerado por ele, definindo um funtor livre.

Associado ao conceito de funtor esquecimento, temos a seguinte definição:

Definição 2.4.10. *Seja $\mathcal{X}$ uma Categoria. Uma **Categoria concreta** sobre $\mathcal{X}$ é um par $(\mathcal{A}, U)$, onde $\mathcal{A}$ é uma Categoria e $U : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ é um funtor fiel. Quando $\mathcal{X}$ = **Set**, chamamos a Categoria concreta de **construto**.*

Nos exemplos de Categorias que vimos anteriormente mencionamos a palavra construto, pois eles se encaixam nessa definição. Na definição acima, o funtor U é um funtor esquecimento, e a Categoria $\mathcal{X}$ é chamada Categoria base.

Com o conceito de funtores, podemos definir um novo tipo de Categoria, que será importante mais adiante.

Definição 2.4.11. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ Categorias e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores. Definimos a **Categoria vírgula**, $(F \Rightarrow G)$, como uma Categoria com:*

1. *trincas (A,f,B) como objetos, onde $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ e $f : F(A) \to G(B)$ em $\mathcal{C}$;*

2. *pares (a, b) como mapas $(A, f, B) \to (A', g, B')$, onde $a : A \to A'$ em $\mathcal{A}$ e $b : B \to B'$ em $\mathcal{B}$, tais que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(a)} & F(A') \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ G(B) & \xrightarrow{G(b)} & G(B') \end{array}$$

comuta.

Normalmente, a Categoria vírgula é representada graficamente por:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A} \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{G} & \mathcal{C} \end{array}$$

Mostremos, agora, que Categorias vírgula são de fato Categorias. Para isso, devemos mostrar que a composição está bem definida e que para cada objeto, existe uma identidade. Assim, sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ Categorias localmente pequenas e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores.

1. **Composição está bem definida:** sejam $(A, f, B), (A', g, B'), (A'', h, B'') \in (F \Rightarrow G)$ e morfismos $(a, b) : (A, f, B) \to (A', g, B')$ e $(a', b') : (A', g, B') \to (A'', h, B'')$, definimos a composição $(a', b') \circ (a, b) = (a' \circ a, b' \circ b)$. Assim, temos que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(a)} & F(A') \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ G(B) & \xrightarrow{G(b)} & G(B') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(A') & \xrightarrow{F(a')} & F(A'') \\ \big\downarrow{\scriptstyle g} & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ G(B') & \xrightarrow{G(b')} & G(b'') \end{array}$$

comutam, ou seja,

$$g \circ F(a) = G(b) \circ f \quad \text{e} \quad h \circ F(a') = G(b') \circ g.$$

Assim,

$$\begin{aligned} G(b') \circ g \circ F(a) = G(b') \circ G(b) \circ f \quad &\Leftrightarrow \quad (G(b') \circ g) \circ F(a) = G(b') \circ G(b) \circ f \\ &\Leftrightarrow \quad h \circ F(a') \circ F(a) = G(b') \circ G(b) \circ f \\ &\Leftrightarrow \quad h \circ F(a' \circ a) = G(b' \circ b) \circ f, \end{aligned}$$

onde usamos que funtores preservam a composição. Dessa forma, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(a' \circ a)} & F(A'') \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ G(B) & \xrightarrow{G(b' \circ b)} & G(B'') \end{array}$$

comuta e, portanto, o par $(a' \circ a, b' \circ b)$ é um morfismo $(A, f, B) \to (A'', h, B'')$.

2. **Identidades:** para cada objeto $(A, f, B) \in (F \Rightarrow G)$, temos que o par (id_A, id_B) é a identidade em $(F \Rightarrow G)$. Com efeito,

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(id_A)} & F(A) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ G(B) & \xrightarrow{G(id_B)} & G(B) \end{array}$$

comuta, ou seja, (id_A, id_B) é um morfismo $(A, f, B) \to (A, f, B)$. Além disso, dado algum outro objeto (A', g, B') e um mapa $(a, b) : (A, f, B) \to (A', g, B')$, temos, do item acima, que

$$(a, b) \circ (id_A, id_B) = (a \circ id_A, b \circ id_B) = (a, b)$$

e

$$(id_{A'}, id_{B'}) \circ (a, b) = (id_{A'} \circ a, id_{B'} \circ b) = (a, b).$$

Logo, (id_A, id_B) é, de fato, a identidade em $(F \Rightarrow G)$.

Vamos definir agora um caso particular importante de uma Categoria vírgula. Para isso, devemos notar que, dada uma Categoria $\mathscr{A}$, e um funtor $F : \mathbf{1} \to \mathscr{A}$, a imagem de F é apenas um único objeto de $\mathscr{A}$ e sua respectiva identidade id_A. Assim, funtores com a Categoria $\mathbf{1}$ representam um único objeto do contra-domínio. Devido a esse fato, se I denota o único elemento de $\mathbf{1}$ e $F(I) = A \in \mathscr{A}$, então podemos denotar F por A.

Definição 2.4.12. *Sejam $\mathcal{A}$ uma Categoria e $A \in \mathcal{A}$ um objeto de $\mathcal{A}$. A* ***Categoria fatia*** *de $\mathcal{A}$ sobre A é a Categoria vírgula $(id_{\mathcal{A}} \Rightarrow A)$, onde A é visto como um funtor $\mathbf{1} \to \mathcal{A}$.*

Graficamente, a Categoria fatia é representada por

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[d, "A"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "id_{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Os objetos de $(id_{\mathcal{A}} \Rightarrow A)$, são trincas (X, f, I), com $A \in \mathcal{A}$, $I \in \mathbf{1}$ e $f : X \to A$. Como $\mathbf{1}$ possui apenas um objeto, os objetos são essencialmente pares (X, f) e mapas $(X, f) \to (X', g)$ são morfismos $\xi : X \to X'$, tais que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[dl, "g"] \\ A & \end{tikzcd}$$

comuta.

Analogamente, podemos definir a **Categoria cofatia** trocando as setas no diagrama acima, de forma que

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "\xi"'] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Queremos, agora, comparar propriedades de funtores atuando em uma Categoria com funtores atuando na Categoria dual relacionada. Para isso, começamos com a seguinte

Definição 2.4.13. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias. Um funtor $F : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$ é dito* ***contravariante****. Analogamente, um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dito* ***covariante****.*

Seguiremos com alguns exemplos de funtores co- e contravariantes que aparecem frequentemente e demonstram a importância de uma definição formal.

1) Como já vimos anteriormente, temos os hom-funtores co- e contravariantes. Um exemplo de um funtor contravariante desse tipo é o **funtor espaço dual**, $(-)^* : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{op} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, que para cada espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, V^* é o espaço das aplicações lineares $V \to \mathbb{K}$ e, para cada morfismo $f : V \to U$ em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{op}$, $F(f) : V^* \to U^*$ é definido por $F(f)(q) = q \circ f$ (lembrando que $f : V \to U$ em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{op}$ significa que $f : U \to V$ em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$).

2) O **funtor conjunto das partes covariantes**, $\mathscr{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, definido por:

   (i) para cada conjunto $A \in \mathbf{Set}$, $\mathscr{P}(A)$ é o conjunto das partes de A;

   (ii) para cada morfismo $f : A \to B$, $\mathscr{P}f = \mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$, é definido por $\mathscr{P}f(X) = f(X)$, a imagem direta de $X \subseteq A$ por f.

3) Analogamente, definimos o **funtor conjunto das partes contravariante**, $\mathscr{Q} : \mathbf{Set}^{op} \to \mathbf{Set}$, definido por:

   (i) para cada conjunto $A \in \mathbf{Set}$, $\mathscr{Q}(A) = \mathscr{P}(A)$, o conjunto das partes de A;

   (ii) para cada morfismo $f : A \to B$, $\mathscr{Q}f = \mathscr{Q}(f) : \mathscr{Q}(A) \to \mathscr{Q}(B)$, é definido por $f(X) = f^{-1}(X)$ a imagem inversa de $X \in B$ por f (devemos lembrar que $f : A \to B$ em $\mathbf{Set}^{op}$ se, e somente se, $f : B \to A$ em $\mathbf{Set}$).

Um caso particular de funtor contravariante com **Set** como seu contradomínio é chamado

Definição 2.4.14. *Seja $\mathscr{A}$ uma Categoria. Um funtor $F : \mathscr{A}^{op} \to$ **Set** é chamado **pré-feixe**.*

Como um exemplo de pré-feixe, consideremos um espaço topológico M. Seja $\mathscr{O}(M)$ o conjunto dos abertos de M com a ordem parcial de inclusão. Como já vimos anteriormente, podemos ver $\mathscr{O}(M)$ como uma Categoria, onde os objetos são abertos de M e, dados $A, B \in \mathscr{O}(M)$, existe uma única aplicação $f : A \to B$ se, e somente se, $A \subseteq B$. Um pré-feixe no espaço M é um pré-feixe do tipo $F : M^{op} \to \mathbf{Set}$, definido por

(i) para cada $A \in \mathscr{O}(M)$, temos que $F(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$;

(ii) para cada $f : U \to U'$ (isso é, $U \subseteq U'$) o mapa $F(f) : F(U') \to F(U)$ é a restrição das aplicações contínuas de $F(U')$ para U.

2.5 Limites e Colimites

Até esse momento, usamos certos diagramas para caracterizar a estrutura de uma Categoria, cujo uso fornece uma ideia intuitiva útil da estrutura interna da Categoria. É claro que, nem sempre podemos fazer isso devido ao tamanho de certas Categorias. Para continuar o uso de diagramas, formalizaremos o que essa palavra significa.

Definição 2.5.1. *Sejam $\mathscr{A}$ e $\boldsymbol{I}$ Categorias. Um **diagrama** de formato $\boldsymbol{I}$ é um funtor $D : \boldsymbol{I} \to \mathscr{A}$. Nesse caso, chamamos a Categoria $\boldsymbol{I}$ de **esquema** do diagrama. Além disso, quando $\boldsymbol{I}$ é pequena (finito), dizemos que D é um **diagrama pequeno (finito)**.*

Diagramas, com essa definição, podem ser pensados como uma forma de nomearmos os objetos na Categoria. Mais precisamente, podemos pensar, por exemplo, na Categoria $\boldsymbol{I}$ pelo seguinte diagrama (diagrama aqui significa apenas a representação e não o funtor D)

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

Assim, o diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$ pode ser visto como uma escolha de elementos e morfismos em $\mathcal{A}$ com

$$A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$$

vistos como uma subCategoria de $\mathcal{A}$.

Observação 2.5.1. Com essa definição, todo funtor é um diagrama de algum tipo, porém usamos a palavra diagrama para indicar que estamos mais preocupados com a estrutura induzida pelo funtor na Categoria no contra-domínio de D do que com a própria estrutura do esquema.

Nesse trabalho, especificamente, trabalharemos em geral com diagramas finitos, como foi o caso até esse momento.

Quando trabalhamos com Categorias, para tratar da grande quantidade de objetos e morfismos que podem existir nela, tentamos trabalhar com o que chamamos de **propriedade universal**, isso é, trabalhamos com propriedades que podem ser generalizadas para todos os objetos da Categoria.

Definição 2.5.2. *Sejam $\mathcal{A}$ uma Categoria, $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena e $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$ um diagrama.*

*(i) Um **cone** de D em $\mathcal{A}$ é um objeto $A \in \mathcal{A}$ e uma família de morfismos $(f_I : A \to D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$, tais que, para todo morfismo $u : I \to J$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & D(I) \arrow[d, "D(u)"] \\ A \arrow[ur, "f_I"'] \arrow[dr, "f_J"] & \\ & D(J) \end{tikzcd}$$

*comuta. Nesse caso, denotamos o cone por $(A \xrightarrow{f_I} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ e chamamos o objeto A de **vértice do cone**.*

*(ii) Um **limite** de D em $\mathcal{A}$ é um cone $(L \xrightarrow{\pi_I} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ tal que, para todo cone $(A \xrightarrow{f_I} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$, existe um único mapa $\overline{f} : A \to L$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& & D(I) \\
A \arrow[urr, "f_I"] \arrow[drr, "f_J"'] \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & L \arrow[ur, "\pi_I"'] \arrow[dr, "\pi_J"] & \\
& & D(J)
\end{tikzcd}$$

*comuta, ou seja, temos $\pi_I \circ \overline{f} = f_I$ para todo $I \in \boldsymbol{I}$. Nesse caso, chamamos os morfismos π_I de **projeções** do limite.*

Mudando a Categoria $\boldsymbol{I}$, o esquema do diagrama, obtemos tipos diferentes de limites. Vamos separar alguns desses tipos especiais de limites e daremos exemplos para cada um desses casos.

Definição 2.5.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma Categoria e $\mathbf{2}$ a Categoria discreta com dois objetos distintos. Um limite do diagrama $D : \mathbf{2} \to \mathcal{A}$ é chamado de **produto** em $\mathcal{A}$.*

Observação 2.5.2. A Categoria $\mathbf{2}$ pode ser representada por

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[loop above] & \bullet \arrow[loop above]
\end{tikzcd}$$

Um cone de D, nesse caso, é um diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D(I) \\
A \arrow[ur, "f_I"] \arrow[dr, "f_J"] & \\
& D(J)
\end{tikzcd}$$

pois não existem morfismos entre I e J.

O nome produto na definição acima foi escolhido baseado no exemplo principal dessa estrutura na Categoria **Set**: o produto cartesiano. Mostremos que o produto cartesiano é um produto na Categoria **Set**.

Com efeito, sejam conjuntos $A, B \in \mathbf{Set}$ tais que $A = D(I)$ e $B = D(J)$. Para algum conjunto C e morfismos $f : C \to A$ e $g : C \to B$, consideremos os cones

$$\begin{tikzcd}
& A \\
C \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
& B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \\
A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
& B
\end{tikzcd}$$

onde os mapas $\pi_A : A \times B \to A$ e $\pi_B : A \times B \to B$ são as projeções canônicas, isso é, $\pi_A(a,b) = a$ e $\pi_B(a,b) = b$. Afirmamos que existe um único morfismo $\overline{f} : C \to A \times B$ tal que o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \\
C \arrow[urr, "f"] \arrow[drr, "g"'] \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}
$$

comuta. De fato, podemos tomar $\overline{f} = (f,g)$, definido por $(f,g)(c) = (f(c), g(c))$ para cada $c \in C$. Nesse caso, temos que, para todo $c \in C$,

$$
\begin{aligned}
(\pi_A \circ (f,g))(c) &= \pi_A(f(c), g(c)) = f(c) \\
(\pi_B \circ (f,g))(c) &= \pi_B(f(c), g(c)) = g(c),
\end{aligned}
$$

mostrando que o diagrama comuta. Suponhamos, agora, que existisse $\hat{f} : C \to A \times B$ tal que $\pi_A \circ \hat{f} = f$ e $\pi_B \circ \hat{f} = g$. Escrevendo $\hat{f}(c) = (x,y)$, temos que

$$
\begin{aligned}
f(c) &= (\pi_A \circ \hat{f})(c) = \pi_A(x,y) = x \\
g(c) &= (\pi_B \circ \hat{f})(c) = \pi_B(x,y) = y,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\hat{f}(c) = (x,y) = (f(c), g(c)) = \overline{f}(c).$$

Logo, (f,g) é de fato o único morfismo com essa propriedade.

Podemos, analogamente, mostrar que os seguintes objetos são produtos.

1) Dados $X, Y \in \mathbf{Top}$, $X \times Y$, dotado da topologia produto, é um produto em **Top**.

2) Dados $V, U \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, $V \oplus U$ é um produto em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$

3) Dados $G, H \in \mathbf{Grp}$, $G \times H$, com o produto definido termo a termo, é um produto em **Grp**.

Um outro exemplo interessante de produto aparece dentro de um conjunto parcialmente ordenado. Seja S um conjunto parcialmente ordenado.

Definição 2.5.4. *Um **limite inferior** dos elementos $x, y \in S$ é um elemento $s \in S$ tal que $s \leq x$ e $s \leq y$.*

Definição 2.5.5. *Seja $e \in S$. Dizemos que e é um **encontro** de x e y quando é um limite inferior maximal, isso é, para todo limite inferior s de x e y temos que $s \leq e$.*

Quando consideramos S como uma Categoria, o encontro (caso exista) é um produto em S. De fato, como $s \leq x, y$, $e \leq x, y$ e $e \leq s$, temos que existem morfismos únicos

$$\begin{aligned} s &\to x \\ s &\to y \\ e &\to x \\ e &\to y \\ e &\to s. \end{aligned}$$

Pela unicidade dos morfismos na Categoria, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & & x \\ s \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & e \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & y \end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, $\overline{f}$ é o único morfismo com essa propriedade, pelo mesmo motivo.

Alguns exemplos desse tipo de estrutura podem ser encontrados em

1) Em $(\mathbb{R}, \leq)$, visto como uma Categoria, o produto dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ é o número $\min\{x, y\}$.

2) Seja S um conjunto e $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$ visto como uma Categoria. Sejam $X, Y \in \mathscr{P}(S)$. Temos que o conjunto $X \cap Y$ é um produto em $(\mathscr{P}(S), \subseteq)$.

3) Em $\mathbb{N}$, podemos considerar a relação de divisão como uma ordem parcial. Com efeito, para $a, b, n \in \mathbb{N}$, temos que

   (i) $n|n$;

   (ii) Se $a|n$ e $n|a$, então $a = n$;

   (iii) Se $a|b$ e $b|n$, então $a|n$.

   Assim, podemos ver $(\mathbb{N}, |)$ como uma Categoria. Dados elementos $x, y \in \mathbb{N}$, o produto de x e y é o $\mathrm{mdc}(x, y)$.

A noção de produto pode ser generalizada para mais de dois objetos. Para fazer isso, consideremos um conjunto I. Podemos ver I como uma Categoria discreta, onde cada elemento é um objeto e os únicos morfismos são identidades. Um produto nesse caso é um limite de um diagrama $D : I \to \mathscr{A}$, onde $\mathscr{A}$ é uma Categoria.

Em **Set** um produto do diagrama $D : I \to \mathbf{Set}$ é o produto cartesiano

$$\prod_{i \in I} X_i,$$

juntamente com as projeções canônicas, $\pi_i : \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_i$. Para todo cone $(A \xrightarrow{f_i} X_i)_{i \in I}$, o único morfismo $\overline{f} : A \to \prod\limits_{i \in I} X_i$ é a aplicação $(f_i)_{i \in I}$. O diagrama abaixo representa tal generalização para o produto.

$$\begin{tikzcd} & & D(i) \\ A \arrow[urr, "f_i"] \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] \arrow[drr, "f_j"'] & \prod\limits_{i \in I} X_i \arrow[ur, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ & & D(j) \end{tikzcd}$$

Um exemplo importante dessa generalização é quando consideramos a Categoria $(\mathbb{R}, \leq)$ e uma família de elementos $(x_i)_{i \in I}$. Nesse caso, o encontro da família será justamente o ínfimo do conjunto $\{x_i \mid i \in I\}$.

Consideremos agora a Categoria $\mathbb{E}$, com dois objetos e dois morfismos representada por

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

(omitimos as identidades na representação).

Definição 2.5.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Um* ***equalizador*** *de D em $\mathcal{A}$ é um diagrama $D : \mathbb{E} \to \mathcal{A}$.*

Denotando os objetos de $\mathbb{E}$ por I e J, um cone de D é um objeto $A \in \mathcal{A}$ e morfismos $f : A \to D(I)$, $g : A \to D(J)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & D(I) \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "s"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & D(J) \end{tikzcd}$$

comuta. Assim, temos que $s \circ f = g$ e $t \circ f = g$, ou seja, $s \circ f = t \circ f$. Objetos e morfismos com essa propriedade são chamados de **garfos** ou **pré-equalizadores** e o diagrama pode ser reescrito como

$$A \xrightarrow{f} D(I) \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} D(J)$$

Um limite desse diagrama é um objeto $E \in \mathcal{A}$ com as projeções $\pi_I : E \to D(I)$, $\pi_J : E \to D(J)$ tais que $s \circ \pi_I = \pi_J$ e $t \circ \pi_I = \pi_J$, ou seja, $s \circ \pi_I = t \circ \pi_I$. Assim, podemos representar o limite pelo garfo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_I"] & D(I) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & D(J) \end{tikzcd}$$

Além disso, como E é um limite, temos ainda a propriedade de que para todo garfo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & D(I) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & D(J) \end{tikzcd}$$

existe um único morfismo $\overline{f} : A \to E$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & D(I) \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & E \arrow[u, "\pi_I"'] \end{tikzcd}$$

comuta. note que, esse diagrama é equivalente ao triângulo comutativo superior no diagrama de limite. Como as aplicações $A \to D(J)$ e $E \to D(J)$ podem ser encontradas a partir de π_I e f, podemos omitir o triângulo comutativo inferior.

