

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

# O Método de Melnikov e Aplicações

Gladston Duarte Ferreira

JUIZ DE FORA  
SETEMBRO, 2013

# O Método de Melnikov e Aplicações

GLADSTON DUARTE FERREIRA

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Bacharelado em Matemática

Orientador: Valéria Mattos da Rosa

JUIZ DE FORA

SETEMBRO, 2013

# O MÉTODO DE MELNIKOV E APLICAÇÕES

Gladston Duarte Ferreira

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM MATEMÁTICA.

Aprovada por:

---

Valéria Mattos da Rosa  
Doutora em Matemática Aplicada

---

Lucy Tiemi Takahashi  
Doutora em Matemática Aplicada

---

Eduard Toon  
Doutor em Matemática

JUIZ DE FORA  
10 DE SETEMBRO, 2013

## Resumo

Neste trabalho é estudado um método analítico para a detecção de caos em sistemas dinâmicos: O Método de Melnikov. Sua ideia geométrica é definir uma função que mede a separação entre as variedades estável e instável de um sistema com uma órbita homoclínica, quando sujeito a uma pequena perturbação; caso esta função possua um zero simples é o indicativo do caos.

Além do método, este trabalho apresenta também duas aplicações deste: o problema de determinar a órbita de um corpo sujeito à atração gravitacional de um centro de massa com potencial do tipo monopolo + quadrupolo, ou seja, com distribuição de massa não esférica e o Problema de Gýlden, que visa modelar, por exemplo, a órbita de um corpo sujeito à atração gravitacional ao redor de um centro atrativo com massa variável.

**Palavras-chave:** Caos, Perturbações, Método de Melnikov, Sistemas Dinâmicos.

## Agradecimentos

À Deus, sobre todas as coisas.

À minha família pelo incondicional apoio.

A todos os meus parentes, próximos ou não, por todos os momentos vividos.

A Valéria pela orientação, não somente da iniciação científica, mas também orientação para a vida, sempre alegre, me ensinou valores que levarei comigo onde quer que eu vá... Muito obrigado!!!

Aos meus professores por toda a paciência e dedicação, por todos os ensinamentos e por me ensinarem a enxergar a beleza da matemática. Em especial agradeço à Julieta por toda a sua atenção e orientações tanto como professora, quanto como coordenadora, e também por ser uma das responsáveis por me trazer para a matemática; à Lucy pela amizade, pelos conselhos e pelo esforço também como professora e coordenadora; à Cristiane pela motivação inicial, por nunca deixar de acreditar em mim e pela paciência nas conversas quando eu estava mudando de curso; à Alessandra (Tia Alê) também pela motivação inicial, pelas conversas de corredor ou em sala e por me ensinar que se temos um sonho, basta correr atrás; ao André pela exigência enquanto professor, responsável por grande parte da minha formação; e ao Orestes pelas aulas e pelas orientações no momento certo da minha graduação.

A todos os meus amigos, que não tenho a coragem de enumerá-los aqui, por todo o suporte nas horas difíceis e por todas as alegrias divididas.

Aos funcionários da UFJF por tornarem possível este sonho.

À banca por aceitar ler este trabalho.

À FAPEMIG e à UFJF pela oportunidade de fonte de renda.

*“O amor é paciente, o amor é prestativo;  
não é invejoso, não se ostenta, não se  
incha de orgulho.*

*Nada faz de inconveniente, não procura  
seu próprio interesse, não se irrita, não  
guarda rancor.*

*Não se alegra com a injustiça, mas se  
regozija com a verdade.*

*Tudo desculpa, tudo crê, tudo espera, tudo  
suporta.*

*O amor jamais passará. As profecias de-  
saparecerão, as línguas cessarão, a ciência  
também desaparecerá.*

*Pois o nosso conhecimento é limitado; li-  
mitada é também a nossa profecia.*

*Mas, quando vier a perfeição, desapare-  
cerá o que é limitado.”.*

*Primeira Carta aos coríntios, capítulo  
13, versículos 4-10.*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>5</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>6</b>
1.1 Apresentação do tema e contextualização . . . . .	6
1.2 Justificativa . . . . .	7
1.3 Objetivos . . . . .	8
1.3.1 Objetivo Geral . . . . .	8
1.3.2 Objetivos Específicos . . . . .	8
1.4 Metodologia . . . . .	8
1.5 Estrutura do Trabalho . . . . .	9
<b>2 Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>10</b>
2.1 Existência e Unicidade de Soluções . . . . .	10
2.2 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares . . . . .	12
2.3 Equações Diferenciais Não-Lineares . . . . .	13
2.4 Teoria das Bifurcações . . . . .	18
<b>3 O Método de Melnikov</b>	<b>20</b>
<b>4 Aplicações</b>	<b>24</b>
4.1 O Problema de Gýlden . . . . .	24
4.2 Potencial do Tipo Monopolo + Quadrupolo . . . . .	27
<b>5 Experimentos Numéricos</b>	<b>34</b>
5.1 O Problema de Gýlden . . . . .	36
5.2 Potencial do Tipo Monopolo + Quadrupolo . . . . .	40
<b>6 Considerações Finais</b>	<b>47</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>48</b>

## Lista de Figuras

2.1	Diagrama de fase do sistema $\dot{x} = \mu - x^2$ com $\mu > 0$ . . . . .	11
2.2	Exemplo de uma órbita homoclínica . . . . .	17
2.3	Diagrama de fase do sistema $\dot{x} = \mu - x^2$ com $\mu > 0$ . . . . .	19
2.4	Diagrama de fase do sistema $\dot{x} = \mu - x^2$ com $\mu = 0$ . . . . .	19
2.5	Diagrama de fase do sistema $\dot{x} = \mu - x^2$ com $\mu < 0$ . . . . .	19
3.1	Retrato de fase de um sistema sujeito às hipóteses 3.1 e 3.2. . . . .	21
3.2	Ponto homoclínico transversal . . . . .	22
3.3	Emaranhado homoclínico . . . . .	22
3.4	Curvas de nível da hamiltoniana $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ . . . . .	23
3.5	(a) Caso $k_0 > \mu > 0$ , (b) Caso $\mu = k_0 > 0$ , (c) Caso $\mu > k_0 > 0$ . . . . .	23
4.1	Gráfico de $v_{eff}$ , para $\beta = 0,068$ (curva superior), $0,072$ e $0,078$ (curva inferior), sendo que o ponto de máximo é $r_{un} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 12\beta})$ . . . . .	29
4.2	Ramo positivo de $\tau(r)$ . . . . .	30
4.3	Gráfico de $\frac{d\lambda(r)}{dr}\text{sen}(\Omega\tau(r))dr$ . . . . .	32
4.4	Gráfico de $\frac{d\lambda(r)}{dr}\text{sen}(\Omega\tau(r))dr$ . . . . .	33
4.5	Gráfico de $\frac{d\lambda(r)}{dr}\text{sen}(\Omega\tau(r))dr$ . . . . .	33
5.1	Posições e velocidades iniciais da partícula teste. . . . .	37
5.2	Gráficos da posição em $x$ pelo número da volta; com posição inicial em $x$ (a) $x = 1,00$ , (b) $x = 1,01$ , (c) $x = 1,02$ , (d) $x = 1,03$ . . . . .	38
5.3	Volts de número (a) 1, (b) 50, (c) 200, (d) 330, (e) 580, (f) 790, (g) 1060, (h) 1370. . . . .	39
5.4	Gráficos da posição em $x$ pelo número da volta no sistema não perturbado; com posição inicial em $x$ (a) $x = 1,03$ , (b) $x = 1,04$ , (c) $x = 1,05$ , (d) $x = 1,06$ , (e) $x = 1,07$ e (f) $x = 1,08$ . . . . .	43
5.5	Gráficos da posição em $x$ pelo número da volta no sistema perturbado por $\frac{r^2}{2}\cos(\Omega t)$ ; com posição inicial em $x$ (a) $x = 1,03$ , (b) $x = 1,04$ , (c) $x = 1,05$ , (d) $x = 1,06$ , (e) $x = 1,07$ e (f) $x = 1,08$ . . . . .	44
5.6	Gráficos da posição em $x$ pelo número da volta no sistema perturbado por $-\frac{1}{3r}\cos(\Omega t)$ ; com posição inicial em $x$ (a) $x = 1,03$ , (b) $x = 1,04$ , (c) $x = 1,05$ , (d) $x = 1,06$ , (e) $x = 1,07$ e (f) $x = 1,08$ . . . . .	45



# 1 Introdução

## 1.1 Apresentação do tema e contextualização

O estudo de sistemas descritos por equações diferenciais é uma área importante dentro, não só da matemática pura - devido a sua riqueza teórica - mas também da matemática aplicada, pois vários fenômenos naturais podem ser modelados por equações diferenciais, por exemplo, a posição e a velocidade de um pêndulo ou de uma mola, a população de uma ou mais espécies que coexistem em um determinado ambiente, o valor de uma ação em um mercado de ações, etc., o objetivo comum de todas essas modelagens é o mesmo: fazer previsões.

Um sistema de equações diferenciais é dito caótico quando este apresenta o fenômeno do caos, que pode ser definido como o fenômeno pelo qual sistemas descritos por equações diferenciais apresentam um comportamento não previsível a partir de um certo tempo, quando sujeitos a pequenas perturbações, ou seja, sistemas caóticos são sistemas sobre os quais a previsão de resultados é muito dificultada. A dinâmica caótica é uma área localizada dentro da área de sistemas dinâmicos que visa estudar e compreender o comportamento de sistemas caóticos.

O rápido desenvolvimento tecnológico atual tem permitido o estudo de sistemas cada vez mais complexos, e estes surgem nas mais diversas áreas do conhecimento: Meteorologia, Sistemas Biológicos, Dinâmica de Fluidos, Cosmologia, Mecânica Celeste, Eletromagnetismo, Mercado Financeiro, entre outras. Muitas vezes, recorre-se à utilização de programas de computador para se ter uma ideia do comportamento do sistema, mas a categorização do caos inerente ao sistema deve ser analítica. Sendo assim, não basta apenas estudar métodos numéricos e implementá-los para resolver o sistema e afirmar que ele é caótico ou não, faz-se necessário um estudo analítico aprofundado de sistemas dinâmicos para este fim.

No sentido de classificar um sistema quanto à sua caoticidade, existem poucos métodos analíticos e, em geral, os poucos que existem são específicos para uma dada classe

de problemas. Um desses métodos - O Método de Melnikov - é o objeto de estudo deste trabalho. Sua importância se dá devido ao uso de perturbações, uma metodologia amplamente utilizada de abordagem de estudo de sistemas caóticos. O Método de Melnikov é uma ferramenta poderosa que pode ser usada nestes modelos perturbados.

## 1.2 Justificativa

Sistemas caóticos são de fundamental importância para a ciência e tecnologia contemporâneas, dado que estes surgem nas mais variadas áreas possíveis (meteorologia, física, química, biologia, engenharias, ciências sociais, etc.) e entender seu comportamento e fazer previsões de acordo com dados atuais pode ser muito vantajoso. Por exemplo, se alguém consegue modelar com razoável precisão o mercado de ações, de forma que esta consiga fazer previsões (preço de determinada ação, altas e baixas do mercado e de empresas, previsões de possíveis falências, etc.), esta pessoa saberia tomar decisões de forma a sempre obter vantagens. Outro exemplo seria, se estações meteorológicas conseguissem fazer previsões a longo prazo sobre chuvas, furacões, tsunamis e outros fenômenos devastadores, a evacuação de pessoas de áreas de risco seria facilitada; dentre outros. Assim, modelar, simular, entender e saber medir a precisão do resultado obtido na modelagem de sistemas caóticos é de fundamental importância.

Além disso, a fim de resolver numericamente um sistema são utilizadas aproximações, e com estas, erros são cometidos. Assim, é comum observar resultados ligeiramente diferentes quando estes resolvem o mesmo sistema - diferenças dentro de certos limites, mas ainda assim, são resultados diferentes. Esses resultados, mesmo diferentes, quando o sistema é bem comportado e o método possui uma precisão razoável, capturam a natureza da solução da equação, por exemplo, se a função solução de uma equação é exponencial, métodos tendem a encontrar soluções com uma natureza exponencial. Quando um sistema é caótico, estes resultados podem ter comportamentos diferentes, o que não significa que o método é ruim ou foi mal implementado, isto é da natureza do próprio problema. Assim, a fim de obter uma solução adequada para o sistema, faz-se necessário um estudo aprofundado deste, ou seja, classificar um sistema como caótico ou não, é, por muitas vezes, interessante.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é estudar um método analítico para a classificação de sistemas caóticos.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- fazer uma revisão bibliográfica sobre os principais resultados de teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, para a compreensão e aplicação do método de Melnikov;
- estudar sistemas sobre os quais é possível aplicar o métodos de Melnikov;
- implementar métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias para obter soluções particulares das aplicações estudadas;

## 1.4 Metodologia

A metodologia empregada neste trabalho foi a de levantamento bibliográfico sobre a teoria qualitativa das equações diferenciais a fim de compreender o método de Melnikov. Logo após, foi feita uma revisão bibliográfica sobre sistemas hamiltonianos, pois nestes sistemas, a aplicação do método de Melnikov é facilitada, e uma revisão bibliográfica sobre mecânica celeste, para a parte de aplicações. Feita a parte de revisão bibliográfica, foram selecionados alguns problemas que serviram como aplicações e foram implementados alguns métodos numéricos para a constatação numérica de que estes sistemas são, de fato, caóticos. Ao final, passou-se a parte de estudo aprofundado destes e de aplicação do método de Melnikov sobre estes, a fim de compreender melhor o funcionamento do método.

---

## 1.5 Estrutura do Trabalho

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre a teoria qualitativa das equações diferenciais, com os principais resultados para a compreensão e aplicação do método de Melnikov, que é apresentado no capítulo 3. Os exemplos de aplicações do método de Melnikov se encontram no capítulo 4, e os resultados numéricos no capítulo 5. Ao final, no capítulo 6, é feita uma conclusão e uma apresentação de possíveis trabalhos futuros.

## 2 Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos fundamentais da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias; um objeto de estudo muito importante, dado que não se conhecem métodos para resolver todas as equações diferenciais, e, por muitas vezes, o objetivo ao estudar um sistema não é quantitativo, mas qualitativo, ou seja, por vezes, não se está interessado em saber quanto vale a função solução em determinados pontos, mas sim como esta se comporta dentro de alguns cenários (Sotomayor, 1979; Perko, 2001).

### 2.1 Existência e Unicidade de Soluções

Nesta seção são apresentados dois teoremas que garantem a existência (e unicidade) da solução de uma equação diferencial ordinária, e, além disso, são definidos também dois conjuntos, chamados  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite, importantes para o estudo das equações diferenciais.

Seja  $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $D \in \mathbb{R}^n$ .

#### **Teorema 2.1. (Teorema de Peano)**

*Seja  $f$  contínua em  $\Omega = I_\alpha \times B_b$ , onde  $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| < M$  em  $\Omega$ , o sistema  $\dot{x} = f(t, x)$  com a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , tem pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .*

#### **Teorema 2.2. (Teorema de Picard)**

*Seja  $f$  contínua e lipschitziana em  $\Omega = I_\alpha \times B_b$ , onde  $I_\alpha$  e  $B_b$  definimos acima. Se  $|f| < M$  em  $\Omega$ , o sistema  $\dot{x} = f(t, x)$  com a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , admite uma única solução em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .*

As demonstrações desses teoremas podem ser encontradas em Sotomayor (1979).

Desses dois teoremas, pode-se afirmar que dadas certas condições ( $f$  contínua) existe  $\phi(t, x_0)$  solução da EDO (se  $f$  for lipschitziana garante-se também a unicidade de  $\phi(t, x_0)$ ) por um tempo determinado. Caso  $I_\alpha = (-\infty, \alpha)$  ou  $I_\alpha = (\alpha, +\infty)$  define-se dois conjuntos de pontos de  $\mathbb{R}^n$  interessantes:

**Definição 2.1.** *Sejam*

- $\omega(x_0) = \{p \in D; t \rightarrow \infty \Rightarrow \phi(t, x_0) \rightarrow p\}$
- $\alpha(x_0) = \{p \in D; t \rightarrow -\infty \Rightarrow \phi(t, x_0) \rightarrow p\}$

*Estes conjuntos são chamados, respectivamente, de  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite.*

**Exemplo 2.1.** *Seja o sistema*

$$\dot{x} = \mu - x^2,$$

com  $x \in \mathbb{R}$  e  $\mu > 0$ .



Figura 2.1: Diagrama de fase do sistema  $\dot{x} = \mu - x^2$  com  $\mu > 0$ .