Temos os seguintes exemplos de equalizadores:

1) Na Categoria **Set**, dados dois conjuntos $X, Y \in$ **Set** e morfismos $s, t : X \to Y$, temos que o conjunto $E = \{x \in X \mid s(x) = t(x)\}$, juntamente com a aplicação inclusão $i : E \hookrightarrow X$, é um equalizador de s e t. Com efeito, para todo $x \in E$, temos $s \circ i(x) = t \circ i(x)$, ou seja, temos um garfo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & Y \end{tikzcd}$$

Seja, agora, um conjunto $A \in$ **Set** e $f : A \to X$ tal que $s \circ f = t \circ f$. Assim, temos que, para todo $a \in A$,

$$(s \circ f)(a) = (t \circ f)(a) \Leftrightarrow s(f(a)) = t(f(a)),$$

ou seja, $f(a) \in E$, para todo $a \in A$. Dessa forma, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "f"] & E \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, suponhamos que exista $\hat{f} : A \to E$ tal que $f = i \circ \hat{f}$. Nesse caso, para todo $a \in A$, temos $f(a) = i(\hat{f}(a)) = \hat{f}(a)$. Logo, $f = \hat{f}$ e, portanto, E é um equalizador.

2) Sejam G, H grupos em **Grp** e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo. Denotando por $\varepsilon : G \to H$ o homomorfismo trivial (isso é, $\varepsilon(g) = e$, $\forall g \in G$, onde e é o elemento neutro de H). Nesse caso, a aplicação inclusão $\ker\varphi \hookrightarrow G$ forma um garfo

$$\begin{tikzcd} \ker\varphi \arrow[r, hook, "i"] & G \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon"'] & H \end{tikzcd}$$

Com efeito, para todo $g \in \ker\varphi$, temos $(\varphi \circ i)(g) = e = (\varepsilon \circ i)(g)$. Seja, agora, um grupo $A \in$ **Grp** e $\psi : A \to \ker\varphi$ um homomorfismo tal que $\varphi \circ \psi = \varepsilon \circ \psi$. Nesse caso, para todo $a \in A$, temos que

$$(\varphi \circ \psi)(a) = (\varepsilon \circ \psi)(a) = e,$$

ou seja, $\psi(a) \in \ker\varphi$ para todo $a \in A$, isso é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \\ A \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, dashed, "\psi"] & \ker\varphi \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, suponhamos que exista $\hat{\psi} : A \to \ker\varphi$ tal que $i \circ \hat{\psi} = \psi$. Assim, para todo $a \in A$,

$$\psi(a) = (i \circ \hat{\psi})(a) = \hat{\psi}(a).$$

Logo, $\psi = \hat{\psi}$ e, portanto, $\ker\varphi$ é um equalizador em **Grp**.

3) Sejam $V, U \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T, S : V \to U$ aplicações lineares. Consideremos a aplicação $T - S : V \to U$, definida por $(T - S)(v) = T(v) - S(v)$. O espaço vetorial $\ker(T - S)$ junto com a aplicação inclusão forma um garfo

$$\begin{tikzcd} \ker(T-S) \arrow[r, hook, "i"] & V \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[r, shift right, "S"'] & U \end{tikzcd}$$

Com efeito, para todo $v \in \ker(T - S)$, temos que

$$(T - S)(v) = T(v) - S(v) = (T \circ i)(v) - (S \circ i)(v) = 0,$$

ou seja, $(T \circ i)(v) = (S \circ i)(v)$. Afirmamos, ainda, que $\ker(T - S)$ é um equalizador. De fato, dado um garfo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[r, shift right, "S"'] & U \end{tikzcd}$$

temos que, para todo $a \in A$,

$$(T \circ f)(a) = (S \circ f)(a) \Rightarrow (T - S)(f(a)) = 0,$$

ou seja, $f(a) \in \ker(T - S)$. Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & V \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "f"] & \ker(T - S) \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

comuta. Finalmente, suponhamos que exista $\hat{f} : A \to V$ tal que $i \circ \hat{f} = f$. Assim, para todo $a \in A$,

$$f(a) = (i \circ \hat{f})(a) = \hat{f}(a),$$

isso é, $f = \hat{f}$. Logo, $\ker(T - S)$ é de fato um equalizador em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$.

Um conceito relacionado com a construção acima é a seguinte

Definição 2.5.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Dados objetos $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ e morfismos $f : Y \to Z$ e $g, h : X \to Y$. Dizemos que f é um* ***morfismo mônico*** *quando, se $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.*

Note que, a definição de um morfismo mônico se assemelha àquela de injetividade de funções. De fato, a propriedade mônica é uma generalização da noção de uma aplicação injetiva, como podemos ver no seguinte resultado.

Proposição 2.5.1. *Sejam $Y, Z \in$ **Set** conjuntos e $f : Y \to Z$ um morfismo. Assim, f é mônico se, e somente se, f é injetiva.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Sejam $y_1, y_2 \in Y$ tais que $f(y_1) = f(y_2)$. Consideremos as aplicações $id_1 : \{y_1\} \to \{y_1\}$ e $id_2 : \{y_2\} \to \{y_2\}$ definidas por $id_1(y_1) = y_1$ e $id_2(y_2) = y_2$. Assim, temos que

$$(f \circ id_1)(y_1) = f(y_1) = f(y_2) = (f \circ id_2)(y_2)$$

e, como f é mônico, temos que $id_1 = id_2$, ou seja,

$$y_1 = id_1(y_1) = id_2(y_2) = y_2.$$

Logo, f é injetiva.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, sejam $X \in$ **Set** e $g, h : X \to Y$ funções tais que $f \circ g = f \circ h$. Como f é injetiva, temos que, para todo $x \in X$,

$$(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x) \Rightarrow g(x) = h(x)$$

para todo $x \in X$. Logo, $g = h$ e, portanto, f é mônico. $\square$

Dada uma Categoria $\mathscr{A}$, temos o seguinte resultado, relacionando morfismos mônicos e equalizadores.

Proposição 2.5.2. *Seja (E, f) um equalizador de $s, t : X \to Y$. Assim, f é mônico.*

Demonstração: Seja $\mathscr{A}$ uma Categoria e $\alpha, \beta \in \mathscr{A}(D, E)$ tais que $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Assim, temos que

$$s \circ (f \circ \alpha) = (s \circ f) \circ \alpha = (t \circ f) \circ \alpha = t \circ (f \circ \alpha),$$

ou seja, $f \circ \alpha$ (e $f \circ \beta$) forma um garfo com s e t. Como f é um equalizador, existe um único morfismo $\overline{f} : D \to E$ tal que

$$f \circ \overline{f} = f \circ \alpha = f \circ \beta.$$

Como $\overline{f}$ é único com essa propriedade (isso é, tal que $f \circ \overline{f} = f \circ \alpha$) devemos ter $\alpha = \beta = \overline{f}$, pois $f \circ \alpha = f \circ \alpha$ e $f \circ \beta = f \circ \alpha$. $\square$

Agora, vamos definir o último tipo de limite de interesse em uma Categoria. Para isso, vamos considerar a Categoria $\mathbf{P}$, representada por

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Definição 2.5.8. *Seja $\mathscr{A}$ uma Categoria e consideremos o diagrama $D : \boldsymbol{P} \to \mathscr{A}$. Um **quadrado de pullback** ou **pré-pullback** é um cone de D e chamamos de **pullback** um limite de D.*

Podemos representar um pré-pullback pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

onde A é o vértice do cone. Um pullback pode ser visto no diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "\overline{f}"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

onde $\overline{f} : A \to P$ é o único morfismo que faz com que o diagrama comute.

Consideremos o seguinte exemplo de pullback. Sejam $X, Y, Z \in \mathbf{Set}$ conjuntos e mapas $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$. Consideremos o conjunto $P = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ e as projeções canônicas $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$. Assim, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

comuta. De fato, para todo $(x, y) \in P$, temos

$$(g \circ \pi_2)(x, y) = g(y) = f(x) = (f \circ \pi_1)(x).$$

Seja, agora, $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

comute. Nesse caso, temos, para todo $a \in A$,

$$(g \circ p_2)(a) = (f \circ p_1)(a),$$

ou seja, o par $(p_1(a), p_2(a)) \in P$. Dessa forma, o mapa $\overline{f} : A \to P$ definido por $\overline{f}(a) = (p_1(a), p_2(a))$ faz com que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "\overline{f}"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

comute, pois, para todo $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} (\pi_2 \circ \overline{f})(a) &= \pi_2(p_1(a), p_2(a)) = p_2(a) \\ (\pi_1 \circ \overline{f})(a) &= \pi_1(p_1(a), p_2(a)) = p_1(a). \end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que exista $\hat{f} : A \to P$. Nesse caso, temos

$$(\pi_2 \circ \hat{f}) = p_2(a)$$
$$(\pi_1 \circ \hat{f}) = p_1(a),$$

ou seja, para todo $a \in A$,

$$\hat{f}(a) = (p_1(a), p_2(a)) = \overline{f}(a).$$

Logo, $\overline{f}$ é única com essa propriedade.

Outro exemplo importante de pullback são imagens inversas. Consideremos conjuntos $X, Y \in \mathbf{Set}$, $Y' \subseteq Y$ um subconjunto de Y e $f : X \to Y$. Denotemos por X' a imagem inversa de Y' por f, isso é, $X' = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$. A restrição de f ao conjunto X' junto com as inclusões $i : X' \hookrightarrow X$ e $j : Y' \hookrightarrow Y$ formam um quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f|_{X'}"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y' \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Afirmamos que X' é um pullback. Com efeito, consideremos outro quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Note que, para todo $a \in A$, temos que

$$(f \circ g)(a) = (j \circ h)(a),$$

que pertence a Y' (pois $h(a) \in Y'$). Assim, $g(a) \in f^{-1}(Y) = X'$ para todo $a \in A$. Dessa forma, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & X' \arrow[r, "f|_{X'}"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y' \arrow[d, hook, "j"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

comuta, pois, para todo $a \in A$ $(i \circ g)(a) = g(a)$ e

$$(f|_{X'} \circ g)(a) = (f \circ g)(a) = (j \circ h)(a) = h(a).$$

Suponhamos, agora, que exista um mapa $\hat{g}$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "\hat{g}"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\ & X' \arrow[r, "f|_{X'}"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y' \arrow[d, hook, "j"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

comuta. Assim, temos que

$$(i \circ \hat{g})(a) = g(a)$$

para todo $a \in A$, isso é, $g = \hat{g}$. Logo, $X' = f^{-1}(Y')$ define um pullback em **Set**.

Como um último exemplo de interesse, vamos mostrar que interseções também definem pullbacks em **Set**. Sejam $A, B, C \in \mathbf{Set}$ conjuntos tais que $A, B \subseteq C$. Assim, o conjunto $A \cap B$ junto com as inclusões nos conjuntos A e B definem um quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "j"'] & B \arrow[d, hook, "k"] \\ A \arrow[r, hook, "l"'] & C \end{tikzcd}$$

Como temos $A \cap B = l^{-1}(B)$, pelo exemplo anterior, sabemos que $A \cap B$ é um pullback em **Set**.

Vamos, agora, definir as estruturas duais aos conceitos acima. Até esse ponto, não explicitamos os conceitos duais de cada definição e exemplo, pois normalmente elas não oferecem resultados muito diferentes dos esperados. Aqui, porém, veremos que uma simples mudança na direção das setas dos diagramas acima geram exemplos bem distintos dos que vimos acima. Assim, definiremos aqui esses conceitos duais, que também serão utilizados à frente.

Começamos com o conceito dual ao de limite.

Definição 2.5.9. *Sejam $\mathcal{A}$ uma Categoria localmente pequena, $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena e $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$. Consideremos o diagrama $D^{op} : \boldsymbol{I}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$. Um **cocone** de D é um cone de D^{op} e um **colimite** de D é um limite de D^{op}. Mais precisamente:*

(i) Um cocone de D em $\mathcal{A}$ é um objeto $A \in \mathcal{A}$ e uma família de morfismos $(f_I : D(I) \to A)_{I \in \boldsymbol{I}}$, tais que, para todo morfismo $u : I \to J$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} D(I) \arrow[dd, "D(u)"'] \arrow[dr, "f_I"] & \\ & A \\ D(J) \arrow[ur, "f_J"'] & \end{tikzcd}$$

*comuta. Nesse caso, denotamos o cocone por $(D(I) \xrightarrow{f_I} A)_{I \in \boldsymbol{I}}$ e chamamos o objeto A de **vértice do cocone**.*

(ii) Um colimite de D em $\mathcal{A}$ é um cocone $(D(I) \xrightarrow{\pi_I} C)_{I \in \boldsymbol{I}}$ tal que, para todo cocone

$(D(I) \xrightarrow{f_I} A)_{I \in \boldsymbol{I}}$, existe um único mapa $\overline{f} : C \to A$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
D(I) \arrow[dd, "D(u)"'] \arrow[dr, "\pi_I"'] \arrow[drr, "f_I"] & & \\
& C \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & A \\
D(J) \arrow[ur, "\pi_J"] \arrow[urr, "f_J"'] & &
\end{tikzcd}$$

*comuta, ou seja, temos $\overline{f} \circ \pi_I = f_I$ para todo $I \in \boldsymbol{I}$. Nesse caso, chamamos os morfismos π_I de **coprojeções** do colimite.*

Novamente, definiremos alguns exemplos importantes de colimites.

Definição 2.5.10. *Seja $\mathscr{A}$ uma Categoria. Um limite do diagrama $D : \mathbf{2} \to \mathscr{A}$ é chamado um **coproduto** em $\mathscr{A}$.*

Coprodutos são representados pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D(I) \arrow[dr, "f_I"] & \\
& S \\
D(J) \arrow[ur, "f_J"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideremos, agora, a seguinte definição.

Definição 2.5.11. *Sejam $A, B \in$ **Set** conjuntos. Definimos a **união disjunta** de A e B como o conjunto*

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

Além disso, sejam $i_A : A \to A \sqcup B$ e $i_B : B \to A \sqcup B$ definidas por $i_A(a) = (a, 0)$ e $i_B(b) = (b, 1)$.

O conjunto $A \sqcup B$ juntamente com as aplicações i_A e i_B formam um coproduto em **Set**. De fato, dado qualquer conjunto $X \in$ **Set** e mapas $f : A \to X$ e $g : B \to X$, considere o mapa $\overline{f} : A \sqcup B \to X$ definida por

$$\overline{f}((x, z)) = \begin{cases} f(x), & \text{se } z = 0, \\ g(x), & \text{se } z = 1, \end{cases}$$

onde $z \in \{0, 1\}$. Nesse caso, temos que, para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned} f(a) &= (\overline{f} \circ i_A)(a) \\ g(b) &= (\overline{f} \circ i_B)(b), \end{aligned}$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& A \sqcup B \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & X \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, suponhamos que exista um morfismo $\hat{f} : A \sqcup B \to X$ que faça o diagrama comutar. Nesse caso, temos, para todos $a \in A$ e $b \in B$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(a) &= (\hat{f} \circ i_A)(a) = f(a) = (\overline{f} \circ i_A)(a) = \overline{f}(a) \\
\hat{f}(b) &= (\hat{f} \circ i_B)(b) = g(b) = (\overline{f} \circ i_B)(b) = \overline{f}(b),
\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{f} = \hat{f}$ e, portanto, $\overline{f}$ é única. Logo, $A \sqcup B$ é um coproduto em **Set**.

Observação 2.5.3. Certos livros denotam a união disjunta de A e B por $A + B$. Assim, como esse é um dos exemplos principais de coprodutos categóricos, alguns autores usam o nome **soma** para o coproduto.

Sejam, agora, $V, U \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Consideremos as inclusões $i_V : V \to V \oplus U$ e $i_U : U \to V \oplus U$ definidas por $i_V(v) = v + 0$ e $i_U(u) = 0 + u$. Dado um terceiro espaço vetorial $W \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ e aplicações lineares $T : V \to W$ $S : U \to W$, consideremos o mapa $\overline{f} : V \oplus U \to W$ definido por $\overline{f}(v + u) = T(v) + S(u)$. Primeiramente, como $\overline{f}$ é uma soma de aplicações lineares, então temos que $\overline{f}$ é linear. Além disso, temos, para todos $v \in V$ e $u \in U$,

$$\begin{aligned}
(\overline{f} \circ i_V)(v) &= \overline{f}(v + 0) = T(v) + S(0) = T(v) \\
(\overline{f} \circ i_U)(u) &= \overline{f}(0 + u) = T(0) + S(u) = S(u),
\end{aligned}$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "i_V"'] \arrow[drr, "T"] & & \\
& V \oplus U \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & W \\
U \arrow[ur, "i_U"] \arrow[urr, "S"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta. Para mostrar a unicidade, consideremos $\hat{f} : V \oplus U \to W$ que faça o diagrama acima comutar. Nesse caso, temos, para todos $v \in V$ e $u \in U$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(v + 0) &= (\hat{f} \circ i_V)(v) = T(v) = T(v) + S(0) = \overline{f}(v + 0) \\
\hat{f}(0 + u) &= (\hat{f} \circ i_U)(u) = S(u) = T(0) + S(u) = \overline{f}(0 + u),
\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{f} = \hat{f}$ e, portanto, $\overline{f}$ é único. Logo, $V \oplus U$ é um coproduto em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$.

Note que, nesse caso, a soma direta é tanto um produto, como vimos anteriormente, quanto um coproduto. Em contraste, vemos que em **Set** produtos e coprodutos são, em geral, diferentes.

Outro exemplo interessante de coproduto ocorre na Categoria $\mathbf{Alg}_R$ de R-Álgebras e homomorfismos de R-álgebras, onde R é um anel. Sejam $A, B \in \mathbf{Alg}_R$ e $A \otimes B$ o produto tensorial de A e B. Consideremos as inclusões $i_A : A \to A \otimes B$ e $i_B : B \to A \otimes B$ definidas por $i_A(a) = a \otimes 1_B$ e $i_B(b) = 1_A \otimes b$. Seja, agora, $C \in \mathbf{Alg}_R$ e os morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$. Seja $\overline{f} : A \otimes B \to C$ definida por $\overline{f}(a \otimes b) = f(a)g(b)$. Assim, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& A \otimes B \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & C \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta, pois, para todo $a \in A$ e $b \in B$, temos

$$(\overline{f} \circ i_A)(a) = \overline{f}(a \otimes 1_B) = f(a)1_B = f(a)$$

e

$$(\overline{f} \circ i_B)(b) = \overline{f}(1_A \otimes b) = 1_A b = g(b).$$

Note que, por definição, para todo $r \in R$ e $a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \in A \otimes B$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{f}(r(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2)) &= \overline{f}(r(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)) \\
&= f(r a_1 a_2) g(b_1 b_2) = r f(a_1) f(a_2) g(b_1) b(b_2) \\
&= r \overline{f}(a_1 \otimes b_1) \overline{f}(a_2 \otimes b_2),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que f e g são um homomorfismos de R-álgebras. Assim, $\overline{f}$ é um homomorfismo e é, portanto, um elemento de $\mathcal{A}(A \otimes B, C)$.

Seja, agora, $\hat{f} : A \otimes B \to C$, tal que o diagrama comuta. Assim,

$$\hat{f} \circ i_A = f \;\text{ e }\; \hat{f} \circ i_B = g,$$

ou seja, para todo $a \otimes b \in A \otimes B$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(a \otimes b) &= \hat{f}((a \otimes 1_B) \cdot (1_A \otimes b)) \\
&= \hat{f}(a \otimes 1_B)\hat{f}(1_A \otimes b) \\
&= (\hat{f} \circ i_A)(a)(\hat{f} \circ i_B)(b) \\
&= f(a)g(b) \\
&= (\overline{f} \circ i_A)(a)(\overline{f} \circ i_B)(b) \\
&= \overline{f}(a \otimes 1_B)\overline{f}(1_A \otimes b) \\
&= \overline{f}((a \otimes 1_B) \cdot (1_A \otimes b)) = \overline{f}(a \otimes b),
\end{aligned}$$

onde usamos que $\overline{f}$ e $\hat{f}$ são homomorfismos de R-álgebras. Assim, $\overline{f} = \hat{f}$ e, portanto, $\overline{f}$ é única. Logo, $A \otimes B$ é um coproduto em $\mathbf{Alg}_R$.

Interessantemente, não podemos dizer o mesmo para $V \otimes U$ para espaços vetoriais em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Isso acontece, pois precisamos da noção de bilinearidade para o produto tensorial, o que não é encontrado dentro da Categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, cujos morfismos são aplicações lineares.

Analogamente ao que fizemos anteriormente, vamos encontrar os coprodutos em um conjunto parcialmente ordenado visto como uma Categoria. Assim, consideremos um conjunto $(S, \leq)$ dotado da relação de ordem parcial $\leq$.

Definição 2.5.12. *Dados $x, y \in S$ um **limite superior** dos elementos x e y é um elemento tal que $s \in S$ tal que $x \leq s$ e $y \leq s$.*

Definição 2.5.13. *Seja $j \in S$. Dizemos que j é uma **junção** de x e y quando é um limite superior minimal, isso é, para todo limite superior s de x e y, temos $j \leq s$.*

Mostremos que uma junção j é um coproduto. De fato, seja $s \in S$ um limite superior de x e y. Assim, como cada morfismo na Categoria S é único, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
& j \arrow[r] & s \\
y \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, o morfismo $j \to s$ é único pela construção da Categoria, ou seja, a junção j é um coproduto em $(S, \leq)$.

Podemos generalizar junções para conjuntos arbitrários de objetos. Nesse caso, quando consideramos o conjunto $(\mathbb{R}, \leq)$ como uma Categoria, temos que, dado qualquer subconjunto limitado inferiormente $X \subseteq \mathbb{R}$, a junção de X é o supremo de X e será também um coproduto em $(\mathbb{R}, \leq)$.

Continuamos para o próximo colimite de interesse.

Definição 2.5.14. *Seja $\mathscr{A}$ uma Categoria. Um **coequalizador** é um colimite do diagrama $D : \mathbb{E} \to \mathscr{A}$.*

Assim, dados conjuntos X, Y e morfismos $s, t : X \to Y$, um **cogarfo** de s e t é um morfismo $f : Y \to C$, tal que $f \circ s = f \circ t$, que pode ser representado pelo diagrama comutativo

$$X \underset{s}{\overset{t}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{f} C$$

Como exemplo, consideremos conjuntos $X, Y \in \mathbf{Set}$ e mapas $s, t : X \to Y$. Sejam R_i relações de equivalência em Y tais que $s(x) \sim t(x)$ para todo $x \in X$, indexadas pela família I. Assim, temos que

$$R = \bigcap_{i \in I} R_i$$

é a menor relação de equivalência tal que $s(x) \sim t(x)$. A projeção canônica $\pi : Y \to {}^{Y}\!/_{R}$, definida por $\pi(y) = \overline{y}$ a classe de equivalência de Y, é um coequalizador de s e t. Com efeito, para todo $x \in X$, temos

$$(\pi \circ s)(x) = \pi(s(x)) = \pi(t(x)) = (\pi \circ t)(x),$$

ou seja, o diagrama

$$X \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{\pi} {}^{Y}\!/_{R}$$

comuta. Além disso, dados um conjunto $A \in \mathbf{Set}$ e um mapa $f : Y \to A$ tal que

$$f \circ s = f \circ t.$$

Definamos o mapa $\overline{f} : {}^{Y}\!/_{R} \to A$ definido por $\overline{f}(\overline{y}) = f(y)$. Primeiramente, mostremos que $\overline{f}$ está bem-definido. De fato, consideremos a relação de equivalência induzida por f, isso é, $y_1 \sim_f y_2 \Leftrightarrow f(y_1) = f(y_2)$. Como f é tal que $f \circ s = f \circ t$, temos que, para todo $x \in X$, $f(s(x)) = f(t(x))$, ou seja, $s(x) \sim_f t(x)$. Como R é a menor relação tal que $s(x) \sim t(x)$, temos que $R \subseteq R_f$, onde R_f é a relação induzida por f. Dessa forma, se $(x_1, x_2) \in R$, então $(x_1, x_2) \in R_f$ e, portanto, se $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in R$ tais que $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ (isso é, tomando dois representantes da mesma classe) temos que $x_1 R_f x_2$, ou seja,

$$\overline{f}(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = \overline{f}(x_2),$$

o que mostra que f é bem-definida, pois qualquer representante da classe tem a mesma imagem por $\overline{f}$. Além disso, temos $(\overline{f} \circ \pi)(y) = \overline{f}(\overline{y}) = f(y)$, para todo $y \in Y$, isso é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & Y/R \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

comuta. Finalmente, para mostrar a unicidade de $\overline{f}$, consideremos o morfismo $\hat{f} : Y/R \to A$ tal que $\hat{f} \circ \pi = f$. Assim, temos que

$$(\hat{f} \circ \pi)(y) = (\overline{f} \circ \pi)(y),$$

para todo $y \in Y$, ou seja, $\hat{f}(\overline{y}) = \overline{f}(\overline{y})$, para todo $\overline{y} \in Y/R$. Logo, $\overline{f}$ é única e, portanto, π é um coequalizador em **Set**.

Como fizemos anteriormente, podemos caracterizar morfismos pela seguinte definição.

Definição 2.5.15. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Dados objetos $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ e morfismos $f : X \to Y$ e $g, h : Y \to Z$. Dizemos que f é um **morfismo épico** quando, se $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.*

Quando consideramos a Categoria **Set**, temos o seguinte resultado relacionado a morfismos épicos.

Proposição 2.5.3. *Dados $X, Y \in$ **Set** conjuntos e $f : X \to Y$ um morfismo. Assim, f é épico se, e somente se, f é sobrejetivo.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que f não seja sobrejetivo. Nesse caso, existe $y_0 \in Y$ tal que não existe $x \in X$ com $f(x) = y_0$. Consideremos o conjunto $Y \cup \{Y\}$ e o morfismo $g : Y \to Y \cup \{Y\}$, definido por

$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y \neq y_0 \\ Y, & \text{se } y = y_0. \end{cases}$$

Assim, temos, para todo $x \in X$,

$$(id_Y \circ f)(x) = (g \circ f)(x),$$

ou seja, como f é épico, temos que $g = id_Y$ de onde concluímos que $y_0 = Y \in Y$. Como não podemos ter um conjunto contendo ele mesmo, temos uma contradição. Logo, f é épico.

($\Leftarrow$) Sejam $Z \in$ **Set** e $g, h : Y \to Z$ morfismos tais que

$$g \circ f = h \circ f.$$

Assim, como f é sobrejetiva para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Dessa forma, para todo $y \in Y$, temos

$$g(y) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(y),$$

ou seja, $g = h$. Logo, f é épico. □

Observação 2.5.4. A demonstração acima é válida em ZFC, onde pedimos axiomaticamente que não exista um conjunto que contenha ele mesmo como um elemento, isso é,

$$\nexists\, x : x \in x.$$

Existem, porém, sistemas axiomáticos que não usam esse axioma. Nesse caso, teríamos que achar algum a tal que $a \notin Y$ e a demonstração segue da mesma forma, onde a contradição surge do fato de que $a = y_0 \in Y$ mas $a \notin Y$. Como o objetivo desse trabalho não é entrar nas sutilezas filosóficas de cada sistema axiomático, deixamos essa observação como uma curiosidade.

Agora, podemos conectar morfismos épicos e coequalizadores em uma Categoria $\mathcal{A}$ pelo seguinte resultado.

Proposição 2.5.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria, $A, B, C \in \mathcal{A}$ e $f : B \to C$ um coequalizador dos morfismos $s, t : A \to B$. Assim, f é um morfismo épico.*

Demonstração: Seja $D \in \mathcal{A}$ e $\alpha, \beta : C \to D$ morfismos tais que

$$\alpha \circ f = \beta \circ f.$$

Como f é um coequalizador de s e t, temos que

$$(\alpha \circ f) \circ s = (\alpha \circ f) \circ t,$$

ou seja, $\alpha \circ f$ forma um cogarfo de s e t. Assim, como f é um coequalizador, existe um único $\overline{f} : C \to D$ tal que

$$\overline{f} \circ f = \alpha \circ f.$$

Como $\overline{f}$ é única com essa propriedade, temos $\alpha = \beta = \overline{f}$ (pois $\overline{f} \circ f = \alpha \circ f = \beta \circ f$). Logo, f é épico. □

Finalmente, podemos definir o próximo colimite notável.

Definição 2.5.16. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Um colimite do diagrama $D : \boldsymbol{P}^{op} \to \mathcal{A}$ é chamado um* ***pushout*** *em $\mathcal{A}$.*

A Categoria esquema $\boldsymbol{P}^{op}$ pode ser representada por

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

Aqui, mudamos a posição do objeto no canto inferior direito simplesmente para mantermos certa simetria entre os esquemas $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}^{op}$.

Definição 2.5.17. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Um **quadrado de pushout** ou **pré-pushout** é um objeto $A \in \mathcal{A}$ e morfismos $f_1 : X \to A$ e $f_2 : Y \to A$ tais que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "f_1"] \\ X \arrow[r, "f_1"'] & A \end{tikzcd}$$

comuta. Nesse caso, denotamos o pushout pela tripla (A, f_1, f_2).

Da definição acima, temos que um pushout é um pré-pushout (S, p_1, p_2) com a propriedade universal de, para todo pré-pushout (A, f_1, f_2), existe um único mapa $\overline{f} : S \to A$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\ X \arrow[r, "p_1"'] \arrow[drr, bend right, "f_1"'] & S \arrow[dr, dashed, "\overline{f}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

comuta.

Consideremos a Categoria **Set**. Assim, dados $X, Y \in \mathbf{Set}$ conjuntos, temos o seguinte pré-pushout.

$$\begin{tikzcd} X \cap Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \\ X \arrow[r, "j_X"'] & X \cup Y \end{tikzcd}$$

Mostremos que $X \cup Y$ é um pushout. Seja (A, f_1, f_2) um pré-pushout tal que $f_1 \circ i_X = f_2 \circ i_Y$. Definimos $\overline{f} : X \cup Y \to A$ definida por

$$f(a) = \begin{cases} f_1(a), & \text{se } a \in X \\ f_2(a), & \text{se } a \in Y \end{cases} .$$

Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "j_Y"] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\
X \arrow[r, "j_X"'] \arrow[drr, bend right, "f_1"'] & X \cup Y \arrow[dr, dashed, "\overline{f}"] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

comuta. Resta mostrar que $\overline{f}$ única. Seja $\hat{f} : X \cup Y \to A$ tal que $\hat{f} \circ j_Y = f_1$ e $\hat{f} \circ j_X = f_2$. Assim, temos, para todo $x \in X$ e $y \in Y$,

$$(\hat{f} \circ j_X)(x) = f_1(x) \text{ e } (\hat{f} \circ j_Y)(y) = f_2(y),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(a) &= f_1(a), \text{ se } a \in X \\
\hat{f}(a) &= f_2(a), \text{ se } a \in Y.
\end{aligned}$$

Assim, temos $\overline{f} = \hat{f}$ e, portanto, $\overline{f}$ é o único morfismo que faz o diagrama comutar. Logo, $X \cup Y$ é um pushout em **Set**.

Para terminar nossa discussão sobre limites e colimites, consideremos a seguinte definição de Categoria.

Definição 2.5.18. *Definimos a **Categoria vazia**, denotada por $\varnothing$, como uma Categoria sem objetos ou morfismos, isso é, a classe de objetos e de morfismos é o conjunto vazio.*

Quando tratamos de limites e colimites, como $\varnothing$ é uma Categoria pequena, podemos pensar em um diagrama que tem a Categoria vazia como domínio. Nesse caso, definimos os limites de D da seguinte forma.

Definição 2.5.19. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria e $D : \varnothing \to \mathcal{A}$. Dizemos que um colimite de D é um **objeto inicial** e um limite de D é chamado um **objeto terminal**. Quando um objeto é simultaneamente inicial e terminal, dizemos que é um **objeto zero**.*

Assim, temos que um limite (ou colimite) do diagrama D é um objeto $L \in \mathcal{A}$ tal que, para todo objeto $A \in \mathcal{A}$, existe um único morfismo $\overline{f} : A \to L$ (ou $\overline{f} : L \to A$).

Como um exemplo de objetos inicial e terminal, consideremos a Categoria **Set**. Para cada conjunto $X \in$ **Set**, existe uma única função $v : \varnothing \to X$ chamada a **função vazia**. Assim, $\varnothing$ é um objeto inicial em **Set**. Por outro lado, dado qualquer conjunto unitário, $\{a\}$, para cada conjunto $Y \in$ **Set**, existe uma única função $c : Y \to \{a\}$, a **função constante**, ou seja, conjuntos unitários são objetos finais. Na Categoria **Grp**, o conjunto trivial $\{e\}$ é um objeto zero. Com efeito, para cada grupo $G \in$ **Grp**, o homomorfismo constante

$\varphi : G \to \{e\}$ é único. Além disso, como todo homomorfismo deve satisfazer $\varphi(e) = e$, existe uma única forma de definir um morfismo $\psi : \{e\} \to G$ colocando $\psi(e) = \{e_G\}$. Assim, $\{e\}$ é um objeto terminal e inicial, ou seja, $\{e\}$ é um objeto zero.

Proposição 2.5.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Se $I, I' \in \mathcal{A}$ são objetos iniciais, então $I \cong I'$.*

Demonstração: Como I e I' são iniciais, existem morfismos únicos $f : I \to I'$ e $f' : I' \to I$. Assim, temos que $f \circ f' \in \mathcal{A}(I', I')$ e $f' \circ f \in \mathcal{A}(I, I)$. Como I e I' são iniciais, os únicos morfismos em $\mathcal{A}(I, I)$ e $\mathcal{A}(I', I')$ são id_I e $id_{I'}$, de onde concluímos que $f' \circ f = id_I$ e $f \circ f' = id_{I'}$. Logo, $f' = f^{-1}$ e, portanto, $I \cong I'$. □

Analogamente, objetos terminais em uma Categoria são isomorfos. Isso significa que objetos terminais e iniciais são únicos a menos de isomorfismo.

Podemos, ainda, enfraquecer a definição de objetos terminais e iniciais, retirando o requerimento de unicidade.

Definição 2.5.20. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Um objeto L de $\mathcal{A}$ é dito **fracamente inicial**, quando, para todo objeto $A \in \mathcal{A}$, existe algum morfismo $f : L \to A$. Analogamente, quando, para todo $A \in \mathcal{A}$, existe algum morfismo $f : A \to L$, dizemos que L é **fracamente terminal**.*

Assim como objetos iniciais e terminais são tipos de limites, objetos fracamente iniciais e terminais são exemplos de **limites e colimites fracos**, do diagrama vazio. Essencialmente, limites e colimites fracos são limites que não exigem a unicidade do morfismo entre o limite e o vértice de cada cone na Categoria.

Definição 2.5.21. *Um conjunto $\boldsymbol{S}$, de objetos de uma Categoria $\mathcal{A}$, é chamado um **conjunto fracamente inicial**, quando, para todo $A \in \mathcal{A}$, existe algum morfismo $f : S \to A$, para algum $S \in \boldsymbol{S}$. Analogamente, quando existe um morfismo $f : A \to S$, para algum objeto de $S \in \boldsymbol{S}$, dizemos que $\boldsymbol{S}$ é **fracamente terminal.***

Limites e colimites em Categorias nem sempre existem e, quando existem, não necessariamente temos limites para qualquer diagrama. Assim, é interessante classificar Categorias de acordo com o tipo de limites que nelas existem.

Definição 2.5.22. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria e $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena.*

*(i) Dizemos que $\mathcal{A}$ tem **limites de formato $\boldsymbol{I}$** quando, para todo diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$, existe algum limite de D em $\mathcal{A}$.*

*(ii) Dizemos que $\mathcal{A}$ é **completa** quando tem limites de formato $\boldsymbol{I}$ para toda Categoria pequena $\boldsymbol{I}$.*

Acabamos de ver que limites são estruturas (coloquial) definidas em Categorias. Queremos, agora, estudar como funtores interagem com limites. Em outras palavras, gostaríamos de investigar como imagens de limites por um funtor se comportam na Categoria contra-domínio. Começamos com a seguinte definição.

Definição 2.5.23. *Sejam $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ Categorias, $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor. Dizemos que F* ***preserva limites de formato $\boldsymbol{I}$*** *quando, para todo diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$, se $L \overset{p_I}{\to} D(I)$ é um limite de D em $\mathcal{A}$, então $(F(L) \overset{F(p_I)}{\to})(F \circ D)(I)$ é um limite de $F \circ D$ em $\mathcal{B}$.*

Definição 2.5.24. *Dizemos que um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$* ***preserva limites*** *quando F preserva limites de formato $\boldsymbol{I}$ para toda Categoria pequena $\boldsymbol{I}$.*

Definição 2.5.25. *Seja $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$* ***reflete limites*** *quando, para todo diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$, se $F(L) \overset{F(p_I)}{\to} (F \circ D)(I)$ é um limite de $F \circ D$ em $\mathcal{B}$, então $(L \overset{p_I}{\to} D(I))$ é um limite de D em $\mathcal{A}$.*

As definições para colimites são análogas e as omitiremos aqui.

Como exemplo, consideremos a Categoria **Grp** e o funtor esquecimento $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$. Mostremos que U preserva produtos (isso é, limites de formato $\mathbf{2}$). Com efeito, já sabemos que em **Grp**, o produto dos objetos $G, H \in \mathbf{Grp}$ é o grupo $G \times H$, com o produto definido por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$, junto das projeções $p_G : G \times H \to G$ e $p_H : G \times H \to H$, definidas por $p_G(g, h) = g$ e $p_H(g, h) = h$. Essas projeções são, de fato, homomorfismos e, portanto estão na Categoria.

Como o funtor U esquece a estrutura de grupo, temos que $U(G \times H) = U(G) \times U(H)$. Assim, devemos mostrar que $U(G) \times U(H)$, com as projeções $U(p_G)$ e $U(p_H)$ são limites. Como $U(p_G)$ e $U(p_H)$ são as projeções canônicas do produto cartesiano, sabemos que $U(G) \times U(H)$ é o produto categórico dos conjuntos $U(G)$ e $U(H)$. Assim, o funtor esquecimento $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ preserva limites.

Ainda, funtores podem ter a seguinte propriedade.

Definição 2.5.26. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Categorias e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor. Dizemos que F* ***cria limites de formato $\boldsymbol{I}$****, quando, para qualquer diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$, se $(B \overset{q_I}{\to} F \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ é um limite do diagrama $F \circ D$ em $\mathcal{B}$, então existe um único cone $(A \overset{p_I}{\to} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ de D em $\mathcal{A}$, tal que $F(A) = B$, $F(p_I) = q_I$ para todo $I \in \boldsymbol{I}$, que é um limite de D em $\mathcal{A}$.*

Podemos, ainda generalizar a definição acima com a

Definição 2.5.27. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Categorias e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor. Dizemos que F* ***cria limites****, quando F preserva limites de formato $\boldsymbol{I}$ para toda Categoria pequena $\boldsymbol{I}$.*

Podemos conectar os conceitos de preservar e criar limites pelo seguinte resultado.

Lema 2.5.1. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Categorias, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena. Assim, se $\mathcal{B}$ tem limites de formato $\boldsymbol{I}$, bem como F cria limites de formato $\boldsymbol{I}$, então $\mathcal{A}$ tem limites de formato $\boldsymbol{I}$, assim como F preserva limites de formato $\boldsymbol{I}$.*

Demonstração: Como $\mathcal{B}$ tem limites de formato $\boldsymbol{I}$, existe um limite

$$(M \xrightarrow{q_I} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}},$$

para todo diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{B}$. Em particular, existe um limite

$$(M \xrightarrow{q_I} F \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}},$$

para todo diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$. Agora, como F cria limites, para cada diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$, existe um único cone

$$(L \xrightarrow{p_I} F \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

que é um limite de D em $\mathcal{A}$ e tal que $F(L) = M$ e $F(p_I) = q_I$ para todo $I \in \boldsymbol{I}$. Assim, $\mathcal{A}$ tem limites de formato $\boldsymbol{I}$.

Além disso, como o limite é único para cada diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{A}$, então, para todo limite $(L \xrightarrow{p_I} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$, temos que

$$(F(L) \xrightarrow{F(q_I)} F \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}} = (M \xrightarrow{q_I} F \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

é um cone em $\mathcal{B}$. Logo, F preserva limites. □

Corolário 2.5.1. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Categorias, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Assim, se $\mathcal{B}$ tem todos os limites, bem como F cria todos os limites, então $\mathcal{A}$ tem todos os limites, assim como F preserva todos os limites.*

2.6 Transformações Naturais

Como já dissemos anteriormente, a definição de Categorias e funtores foi criada para ajudar no estudo de transformações naturais. Discutiremos esse conceito desse ponto em diante. Note que, poderíamos ter introduzido a definição de transformação natural muito mais cedo nesse trabalho. Escolhemos essa ordem por ser a ordem crescente de abstração, pois, assim como funtores são mapas entre Categorias, transformações naturais podem ser vistos como mapas entre funtores e, dessa forma, mostram características em comum entre diferentes objetos da matemática, por isso, naturais.