*Este sistema possui dois pontos críticos:  $x = \pm\sqrt{\mu}$  conforme mostra a figura 2.1, ou seja, caso o fluxo comece em  $x = \pm\sqrt{\mu}$  este permanece aí, ou seja,  $\omega(\sqrt{\mu}) = \alpha(\sqrt{\mu}) = \{\sqrt{\mu}\}$  e  $\omega(-\sqrt{\mu}) = \alpha(-\sqrt{\mu}) = \{-\sqrt{\mu}\}$ ; resta analisar as outras três regiões:  $(-\infty, -\sqrt{\mu})$ ,  $(-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu})$  e  $(\sqrt{\mu}, +\infty)$ .*

- Se  $x \in (-\infty, -\sqrt{\mu})$  então  $\omega(x) = \emptyset$  e  $\alpha(x) = -\{\sqrt{\mu}\}$ .
- Se  $x \in (-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu})$  então  $\omega(x) = \{\sqrt{\mu}\}$  e  $\alpha(x) = -\{\sqrt{\mu}\}$ .
- Se  $x \in (\sqrt{\mu}, +\infty)$  então  $\omega(x) = \{\sqrt{\mu}\}$  e  $\alpha(x) = \emptyset$ .

## 2.2 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Nesta seção são apresentados algumas definições e alguns teoremas sobre sistemas lineares que serão utilizados mais a frente.

**Definição 2.2.** *Um sistema de equações diferenciais lineares é um sistema da forma:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

ou então, na forma matricial:

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.1)$$

onde

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad e \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Esse sistema possui uma solução, conforme garantido pelo

**Teorema 2.3. (Teorema Fundamental para Sistemas Lineares)**

*Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .*

*O sistema (2.1), onde  $x(0) = x_0$  possui uma única solução, dada por:  $x(t) = e^{At}x_0$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Perko (2001).

A seguir é apresentada a definição dos subespaços estável, instável e central do sistema (2.1).

**Definição 2.3.** *Sejam  $\lambda_j = a_j + ib_j$  os autovalores de (2.1) com seus respectivos autovetores  $w_j = u_j + iv_j$ .*

*Então os subespaços estável  $E^s$ , instável  $E^u$  e central  $E^c$  do sistema (2.1) são dados por:*

- $E^s = [u_j, v_j]$ , tais que  $a_j < 0$ ;
- $E^u = [u_j, v_j]$ , tais que  $a_j > 0$ ;
- $E^c = [u_j, v_j]$ , tais que  $a_j = 0$ ,

ou seja,  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$  são os subespaços de  $\mathbb{R}^n$  gerados pelas partes real e imaginária dos autovetores associados aos autovalores com parte real maior que, menor que e igual a zero, respectivamente.

Portanto, os autovalores da matriz  $A$  tem um papel fundamental no comportamento do sistema (2.1), e saber calculá-los é importante.

**Definição 2.4.** O mapeamento  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamado o fluxo do sistema (2.1).

Quando todos os autovalores de  $A$  tem a parte real não-nula,  $e^{At}$  é dito um fluxo hiperbólico e o sistema (2.1) é dito hiperbólico.

**Definição 2.5.** Um subespaço  $E \subset \mathbb{R}^n$  é dito invariante com respeito ao fluxo  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  quando  $e^{At}E \subset E$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Observação 2.1.* Os subespaços estável, instável e central são invariantes com respeito ao fluxo  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e a demonstração deste fato pode ser encontrada em Perko (2001).

## 2.3 Equações Diferenciais Não-Lineares

Nesta seção são apresentadas alguns resultados e algumas definições que estendem conceitos já estabelecidos para sistemas lineares. Além disso, são apresentados também o teorema de Hartman-Grobman, uma peça chave na ligação entre sistemas lineares e não-lineares e o teorema da variedade estável, importante resultado para o método de Melnikov.

Considere, nesta seção, a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x), \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$



Suponha, sem perda de generalidade, que  $x \in \mathbb{R}^2$ , e considere o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $f$  e  $g$  são de classe  $C^1$ .

Para calcular  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , em torno do ponto  $(x^*, y^*)$  pode-se utilizar, como uma aproximação, a série de Taylor, ou seja,  $f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*)$  e  $g(x, y) \approx g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*)$ . Assim, ao substituir as aproximações de  $f$  e  $g$  na equação (2.3) obtém-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*). \end{cases} \quad (2.4)$$

Considerando  $(x^*, y^*)$  um ponto de equilíbrio de  $f$  e  $g$ , ou seja,  $f(x^*, y^*) = 0$  e  $g(x^*, y^*) = 0$  o sistema (2.4) se torna

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) = a(x - x^*) + b(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) = c(x - x^*) + d(y - y^*), \end{cases} \quad (2.5)$$

pois  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)}$  são constantes.

Considere, agora, a mudança de variáveis  $u = x - x^*$  e  $v = y - y^*$ . Para transformar o sistema (2.5) para as novas variáveis  $u$  e  $v$  é necessário calcular  $\frac{\partial u}{\partial t}$  e  $\frac{\partial v}{\partial t}$ , o que não é difícil, pois como  $u(t) = x(t) - x^*$  e  $v(t) = y(t) - y^*$  (uma vez que  $x^*$  e  $y^*$  são constantes) obtém-se  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}$  e  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}$ . Logo, o sistema (2.5), após a mudança de variáveis  $u = x - x^*$  e  $v = y - y^*$  se torna

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au + bv \\ \frac{dv}{dt} = cu + dv. \end{cases} \quad (2.6)$$

Portanto, para valores próximos dos pontos de equilíbrio do sistema não linear (2.3), uma boa aproximação para este é o sistema linearizado (2.6), onde a matriz  $J$ , formada pelos coeficientes é chamada a matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \end{pmatrix}.$$

Note que a mudança de variáveis  $u = x - x^*$  e  $v = y - y^*$  permite o estudo do sistema em torno da origem. Assim, é suficiente compreender a dinâmica de sistemas lineares em torno da origem, pois ao realizar a mudança inversa ( $x = u + x^*$  e  $y = v + y^*$ ) o comportamento deste não se altera (Panfilov, 2010).

**Definição 2.6.** *Um homeomorfismo é uma função  $h : A \rightarrow B$  bijetiva, contínua com inversa  $h^{-1} : B \rightarrow A$  contínua. Dois espaços  $A$  e  $B$  são ditos homeomorfos quando existe um homeomorfismo entre eles. Um difeomorfismo é uma função  $h : A \rightarrow B$  bijetiva, contínua, diferenciável com inversa  $h^{-1} : B \rightarrow A$  contínua e diferenciável. Dois espaços  $A$  e  $B$  são ditos difeomorfos quando existe um difeomorfismo entre eles.*

**Definição 2.7.** *Seja  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f : E \rightarrow E$  de classe  $C^1$ . Para cada  $x_0 \in E$ , seja  $\phi(t, x_0)$  a solução da equação (2.2), onde  $x(0) = x_0$ . Para  $t$  no domínio de  $\phi(t, x_0)$ , o mapeamento  $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$  é dito ser o fluxo da equação diferencial (2.2).*

Segue agora o teorema de Hartman-Grobman, o teorema responsável por realizar a ligação entre os fluxos de sistemas lineares e não-lineares.

**Teorema 2.4. (Teorema de Hartman-Grobman)**

*Sejam  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem,  $f : E \rightarrow E$  de classe  $C^1$  e  $\phi_t$  o fluxo do sistema não-linear (2.2). Suponha que  $f(0) = 0$  e que a matriz  $DF(0)$ , a matriz jacobiana calculada na origem, não tenha autovalores com parte real nula. Então existe um homeomorfismo  $H$  de um conjunto aberto  $U \in \mathbb{R}^n$  contendo a origem em um conjunto  $V \in \mathbb{R}^n$  também contendo a origem tal que, para cada  $x_0 \in U$ , existe um intervalo aberto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  contendo 0 tal que para todo  $x_0 \in U$  e  $t \in I_0$   $H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$ , ou seja,  $H$  mapeia trajetórias do sistema não-linear (2.2) próximas à origem em trajetórias do sistema linear (2.6) próximas à origem e preserva a parametrização.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Sotomayor (1979).

**Definição 2.8.** *Sejam  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : E \rightarrow E$  de classe  $C^1$  e  $\phi_t : E \rightarrow E$  o fluxo da equação definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Um conjunto  $M \subset E$  é dito ser invariante com respeito ao fluxo  $\phi_t$ , quando  $\phi_t(M) \subset M$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Conforme dito anteriormente  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$  (os subespaços estável, instável e central) do sistema linear  $\dot{x} = Ax$  são invariantes pelo fluxo  $\phi_t = e^{At}$ . Afim de enunciar um resultado similar para sistemas não-lineares - o teorema da variedade estável - é necessário definir o conceito de variedade.