Definição 2.6.1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias e $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores. Uma **transformação natural** $\alpha : F \to G$ é uma família, $(\alpha_A : F(A) \to G(A))_{A \in \mathcal{A}}$, de morfismos* *em $\mathcal{B}$ indexadas pelos objetos de $\mathcal{A}$, que satisfazem a seguinte* ***condição de naturalidade****: para cada morfismo $f : A \to A'$ em $\mathcal{A}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ {\scriptstyle\alpha_A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha_{A'}} \\ G(A) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(A') \end{array}$$

comuta. Nesse caso, chamamos os morfismos α_A de ***componentes*** *de α.*

Observação 2.6.1. A notação $\alpha : F \to G$ é usada para lembrarmos de que, em certo sentido, estamos mapeando o funtor F em G. Ela não deve ser confundida com o que fazemos com conjuntos, onde devemos mostrar como uma função atua em cada elemento do domínio.

Consideremos os seguintes dois exemplos de transformações naturais.

1) Dadas Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, existe uma transformação natural $\mathcal{I}_F : F \to F$, definida pela família de morfismos $(id_{F(A)} : F(A) \to F(A))_{A \in \mathcal{A}}$. Para mostrar que essa família define, de fato, uma transformação natural, basta notar que, para cada $f : A \to A'$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A') \\ {\scriptstyle id_{F(A)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle id_{F(A')}} \\ F(A) & \xrightarrow[F(f)]{} & F(A') \end{array}$$

comuta.

2) Consideremos as Categorias **CRing** de anéis comutativos e **Mon** de monóides. Temos que o conjunto de matrizes com entradas em R, denotado por $M_n(R)$, forma um monóide. Além disso, para cada homomorfismo de anéis $\varphi : R \to S$ induz um homomorfismo de monóides entre $\psi : M_n(R) \to M_n(S)$, atuando por φ em cada entrada das matrizes de $M_n(R)$, Mais precisamente, se $[r_i] \in M_n(R)$, temos

$$\psi([r_i]) = [\varphi(r_i)] \in M_n(S).$$

Como φ é um homomorfismo de anéis, ψ, definido dessa forma, mantém o produto e a identidade, ou seja, é um homomorfismo de monóides. Assim, podemos definir um funtor M_n que leva cada anel comutativo R no monóide $M_n(R)$ e cada homomorfismo de anéis $\varphi : R \to S$ no homomorfismo de monóides $M_n(\varphi) : M_n(R) \to M_n(S)$.

Além disso, existe um funtor esquecimento U : **CRing** $\to$ **Mon** que esquece a operação de soma e mantém o produto.

Agora, para cada matriz de $M_n(R)$, podemos tomar o determinante da matriz, que é um elemento de R. Assim, para cada $R \in$ **CRing**, existe um morfismo $\det_R : M_n(R) \to U(R)$. Ainda, sabemos que o determinante satisfaz as propriedades:

(i) para cada $A, B \in M_n(R)$, temos $\det_R(AB) = \det_R(A) \cdot \det_R(B)$

(ii) se $I_R \in M_n(R)$ é a identidade, então $\det_R(I_R) = 1_R$, a identidade em R.

Assim, o morfismo $\det_R$ é um homomorfismo de monóides. Agora, sejam $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis e $[r_i] \in M_n(R)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\det_S \circ M_n(\varphi)([r_i]) &= \det_S([\varphi(r_i)]) \\
&= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \varphi(r_{1,i_1}) \cdots \varphi(r_{n,i_n}) \\
&= \varphi\left(\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} r_{1,i_1} \cdots r_{n,i_n} \right) \\
&= \varphi \circ \det_R([r_i]) \\
&= U(\varphi) \circ \det_R([r_i]),
\end{aligned}$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
M_n(R) \arrow[r, "M_n(\varphi)"] \arrow[d, "\det_R"'] & M_n(S) \arrow[d, "\det_S"] \\
U(R) \arrow[r, "U(\varphi)"'] & U(S)
\end{tikzcd}$$

comuta. Logo, o determinante de uma matriz com entradas em um anel comutativo R é uma transformação natural.

3) Consideremos as Categorias **MAbLie**, de grupos de Lie abelianos de matrizes, **AlgLie**, de álgebras de Lie, e **Grp**. Sabemos que, para cada $G \in$ **MAbLie**, existe uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada a G. Além disso, para cada morfismo $\phi : G \to H$, a diferencial $d\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Isso define um funtor $Alg :$ **MAbLie** $\to$ **AlgLie**. Agora, como toda álgebra de Lie é um espaço vetorial, temos que elas são grupos com a operação de soma. Assim, existe um funtor esquecimento $U :$ **AlgLie** $\to$ **Grp**. Existe, ainda, um funtor esquecimento $V :$ **MAbLie** $\to$ **Grp** que esquece a estrutura de Lie, mantendo apenas o produto do grupo.

Consideremos os funtores, $U \circ Alg :$ **MAbLie** $\to$ **Grp** e $V :$ **MAbLie** $\to$ **Grp**. Afirmamos que a exponencial de matrizes $e : U \circ Alg \to V$ é uma transformação natural. De fato, notemos que, como estamos considerando grupos de Lie abelianos, temos que o comutador de cada par de matrizes na álgebra de Lie associada é zero, ou seja, a exponencial satisfaz

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

e, dessa forma, temos que a exponencial é um homomorfismo de grupos. Além disso, podemos mostrar que, para cada $G, H \in \mathbf{MAbLie}$ e suas álgebras de Lie associadas $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathbf{AlgLie}$, a exponencial satisfaz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}) \arrow[r, "U(d\phi)"] \arrow[d, "e"'] & U(\mathfrak{h}) \arrow[d, "e"] \\ V(G) \arrow[r, "V(\phi)"'] & V(H) \end{tikzcd}$$

Logo, a exponencial é uma transformação natural. Como a exponencial tem a mesma definição para qualquer álgebra de Lie, temos que a família de morfismos que define a transformação natural é constante.

Como uma transformação natural define um mapa entre funtores, nós podemos ainda compor transformações naturais. Consideremos as Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, os funtores $F, G, H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e as transformações naturais $\alpha : F \to G$ e $\beta : G \to H$. Assim, existem famílias de morfismos $(\alpha_A : F(A) \to G(A))_{A \in \mathcal{A}}$ e $(\beta_A : G(A) \to H(A))_{A \in \mathcal{A}}$, tais que, para todo morfismo $f : A \to A'$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(A') \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\beta_A"'] & G(A') \arrow[d, "\beta_{A'}"] \\ H(A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(A') \end{tikzcd}$$

comuta. Dessa forma, a família de morfismos $(\gamma_A = \beta_A \circ \alpha_A)_{A \in \mathcal{A}}$ em $\mathcal{B}$ faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & F(A') \arrow[d, "\gamma_{A'}"] \\ H(A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(A') \end{tikzcd}$$

comutar. Assim, definimos a transformação natural $\beta \circ \alpha : F \to H$ como a família de morfismos $(\beta_A \circ \alpha_A)_{A \in \mathcal{A}}$.

Note que, do exemplo 1) e do fato de que podemos compor transformações naturais, podemos definir uma Categoria de funtores, cujos objetos são funtores $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e seus morfismos são transformações naturais.

Definição 2.6.2. *Dadas Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e funtores $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, dizemos que uma transformação natural $\alpha : F \to G$ é um* ***isomorfismo natural*** *quando existe uma transformação natural $\beta : G \to F$ tal que $\beta \circ \alpha = \mathcal{I}_F$ e $\alpha \circ \beta = \mathcal{I}_G$. Nesse caso, dizemos que F e G são* ***naturalmente isomorfos*** *e dizemos que β é uma* ***inversa*** *de α.*

Proposição 2.6.1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores e $\alpha : F \to G$ uma transformação natural. Assim, α é um isomorfismo natural se, e somente se, as componentes de α são isomorfismos.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como α é um isomorfismo natural, existe $\beta : G \to F$ tal que $\beta \circ \alpha = \mathcal{I}_F$ e $\alpha \circ \beta = \mathcal{I}_G$. Dessa forma, temos que $\beta_A \circ \alpha_A = id_{F(A)}$ e $\alpha_A \circ \beta_A = id_{G(A)}$, ou seja, para todo $A \in \mathcal{A}$, temos que $\beta_A = \alpha_A^{-1}$, ou seja, cada componente de α é um isomorfismo.

($\Leftarrow$) Como α_A é um isomorfismo para cada $A \in \mathcal{A}$, consideremos a família de morfismos $(\alpha_A^{-1} : G(A) \to F(A))_{A \in \mathcal{A}}$ em $\mathcal{B}$. Seja $f : A \to A'$ um morfismo em $\mathcal{A}$. Como α é uma transformação temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(A') \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

comuta, de onde concluímos que $\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \alpha_{A'} \circ F(f) &= G(f) \circ \alpha_A \Rightarrow \alpha_{A'}^{-1} \circ \alpha_{A'} \circ F(f) \circ \alpha_A^{-1} \\ &= \alpha_{A'}^{-1} \circ G(f) \circ \alpha_A \circ \alpha_A^{-1} \Rightarrow F(f) \circ \alpha_A^{-1} \\ &= \alpha_{A'}^{-1} \circ G(f), \end{aligned}$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\alpha_A^{-1}"'] & G(A') \arrow[d, "\alpha_{A'}^{-1}"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(A') \end{tikzcd}$$

comuta, mostrando que a família $(\alpha : G(A) \to F(A))_{A \in \mathcal{A}}$ define uma transformação natural, que denotamos por $\alpha^{-1} : G \to F$. Agora, como $\alpha_A \circ \alpha_A^{-1} = id_{G(A)}$ e $\alpha_A^{-1} \circ \alpha_A = id_{F(A)}$, temos que

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathcal{I}_G \ \text{ e } \ \alpha^{-1} \circ \alpha = \mathcal{I}_F.$$

Logo, α é um isomorfismo natural.

$\square$

Corolário 2.6.1. *Se α é um isomorfismo natural, então sua inversa é única.*

Demonstração: Seja $\beta : G \to F$ uma inversa de α. Da demonstração da proposição acima, vemos que as componentes de β devem satisfazer

$$\beta_A \circ \alpha_A = id_{F(A)} \text{ e } \alpha_A \circ \beta_A = id_{G(A)}.$$

Como sabemos, que a inversa de um morfismo em uma Categoria é única, temos que $\beta_A = \alpha_A^{-1}$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Logo, a transformação natural inversa de α é única. $\square$

Do corolário acima podemos falar da inversa de α que denotaremos por α^{-1}.

Quando tratamos de duas Categorias, já vimos anteriormente que podemos falar de Categorias isomorfas, quando existe um funtor entre elas que admite uma inversa. Podemos, agora, definir um conceito mais fraco que isomorfismo de Categorias usando transformações naturais.

Definição 2.6.3. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias. Uma* ***equivalência*** *entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é composta por:*

(i) um par de funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$;

(ii) um par de isomorfismos naturais $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathcal{B}}$ e $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$.

Nesse caso, dizemos que as Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ***equivalentes*** *(denotadas por $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$) e chamamos os funtores F e G de* ***equivalências****.*

A principal diferença entre equivalência e isomorfismo de Categorias é não exigir a igualdade dos funtores $F \circ G = id_{\mathcal{B}}$ e $G \circ F = id_{\mathcal{A}}$. A igualdade de funtores é, em geral, bem mais restrita do que um isomorfismo natural. Assim, equivalências aparecem com mais frequência, porém ainda preservam várias propriedades entre Categorias.

Teorema 2.6.1. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ Categorias. Um funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é uma equivalência se, e somente se, F é pleno, fiel e essencialmente sobrejetivo.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como F é uma equivalência, existe um funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ e isomorfismos naturais $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathcal{B}}$ e $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$, isso é, para todos $A, A' \in \mathcal{A}$, $B, B' \in \mathcal{B}$ e $f : A \to A'$, $g : B \to B'$, os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd} F \circ G(B) \arrow[r, "F\circ G(g)"] \arrow[d, "\varepsilon_B"'] & F \circ G(B') \arrow[d, "\varepsilon_{B'}"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & A' \arrow[d, "\eta_{A'}"] \\ G \circ F(A) \arrow[r, "G\circ F(f)"'] & G \circ F(A') \end{tikzcd}$$

(a) **F é fiel:** Sejam $F(f_1), F(f_2) \in \mathcal{B}(F(A), F(A'))$ tais que $F(f_1) = F(f_2)$. Assim, aplicando o funtor G nessa igualdade, obtemos

$$G \circ F(f_1) = G \circ F(f_2) \overset{(*)}{\Rightarrow} \eta_{A'} \circ f_1 \circ \eta_A^{-1} = \eta_{A'} \circ f_2 \circ \eta_A^{-1} \Rightarrow f_1 = f_2,$$

onde usamos o segundo diagrama em $(*)$. Logo, F é um funtor fiel. Note que, por um argumento análogo, conseguimos mostrar que G é fiel.

(b) **F é pleno:** Seja $g \in \mathcal{B}(F(A), F(A'))$. Definamos o morfismo $f \in \mathcal{A}(G(B), G(B'))$ por $f = \eta_{G(B')}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_{G(B)}$. Pelo segundo diagrama comutativo acima, temos que

$$\eta_{G(B')} \circ f = G \circ F(f) \circ \eta_{G(B)},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\eta_{G(B')} \circ \eta_{G(B')}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_{G(B)} &= (G \circ F)(f) \circ \eta_{G(B)} \\
\Rightarrow G(g) \circ \eta_{G(B)} \circ \eta_{G(B)}^{-1} &= (G \circ F)(f) \\
\Rightarrow G(g) &= (G \circ F)(f) \\
\overset{(*)}{\Rightarrow} g &= F(f),
\end{aligned}$$

onde usamos que G é fiel em $(*)$. Logo, F é um funtor pleno. Por um argumento análogo, podemos mostrar que G também é pleno.

(c) **F é essencialmente sobrejetivo:** Seja $B \in \mathcal{B}$ um objeto. Como $\varepsilon_B : F(G(B)) \to B$ é um isomorfismo, temos que $F(G(B)) \cong B$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Logo, F é essencialmente sobrejetivo. Analogamente, podemos mostrar que G é essencialmente sobrejetivo.

$(\Leftarrow)$ Queremos definir um funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ que seja uma equivalência com F. Assim, para cada B em $\mathcal{B}$, como F é essencialmente sobrejetivo, sabemos que existe algum objeto de $\mathcal{F}$ cuja imagem por F é isomorfa a B. Escolhendo um desses objetos, o definimos como $G(B)$. Além disso, denotamos por ε_B o isomorfismo entre $F(G(B))$ e B (isso é, $\varepsilon_B : F(G(B)) \to B$). Seja, agora, um morfismo $g \in \mathcal{B}(B, B')$. Sabemos que

$$F(G(B)) \overset{\varepsilon_B}{\to} B \overset{g}{\to} B' \overset{\varepsilon_{B'}^{-1}}{\to} F(G(B'))$$

é um morfismo em $\mathcal{B}(F(G(B)), F(G(B')))$. Como F é pleno, existe $f \in \mathcal{A}(G(B), G(B'))$ tal que $F(f) = \varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B$. Assim, definimos $G(g) = f$. Assim, com essa definição temos que

$$G(id_B) = id_{G(B)},$$

pois, como F é um funtor, temos

$$F(id_G(B)) = id_{F(G(B))} = \varepsilon_B^{-1} \circ id_B \circ \varepsilon_B.$$

Agora, para morfismos $g_1 \in \mathscr{B}(B, B')$ e $g_2 \in \mathscr{B}(B', B'')$, temos que

$$G(g_2 \circ g_1) = G(g_2) \circ G(g_1),$$

pois, temos que

$$F(G(g_2 \circ g_1)) = \varepsilon_{B''}^{-1} \circ g_2 \circ g_1 \circ \varepsilon_B = \varepsilon_{B''}^{-1} \circ g_2 \circ \varepsilon_{B'} \circ \varepsilon_{B'}^{-1} \circ g_1 \circ \varepsilon_B = F(G(g_2)) \circ F(G(g_1)).$$

Logo, G define um funtor.

Consideremos, agora, a família de morfismos $(\varepsilon_B)_{B \in \mathscr{B}}$. Dados $B, B' \in \mathscr{B}$ e um morfismo $g : B \to B'$, temos que

$$F \circ G(g) = \varepsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B,$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F \circ G(B) \arrow[r, "F \circ G(g)"] \arrow[d, "\varepsilon_B"'] & F \circ G(B') \arrow[d, "\varepsilon_{B'}"] \\ B \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd}$$

comuta. Logo, $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathscr{B}}$ é um isomorfismo natural.

Finalmente, tomemos objetos $A, A' \in \mathscr{A}$ e um morfismo $f : A \to A'$. Como $F(A), F(A') \in \mathscr{B}$, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F \circ G \circ F(A) \arrow[r, "F \circ G \circ F(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"'] & F \circ G \circ F(A') \arrow[d, "\varepsilon_{F(A')}"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(A') \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja,

$$\varepsilon_{F(A')} \circ F \circ G \circ F(f) = F(f) \circ \varepsilon_{F(A)}. \tag{2.1}$$

Como $\varepsilon_{F(A)} : F \circ G \circ F(A) \to F(A)$ e F é fiel, existe um morfismo $f_A : G \circ F \to A$ tal que $F(f_A) = \varepsilon_{F(A)}$. Além disso, como $\varepsilon_{F(A)}$ é um isomorfismo e F é fiel, temos que f_A é um isomorfismo. Definimos, então, a família de mapas $\eta_A = f_A^{-1} : A \to G \circ F(A)$. Assim, da equação (2.1), temos

$$F(\eta_{A'}^{-1}) \circ F \circ G \circ F(f) = F(f) \circ F(\eta_A^{-1}) \Rightarrow F(\eta_{A'}^{-1} \circ G \circ F(f)) = F(f \circ \eta_A^{-1}).$$

Como F é fiel, obtemos,

$$\eta_{A'}^{-1} \circ G \circ F(f) = f \circ \eta_A^{-1},$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & A' \arrow[d, "\eta_{A'}"] \\ G \circ F(A) \arrow[r, "G\circ F(f)"'] & G \circ F(A') \end{tikzcd}$$

comuta. Logo, $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$ é um isomorfismo natural e, portanto, F e G são equivalências de Categorias. $\square$

2.7 Adjunções

Nesse momento, podemos definir um dos conceitos fundamentais em Teoria de Categorias, que aparece frequentemente.

Definição 2.7.1. *Sejam Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores. Dizemos que F é um **adjunto esquerdo** de G, e que G é um **adjunto direito** de F (e denotamos por $F \dashv G$) quando, para cada $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, existir uma bijeção*

$$\begin{array}{rcl} \overline{} : \mathcal{B}(F(A), B) & \to & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ f & \mapsto & \overline{f} \\ \overline{g} & \leftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

tal que, para todos $g \in \mathcal{B}(F(A), B)$, $q \in \mathcal{B}(B, B')$, $f \in \mathcal{A}(A, G(B))$ e $p \in \mathcal{A}(A', A)$, temos

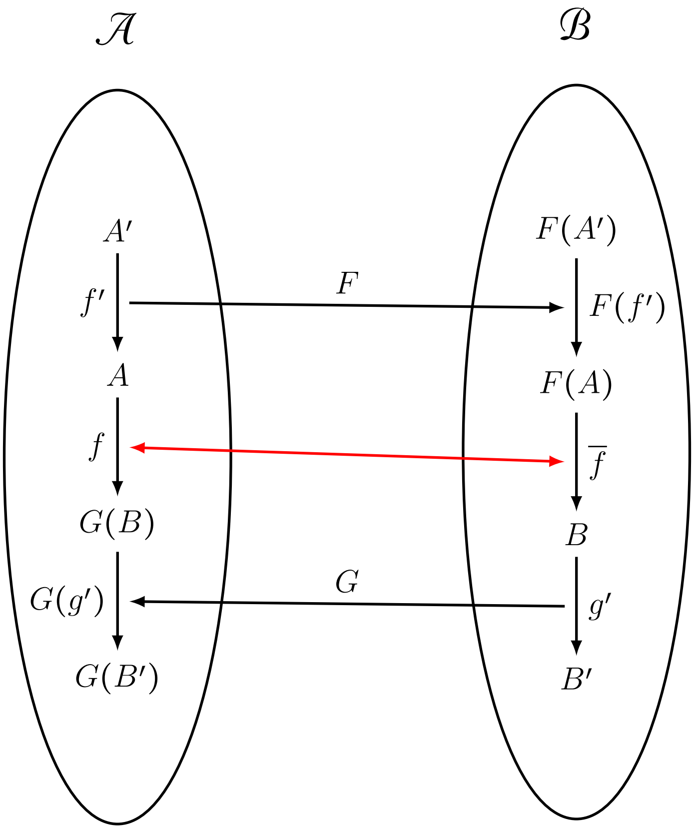
$$\overline{q \circ g} = G(q) \circ \overline{g} \quad e \quad \overline{f \circ p} = \overline{f} \circ F(p).$$

Observação 2.7.1. Note que, como $\overline{}$ é uma bijeção, temos, para todo $g \in \mathcal{B}(F(A), B)$ e $f \in \mathcal{A}(A, G(B))$, que

$$\overline{\overline{g}} = g \text{ e } \overline{\overline{f}} = f.$$

Além disso, dizemos que $\overline{f}$ é a **transposta** de f.

A bijeção descrita acima e a condição de naturalidade, podem ser representadas da seguinte maneira:



onde a seta vermelha representa o isomorfismo $^{-}$.

Um exemplo importante de adjunção de funtores são funtores esquecimento e livres. Em geral, temos que para Categorias de álgebras, funtores livres são adjuntos esquerdos dos funtores esquecimento.

Ainda podemos definir adjunções de duas formas diferentes. Para a primeira delas, devemos considerar as seguinte definição.

Definição 2.7.2. *Seja $F \dashv G$ uma adjunção entre as Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Assim, para cada $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, definimos os mapas*

$$\eta_A = \overline{id_{F(A)}} \quad e \quad \varepsilon_B = \overline{id_{G(B)}}.$$

Proposição 2.7.1. *Consideremos a adjunção da definição acima. Assim, as famílias de morfismos $(\eta_A)_{A\in\mathcal{A}}$ e $(\varepsilon_B)_{B\in\mathcal{B}}$ definem transformações naturais*

$$\eta : id_{\mathcal{A}} \longrightarrow G \circ F \quad e \quad \varepsilon : F \circ G \longrightarrow id_{\mathcal{B}}.$$

Demonstração: Para cada $A, A' \in \mathcal{A}$, $B, B' \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{A}(A, A')$ e $g \in \mathcal{B}(B, B')$, temos que

$$id_{F(A')} \circ F(f) = F(f) \circ id_{F(A)} \;\text{ e }\; id_{G(B')} \circ G(g) = G(g) \circ id_{G(B)}.$$

Como

$$\overline{\eta_{A'} \circ f} = \overline{\eta_{A'}} \circ F(f) = id_{F(A')} \circ F(f) \;\text{ e }\; \overline{g \circ \varepsilon_B} = G(g) \circ \overline{\varepsilon_B} = G(g) \circ id_{G(B)},$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{F(f)\circ id_{F(A)}} &= G\circ F(f)\circ \overline{id_{F(A)}} = G\circ F(f)\circ \eta_A \\
\overline{id_{G(B')}\circ G(g)} &= \overline{id_{G(B')}}\circ F\circ G(g) = \varepsilon_{B'}\circ G(g).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\eta_{A'}\circ f &= \overline{\overline{\eta_{A'}\circ f}} = \overline{id_{\mathcal{A}'}\circ F(f)} = \overline{F(f)\circ id_{F(A)}} = G\circ F(f)\circ \eta_A \\
g\circ \varepsilon_B &= \overline{\overline{g\circ \varepsilon_B}} = \overline{G(g)\circ id_{G(B)}} = \overline{id_{G(B')}\circ G(g)} = \varepsilon_{B'}\circ G(g),
\end{aligned}$$

ou seja, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & A' \arrow[d, "\eta_{A'}"] \\
G\circ F(A) \arrow[r, "G\circ F(f)"'] & G\circ F(A')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F\circ G(B) \arrow[r, "F\circ G(g)"] \arrow[d, "\varepsilon_B"'] & F\circ G(B') \arrow[d, "\varepsilon_{B'}"] \\
B \arrow[r, "g"'] & B'
\end{tikzcd}$$

comutam. Logo, $(\varepsilon_B)_{B\in\mathcal{B}}$ e $(\eta_A)_{A\in\mathcal{A}}$ definem transformações naturais

$$\varepsilon : F\circ G \to id_{\mathcal{B}} \ \text{ e } \ \eta : id_{\mathcal{A}} \to G\circ F.$$

□

Definição 2.7.3. *As transformações naturais $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G\circ F$ e $\varepsilon : F\circ G \to id_{\mathcal{B}}$ são chamadas **unidade** e **co-unidade**, respectivamente.*

Lema 2.7.1. *Seja uma adjunção $F \dashv G$, com unidade e co-unidade η e ε. Assim, os triângulos*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "id_{F(A)}"'] & F\circ G\circ F(A) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\
 & F(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "id_{G(B)}"'] & G\circ F\circ G(B) \arrow[d, "G(\varepsilon_B)"] \\
 & G(B)
\end{tikzcd}$$

comutam, para todos $A\in\mathcal{A}$ e $B\in\mathcal{B}$.

Demonstração: Temos que

$$\varepsilon_{F(A)}\circ F(\eta_A) = \overline{id_{G\circ F(A)}\circ \eta_A} = \overline{\eta_A} = id_{F(A)}$$

e

$$G(\varepsilon_B)\circ \eta_{G(B)} = \overline{\varepsilon_B\circ id_{F\circ G(B)}} = \overline{\varepsilon_B} = id_{G(B)},$$

mostrando que os triângulos comutam. □

Definição 2.7.4. *Os diagramas no lema acima são conhecidos como as **identidades dos triângulos**.*

Lema 2.7.2. *Seja $F \dashv G$ uma adjunção entre as Categorias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ com unidade η e co-unidade ε. Assim, para todos $g : F(A) \to B$ e $f : A \to G(B)$, temos*

$$\overline{g} = G(g) \circ \eta_A \quad e \quad \overline{f} = \varepsilon_B \circ F(f).$$

Demonstração: Com efeito, temos que

$$\overline{g} = \overline{g \circ id_{F(A)}} = G(g) \circ \overline{id_{F(A)}} = G(g) \circ \eta_A$$

e

$$\overline{f} = \overline{id_{G(B)} \circ f} = \overline{id_{G(B)}} \circ F(f) = \varepsilon_B \circ F(f).$$

□

Teorema 2.7.1. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Categorias e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores. Assim, $F \dashv G$ se, e somente se, existe um par de transformações naturais $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$ e $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathcal{B}}$ satisfazendo as identidades dos triângulos. Além disso, as adjunções e os pares de transformações naturais são unicamente determinados.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Definimos as famílias de morfismos $\eta_A = \overline{id_{F(A)}}$ e $\varepsilon_B = \overline{id_{G(B)}}$ para cada $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, respectivamente. Pela proposição 2.7.1 e o lema 2.7.1, existem transformações naturais que satisfazem as identidades dos triângulos. Além disso, a definição dos morfismos η_A e ε_B como as transpostas das identidades define essas transformações naturais unicamente.

($\Leftarrow$) Dados $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, definimos as aplicações

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathcal{B}(F(A), B) &\to \mathcal{A}(A, G(B)) \\ g &\mapsto \Gamma(g) = G(g) \circ \eta_A \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{A}(A, G(B)) &\to \mathcal{B}(F(A), B) \\ f &\mapsto \Delta(f) = \varepsilon_B \circ F(f). \end{aligned}$$

Afirmamos que essas aplicações são mutualmente inversas. Com efeito, para $g \in \mathcal{B}(F(A), B)$ e $f \in \mathcal{A}(A, G(B))$

$$\Delta \circ \Gamma(g) = \Delta(G(g) \circ \eta_A) = \varepsilon_B \circ F(G(g) \circ \eta_A) = \varepsilon_B \circ (F \circ G)(g) \circ \eta_A$$

e

$$\Gamma \circ \Delta(f) = \Gamma(\varepsilon_B \circ F(f)) = G(\varepsilon_B \circ F(f)) \circ F(\eta_A) = G(\varepsilon_B) \circ (G \circ F)(f) \circ F(\eta_A).$$

Agora, como η e ε são transformações naturais, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
F \circ G(F(A)) \arrow[r, "F\circ G(g)"] \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"'] & F \circ G(B) \arrow[d, "\varepsilon_B"] \\
F(A) \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & G(B) \arrow[d, "\eta_{G(B)}"] \\
G \circ F(A) \arrow[r, "G\circ F(f)"'] & G \circ F(G(B))
\end{tikzcd}$$

comutam, ou seja,

$$\varepsilon_B \circ (F \circ G)(g) = g \circ \varepsilon_{F(A)} \text{ e } \eta_{G(B)} \circ f = (G \circ F)(f) \circ \eta_A.$$

Assim, temos

$$\Delta \circ \Gamma(g) = \varepsilon_B \circ (F \circ G)(g) \circ F(\eta_A) = g \circ \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)$$

e

$$\Gamma \circ \Delta(f) = G(\varepsilon_B) \circ (G \circ F)(f) \circ \eta_A = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \circ f.$$

Agora, pelas identidades dos triângulos, temos

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "id_{F(A)}"'] & F \circ G \circ F(A) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "id_{G(B)}"'] & G \circ \circ G(B) \arrow[d, "G(\varepsilon_B)"] \\
& G(B)
\end{tikzcd}$$

de onde concluímos que

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = id_{F(A)} \text{ e } G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = id_{G(B)}.$$

Assim,

$$\Delta \circ \Gamma(g) = \varepsilon_B \circ (F \circ G)(g) \circ F(\eta_A) = g \circ \varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = g \circ id_{F(A)} = g$$

e

$$\Gamma \circ \Delta(f) = G(\varepsilon_B) \circ (G \circ F)(f) \circ \eta_A = G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} \circ f = id_{G(B)} \circ f = f.$$

Portanto, $\Delta^{-1} = \Gamma$, ou seja, $\Gamma : \mathcal{B}(F(A), B) \to \mathcal{A}(A, G(B))$ é um isomorfismo.

Vamos denotar $\Gamma(g) = \overline{g}$ e $\Gamma^{-1}(f) = \overline{f}$. Devemos mostrar que Γ satisfaz a condição de naturalidade. Dados $g \in \mathcal{B}(F(A), B)$, $q \in \mathcal{B}(B, B')$, $f \in \mathcal{A}(A, G(B))$ e $p \in \mathcal{A}(A', A)$, temos

$$\overline{q \circ g} = G(q \circ g) \circ \eta_A = G(q) \circ G(g) \circ \eta_A = G(q) \circ \overline{g}$$

e

$$\overline{f \circ p} = \varepsilon_B \circ F(f \circ p) = \varepsilon_B \circ F(f) \circ F(p) = \overline{f} \circ F(p).$$

Logo, $F \dashv G$.

Resta mostrar que essa é a única adjunção gerada por η e ε. Suponhamos que existe um isomorfismo $\Gamma' : \mathcal{B}(F(A), B) \to \mathcal{A}(A, G(B))$ Para isso, note que, pelo Lema 2.7.2, temos

$$\overline{g} = \Gamma(g) = G(g) \circ \eta_A = \Gamma'(g)$$

e

$$\overline{f} = \Gamma^{-1}(f) = \varepsilon_B \circ F(f) = \Gamma'^{-1}(f),$$

isso é, a adjunção é a única determinada por esse par. □

O teorema acima nos dá uma definição alternativa para adjunções.

Mostraremos, agora, que podemos definir adjunções utilizando Categorias vírgula e funtores. Para isso, consideremos a seguinte definição.

Definição 2.7.5. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Categorias e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ um funtor. Para um objeto $A \in \mathcal{A}$, podemos definir a Categoria vírgula $(A \Rightarrow G)$ de forma que*

(i) os objetos de $(A \Rightarrow G)$ são pares (B,f), onde $B \in \mathcal{B}$ e $f : A \to G(B)$;

(ii) um morfismo $q : (B, f) \to (B', f')$ é um morfismo $q \in \mathcal{B}(B, B')$ tal que, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & G(B) \arrow[d, "G(q)"] \\ & G(B') \end{tikzcd}$$

comuta.

Como o objeto $A \in \mathcal{A}$ pode ser unicamente determinado pelo funtor $A : \mathbf{1} \to \mathcal{A}$ (se I é o único objeto de $\mathbf{1}$, temos $A(I) = A$), a Categoria vírgula acima pode ser representada pelo diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, "G"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "A"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Teorema 2.7.2. *Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Categorias e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ funtores. Assim, $F \dashv G$ se, e somente se, existe uma transformação natural $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$ tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$, $(F(A), \eta_A)$ é inicial em $(A \Rightarrow G)$. Além disso, as adjunções e as transformações naturais são unicamente determinados.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$ a unidade da adjunção. Dado $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$, consideremos os pares $(F(A), \eta_A), (B, f) \in (A \Rightarrow G)$. Tomemos o morfismo $q = \overline{f} \in \mathcal{B}(F(A), B)$. Assim, temos

$$f = \overline{\overline{f}} = \overline{q} = \overline{q \circ id_{F(A)}} = G(q) \circ \eta_A,$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & G \circ F(A) \arrow[d, "q"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $q : (F(A), \eta_A) \to (B, f)$ é um morfismo em $(A \Leftarrow G)$. Para mostrar unicidade, suponhamos que exista $q' : (F(A), \eta_A) \to (B, f)$ em $(A \Rightarrow G)$ tal que $G(q') \circ \eta_A = f$. Assim, temos

$$f = G(q') \circ \eta_A = \overline{q' \circ id_{F(A)}} = \overline{q'},$$

ou seja, $\overline{q} = f\overline{q'}$ e, como a transposta é uma bijeção, temos $q = q'$. Portanto, q é único. Logo, $(F(A), \eta_A)$ é um objeto inicial em $(A \Rightarrow G)$. Além disso, como a unidade da adjunção é unicamente determinada para cada adjunção, η é único morfismo com essa propriedade para a adjunção $F \dashv G$.

($\Leftarrow$) Como η_A é inicial em $(A \Rightarrow G)$ para cada $A \in \mathcal{A}$,temos que existe um único morfismo $\varphi : F \circ G(B) \to G(B)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "id_{G(B)}"'] & G \circ F \circ G(B) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

para cada $B \in \mathcal{B}$. Assim, definimos $\varepsilon_B = \varphi$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Primeiramente, mostremos que a família $(\varepsilon_B)_{B \in \mathcal{B}}$ define uma transformação natural. Para isso, note que o diagrama acima implica que $G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = id_{G(B)}$. Assim, temos, para $q \in \mathcal{B}(B, B')$, que

$$G(q \circ \varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = G(q) \circ G(\varepsilon_B) \circ \eta_{G(B)} = G(q) \circ id_{G(q)} = G(q),$$

ou seja, $q \circ \varepsilon_B : F \circ G(B) \to G(B')$ é um morfismo $(F \circ G(B), \eta_{G(B)}) \to (G(B'), G(q))$. Por outro lado, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} G(B') \arrow[r, "\eta_{G(B')}"] \arrow[dr, "id_{G(B')}"'] & G \circ F \circ G(B') \arrow[d, "G(\varepsilon_{B'})"] \\ & G(B') \end{tikzcd}$$

comuta pela definição de $\varepsilon_{B'}$. Além disso, como η é uma transformação natural, temos que

$$\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "G(q)"] \arrow[d, "\eta_{G(B)}"'] & G(B') \arrow[d, "\eta_{G(B')}"] \\
G \circ F \circ G(B) \arrow[r, "G\circ F\circ G(q)"'] & G \circ F \circ G(B')
\end{tikzcd}$$

comuta, isso é, $G \circ F \circ G(q) \circ \eta_{G(B)} = \eta_{G(B')} \circ G(q)$. Assim, combinando esse diagrama com o diagrama acima, obtemos

$$\begin{aligned}
G(\varepsilon_{B'} \circ F \circ G(q)) \circ \eta_{G(B)} &= G(\varepsilon_{B'}) \circ G \circ F \circ G(q) \circ \eta_{G(B)} \\
&= G(\varepsilon_{B'}) \circ \eta_{G(B')} \circ G(q) \\
&= id_{G(B')} \circ G(q) = G(q),
\end{aligned}$$

ou seja, $\varepsilon_{B'} \circ F \circ G(q) : F \circ G(B) \to B'$ é um morfismo $(F \circ G(B), \eta_{G(B)}) \to (G(B'), G(q))$. Como $(G(B), \eta_{G(B)})$ é inicial, temos

$$q \circ \varepsilon_B = \varepsilon_{B'} \circ F \circ G(q)$$

e, portanto, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \circ G(B) \arrow[r, "F\circ G(q)"] \arrow[d, "\varepsilon_B"'] & F \circ G(B') \arrow[d, "\varepsilon_{B'}"] \\
B \arrow[r, "q"'] & B'
\end{tikzcd}$$

comuta para todo $q : G \to G'$, mostrando que a família $(\varepsilon_B)_{B\in\mathscr{B}}$ define uma transformação natural $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathscr{B}}$.

Agora, queremos mostrar que as transformações naturais ε e η satisfazem as identidades dos triângulos. Notemos, primeiramente que pela definição de ε_B, temos, para cada $B \in \mathscr{B}$, que

$$\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "id_{G(B)}"'] & G \circ F \circ G(B) \arrow[d, "G(\varepsilon_B)"] \\
 & G(B)
\end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, uma das identidades dos triângulos é satisfeita. Para mostrar a outra, notemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\eta_A"'] & G \circ F(A) \arrow[d, "G(id_{F(A)})"] \\
 & G \circ F(A)
\end{tikzcd}$$

comuta. Por outro lado, como η é uma transformação natural e pela identidade do triângulo já mostrada, os diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & G \circ F(A) \arrow[d, "\eta_{G \circ F(A)}"] \\ G \circ F(A) \arrow[r, "G \circ F(A)"'] & G \circ F \circ G \circ F(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \circ F(A) \arrow[r, "\eta_{G \circ F(A)}"] \arrow[dr, "id_{G \circ F(A)}"'] & G \circ F \circ G \circ F(A) \arrow[d, "G(\varepsilon_{F(A)})"] \\ & G \circ F(A) \end{tikzcd}$$

comutam. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A)) \circ \eta_A &= G(\varepsilon_{F(A)}) \circ G \circ F(\eta_A) \circ \eta_A \\ &= G(\varepsilon_{F(A)}) \circ \eta_{G \circ F(A)} \circ \eta_A \\ &= id_{G \circ F(A)} \eta_A = \eta_A. \end{aligned}$$

Assim, como os morfismos $\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) : F(A) \to F(A)$ e $id_{F(A)} : F(A) \to F(A)$ são ambos morfismos $(F(A), \eta_A) \to (F(A), \eta_A)$ e, como $(F(A), \eta_A)$ é inicial em $(A \Rightarrow G)$, temos

$$\varepsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = id_{F(A)},$$

mostrando que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "id_{F(A)}"'] & F \circ G \circ F(A) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, as transformações naturais η e ε satisfazem as identidades dos triângulos e, pelo Teorema 2.7.1, temos que (η, ε) definem uma única adjunção $F \dashv G$. □

2.8 Teorema Geral do Funtor Adjunto

Adjunções apresentam várias propriedades interessantes para o estudo de Categorias. Daremos, agora, alguns resultados que unem o conceito de adjunções com boa parte do que já fizemos até esse momento.