**Definição 2.9.** *Uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional  $M$  é um espaço métrico conexo com uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$  tal que:*

- Para todo  $\alpha \in L$ ,  $U_\alpha$  é homeomorfo a bola unitária de  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$
- Se  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  e  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$ ,  $h_\beta : U_\beta \rightarrow B$  são homeomorfismos então  $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e  $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  e a aplicação  $h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  é diferenciável e além disso, para todo  $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ,  $\det Dh(x) \neq 0$ .

A variedade estável (instável) de  $p \in \mathbb{R}^n$  são os pontos de  $\mathbb{R}^n$  que tem  $p$  como  $\omega$ -limite ( $\alpha$ -limite).

**Teorema 2.5. (Teorema da Variedade Estável)**

*Sejam  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  contendo a origem,  $f : E \rightarrow E$  de classe  $C^1$  e  $\phi_t$  o fluxo do sistema não-linear (2.2). Suponha que  $f(0) = 0$  e que a matriz  $DF(0)$ , a matriz jacobiana calculada na origem, tenha  $k$  autovalores com parte real negativa e  $n - k$  autovalores com parte real positiva. Então existe uma variedade diferenciável  $k$ -dimensional  $S$  tangente ao subespaço estável  $E^s$  do sistema linear (2.6) na origem, tal que, para todo  $t \geq 0$ ,  $\phi_t(S) \subset S$  e para todo  $x_0 \in S$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0$ ; e existe uma variedade diferenciável  $n - k$ -dimensional  $U$  tangente ao subespaço instável  $E^u$  do sistema linear 2.6 na origem, tal que, para todo  $t \leq 0$ ,  $\phi_t(U) \subset U$  e para todo  $x_0 \in U$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0$ .*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Perko (2001).

**Definição 2.10.** *Um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é dito ser um ponto fixo hiperbólico de  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  se,  $F(p) = p$  e todos os autovalores de  $DF(p)$  tem norma diferente de 1.*

Fixando  $t \in \mathbb{R}$ , o difeomorfismo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  pode ser definido por  $F(x) = \phi_t(x)$ , e surge assim, uma versão do teorema da variedade estável para difeomorfismos:

**Teorema 2.6.** *Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  com um ponto fixo hiperbólico  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Então existem as variedades invariantes estável e instável locais  $S$  e  $U$  tangentes ao subespaços estável e instável  $E^s$  e  $E^u$  de  $DF(0)$ , respectivamente, de mesma dimensão, ou seja,  $\dim(E^s) = \dim(S)$  e  $\dim(E^u) = \dim(U)$ , tais que para todo  $x \in S$  e  $n \geq 0$ ,  $F^n(x) \in S$  e  $F^n(x) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e para todo  $x \in U$  e  $n \geq 0$ ,  $F^{-n}(x) \in U$  e  $F^{-n}(x) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Observação 2.2.* Esta versão do teorema é importante para o método de Melnikov.

A partir do enunciado desta versão do teorema da variedade estável, as variedades estável e instável globais do ponto  $0 \in \mathbb{R}^n$  podem ser redefinidas.

**Definição 2.11.** *A variedade estável global do ponto  $0 \in \mathbb{R}^n$  é o conjunto  $W^s(0) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(S)$  e, analogamente, a variedade instável global do ponto  $0 \in \mathbb{R}^n$  é o conjunto  $W^u(0) = \bigcup_{n \geq 0} F^n(U)$ .*

**Definição 2.12.** *Uma órbita homoclínica é uma curva  $\gamma(t)$  solução do sistema (2.2), que satisfaz  $0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_0)$ ,  $\forall x_0 \in \{\gamma(t); t \in \mathbb{R}\}$ , com  $0$  um ponto de sela, conforme figura 2.2.*

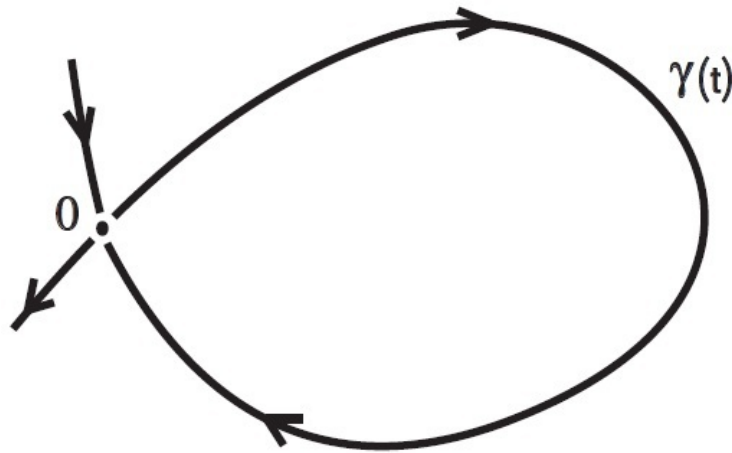


Figura 2.2: Exemplo de uma órbita homoclínica

*Observação 2.3.* Note que  $\gamma \subset W^s(0) \cap W^u(0)$ .

## 2.4 Teoria das Bifurcações

Esta breve seção se dedica a elucidar o conceito de bifurcações das E.D.O.s, apresentando um simples exemplo.

A Teoria das Bifurcações das Equações Diferenciais estuda equações diferenciais dependendo de parâmetros, e a sua questão principal é: Para quais valores do(s) seu(s) parâmetro(s) o sistema se comporta do mesmo jeito, e para qual(is) ele muda seu comportamento?

**Exemplo 2.2.** *Considere o sistema  $\dot{x} = \mu - x^2$ .*

- *Caso  $\mu > 0$  há dois pontos críticos:  $x = \pm\sqrt{\mu}$ , ou seja, caso o fluxo comece em  $x = \pm\sqrt{\mu}$  este permanece aí; resta analisar as outras três regiões:  $(-\infty, -\sqrt{\mu})$ ,  $(-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu})$  e  $(\sqrt{\mu}, +\infty)$ . Para  $(-\infty, -\sqrt{\mu})$  como  $x^2 > \mu$ ,  $\dot{x} < 0$ , ou seja, o fluxo irá se dirigir “para a esquerda”, se afastando do ponto  $x = -\sqrt{\mu}$ ; acontece algo semelhante no intervalo  $(\sqrt{\mu}, +\infty)$ , ou seja, o fluxo se dirige para o ponto  $x = \sqrt{\mu}$ ; em  $(-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu})$  acontece o contrário, pois  $x^2 < \mu$ , ou seja,  $\dot{x} > 0$ , isto é, o fluxo se dirige “para a direita” se afastando do ponto  $x = -\sqrt{\mu}$  e se aproximando do ponto  $x = \sqrt{\mu}$  (Figura 2.3).*
- *Caso  $\mu = 0$  há somente um ponto crítico:  $x = 0$ , e assim, caso o fluxo comece em  $x = 0$  este permanecerá aí, caso contrário, como  $x^2 > 0$ ,  $\dot{x} < 0$ , assim, se  $x_0 > 0$  o fluxo se dirigirá para o ponto  $x = 0$ , caso  $x_0 < 0$  o fluxo se afastará de  $x = 0$  (Figura 2.4).*
- *Caso  $\mu < 0$  não há nenhum ponto crítico e o fluxo se comportará de uma só maneira, independente de onde ele comece: uma vez que  $\dot{x} < 0$  o fluxo irá sempre “para a esquerda” (Figura 2.5).*

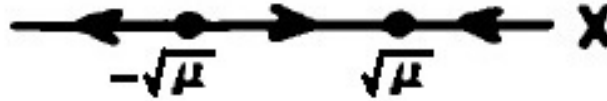


Figura 2.3: Diagrama de fase do sistema  $\dot{x} = \mu - x^2$  com  $\mu > 0$ .

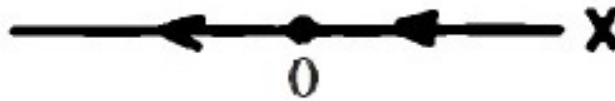


Figura 2.4: Diagrama de fase do sistema  $\dot{x} = \mu - x^2$  com  $\mu = 0$ .



Figura 2.5: Diagrama de fase do sistema  $\dot{x} = \mu - x^2$  com  $\mu < 0$ .

### 3 O Método de Melnikov

Este capítulo se dedica a apresentar o método de Melnikov e sua ideia geométrica (Perko, 2001; Silva, 2011).

O método de Melnikov é um método analítico para detectar caos em sistemas dinâmicos perturbados. Sua ideia geométrica é definir uma função que mede a separação entre as variedades estável e instável de um sistema com uma órbita homoclínica de um ponto de sela hiperbólico, quando sujeito a pequenas perturbações; caso esta função possua um zero simples, isto é, existir um ponto  $p$  onde a função vale zero e sua derivada seja diferente de zero, o teorema homoclínico de Smale-Birkhoff garante que este sistema estudado é caótico.