Lema 2.8.1. *Seja $F \dashv G$ uma adjunção entre as Categorias $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Assim, F preserva colimites e G preserva limites (ambos pequenos).*

Demonstração:

Primeiramente, mostremos que F preserva colimites. Seja $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena tal que para todo diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathscr{A}$ exista um colimite

$$(D(I) \xrightarrow{p_I} C)_{I \in \boldsymbol{I}}$$

de D em $\mathscr{A}$. Assim, aplicando o funtor F nesse limite, obtemos um cocone

$$(F \circ D(I) \xrightarrow{F(p_I)} F(C))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

de $F \circ D$ em $\mathscr{B}$. Queremos mostrar que esse cocone é um colimite em $\mathscr{B}$. Assim, tomemos um segundo cocone

$$(F \circ D(I) \xrightarrow{f_I} B)_{I \in \boldsymbol{I}}$$

de $F \circ D$ em $\mathscr{B}$. Para cada $I \in \boldsymbol{I}$, temos que $f_I \in \mathscr{B}(F \circ D(I), B)$ e, como $F \dashv G$, temos que $\overline{f_I} \in \mathscr{A}(D(I), G(B))$. Assim,

$$(D(I) \xrightarrow{\overline{f_I}} G(B))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

é um cocone de D em $\mathscr{A}$. Dessa forma, como $(D(I) \xrightarrow{p_I} C)_{I \in \boldsymbol{I}}$ é um limite, existe um único mapa $\psi \in \mathscr{A}(C, G(B))$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
D(I) \arrow[dd, "D(u)"'] \arrow[dr, "p_I"'] \arrow[drr, "\overline{f_I}"] & & \\
& C \arrow[r, dashed, "\psi"] & G(B) \\
D(J) \arrow[ur, "p_J"] \arrow[urr, "\overline{f_J}"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta. Agora, como $F \dashv G$, temos que $\mathscr{A}(C, G(B)) \cong \mathscr{B}(F(C), B)$, ou seja, $\overline{\psi}$ é o único mapa em $\mathscr{B}(F(C), B)$. Além disso, como o diagrama acima comuta, temos $\psi \circ p_I = \overline{f_I}$ para todo $I \in \boldsymbol{I}$. Assim,

$$f_I = \overline{\overline{f_I}} = \overline{\psi \circ p_I} = \overline{\psi} \circ F(p_I),$$

isso é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \circ D(I) \arrow[dd, "F \circ D(u)"'] \arrow[dr, "F(p_I)"'] \arrow[drr, "f_I"] & & \\
& F(C) \arrow[r, dashed, "\overline{\psi}"] & B \\
F \circ D(J) \arrow[ur, "F(p_J)"] \arrow[urr, "f_J"'] & &
\end{tikzcd}$$

comuta, mostrando que $(F \circ D(I) \xrightarrow{F(p_I)} F(C))_{I \in \boldsymbol{I}}$ é um cocone em $\mathscr{B}$. Logo, F preserva colimites.

Para mostrar que G preserva limites o argumento é completamente análogo. Seja $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena tal que, para todo $D : \boldsymbol{I} \to \mathscr{B}$, exista um limite

$$(L \xrightarrow{p_I} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}.$$

de D em $\mathcal{B}$. Aplicando o funtor G nesse limite, obtemos um cone em $\mathcal{A}$

$$(G(L) \overset{G(p_I)}{\to} G \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}.$$

Mostrar que G preserva limites significa mostrar que esse cone é um limite de $G \circ D$ em $\mathcal{A}$. Seja $(A \overset{f_I}{\to} G \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ um cone em $\mathcal{A}$. Consideremos a classe $\mathcal{A}(A, G(L))$. Como G é um adjunto direito, e denotando seu adjunto esquerdo por $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, temos que

$$\mathcal{A}(A, G(L)) \cong \mathcal{B}(F(A), L),$$

pois $F \dashv G$. Agora, note que para cada $I \in \boldsymbol{I}$, temos

$$f_I \in \mathcal{A}(A, G \circ D(I)),$$

ou seja, temos

$$\overline{f_I} \in \mathcal{B}(F(A), D(I)).$$

Assim, temos que

$$(F(A) \overset{\overline{f_I}}{\to} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

define um cone do diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$. Dessa forma, como

$$(L \overset{p_I}{\to} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

é um limite em $\mathcal{B}$, temos que existe um único morfismo $\varphi : F(A) \to L$, e, portanto, como $\mathcal{A}(A, G(L)) \cong \mathcal{B}(F(A), L)$, temos que o transposto $\overline{\varphi}$ é o único morfismo em $\mathcal{A}(A, G(L))$. Além disso, como o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & D(I) \arrow[dd, "D(u)"] \\
F(A) \arrow[urr, "\overline{f_I}"] \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, "\overline{f_J}"'] & L \arrow[ur, "p_I"] \arrow[dr, "p_J"'] & \\
 & & D(J)
\end{tikzcd}$$

comuta, temos que $\overline{f_I} = p_I \circ \varphi$, para todo $I \in \boldsymbol{I}$. Assim, pela naturalidade da adjunção, temos

$$f_I = \overline{\overline{f_I}} = \overline{p_I \circ \varphi} = G(p_I) \circ \overline{\varphi},$$

isso é, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & G \circ D(I) \arrow[dd, "G \circ D(u)"] \\
A \arrow[urr, "f_I"] \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] \arrow[drr, "f_J"'] & G(L) \arrow[ur, "G(p_I)"] \arrow[dr, "G(p_J)"'] & \\
 & & G \circ D(J)
\end{tikzcd}$$

comuta, para todo $I \in \boldsymbol{I}$. Logo, $(G(L) \overset{G(p_I)}{\to} G \circ D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ é um limite em $\mathcal{A}$ e, portanto, G preserva limites. $\square$

Antes de enunciar o próximo resultado, notemos que a definição de um diagrama pode ser generalizada para Categorias arbitrárias (ou seja, que não sejam necessariamente pequenas, como fizemos até esse ponto). A definição para esse caso é a mesma, salvo que os objetos da imagem do diagrama não formam necessariamente um conjunto. Para demonstrar o próximo resultado, utilizaremos um caso muito específico de um diagrama desse tipo, a saber, o diagrama gerado pelo funtor identidade. Precisaremos, também, falar de um limite do diagrama identidade. Apesar da definição ser completamente análoga, vamos repeti-la aqui por conveniência.

Definição 2.8.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria. Consideremos o diagrama $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Assim,*

(i) Um cone do diagrama $id_{\mathcal{A}}$ é um objeto e uma família de morfismos, $(K \overset{f_A}{\to} A)_{A \in \mathcal{A}}$ tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$ e $f : A \to A'$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "f"] \\ K \arrow[ur, "f_A"] \arrow[dr, "f_{A'}"'] & \\ & A' \end{tikzcd}$$

comuta.

(ii) Um limite desse diagrama é um objeto e uma família de morfismos, $(L \overset{p_A}{\to} A)_{A \in \mathcal{A}}$, tais que, para todo cone $(K \overset{f_A}{\to} A)_{A \in \mathcal{A}}$ e $f : A \to A'$, existe uma única $\varphi : K \to L$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dd, "f"] \\ K \arrow[urr, "f_A"] \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, "f_{A'}"'] & L \arrow[ur, "p_A"] \arrow[dr, "p_{A'}"'] & \\ & & A' \end{tikzcd}$$

comutar.

Lema 2.8.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma Categoria completa, localmente pequena. Se $\mathcal{A}$ tem um conjunto fracamente inicial, então $\mathcal{A}$ tem um conjunto inicial.*

Demonstração: Seja $S = \{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ um conjunto fracamente inicial em $\mathcal{A}$. Notemos que, como $\mathcal{A}$ é localmente pequena e S é um conjunto, temos que S é uma Categoria pequena. Dessa forma, o funtor inclusão $\iota : S \to \mathscr{A}$ define um diagrama pequeno em $\mathscr{A}$, que possui um limite, pois $\mathscr{A}$ é completa. Denotamos esse limite por

$$(L \overset{p_{I_\lambda}}{\to} I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}.$$

Afirmamos que L é inicial em $\mathscr{A}$. Primeiramente, notemos que, para todo $A \in \mathscr{A}$, temos que existe algum $\lambda_0 \in \Lambda$, tal que existe um morfismo $h_{\lambda_0} : I_{\lambda_)} \to A$, ou seja, para todo $A \in \mathscr{A}$, existe algum $\lambda \in \Lambda$ tal que $h_\lambda \circ p_{I_\lambda} \in \mathscr{A}(L, A)$. Isso mostra que L é um objeto fracamente inicial em $\mathscr{A}$.

Agora, vamos mostrar que

$$(L \overset{h_\lambda \circ p_{I_\lambda}}{\to} A)_{A \in \mathscr{A}}$$

é um cone em $\mathscr{A}$. Assim, consideremos $f : A \to A'$ em $\mathscr{A}$. Como S é um conjunto fracamente inicial, existem $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ e morfismos $h_\lambda : I_\lambda \to A$ e $h_{\lambda'} : I_{\lambda'} \to A'$. Além disso, como $\mathscr{A}$ é completa, podemos considerar o pullback de $(A', f \circ h_\lambda, h_{\lambda'})$, dado pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"'] & I_{\lambda'} \arrow[d, "h_{\lambda'}"] \\
I_\lambda \arrow[r, "f \circ h_\lambda"'] & A'
\end{tikzcd}$$

Ainda, temos que existe um $\lambda'' \in \Lambda$ tal que existe um morfismo $h_{\lambda''} : I_{\lambda''} \to P$, de forma que temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rrr, bend left, "p_{I_{\lambda'}}"] \arrow[dr, "p_{\lambda''}"] \arrow[ddrr, bend right, "p_{I_\lambda}"'] & (I) & & \\
(I) & I_{\lambda''} \arrow[rr, bend left, "g' \circ h_{\lambda''}"] \arrow[dr, "h_{\lambda''}"] \arrow[dr, phantom, shift left=6, "(II)"] \arrow[dr, phantom, shift right=6, "(II)"] \arrow[ddr, bend right, "g \circ h_{\lambda''}"'] & & \\
& & P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "(III)"] & I_{\lambda'} \arrow[d, "h_{\lambda'}"] \\
& & I_\lambda \arrow[r, "f \circ h_\lambda"'] & A'
\end{tikzcd}$$

note que, a região (I) comuta, pois L é um cone do diagrama ι, a região (II) comuta por construção e (III) comuta por ser um quadrado de pullback. Assim, esse diagrama é comutativo e, portanto, temos

$$f \circ (h_\lambda \circ p_{I_\lambda}) = (h_{\lambda'} \circ p_{I_{\lambda'}}),$$

para todo $f : A \to A'$. Assim,

$$(L \overset{h_\lambda \circ p_{I_\lambda}}{\to} A)_{A \in \mathcal{A}}$$

é um cone de $id_{\mathcal{A}}$. Isso significa que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dd, "p_{I_\lambda}"] \\ L \arrow[ur, "f_L"] \arrow[dr, "p_{I_\lambda}"'] & \\ & I_\lambda \end{tikzcd}$$

comuta para todo $\lambda \in \Lambda$ e para todo $f_L : L \to L$, isso é,

$$p_{I_\lambda} \circ f_L = p_{I_\lambda}.$$

Além disso, ainda por ser um cone de $id_{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{A}$, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dd, "h_\lambda \circ p_\lambda"] \\ L \arrow[ur, "f_L"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

comuta, para todo $f : L \to A$ e para algum $\lambda \in \Lambda$. Assim, temos

$$h_\lambda \circ p_{I_\lambda} \circ f_L = f.$$

Porém, pelo que foi observado acima, temos que $p_{I_\lambda} \circ f_L = p_{I_\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e todo $f_L : L \to L$. Assim, temos que $f = h_\lambda \circ p_{I_\lambda}$, ou seja, $h_\lambda \circ p_{I_\lambda}$ é o único morfismo em $\mathcal{A}(L, A)$. Logo, L é um objeto inicial.

$\square$

Concluiremos essa seção com o seguinte resultado central,

Teorema 2.8.1 (Teorema Geral do Funtor Adjunto). *Sejam $\mathcal{A}$ uma Categoria, $\mathcal{B}$ uma Categoria localmente pequena completa e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ um funtor. Se, para cada $A \in \mathcal{A}$, a Categoria $(A \Rightarrow G)$ tem um conjunto fracamente inicial, então G admite um adjunto esquerdo se, e somente se, G preserva limites.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Como $\mathcal{B}$ é completa, para toda Categoria pequena $\boldsymbol{I}$, para todo diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \mathcal{B}$ existe um limite de D em $\mathcal{B}$. Assim, pelo Lema 2.8.1, temos que G preserva limites.

($\Leftarrow$) Primeiramente, mostremos que como $\mathcal{B}$ é localmente pequena e completa, então a Categoria vírgula $(A \Rightarrow G)$ é localmente pequena e completa.

(a) $(A \Rightarrow G)$ **é localmente pequena:** Dados objetos $(B, f), (B', f') \in (A \Rightarrow G)$, temos, pela definição dos mapas em $(A \Rightarrow G)$, que a classe de morfismos $(B, f) \to (B', f')$ é igual à classe de morfismos $B \to B'$ em $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ é localmente pequena, temos que $\mathcal{B}(B, B')$ é um conjunto para todos $B, B' \in \mathcal{B}$, ou seja, para cada par de objetos $(B, f), (B', f') \in \mathcal{B}$, a classe de morfismos entre eles é um conjunto. Logo, $(A \Rightarrow G)$ é localmente pequena.

(b) $(A \Rightarrow G)$ **é completa:** Para esse resultado, consideremos o funtor projeção

$$\Pi_A : (A \Rightarrow G) \to \mathcal{B}$$

definido por

$$\Pi_A(B, f) = B \ \text{ e } \ \Pi(g) = g,$$

onde $g : (B, f) \to (B', f')$ (lembremos que g em $(A \Rightarrow G)$ é um morfismo $g : B \to B'$ em $\mathcal{B}$). Agora, vamos mostrar que Π_A cria limites. Assim, seja $\boldsymbol{I}$ uma Categoria pequena e $D : \boldsymbol{I} \to (A \Rightarrow G)$ um diagrama em $(A \Rightarrow G)$. Já que cada elemento de $(A \Rightarrow G)$ é um par da forma (B, f), vamos denotar os objetos $D(I)$ por (B_I, f_I), com $f_I : A \to B_I$, para cada $I \in \boldsymbol{I}$. Como $\mathcal{B}$ é completa, existe um limite

$$(M \xrightarrow{p_I} B_I)_{I \in \boldsymbol{I}}$$

do diagrama $\Pi_A \circ D$ em $\mathcal{B}$ (lembre que $\Pi_A \circ D(I) = \Pi_A(B_I, f_I) = B_I$, para cada $I \in \boldsymbol{I}$). Agora, como G preserva limites, temos que

$$(G(M) \xrightarrow{G(p_I)} G(B_I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

é um limite de $G \circ \Pi_A \circ D$ em $\mathcal{A}$. Assim, sendo um limite, como

$$(A \xrightarrow{f_I} G(B_I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

forma um cone de $G \circ \Pi_A \circ D$ em $\mathscr{A}$, temos que existe um único morfismo $\varphi : A \to G(M)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & G(B_I) \arrow[dd, "G\circ\Pi_A\circ D(u)"] \\
A \arrow[rru, "f_I"] \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[rrd, "f_J"'] & G(M) \arrow[ru, "p_I"] \arrow[rd, "p_J"'] & \\
 & & G(B_J)
\end{tikzcd}$$

comuta. Agora, note que

$$\begin{tikzcd}
 & (B_I, f_I) \arrow[dd, "D(u)"] \\
(M, f) \arrow[ru, "p_I"] \arrow[rd, "p_J"'] & \\
 & (B_J, f_J)
\end{tikzcd}$$

comuta, pois

$$\begin{tikzcd}
 & B_I \arrow[dd, "D(u)"] \\
M \arrow[ru, "p_I"] \arrow[rd, "p_J"'] & \\
 & B_J
\end{tikzcd}$$

comuta, já que M forma um cone em $\mathscr{B}$. Assim,

$$((M, f) \overset{p_I}{\to} (B_I, f_I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

forma um cone em $(A \Rightarrow G)$. Além disso, pela unicidade de f, esse é o único cone tal que

$$(\Pi_A(M, f) \overset{\Pi_A(p_I)}{\to} \Pi_A(B_I, f_I))_{I \in \boldsymbol{I}} = (M \overset{p_I}{\to} B_I)_{I \in \boldsymbol{I}}.$$

Finalmente, seja

$$((B', f') \overset{g_I}{\to} (B_I, f_I))_{I \in \boldsymbol{I}}$$

um cone de D em $(A \Rightarrow G)$. Assim, como M é um limite em $\mathscr{B}$, temos que existe um único morfismo $\varphi : B' \to M$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & B_I \arrow[dd, "\Pi_A\circ D(u)"] \\
B' \arrow[rru, "g_I"] \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[rrd, "g_J"'] & M \arrow[ru, "p_I"] \arrow[rd, "p_J"'] & \\
 & & B_J
\end{tikzcd}$$

comuta. Assim, $\varphi : (B', f') \to (M, f)$ é o único morfismo em $(A \Rightarrow G)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & (B_I, f_I) \arrow[dd, "D(u)"] \\
(B', f') \arrow[urr, "g_I"] \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, "g_J"'] & (M, f) \arrow[ur, "p_I"] \arrow[dr, "p_J"'] & \\
 & & (B_J, f_J)
\end{tikzcd}$$

comuta, mostrando que (M, f) é um limite de D em $(A \Rightarrow G)$. Assim, Π_A cria limites. Pelo Lema 2.5.1, como $\mathcal{B}$ é completa, temos que $(A \Rightarrow G)$ é completa.

Assim, como $(A \Rightarrow G)$ é uma Categoria completa e localmente pequena, que tem um conjunto fracamente inicial, temos, pelo Lema 2.8.2, que $(A \Rightarrow G)$ tem um objeto inicial.

Agora, para cada $A \in \mathcal{A}$, o objeto inicial em $(A \Rightarrow G)$ é um objeto (B, η_A), onde $B \in \mathcal{B}$ e $\eta_A : A \to G(B)$. Além disso, dado $f : A \to A'$, temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & G(B) \arrow[d, dashed, "G(\varphi)"] \\
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(B')
\end{tikzcd}$$

onde $(B', \eta_{A'})$ é o objeto inicial em $(A \Rightarrow G)$. Como $\eta_{A'} \circ f : A \to G(B')$, temos que $(B', \eta_{A'} \circ f) \in (A \Rightarrow G)$, ou seja, existe um único morfismo $\varphi : B \to B'$ tal que $G(\varphi) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ f$, pois (B, η_A) é inicial. Assim, podemos definir um funtor

$$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

definido por

$$F(A) = B$$
$$F(f) = \varphi,$$

onde $f : A \to A'$. Aqui, B é escolhido dentre os objetos de B que definem um objeto inicial em $(A \Rightarrow G)$ e φ é definido como observamos acima (note que, como φ é única, $F(f)$ está bem-definida). Afirmamos que F é um funtor. Com efeito, para id_A temos $F(id_A) = id_{F(A)}$, pois, como $(F(A), \eta_A)$ é inicial, esse é o único morfismo que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "id_A"'] & G \circ F(A) \arrow[d, dashed, "G(id_{F(A)})"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"'] & G \circ F(A)
\end{tikzcd}$$

comutar. Além disso, dados morfismos $f : A \to A'$ e $f' : A' \to A''$, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] \arrow[d, "f'"'] & F(A') \arrow[d, "F(f')"] \\ A'' \arrow[r, "\eta_{A''}"'] & F(A'') \end{tikzcd}$$

comuta, pois cada quadrado comuta. Assim, pela unicidade do morfismo $F(f') \circ F(f)$, temos $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$, isso é, F é um funtor.

Agora, note que por essa definição, podemos reescrever o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & G(B) \arrow[d, dashed, "G(\varphi)"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(B') \end{tikzcd}$$

por

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & G \circ F(A) \arrow[d, dashed, "G\circ F(f)"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G \circ F(A') \end{tikzcd}$$

o que mostra que a família $(\eta_A)_{A \in \mathcal{A}}$ define uma transformação natural $\eta : id_{\mathcal{A}} \to G \circ F$.

Finalmente, pelo Teorema 2.7.1, temos que $F \dashv G$. Logo, G admite um adjunto esquerdo. □

Depois dessa exposição dos básicos de Teoria de Categorias, estamos aptos a usar essas ferramentas para formular uma possível descrição alternativa da Relatividade Especial que faremos no próximo capítulo.

3 Categorias $\mathscr{Lor}$ e $\mathscr{Gal}$

3.1 Introdução

Como dissemos na introdução desse trabalho, tentaremos aplicar o formalismo categórico em um contexto físico, a saber, para os grupos de Lorentz e Galileu. Apesar de inicialmente pensarmos que esse formalismo seria simplesmente o mesmo de um grupo, isso é, de uma Categoria com um único objeto e cujos morfismos são homomorfismos, seguindo os artigos (2, 3, 26) acreditamos que o modelo mais apropriado é aquele de um grupóide conectado. Assim, a estrutura de grupo é preservada a menos de uma equivalência de Categorias, porém ganhamos alguns resultados que, apesar de esperados, não são naturalmente encontrados a partir do modelo de grupos. Além disso, ganhamos com isso uma interpretação que está condizente com o que fizemos nos artigos já mencionados, onde concluímos que diferentes referenciais definem espaços físicos distintos. Acreditamos que separando dessa forma o conceito de uma transformação de Lorentz se torna mais clara do que as abordagens tradicionais.