O método de Melnikov é utilizado em sistemas perturbados, sendo assim, faz-se necessário definir o conceito de sistema perturbado.

**Definição 3.1.** *Um sistema dinâmico*

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x, t), \quad (3.1)$$

*diz-se perturbado pela função  $g$  quando  $0 < \epsilon \ll 1$ . Quando  $\epsilon = 0$  diz-se que o sistema está na sua forma não perturbada.*

O método de Melnikov é aplicado a sistemas perturbados da forma (3.1) com  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $f$  de classe  $C^1$  e  $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $g$  também de classe  $C^1$  e periódica em  $t$ .

A fim de enunciar o teorema proposto por Melnikov resta apenas definir a função de Melnikov e enunciar duas hipóteses para o teorema.

**Hipótese 3.1.** *Para  $\epsilon = 0$  o sistema (3.1) possui uma órbita homoclínica  $\gamma(t)$  em um ponto de sela hiperbólico  $0 \in \mathbb{R}^2$ .*

**Hipótese 3.2.** *Para  $\epsilon = 0$  o sistema (3.1) possui uma família a um parâmetro de órbitas periódicas  $\gamma_\alpha(t)$  de período  $T_\alpha$  no interior de  $\gamma(t)$  com  $\frac{\partial \gamma_\alpha(0)}{\partial \alpha} \neq 0$  (veja figura 3.1).*

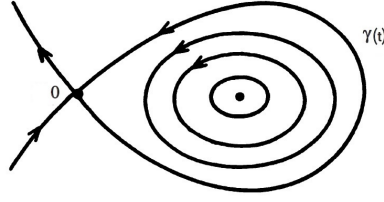


Figura 3.1: Retrato de fase de um sistema sujeito às hipóteses 3.1 e 3.2.

**Definição 3.2.** A função de Melnikov  $M(t_0)$  é dada por

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^t \nabla f(\gamma(s)) ds} f(\gamma(t)) \wedge g(\gamma(t), t + t_0) dt,$$

onde  $\gamma(t)$  é a órbita homoclínica do sistema não perturbado e a operação  $\wedge$  é dada por: se  $f = (f_1, f_2)$  e  $g = (g_1, g_2)$  então  $f \wedge g = f_1 g_2 - g_1 f_2$ .

*Observação 3.1.* Para sistemas hamiltonianos, a função de Melnikov assume uma forma simplificada:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t)) \wedge g(\gamma(t), t + t_0) dt,$$

uma vez que neste tipo de sistema  $\nabla f = 0$ .

Com isso, o teorema de Melnikov pode ser finalmente enunciado.

**Teorema 3.1. (Teorema de Melnikov)**

Sob as hipóteses 3.1 e 3.2, se a função de Melnikov possuir um zero simples em  $p$ , isto é,  $M(p) = 0$  e  $\frac{\partial M}{\partial t_0}(p) \neq 0$ , então, para qualquer valor de  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, as variedades estável e instável do sistema (3.1) se cruzam transversalmente. Caso a função de Melnikov não possua zeros então as variedades não possuem nenhum ponto em comum.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Guckenheimer e Holmes (1983).

**Definição 3.3.** Um ponto  $q \in \mathbb{R}^n$  é dito homoclínico em relação a  $p$  se  $q$  pertence a órbita homoclínica de  $p$ . Caso  $q$  seja o ponto onde as variedades estável e instável se intersectem transversalmente,  $q$  é dito ser ponto homoclínico transversal, conforme ilustra a figura 3.2.

Assim, se existir um ponto homoclínico transversal  $q$ , como o teorema da variedade estável para difeomorfismos garante que as variedades estável e instável são  $F$ -



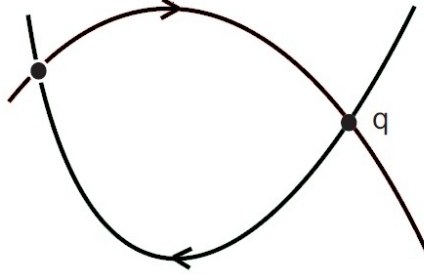


Figura 3.2: Ponto homoclínico transversal

invariantes, ocorre que  $F(q)$  também pertence às variedades estável e instável, e consequentemente, este resultado se estende a  $F^n(q)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , criando um objeto chamado emaranhado homoclínico (figura 3.3), que, de acordo com o Teorema Homoclínico de Smale-Birkhoff, é a assinatura do início de uma dinâmica caótica. Este teorema pode ser encontrado em Guckenheimer e Holmes (1983).

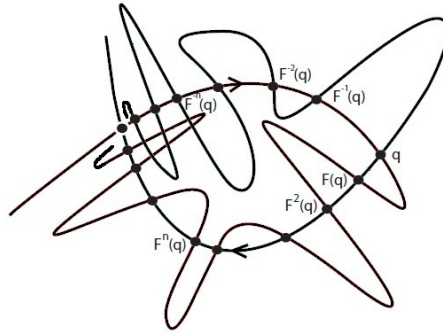


Figura 3.3: Emaranhado homoclínico

**Exemplo 3.1.** Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 + \epsilon(\mu \cos t - 2, 5y). \end{cases} \quad (3.2)$$

A hamiltoniana deste sistema para  $\epsilon = 0$  é dada por

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \quad (3.3)$$

que possui duas órbitas homoclínicas em  $H(x, y) = 0 : \gamma_0^\pm = \pm(\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t))$ , conforme ilustra a figura 3.4.

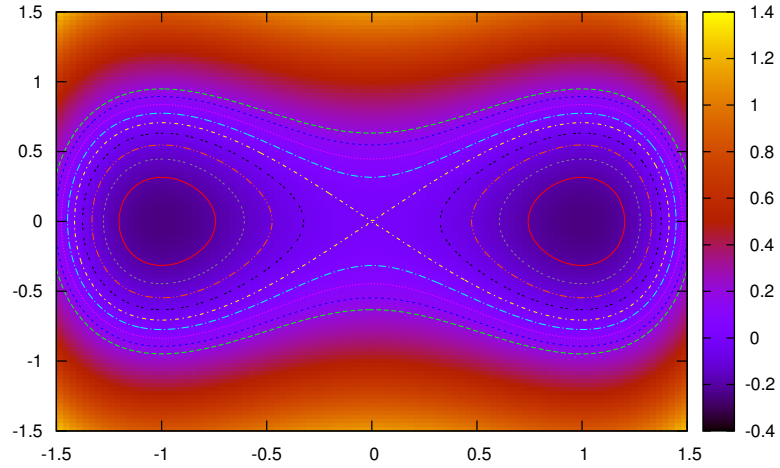


Figura 3.4: Curvas de nível da hamiltoniana  $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ .

Calculando a função de Melnikov em  $\gamma_0^+$  obtem-se

$$\begin{aligned}
 M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) [\mu \cos(t + t_0) - 2, 5y(t)] dt \\
 &= -\sqrt{2}\mu \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}(t) \tanh(t) \cos(t + t_0) dt - 5 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt \\
 &= \sqrt{2}\mu \pi \text{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right) \left[ \sin(t_0) - \frac{k_0}{\mu} \right],
 \end{aligned}$$

onde  $k_0 = 10 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) (3\sqrt{2}\pi) \approx 1.88$ .

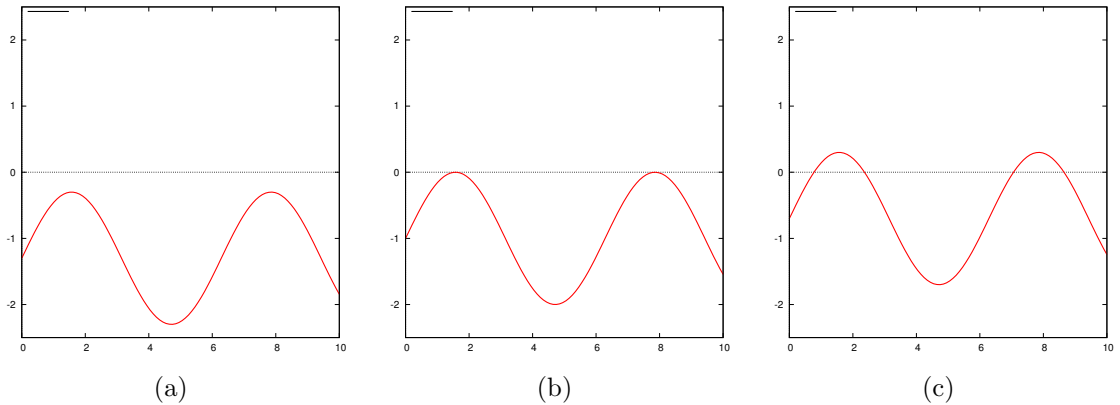


Figura 3.5: (a) Caso  $k_0 > \mu > 0$ , (b) Caso  $\mu = k_0 > 0$ , (c) Caso  $\mu > k_0 > 0$ .

Assim, caso  $\mu > k_0 > 0$  então a função de Melnikov terá pelo menos um zero simples, o que implica na existência do caos.

## 4 Aplicações

Neste capítulo são considerados exemplos de sistemas físicos, aos quais a função de Melnikov pode ser aplicada. O primeiro exemplo consiste em perturbar o problema dos dois corpos, onde a massa de um deles é muito maior que a do outro e o segundo exemplo modela um centro de massa cujo potencial pode ser descrito por uma força do tipo monopolo + quadrupolo.

### 4.1 O Problema de Gýlden

Conforme dito anteriormente, o problema de Gýlden consiste em perturbar a força central do problema de dois corpos, onde a massa de um é muito maior que a do outro, de forma que a força que o corpo de menor massa sinta seja dada por

$$F(\vec{r}) = -\frac{1 + \epsilon\lambda(t)}{||r||^2}\hat{r}. \quad (4.1)$$

Este problema pode modelar, por exemplo, a órbita de um planeta ao redor de uma estrela que perde massa ao longo do tempo.

Em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , o movimento desta partícula é descrito pela hamiltoniana

$$H(p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{1}{r} - \epsilon \frac{\lambda(t)}{r}. \quad (4.2)$$

Como  $\theta$  é uma variável cíclica,  $p_\theta$  é constante. Assim, as equações de Hamilton são dadas por

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = p_r \\ \frac{dp_r}{dt} = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} - \epsilon \frac{\lambda(t)}{r^2}. \end{cases} \quad (4.3)$$

A expansão de Mcgehe (Castilho e Marchesin, 2009) é dada por

$$\begin{cases} p_r = -v \\ r = \frac{2}{u^2}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Assim, aplicando a expansão de Mcgehe as equações 4.3 se tornam

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{u^3}{4}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{u^3}{4} \left( u - \frac{p_\theta}{2}u^3 + \epsilon u \lambda(t) \right). \end{cases} \quad (4.5)$$

Ao reescalar as variáveis  $u$ ,  $v$  e  $t$  pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \frac{4}{|p_\theta|}u \\ v &\rightarrow \frac{4}{|p_\theta|}v \\ t &\rightarrow \frac{p_\theta^4}{16}t, \end{aligned} \quad (4.6)$$

as equações (4.5) se tornam

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{u^3}{4}v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{u^3}{4} \left( u - u^3 + \epsilon u \lambda\left(\frac{p_\theta^4}{16}t\right) \right). \end{cases} \quad (4.7)$$

Definindo um novo parâmetro

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{|u(s)^3|}{4} ds, \quad (4.8)$$

e introduzindo-o no sistema (4.7), obtém-se

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = v \\ \frac{dv}{d\tau} = u - u^3 + \epsilon u \lambda\left(\frac{p_\theta^4}{16}t(\tau)\right), \end{cases} \quad (4.9)$$

onde  $t(\tau)$  denota a inversa de  $\tau(t)$ , e é dada por  $t(\tau) = \int_0^\tau 4\cosh^3(s)ds = 4\sinh(\tau) + \frac{4}{3}\sinh^3(\tau)$ .

A hamiltoniana que governa o sistema (4.9) é dada por

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} \left( 1 + \epsilon \lambda \left( \frac{p_\theta^4}{16} t(\tau) \right) \right). \quad (4.10)$$

A hamiltoniana do sistema não perturbado ( $H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$ ) possui duas órbitas homoclínicas em  $H(u, v) = 0$ :  $\gamma_0^\pm = \pm(\sqrt{2}\operatorname{sech}(\tau), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(\tau)\tanh(\tau))$ , conforme o exemplo da seção anterior.

Portanto, só resta tomar uma função perturbação que seja periódica em  $t$ . Seja  $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $g(u, v, t) = (0, \cos t)$ .

Fazendo, na notação do método introduzida no capítulo anterior,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(u, v) = H(u, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$ , e  $g$  definida anteriormente, o sistema a ser analisado será dado pela equação

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{d\tau} \\ \frac{dv}{d\tau} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ u - u^3 \end{bmatrix}}_{f(u, v)} + \epsilon \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u\lambda(t(\tau)) \end{bmatrix}}_{g(u, v, t)}, \quad (4.11)$$

onde  $p_\theta$  foi tomado igual a 2 por simplicidade.

Para este sistema, a função de Melnikov é dada por

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} uv\lambda(t(\tau + \tau_0))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\operatorname{sech}(\tau)(-\sqrt{2}\operatorname{sech}(\tau)\tanh(\tau))\lambda(t(\tau + \tau_0))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -2\operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)\cos(4\sinh(\tau + \tau_0) + \frac{4}{3}\sinh^3(\tau + \tau_0))d\tau. \end{aligned}$$

Note que, se  $\tau_0 = 0$  então a função

$$\tau \mapsto -2\operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)\cos(4\sinh(\tau) + \frac{4}{3}\sinh^3(\tau))$$

é ímpar, e portanto a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} -2\operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)\cos(4\sinh(\tau) + \frac{4}{3}\sinh^3(\tau))d\tau$$

é zero, ou seja,

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} -2\operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)\cos(4\sinh(\tau + \tau_0) + \frac{4}{3}\sinh^3(\tau + \tau_0))d\tau = 0,$$

isto é, a função de Melnikov possui um zero na origem. Resta provar que este zero é simples.

A derivada da função de Melnikov é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \tau_0}(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left[ -2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)\cos(4\sinh(\tau + \tau_0) + \frac{4}{3}\sinh^3(\tau + \tau_0))d\tau \right] \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left[ \operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)\cos(4\sinh(\tau + \tau_0) + \frac{4}{3}\sinh^3(\tau + \tau_0))d\tau \right], \end{aligned}$$

que avaliada na origem fica

$$\frac{\partial M}{\partial \tau_0}(0) = 8 \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(\tau)\sin\left(\frac{4}{3}\sinh(\tau)(3 + \sinh^2(\tau))\right) \operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)d\tau \quad (4.12)$$

A integral  $8 \int_{-\infty}^{\infty} \sinh(\tau)\sin\left(\frac{4}{3}\sinh(\tau)(3 + \sinh^2(\tau))\right) \operatorname{sech}^2(\tau)\tanh(\tau)d\tau$  foi avaliada numericamente, sendo igual a  $0,668552 \neq 0$ , e portanto o zero da função de Melnikov é simples, ou seja, o método de Melnikov assegura a ocorrência do caos.

## 4.2 Potencial do Tipo Monopolo + Quadrupolo

Baseado no estudo de Letelier e Vieira (1998) este problema representa o movimento de uma partícula de massa  $m$  atraída por um centro de massa com distribuição não esférica, e cujo potencial pode ser modelado por um termo monopolo mais um quadrupolo, ou seja, o potencial do centro de massa será dado por

$$V(R) = -\frac{km}{R} - \frac{Qm}{R^3}, \quad (4.13)$$

onde  $k = GM$ ,  $G$  a constante gravitacional, e  $M$  a massa do centro de atração e  $Q$  a força quadrupolar.

O movimento desta partícula pode ser descrito pela hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V_{eff}, \text{ onde } V_{eff} = m \left( \frac{h^2}{2R^2} - \frac{k}{R} - \frac{Q}{R^3} \right). \quad (4.14)$$

Os valores estacionários de  $V_{eff}$  são dados por

$$R = \frac{h^2}{2k}(1 \pm \sqrt{1 - 12\beta}), \quad (4.15)$$

com  $\beta = \frac{kQ}{h^4}$ . Denotando por  $R_{un}$  o valor estacionário com o sinal de menos, segue que

$$V_{eff}(R_{un}) = \frac{mh^2}{6R_{un}^2}(-1 + 2\sqrt{1 - 12\beta}). \quad (4.16)$$

Para valores grandes de  $R$ ,  $V_{eff} \approx -\frac{km}{R} \leq 0$ , logo, para que a partícula descreva um movimento periódico, é necessário que  $V_{eff}(R_{un}) \leq 0$  e portanto, é necessário que  $0,0625 = \frac{1}{16} \leq \beta \leq \frac{1}{12} \approx 0,0833$ .

É conveniente trabalhar com quantidades adimensionais. A mudança de variáveis

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \frac{k}{h^2}R \\ \tau &\rightarrow \frac{k^2}{h^3}t \\ \epsilon &\rightarrow \frac{h^2}{mk^2}H_0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

adimensionalisa o sistema (4.14), sendo que  $r$  é proporcional ao raio,  $\tau$  é proporcional ao tempo e  $\epsilon$  é proporcional à energia total da partícula.