Como uma breve introdução ao que fizemos anteriormente, nós tentamos encontrar uma definição para o que chamamos de Espaço Físico, seguindo uma filosofia conhecida como operacional. Não seria possível fornecer nessa seção uma explicação do que a filosofia operacional busca conseguir, porém podemos resumir o seu princípio fundamental como sendo: <u>todos as definições e resultados devem ser descritos em termos de operações</u>, onde uma operação é, normalmente, um processo que possa ser replicado em um laboratório. Apesar de estar relacionado com o Empiricismo, a filosofia operacional permite extrapolar os processos que podem apenas ser reproduzidos em laboratório, permitindo o uso de abstração para gerar novos conceitos. Como um exemplo disso, podemos pensar no conceito de continuidade. Sabemos que não podemos medir, por exemplo, o número π com uma régua (com efeito, réguas podem medir apenas números racionais). Mas poderíamos medir números racionais como $3; 3,1; 3,14; \cdots$, de forma a obter um sequência de números racionais que converge para π. Assim, como cada passo é feito com uma operação, a existência de π é aceita dentro da filosofia operacionalista.

Dessa forma, observamos em torno de nós, que existem objetos nos quais podemos marcar pontos, cuja distância entre eles não muda com o tempo. Por exemplo, se marcarmos duas cruzes em uma pedra, observamos que a distância entre os pontos não varia (idealmente) com o passar do tempo. Chamaremos os corpos com essa propriedade de corpos rígidos. Assim, podemos considerar o conjunto de todos os pontos que podem ser marcados sobre a pedra, obtendo um conjunto de pontos cujas distâncias entre seus elementos não varia com o tempo. Além disso, dados dois corpos rígidos, podemos juntá-los com uma cola muito forte, por um processo que chamamos de **união firme**, de forma que a distância entre os pontos do primeiro corpo não se movem em relação aos pontos do segundo. Assim, obtemos um novo corpo rígido. Podemos abstrair essa construção para considerarmos todos os pontos que não se movem em relação a um dado corpo rígido.

Agora, consideremos o conjunto de corpos rígidos $\mathfrak{C}$ e uma relação dada por $C, D \in \mathfrak{C} \Rightarrow C \sim D \Leftrightarrow C + D$ é um corpo rígido, onde + denota a união firme. Podemos mostrar que essa relação é de equivalência. De fato,

(a) $A + A$ é rígido, pois os pontos de A não se movem em relação aos seus próprios pontos;

(b) se $A + B$ é rígido, os pontos de A não se movem em relação aos de B e, naturalmente, os pontos de B não se movem em relação aos pontos de A. Assim, $B + A$ é rígido;

(c) se $A + B$ e $B + C$ são rígidos, então, os pontos de A não se movem em relação aos pontos de B e os pontos de B não se movem em relação aos de C. Logo, os pontos de A não se movem em relação aos de C e, portanto, $A + C$ é rígido.

Com isso, a união firme define uma relação de equivalência. Agora, consideremos o conjunto de todos os pontos de todos os corpos que podem ser colados a um corpo rígido A. Formalmente, o conjunto desses corpos é a classe de equivalência de A. O conjunto de todos os pontos de todos os corpos da classe de A define um **Espaço Físico**. Naturalmente, nos perguntamos se esse espaço é único. Da forma que definimos, obtemos uma resposta negativa para essa pergunta, pois se um objeto - por exemplo, um carro - se move em relação a outro - como uma árvore - eles não estarão na mesma classe de equivalência. Como podemos observar isso, sabemos que, pela nossa definição, o Espaço Físico não é único. Ainda, cada espaço é definido pela maneira como ele se move em relação aos outros. Essa observação fundamental foi o que nos inspirou a tentar descrever essa construção no formalismo categórico, onde trabalhos com diversos objetos e como eles se relacionam entre si (note que a relação entre eles é fundamental, pois é o que diferencia cada espaço).

A partir de cada espaço físico, podemos encontrar uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ (fazemos a distinção aqui devido a certas discussões sobre a propriedade de continuidade da reta na física). Omitiremos aqui como fazer isso, mas a construção é análoga àquela feita em Geometria Analítica, onde consideramos vetores como pares de pontos em algum espaço físico. A partir disso, usamos a relação de transporte paralelo de vetores (que é de equivalência), para encontrar um espaço vetorial como conhecemos.

Começaremos com uma breve revisão da estrutura dos grupos de Galileu e Lorentz e seguiremos com a nossa construção com Categorias.

3.2 Revisão dos grupos de Galileu e Lorentz

A ideia central na definição das representações dos grupo de Galileu e Lorentz é tentar encontrar transformações entre observadores movendo-se com diferentes velocidades. Para isso, vamos definir alguns termos. Deixaremos rotações e translações inicialmente de fora da nossa descrição, uma vez que tais operações não alteram o que chamaremos de um referencial.

Seguiremos aqui os mesmos passos tomados em (26), além de formalizar nossa discussão introdutória na subseção anterior. Assumimos a existência de corpos rígidos $c_1, c_2, ...$ na natureza, isto é, são aqueles cuja distância entre pares de pontos marcados sobre c não muda com o tempo: $\frac{\partial d(P_1,P_2)}{\partial t} = 0, \forall P_1 \neq P_2 \in c$. É possível unir corpos rígidos de forma que tal união "firme" seja um novo corpo rígido. Com essa suposição idealizada, olhamos para o conjunto $\mathfrak{C}$ de todos os corpos rígidos. Notavelmente, a distância d entre pontos marcados em diferentes corpos rígidos define uma relação de equivalência. Daí,

Definição 3.2.1. *Um referencial é a classe*

$$[c_1] = \{c \in \mathfrak{C} | \forall P_1 \in c_1, \forall P \in c, \frac{\partial d(P_1, P)}{\partial t} = 0\}.$$

Naturalmente, se um corpo rígido desloca-se em relação a outro, eles não estão na mesma classe.

Olhamos agora para o estoque de pontos que marcamos sobre um referencial. Poderíamos até mesmo colocar neste estoque pontos que poderiam ser marcados caso ali se encontrasse um corpo rígido. Assim,

Definição 3.2.2. *Chamamos de espaço o estoque de pontos associado a determinado referencial inercial. Usaremos a notação $\mathcal{E}^3$ para denotá-lo.*

Para definir as representações dos grupos de Galileu e Lorentz olhamos antes para eventos. Eles são acontecimentos que se dão numa região espacial tão pequena que pode ser aproximada por um ponto, e acontece tão rápido que sua duração pode ser aproximada por um instante. O estoque de eventos, por sua vez, é chamado de Espaço-Tempo, denotado por $\mathcal{T} \times \mathcal{E}^3$.

Definição 3.2.3. *Um* ***observador*** *é um sistema de coordenadas em $\mathcal{T} \times \mathcal{E}^3$.*

Observação 3.2.1. Normalmente, a definição de observador é feita utilizando-se curvas no espaço-tempo, como pode ser visto em (27). Evitamos essa definição aqui, pois ela necessitaria de uma descrição mais complexa da estrutura de variedade do Espaço-Tempo. Assim, usamos a definição acima, onde um sistema de coordenadas pode ser interpretado como uma escolha de base para o referencial. Usamos aqui também uma premissa básica aceita pela comunidade: o Espaço-Tempo é uma variedade (diferenciável) (28).

Fixado um sistema de coordenadas $(T, \vec{X})$, podemos construir um espaço vetorial (quadridimensional) a partir de pares ordenados de eventos da seguinte maneira. Sejam $e_0, e_1 \in \mathcal{T} \times \mathcal{E}^3$.

$$(t, \vec{x}) := (T(e_1) - T(e_0), \vec{x}(e_1) - \vec{x}(e_0)). \tag{3.1}$$

Usamos a notação sintética $(t, \vec{x})$ para representar as diferença de coordenadas (temporal e espaciais) de pares de eventos. A soma e a multiplicação por número são definidos de maneira usual. Algumas observação são pertinentes.

(i) É comum encontrar na literatura a nomenclatura 'Espaço-Tempo' para o espaço vetorial construído acima.

(ii) Usaremos ao longo do texto o abuso de notação de que transformações de Galileu e Lorentz conectam referenciais. Não devemos esquecer que tais transformações são realizadas no espaço vetorial construído em (3.1), a partir das coordenadas fixadas em $\mathcal{T} \times \mathcal{E}^3$.

Precisamos ainda de um último conceito, o de um referencial inercial. Daremos aqui uma noção um tanto quanto heurística e sistematicamente operacional. Consideremos partículas suficientemente afastadas de outros corpos, de modo que elas não interajam com nada ao seu redor. Esperamos dessas partículas, que chamaremos de *livres*, que sua trajetória em um referencial seja a mais simples possível - um ponto ou uma reta. Na física existe um certo interesse especial nesse caso, pois sabemos que as leis da mecânica clássica são invariantes com respeito a trocas desses referenciais. Com isso,

Definição 3.2.4. *Um referencial é dito inercial quando a trajetória de qualquer partícula livre é um ponto ou uma reta.*

Estamos interessados, sobretudo, em referenciais que se movem em relação a outros. Faremos sempre comparações entre dois referenciais e, portanto, deveremos assumir algumas premissas como ponto de partida.

Nas premissas a seguir, consideremos A, B, C referenciais inerciais.

Premissa 3.2.1. *Existem referenciais inerciais.*

Premissa 3.2.2. *Dados dois referenciais inerciais A, B quaisquer, existe uma única velocidade $\vec{v}$ tal que B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A.*

Premissa 3.2.3. *Se B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A, então podemos dizer que A se move com velocidade $-\vec{v}$ em relação a B.*

Premissa 3.2.4. *Se B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A e C se move com velocidade $\vec{u}$ em relação a B, então C se move com velocidade $\vec{v} + \vec{u}$ em relação a A.*

Em relação à premissa 3.2.3, devemos enfatizar que existe uma diferença entre um referencial, digamos C, que se move com velocidade $-\vec{v}$ em relação a A e dizer que A se move com velocidade $-\vec{v}$ em relação a B. Nesse caso, temos que C se move com velocidade $-\vec{v}-\vec{v}$ em relação a B.

Definição 3.2.5. *Seja A um referencial inercial e B um referencial se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação a A.*

*(i) Uma **transformação de Galileu** é uma aplicação $\Gamma_{\vec{v}} : A \to B$, definida por*

$$\Gamma_{\vec{v}}(t,\vec{x}) = (t, \vec{x} - \vec{v}t).$$

*(ii) Uma **transformação de Lorentz** é uma aplicação $\Lambda_{\vec{v}} : A \to B$, definida por*

$$\Lambda_{\vec{v}}(t,\vec{x}) = \gamma_{\vec{v}}\left(t - \frac{\langle \vec{v}, \vec{x}\rangle}{c^2}, \vec{x} - \vec{v}t\right).$$

Na expressão acima, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa o produto escalar em $\mathbb{R}^3$.

Observação 3.2.2. $\gamma_{\vec{v}}$ é uma constante dada por

$$\gamma_{\vec{v}} = \left(\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}\right)^{-1}$$

conhecida como **fator de Lorentz**. Na expressão acima c é a velocidade da luz.

Quando tratamos de Transformações de Lorentz, estamos lidando com um contexto relativístico. Não entraremos em detalhes sobre as origens e as propriedades de sistemas físicos nesse contexto, com exceção do fato de que velocidades tais que $|\vec{v}| > c$ não são permitidas. Assim, devemos separar a Premissa 3.2.2 em dois casos.

Premissa 3.2.2 (Clássico)**.** *Dados dois referenciais inerciais A, B quaisquer, existem uma única velocidade $\vec{v}$, onde $|\vec{v}| \in [0, +\infty)$, tal que B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A.*

Premissa 3.2.2 (Relativístico)**.** *Dados dois referenciais inerciais A, B quaisquer, existem uma única velocidade $\vec{v}$, onde $|\vec{v}| \in [0, c)$, tal que B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A.*

Devemos, ainda, fazer uma observação. Como em contextos relativísticos as velocidades permitidas são limitadas por c, não podemos usar a mesma operação de soma de velocidades que usamos no contexto clássico. Normalmente, a calculamos em termos da Álgebra de Lie associada, que omitiremos aqui por estarmos interessados apenas na estrutura do grupo. Para enfatizar essa diferença, alguns autores usam símbolos diferentes para as somas de velocidade clássica e relativística. Usaremos o mesmo símbolo, pois não entraremos nos detalhes dessa operação. Ressaltaremos porém que a Premissa 3.2.4 representa, na verdade dois axiomas distintos, um para o caso clássico e o outro para o caso relativístico.

Proposição 3.2.1. *Com essas definições, as transformações de Galileu e Lorentz têm as seguintes propriedades:*

(i) *linearidade;*

(ii) $\Gamma_{\vec{0}} = id_A$*;*

(iii) $\Gamma_{\vec{u}} \circ \Gamma_{\vec{v}} = \Gamma_{\vec{u}+\vec{v}}$*;*

(iv) $\Gamma_{-\vec{v}} = (\Gamma_{\vec{v}})^{-1}$*.*

Demonstração:

(i) sejam A, B referenciais inerciais, onde B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A, $\Gamma_{\vec{v}} : A \to B$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $(t_1, \vec{x}_1), (t_2, \vec{x}_2) \in A$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\vec{v}}(\alpha(t_1, \vec{x}_1) + (t_2, \vec{x}_2)) &= \Gamma_{\vec{v}}(\alpha t_1 + t_2, \alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\
&= (\alpha t_1 + t_2, \alpha\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{v}(t_1 + t_2)) \\
&= \alpha(t_1, \vec{x}_1 - \vec{v}t_1) + (t_2, \vec{x}_2 - \vec{v}t_2) \\
&= \alpha\Gamma_{\vec{v}}(t_1, \vec{x}_1) + \Gamma_{\vec{v}}(t_2, \vec{x}_2);
\end{aligned}$$

(ii) seja A um referencial inercial. Para todo $(t, \vec{x}) \in A$, temos

$$\Gamma_{\vec{0}}(t, \vec{x}) = (t, \vec{x} - \vec{0}t) = (t, \vec{x});$$

(iii) sejam A, B, C referenciais inerciais com B se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação a A e C com velocidade $\vec{u}$ em relação a B. Assim, existem transformações de Galileu, $\Gamma_{\vec{v}} : A \to B$ e $\Gamma_{\vec{u}} : B \to C$. Seja $(t, \vec{x})$.

$$\Gamma_{\vec{u}} \circ \Gamma_{\vec{v}}(t, \vec{x}) = \Gamma_{\vec{u}}(t, \vec{x} - \vec{v}t) = (t, \vec{x} - \vec{v}t - \vec{u}t) = (t, \vec{x} - (\vec{v} + \vec{u})t) = \Gamma_{\vec{u}+\vec{v}}(t, \vec{x}),$$

onde $\Gamma_{\vec{v}+\vec{u}} : A \to C$;

(iv) sejam A, B referenciais inerciais, onde B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A e $(t, \vec{x}) \in A$. Assim, temos que

$$\Gamma_{\vec{v}} \circ \Gamma_{-\vec{v}}(t, \vec{x}) = \Gamma_{\vec{v}}(t, \vec{x} + \vec{v}t) = (t, \vec{x} + \vec{v}t - \vec{v}t) = (t, \vec{x})$$

e

$$\Gamma_{-\vec{v}} \circ \Gamma_{\vec{v}}(t, \vec{x}) = \Gamma_{-\vec{v}}(t, \vec{x} - \vec{v}t) = (t, \vec{x} - \vec{v}t + \vec{v}t) = (t, \vec{x}).$$

A demonstração para transformações de Lorentz é análoga. $\square$

Note que, a propriedade (ii) implica que podemos interpretar A se movendo com velocidade $\vec{0}$ em relação a A, o que está consistente com a premissa 3.2.2. Também, temos que as propriedades (iii) e (iv) estão de acordo com as Premissas 3.2.3 e 3.2.4.

Como consequência do item (iv) da Proposição 3.2.1, temos o seguinte

Corolário 3.2.1. *Transformações de Galileu são isomorfismos lineares.*

É importante notar ainda que a Premissa 3.2.2 implica que entre dois referenciais inerciais quaisquer existe uma única transformação de Lorentz ou Galileu entre eles.

Temos, ainda, um último resultado.

Proposição 3.2.2. *Dados dois referenciais inerciais A e B, existe uma única transformação de Galileu ou de Lorentz entre A e B.*

Demonstração: Pela Premissa 3.2.2, sabemos que existe uma única velocidade $\vec{v}$ (com $|\vec{v}| \in [0, c)$ se necessário), tal que B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A. Dessa forma, existem as transformações

$$\Gamma_{\vec{v}} : A \to B \ \text{ e } \ \Lambda_{\vec{v}} : A \to B.$$

Como as velocidades são únicas, ganhamos, também, a unicidade das transformações. $\square$

3.3 Categorias $\mathcal{Lor}$ e $\mathcal{Gal}$

Vamos agora colocar o que foi feito acima no formalismo categórico. Assim, ganhamos as seguintes

Definição 3.3.1. *Definimos a Categoria $\mathcal{Gal}$ como uma Categoria cujos objetos são referenciais inerciais e os morfismos são transformações de Galileu.*

Definição 3.3.2. *Definimos a Categoria $\mathcal{Lor}$ como uma Categoria cujos objetos são referenciais inerciais e os morfismos são transformações de Lorentz.*

Note que, $\mathcal{Gal}$ e $\mathcal{Lor}$ são de fato Categorias pela Proposição 3.2.1, isso é, sabemos que para cada referencial inercial, existe uma identidade (a saber, $\Gamma_{\vec{0}}$ e $\Lambda_{\vec{0}}$) e, para referenciais, A, B, C e morfismos $\Gamma_{\vec{v}}, \Lambda_{\vec{v}} : A \to B$ e $\Gamma_{\vec{u}}, \Lambda_{\vec{u}} : B \to C$, existem as composições

$$\Gamma_{\vec{u}} \circ \Gamma_{\vec{v}} = \Gamma_{\vec{u}+\vec{v}} : A \to C$$

e

$$\Lambda_{\vec{u}} \circ \Lambda_{\vec{v}} = \Lambda_{\vec{u}+\vec{v}} : A \to C.$$

Note, também, que pela Proposição 3.2.2, cada referencial inercial é um objeto zero nas Categorias $\boldsymbol{\mathcal{G}al}$ e $\boldsymbol{\mathcal{L}or}$, isso é, são objetos iniciais e terminais. Podemos, ainda, mostrar um resultado mais forte.

Proposição 3.3.1. *As categorias $\boldsymbol{\mathcal{G}al}$ e $\boldsymbol{\mathcal{L}or}$ são completas.*

Demonstração: Seja uma categoria pequena $\boldsymbol{I}$ e um diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{\mathcal{G}al}$. Dado qualquer objeto $A \in \boldsymbol{\mathcal{G}al}$, temos, para todos $I, J \in \boldsymbol{I}$, que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & D(I) \arrow[dd, "D(f)"] \\
A \arrow[ur, "\Gamma_{\vec{v}}"] \arrow[dr, "\Gamma_{\vec{u}}"'] & \\
 & D(J)
\end{tikzcd}$$

comuta, onde $D(I)$ se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A e $D(J)$ com velocidade $\vec{u}$ em relação a A, pela unicidade das transformações de Galileu. Assim, todo referencial define um cone na Categoria. Além disso, tomando qualquer outro cone, $(B \xrightarrow{\Gamma_{\vec{v}_I}} D(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$, na Categoria, sabemos, pela Proposição 3.2.2, que existe uma única transformação de Galileu $\Gamma_{\vec{w}} : B \to A$. Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & D(I) \arrow[dd, "D(f)"] \\
B \arrow[urr, "\Gamma_{\vec{v}_I}"] \arrow[r, dashed, "\Gamma_{\vec{w}}"] \arrow[drr, "\Gamma_{\vec{u}_J}"'] & A \arrow[ur, "\Gamma_{v}"] \arrow[dr, "\Gamma_{\vec{u}}"'] & \\
 & & D(J)
\end{tikzcd}$$

comuta, para todo $I, J \in \boldsymbol{I}$ e $f : I \to J$, novamente, pela Proposição 3.2.2. Portanto A é limite do diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{\mathcal{G}al}$. Assim, como $\boldsymbol{I}$ é arbitrário, temos que $\boldsymbol{\mathcal{G}al}$ é completa. Analogamente, podemos mostrar que $\boldsymbol{\mathcal{L}or}$ é completa. □

Corolário 3.3.1. *Qualquer referencial inercial é um limite pequeno nas Categorias $\boldsymbol{\mathcal{G}al}$ e $\boldsymbol{\mathcal{L}or}$.*

Demonstração: Seguindo a demonstração da Proposição acima, temos que qualquer objeto nas Categorias $\boldsymbol{\mathcal{G}al}$ e $\boldsymbol{\mathcal{L}or}$ são limites do diagrama, pois os papéis dos vértices de qualquer cone podem ser trocados. □

O fato mais interessante nesse corolário é que ele parece implicar em algo que já esperávamos, isso é, que não existem referenciais privilegiados. Caso, para um dado diagrama, existissem objetos que são limites e objetos que não são limites, estaríamos dizendo que existe alguma diferença na forma como certos referenciais veem outros.

Lembre-se de, como dissemos anteriormente, para falar de referenciais inerciais devemos sempre comparar referenciais, ou seja, se temos os referenciais inerciais A, B e C, não deve existir nenhuma diferença se decidimos descrever como B e C se movem em relação a A, ou se decidimos descrever como A e C se movem em relação a B. Assim, o corolário acima parece estar de acordo com o **Princípio da Relatividade**, que afirma que as leis da física devem ser as mesmas em diferentes referenciais inerciais.

Outro ponto importante que devemos considerar é que grupos não são Categorias completas. Com efeito, grupos em geral, grupos não têm objetos iniciais ou terminais (com exceção do grupo trivial). Isso se deve ao fato de termos mais de um morfismo $G \to G$, onde G é o único objeto de um grupo visto como uma Categoria. Porém, com a nossa abordagem, ganhamos uma Categoria completa.

Note que como os grupos de Lorentz e Galileu são de fato grupos no sentido algébrico, poderíamos ter definido as categorias $\mathcal{Lor}$ e $\mathcal{Gal}$ como categorias com um único objeto, como fizemos na seção anterior. A razão pela qual não seguimos esse caminho aqui é que acreditamos que os referenciais inerciais representam espaços distintos. Com efeito, o conjunto de eventos acessíveis em cada referencial é de fato diferente para cada um deles. Assim, seguindo nossos trabalhos anteriores onde exploramos esse fato com mais detalhes, utilizamos a definição feita aqui.

3.4 Funtor limite

Devido às grandes similaridades entre as Categorias $\mathcal{Gal}$ e $\mathcal{Lor}$, é natural tentarmos definir um funtor entre eles. Para fazer isso, tomamos inspiração de um fenômeno conhecido na física, a saber, que no limite[1] $c \to +\infty$, fenômenos descritos relativisticamente recaem no caso clássico.

Mais precisamente, note que, para uma velocidade $\vec{v}$ com $|\vec{v}| < c$, temos que o fator de Lorentz é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}.$$

Assim, aplicando o limite $c \to +\infty$, temos que $\gamma_{\vec{v}} \to 1$.

Agora, como transformações de Lorentz são lineares, em particular, elas são contínuas, ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{c\to+\infty} \Lambda_{\vec{v}}(t,\vec{x}) &= \lim_{c\to+\infty} \gamma_{\vec{v}} \left(t - \frac{\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle}{c^2}, \vec{x} - \vec{v}t \right) \\ &= \left(t - \lim_{c\to+\infty} \frac{\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle}{c^2}, \vec{x} - \vec{v}t \right) = (t, \vec{x} - \vec{v}t) = \Gamma_{\vec{v}}(t,\vec{x}). \end{aligned}$$

[1] O limite aqui é o limite no sentido clássico de cálculo. Ele não tem relação com o limite em categorias que vimos anteriormente.

A partir disso, propomos a seguinte

Definição 3.4.1. *O* ***funtor limite*** *é um funtor* $L : \boldsymbol{\mathcal{Lor}} \to \boldsymbol{\mathcal{Gal}}$ *definido por:*

(i) para todo objeto $A \in \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$*, temos* $L(A) = A$*;*

(ii) para todos objetos $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ *e morfismos* $\Lambda_{\vec{v}} : A \to B$*,* $L(\Lambda_{\vec{v}}) = \Gamma_{\vec{v}}$*.*

Para mostrar que L realmente define um funtor, devemos mostrar que composições e identidades são mantidas por L. Assim, consideremos $A, B, C \in \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$, tal que B se move com velocidade $\vec{v}$ em relação a A e C com velocidade $\vec{u}$ em relação a B e $\Lambda_{\vec{v}} : A \to B$, $\Lambda_{\vec{u}} : B \to C$. Assim, pela Proposição 3.2.1, temos

$$L(\Lambda_{\vec{u}} \circ \Lambda_{\vec{v}}) = L(\Lambda_{\vec{u}+\vec{v}}) = \Gamma_{\vec{u}+\vec{v}} = \Gamma_{\vec{u}} \circ \Gamma_{\vec{v}} = L(\Lambda_{\vec{u}}) \circ L(\Lambda_{\vec{v}}).$$

Seja, agora, $A \in \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$. Dessa forma,

$$L(id_A) = L(\Lambda_{\vec{0}}) = \Gamma_{\vec{0}} = id_A = id_{L(A)}.$$

Logo, L, de fato, define um funtor.

Devido à forma como definimos as Categorias $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{Gal}}$, temos a

Proposição 3.4.1. *L é fiel e pleno.*

Demonstração: Sejam referenciais inerciais A, B com B se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação a A. Assim, como $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}(A, B) = \{\Lambda_{\vec{v}}\}$ e $\boldsymbol{\mathcal{Gal}}(L(A), L(B)) = \{\Gamma_{\vec{v}}\}$, a função $\boldsymbol{\mathcal{Lor}} \to \boldsymbol{\mathcal{Gal}}$ é injetiva e sobrejetiva. Logo, L é fiel e pleno. □

Além disso, ainda podemos mostrar a

Proposição 3.4.2. *L preserva limites.*

Demonstração: Dado uma Categoria pequena $\boldsymbol{I}$ e um diagrama $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$. Já vimos que qualquer objeto em $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ é limite desse diagrama. Além disso, como qualquer objeto em $\boldsymbol{\mathcal{Gal}}$ é limite do diagrama $L \circ D$, em particular a imagem por L de um limite de $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ é um limite em $\boldsymbol{\mathcal{Gal}}$. Logo, L preserva limites. □

Agora, podemos usar o Teorema do Funtor adjunto para encontrar um funtor $\boldsymbol{\mathcal{Gal}} \to \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$.

Proposição 3.4.3. *L tem um adjunto esquerdo.*

Demonstração: Note que, dados $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$, com B se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação a A, temos $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}(A, B) = \{\Lambda_{\vec{v}}\}$ que é um conjunto. Portanto, $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ é uma Categoria pequena e completa.

Agora, seja $A \in \boldsymbol{\mathcal{Gal}}$ e consideremos a Categoria $(A \Rightarrow L)$. Sejam $B, B' \in \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ tal que $L(B)$ se mova com velocidade $\vec{v}$ em relação a A e $L(B')$ com velocidade $\vec{u}$ em relação a A. Assim, $(B, \Gamma_{\vec{v}})$ e $(B', \Gamma_{\vec{u}})$ são objetos de $(A \Rightarrow L)$. Além disso, pela Proposição 3.2.2, temos que existe uma única transformação de Lorentz $\Lambda_{\vec{w}} : B \to B'$ e, pela unicidade dos morfismos em $\boldsymbol{\mathcal{Gal}}$, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Gamma_{\vec{v}}"] \arrow[dr, "\Gamma_{\vec{u}}"'] & B \arrow[d, "L(\Lambda_{\vec{w}})"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $\Lambda_{\vec{w}} : (B, \Gamma_{\vec{v}}) \to (B', \Gamma_{\vec{u}})$ é um morfismo em $(A \Rightarrow L)$ e é único, novamente pela Proposição 3.2.2. Assim, $(B, \Gamma_{\vec{v}})$ é inicial em $(A \Rightarrow L)$ e, em particular, existe um conjunto fracamente inicial em $(A \Rightarrow L)$ para todo $A \in \boldsymbol{\mathcal{Gal}}$. Logo, pelo Teorema Geral do Funtor Adjunto, temos que L admite um adjunto esquerdo, $M : \boldsymbol{\mathcal{Gal}} \to \boldsymbol{\mathcal{Lor}}$. $\square$

Assim, é possível definir uma aplicação que nos leve do regime clássico para o regime relativístico, o que não é surpreendente, devido à estrutura extremamente análoga das Categorias $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{Gal}}$.

3.5 Discussão

3.5.1 Formulações alternativas

As Categorias definidas acima são apenas uma parte dos grupos de Lorentz e Galileu. De fato, esses grupos são compostos ainda por rotações e translações em $\mathscr{E}^3$. Na tentativa de adicionar esses morfismos, tentamos definir uma Categoria cujos objetos seriam duplas $(A, \mathcal{O})$, onde A é um referencial inercial e $\mathcal{O}$ um ponto em $\mathscr{E}^3$ chamado **origem**. Dessa forma, podemos adicionar rotações e translações nas Categorias $\boldsymbol{\mathcal{Lor}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{Gal}}$ de forma que, rotações sejam automorfismos e translações atuam na segunda entrada do par, mudando quem chamamos de origem. Dessa forma, as Categorias seriam representadas pelos diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(A,\mathcal{O}'_A) \arrow[loop above, "R"] \arrow[dr, shift left, "T"] \arrow[ddr, bend right, shift right, "\Lambda'\circ T"'] \arrow[ddrr, bend left, shift left, "\Lambda\circ T"] & & \\
& (A,\mathcal{O}_A) \arrow[loop above, "R"] \arrow[ul, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, shift left, "\Lambda"] & \\
& (B,\mathcal{O}_B) \arrow[loop below, "R"] \arrow[u, shift left, "\Lambda'"] \arrow[uul, bend left, shift right] \arrow[r, shift left] & (C,\mathcal{O}_C) \arrow[loop below, "R"] \arrow[l, shift left, "\Lambda''"] \arrow[ul, shift left] \arrow[uull, bend right, shift left]
\end{tikzcd}
$$

onde T são translações, R rotações e Λ transformações de Lorentz (ou Galileu).

Definidas dessa forma, perdemos a unicidade dos morfismos entre objetos distintos, pois $\Lambda \circ id_A \neq \Lambda \circ R$, para alguma rotação R e alguma transformação de Lorentz (ou Galileu) Λ. Porém, a Categoria que definimos anteriormente pode ser vista como uma subCategoria dessa nos dando um resultado parcial.

Outra maneira de adicionarmos esses morfismos seria definindo objetos como trincas $(A, \mathcal{O}, \mathcal{B})$, onde A é um referencial inercial, $\mathcal{O} \in \mathcal{E}^3$ é uma origem e $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{T} \times \mathcal{E}^3$. Dessa forma, conseguimos manter a unicidade dos morfismos entre os objetos.

A razão pela qual não usamos essa última definição é por que perdemos a interpretação de que objetos são entidades (ou pessoas). Queremos dizer que, a cada entidade no Universo, sabemos que ela está em algum ponto do Universo (origem) e a ela está associado um referencial inercial (novamente, estamos ignorando casos não-inerciais). Porém, a escolha de base é arbitrária: a entidade pode escolher qualquer base de $\mathcal{E}^3$ para descrever o espaço associado a ela, isso é, essa é uma escolha arbitrária.

Existe ainda, uma interpretação interessante para definir a Categoria usando pares. Com essa interpretação, de que entidades são pares $(A, \mathcal{O})$ de um referencial inercial e uma origem, sabemos que os espaços definidos por elas são intrinsecamente distintos, isso é, se uma entidade se move em relação à outra, temos que os eventos do espaço tempo experienciados por cada uma delas são diferentes e o mesmo ocorre para entidades em origens distintas do Universo. Assim, os objetos são diferentes por uma razão mais fundamental do que uma simples escolha arbitrária de uma base.

Uma razão importante de termos uma justificativa mais profunda para dizermos que os objetos são diferentes é o fato de que a nossa estrutura é ainda equivalente àquela de um grupo. Como observamos anteriormente, grupos vistos como Categorias, não possuem (em geral), objetos iniciais, ou seja, para todo grupo, poderíamos definir objetos quaisquer na Categoria, "separando" os morfismos do grupo, e ganhando a estrutura que definimos aqui. Porém, para um grupo qualquer, essa definição seria completamente arbitrária, enquanto no caso dos grupos de Lorentz e Galileu, parece existir uma forma fundamental de definirmos objetos distintos na Categoria. Interessantemente, isso parece, ainda, estar consistente com o Princípio da Relatividade.

3.5.2 Possibilidades futuras

Sabemos que, sendo grupos de Lie, os grupos de Lorentz e Galileu têm Álgebras de Lie associadas. Acreditamos que seja possível analisar essa conexão usando o formalismo categórico. Sabemos ainda, que a exponencial é uma transformação natural (exemplo 3) após 2.6.1), e talvez seja possível usar esse fato para encontrar alguma diferença fundamental entre rotações e translações/ boosts (lembre-se de que transformações naturais são, bem, arbitrárias, ou seja, imaginamos que exista alguma forma de diferenciar entre a escolha de uma base em $\mathscr{E}^3$ e boosts e translações que parecem estar intrinsecamente relacionados com os próprios espaços físicos).

Acreditamos, além disso, que podemos adicionar na Categoria casos não inerciais, e, além disso, que podemos usar nossa Categoria no contexto da Relatividade Geral. Com efeito, no limite de curvatura tendendo a zero, imaginamos que analisando a geometria da variedade quadridimensional do Espaço-Tempo possa recair no que fizemos aqui de algum forma.

4 CONCLUSÃO

A Teoria de Categorias nos fornece uma base poderosa para estudar relações entre diversas estruturas na matemática. O seu estudo permite a análise de padrões que surgem entre estruturas algébricas e geométricas, dando uma ênfase maior entre as próprias relações entre os objetos do que nos objetos em si. Dessa forma, é natural pensarmos que existe uma gama de aplicações na física, onde o estudo da interação entre objetos é um tema frequente. Com efeito, podemos encontrar um série de artigos que abordam o tema de Categorias em física como (11, 29, 30, 31). Tendo isso em mente, é natural imaginar que possamos aplicar as técnicas categóricas para a relatividade, cuja própria natureza é o estudo de relações entre diferentes referenciais.

Assim, esse trabalho foi separado em duas partes. Na primeira, estudamos os básicos de Teoria de Categorias, enunciando os principais resultados e fornecendo uma grande quantidade de exemplos. Conseguimos, dessa forma, ilustrar os maiores resultados e definições justificando com estruturas encontradas frequentemente na matemática. Uma das principais características que podemos destacar é a presença de propriedades universais em Categorias, que permitem um alto grau de generalização de conceitos por toda Categoria.

A segunda parte foi dedicada a nossa formulação por meio de Categorias dos grupos de Galileu e Lorentz. Decidimos fazer isso, pois não encontramos na literatura essa conexão, que nos parece tão natural. Com a nossa abordagem, definimos as categorias que chamamos de $\mathcal{Lor}$ e $\mathcal{Gal}$, conseguimos descrever o aspecto funtorial da relação entre os regimes clássico e relativístico e concluímos que existe um funtor de $\mathcal{Gal}$ para $\mathcal{Lor}$. A existência desse funtor não é intuitiva, apesar de ser natural, devido à grande similaridade entre as estruturas dessas categorias. Como um outro resultado, mostramos que conseguimos uma interpretação para o Princípio da Relatividade por meio de limites nas categorias. Isso nos indica que não existem referenciais privilegiados, o que está consistente com a Teoria da Relatividade.

Finalmente, esperamos que esse trabalho possa ser usado como inspiração para novas tentativas de aplicação de Teoria de Categorias na física. Como em (10), acreditamos que esse formalismo é extremamente apropriado para a física. Além disso, gostaríamos que esse trabalho possa ser usado por aqueles interessados em Categorias, como um material introdutório.

REFERÊNCIAS

1 H. Chang, "Operationalism." The Standford Encylopedia of Physlosophy, 2009. Accessed: 10-19-2018.

2 G. F. V. Júnior, R. P. S. Costa, and B. F. Rizzuti, "Grandezas físicas unidimensionais," Rev. Bras. Ensino Física, vol. 40, 2018.

3 L. M. Gaio, D. R. T. de Barros, and B. F. Rizzuti, "Grandezas físicas multidimensionais," Rev. Bras. Ensino Física, vol. 41, 2019.

4 B. F. Rizzuti, L. M. Gaio, and C. Duarte, "Operational Approach to the Topological Structure of the Physical Space," Foundations of Science, vol. 25, pp. 711–735, Sept. 2020.

5 T. Leinster, "Basic category theory," 2016.

6 J. Adamek, H. Herrlich, and G. Strecker, Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats. Dover books on mathematics, Dover Publications, 2009.

7 E. Riehl, Category Theory in Context. Aurora: Dover Modern Math Originals, Dover Publications, 2017.

8 M. Ribeiro, Teoria das Categorias para Matemáticos. Uma breve introdução. Sociedade Brasileira de Matemática, SBM, 05 2020.

9 B. Coecke and E. O. Paquette, "Categories for the practising physicist," 2009.

10 B. Coecke, "Introducing categories to the practicing physicist," 2008.

11 B. Coecke, T. Fritz, and R. W. Spekkens, "A mathematical theory of resources," Information and Computation, vol. 250, pp. 59 – 86, 2016. Quantum Physics and Logic.

12 S. Eilenberg and S. MacLane, "Natural isomorphisms in group theory," Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 28, no. 12, pp. 537–543, 1942.

13 S. Eilenberg and S. MacLane, "General theory of natural equivalences," Transactions of the American Mathematical Society, vol. 58, no. 2, pp. 231–294, 1945.

14 E. Landry and J.-P. Marquis, "Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical†," Philosophia Mathematica, vol. 13, pp. 1–43, 02 2005.

15 F. W. LAWVERE, "Comments on the development of topos theory," Reprints in Theory and Applications of Categories, 2000.

16 T. Leinster, "Rethinking set theory," The American Mathematical Monthly, vol. 121, no. 5, pp. 403–415, 2014.

17 M. S. Leifer, A. Aguirre, B. Foster, and Z. Merali, Mathematics Is Physics, pp. 21–40. Cham: Springer International Publishing, 2016.

18 E. P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959," Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 13, pp. 1–14, Feb. 1960.

19 K. Ciesielski, Set Theory for the Working Mathematician. London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1997.

20 W. Hodges, "A shorter model theory," Studia Logica, vol. 64, no. 1, pp. 133–134, 1997.

21 I. Devetak, A. W. Harrow, and A. J. Winter, "A resource framework for quantum shannon theory," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 54, p. 4587–4618, Oct 2008.

22 G. Gour, M. P. Müller, V. Narasimhachar, R. W. Spekkens, and N. Yunger Halpern, "The resource theory of informational nonequilibrium in thermodynamics," Physics Reports, vol. 583, p. 1–58, Jul 2015.

23 G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, "Informational derivation of quantum theory," Physical Review A, vol. 84, Jul 2011.

24 S. LANE, "Structure in Mathematics," Philosophia Mathematica, vol. 4, pp. 174–183, 05 1996.

25 N. Bourbaki, Théorie des ensembles. Actualités scientifiques et industrielles, Springer Berlin Heidelberg, 2007.

26 B. F. Rizzuti, L. M. Gaio, and C. Duarte, "Operational approach to the topological structure of the physical space," Foundations of Science, vol. 25, 2020.

27 R. Sachs and H. Wu, General Relativity for Mathematicians. Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2012.

28 W. Kopczynski, A. Trautman, J. Bałdyga, and A. Pol, Spacetime and Gravitation. A Wiley-Interscience publication, Wiley, 1992.

29 Z. OZIEWICZ, "Relativity groupoid instead of relativity group," International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, vol. 04, p. 739–749, Aug 2007.

30 K. Sanders, "What can (mathematical) categories tell us about space-time?," 2015.

31 Z. Liu, "Regard renormalization in qed as functor between categories," 2011.

ANEXO A – Tradução de termos

Termo original	Nossa tradução
class	classe
conglomerate	conglomerado
proper (class)	(classe) própria
small (class, category)	(classe, Categoria) pequena
large (class, category)	(classe, Categoria) grande
locally small (category)	(Categoria) localmente pequena
maps	mapas
arrows	setas
construct	construto
dual (category, functor)	(Categoria, funtor) dual
Duallity Principle	Princípio da Dualidade
functor	funtor
faithful (functor)	(funtor) fiel
full (functor)	(funtor) pleno
essentially surjective (on objects)	essencialmente sobrejetivo (em objetos)
stuff	coisa
forgetful (functor)	(funtor) esquecimento
free (functor)	(funtor) livre
concrete (category)	(Categoria) concreta
comma category	Categoria vírgula
[co]slice category	Categoria [co]fatia
presheaf	pré-feixe
meet	encontro
join	junção
[co]fork	[co]garfo
monic (morphism)	(morfismo) mônico
epic (morphism)	(morfismo) mônico
zero object	objeto zero
weakly initial (set, object)	(conjunto, objeto) fracamente inicial
weak (limit)	(limite) fraco
has [all] (limits)	tem [todos] (os limites)
triangle identities	identidades dos triângulos