Nestas novas unidades, a equação da energia é dada por

$$2\epsilon = \dot{r}^2 + 2v_{eff}, \text{ onde } 2v_{eff} = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} - \frac{2\beta}{r^3} \quad (4.18)$$

e  $R_{un}$  é escrito como

$$r_{un} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 12\beta}). \quad (4.19)$$

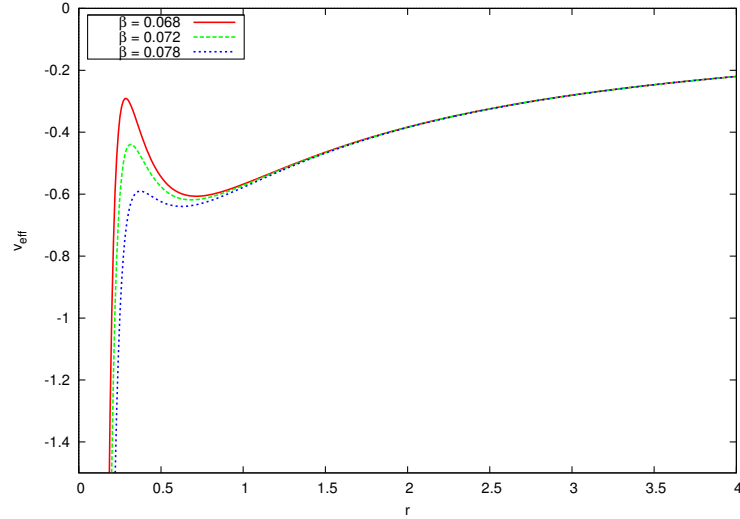


Figura 4.1: Gráfico de  $v_{eff}$ , para  $\beta = 0,068$  (curva superior),  $0,072$  e  $0,078$  (curva inferior), sendo que o ponto de máximo é  $r_{un} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 12\beta})$ .

Uma partícula com energia  $\epsilon = v_{eff}(r_{un})$  descreve tanto uma órbita periódica instável ( $r = r_{un}$ ,  $\dot{r} = 0$ ), quanto uma órbita homoclínica tendendo à essa orbita quando  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Tal órbita homoclínica é cercada por círculos de raio  $r_{un}$  e  $r_m = \frac{2r_{un}(1 - r_{un})}{4r_{un} - 1}$ .

Fazendo  $\epsilon = v_{eff}$ , cujo gráfico é mostrado na figura 4.1 a equação da energia se torna

$$\frac{r^{3/2} \dot{r}}{(r - r_{un})\sqrt{r_m - r}} = \pm\omega_\beta, \quad (4.20)$$

onde  $\omega_\beta = \sqrt{\frac{(4r_{un} - 1)}{3r_{un}^2}}$ , que admite como solução

$$\tau(r) = \frac{1}{\pm\omega_\beta} \left( \sqrt{r(r_m - r)} + (r_m + 2r_{un})\arctan\sqrt{\frac{r_m - r}{r}} + \frac{2r_m^{3/2}}{\sqrt{r_m - r_{un}}}\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{(r_m - r)r_{un}}{(r_m - r_{un})r}} \right). \quad (4.21)$$

O ramo positivo do gráfico de  $\tau(r)$  é mostrado na figura 4.2 com os valores de  $\beta = 0,064$  (curva superior),  $0,065$ ,  $0,066$ ,  $0,067$  e  $0,068$  (curva inferior).



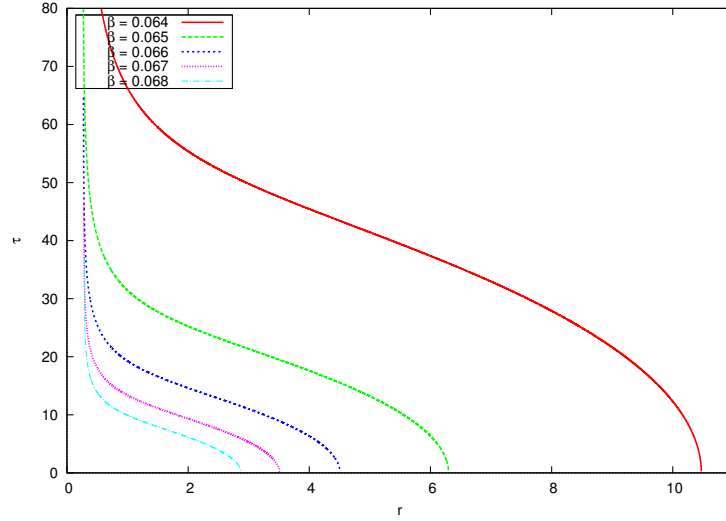


Figura 4.2: Ramo positivo de  $\tau(r)$ .

A constante de integração foi escolhida de forma que, em  $\tau = 0$ ,  $r = r_m$ .

*Observação 4.1.* Note que uma partícula leva um tempo finito para sair de  $r_m$  até a vizinhança de  $r_{un}$ , mas leva um tempo infinito para sair de (ou chegar em)  $r_{un}$ , onde a órbita periódica instável está localizada.

Considere, na notação do método de Melnikov introduzida no capítulo 3, o sistema  $f = \epsilon$  e  $g = \lambda(r)\cos(\Omega\tau)$ , onde  $\lambda(r)$  é um polinômio em  $r$ , com coeficientes positivos (negativos) para distribuições de massa do lado de fora (do lado de dentro) da órbita homoclínica.

*Observação 4.2.* A função  $g$  tomada anteriormente representa uma alta variedade de situações: Ao tomar o potencial de uma distribuição de massa e realizar uma expansão em multipolos nas variáveis de espaço e uma expansão em séries de Fourier na variável de tempo e, além disso, considerar simetria axial e reflexiva, a função resultante terá a mesma forma de  $g$  (Letelier e Vieira, 1998).

A função de Melnikov para este sistema será dada por

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega(\tau - \tau_0)) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{dr}{d\tau} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega(\tau - \tau_0)) d\tau + \int_0^{\infty} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega(\tau - \tau_0)) d\tau, \end{aligned}$$

aplicando a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
 \tau &\rightarrow r \\
 d\tau &= \frac{d\tau}{dr} dr \\
 \tau = 0 &\Rightarrow r = r_m \\
 \tau &\rightarrow \infty \Rightarrow r \rightarrow r_{un} \\
 \tau &\rightarrow -\infty \Rightarrow r \rightarrow r_{un},
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

a função de Melnikov fica

$$\begin{aligned}
 M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^0 \frac{dr}{d\tau} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega(\tau - \tau_0)) d\tau + \int_0^{\infty} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega(\tau - \tau_0)) d\tau \\
 &= \int_{r_{un}}^{r_m} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega(\tau(r) - \tau_0)) \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} dr + \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega(\tau(r) - \tau_0)) \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} dr \\
 &= \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega\tau(r) - \Omega\tau_0) dr - \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega\tau(r) - \Omega\tau_0) dr \\
 &= \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} (\cos(\Omega\tau(r))\cos(\Omega\tau_0) + \sin(\Omega\tau(r))\sin(\Omega\tau_0)) dr \\
 &\quad - \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} (\cos(\Omega\tau(r))\cos(\Omega\tau_0) + \sin(\Omega\tau(r))\sin(\Omega\tau_0)) dr \\
 &= \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega\tau(r))\cos(\Omega\tau_0) dr - \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \cos(\Omega\tau(r))\cos(\Omega\tau_0) dr \\
 &\quad + \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \sin(\Omega\tau(r))\sin(\Omega\tau_0) dr + \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \sin(\Omega(-\tau(r)))\sin(\Omega\tau_0) dr,
 \end{aligned}$$

mas como  $\tau(r)$  possui simetria de reflexão em relação ao eixo  $r$

$$\begin{aligned}
 M(\tau_0) &= \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \sin(\Omega\tau(r))\sin(\Omega\tau_0) dr + \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \sin(\Omega\tau(r))\sin(\Omega\tau_0) dr \\
 &= -2K(\Omega)\sin(\Omega\tau_0), \text{ onde } K(\Omega) = \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \sin(\Omega\tau(r)) dr.
 \end{aligned}$$

*Observação 4.3.* A mudança de variáveis  $\tau \rightarrow r$  é a chave da aplicação do método de Melnikov neste exemplo, pois esta mudança permite transformar um intervalo infinito em um finito, o que permite a utilização de um método gráfico.

Sendo assim, a função de Melnikov terá os zeros simples caso  $K(\Omega) \neq 0$ , ou seja, o problema de calcular a função de Melnikov, torna-se o problema de saber se a integral  $K(\Omega) = \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr} \sin(\Omega\tau(r)) dr$  é zero ou não.

Considere primeiramente  $\lambda(r)$  um polinômio com coeficientes positivos em  $r$ .

A figura 4.3 mostra o gráfico do integrando de  $K(\Omega)$ , para  $\beta = 0,064$ ,  $\Omega = 0,06$  e  $\frac{d\lambda(r)}{dr} = r$  (curva superior),  $\frac{r^2}{10}$  e  $\frac{r^3}{100}$  (curva inferior).

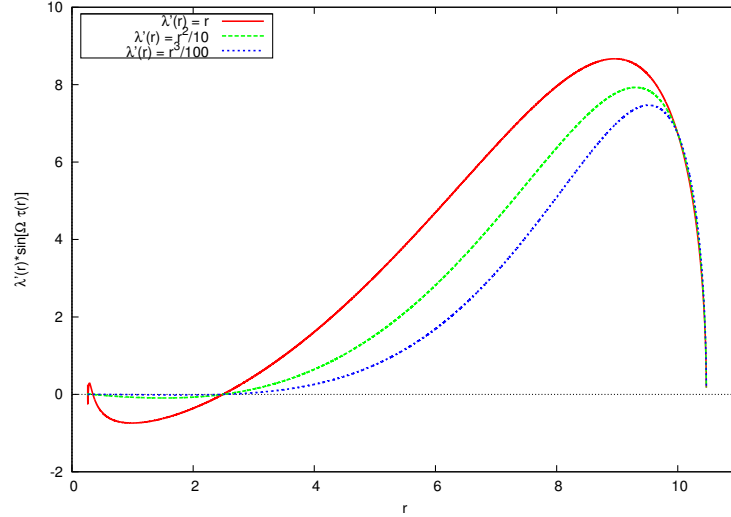


Figura 4.3: Gráfico de  $\frac{d\lambda(r)}{dr} \sin(\Omega\tau(r)) dr$ .

A área abaixo das curvas da figura 4.3 não é zero, e portanto, a função de Melnikov terá os zeros simples requeridos, ou seja, a órbita desta partícula, nestes casos, será caótica.

Considere agora,  $\lambda(r)$  um polinômio com coeficientes negativos em  $r$ .

A figura 4.4 mostra o gráfico do integrando de  $K(\Omega)$ , para  $\beta = 0,068$ ,  $\Omega = 0,15$  e  $\frac{d\lambda}{dr} = \frac{1}{3r^2}$  (curva superior),  $\frac{1}{9r^3}$  e  $\frac{1}{27r^4}$  (curva inferior).

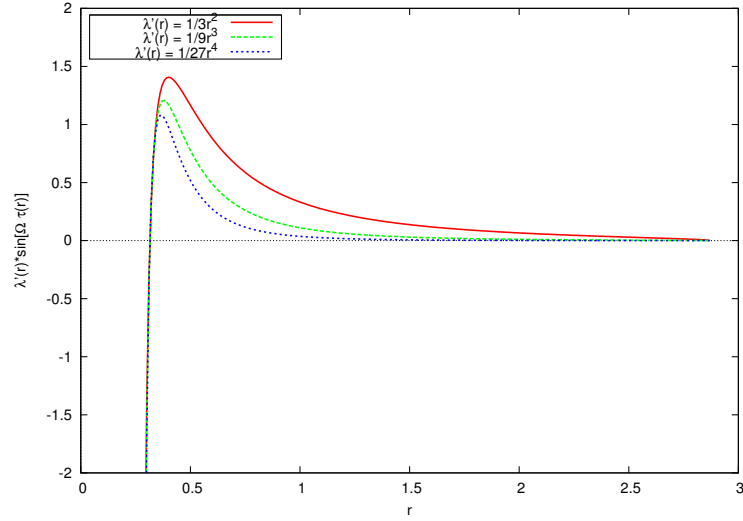


Figura 4.4: Gráfico de  $\frac{d\lambda(r)}{dr}\text{sen}(\Omega\tau(r))dr$ .

Reescalando a figura 4.4 pode-se perceber que as funções possuem uma parte negativa, que é menor do que a parte positiva, conforme ilustrado na figura 4.5.

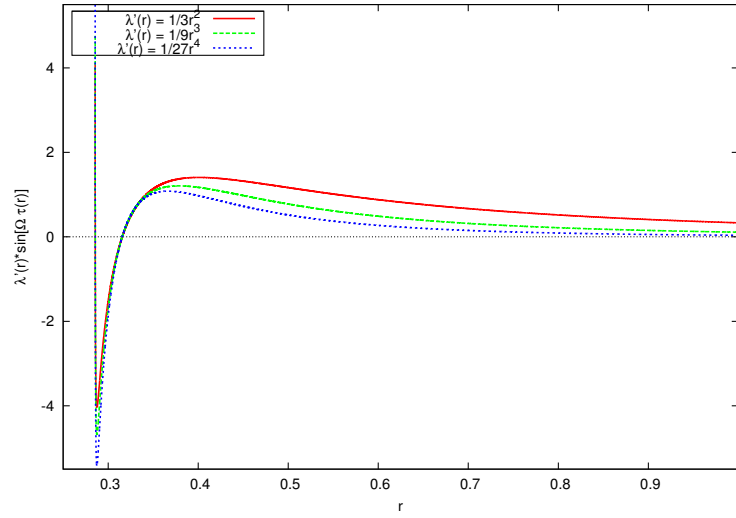


Figura 4.5: Gráfico de  $\frac{d\lambda(r)}{dr}\text{sen}(\Omega\tau(r))dr$ .

Perto do ponto  $r_{un} = 0,285524$  a função possui várias oscilações entre  $[-4, 0; 4, 0]$  (curva superior),  $[-5, 0; 5, 0]$  e  $[-5, 5; 5, 5]$  (curva inferior) que não contribuem significativamente para o valor da integral, ou seja, a área das partes positivas das curvas é maior do que a área das partes negativas, e portanto,  $K(\Omega) = \int_{r_m}^{r_{un}} \frac{d\lambda(r)}{dr}\text{sen}(\Omega\tau(r))dr \neq 0$ , ou seja, o método de Melnikov garante que o movimento desta partícula é caótico.

## 5 Experimentos Numéricos

Neste capítulo são apresentados alguns experimentos numéricos dos exemplos do capítulo anterior, ilustrando o conceito do caos nestes sistemas tratados anteriormente.

Em todos os exemplos, o método numérico utilizado para resolver os sistemas foi um método de Runge-Kutta de quarta ordem para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, uma vez que é sempre possível transformar uma equação diferencial de ordem superior em um sistema de equações de primeira ordem da seguinte maneira

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y' \\ y_2 = y_1' \\ y_3 = y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1} = y_{n-2}' \\ y_n = f(t, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \quad (5.1)$$

Assim, um sistema de equações diferenciais de ordem superior pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, aplicando este processo a cada uma das equações originais.

Um método do tipo Runge-Kutta de quarta ordem conhecido para o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq b$$

é expresso por

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= \alpha, \\
 k_1 &= hf(t_i, \omega_i), \\
 k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\
 k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\
 k_4 &= hf(t_i + h, \omega_i + k_3), \\
 \omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , onde  $N$  é o número de passos desejados na simulação,  $\omega_i$  é a aproximação da solução da equação no  $i$ -ésimo ponto discreto,  $h = \frac{|b-a|}{N} = |t_{i+1} - t_i|$ , ou seja,  $h$  é a medida da discretização do domínio da equação e  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  são chamados de coeficientes de Runge-Kutta (Burden e Faires, 2008).

A generalização deste método para o problema de valor inicial

$$\begin{cases}
 y_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 y_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 \vdots \\
 y_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),
 \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases}
 y_1(a) = \alpha_1 \\
 y_2(a) = \alpha_2 \\
 \vdots \\
 y_n(a) = \alpha_n,
 \end{cases}$$

com  $a \leq t \leq b$ , é dada por

$$\begin{aligned}
 \omega_{1,0} &= \alpha_1, \omega_{2,0} = \alpha_2, \dots, \omega_{n,0} = \alpha_n, \\
 k_{1,i} &= hf_i(t_j, \omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \dots, \omega_{n,j}), \\
 k_{2,i} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, \omega_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, \omega_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, \omega_{n,j} + \frac{1}{2}k_{1,n}\right), \\
 k_{3,i} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, \omega_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, \omega_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, \omega_{n,j} + \frac{1}{2}k_{2,n}\right), \\
 k_{4,i} &= hf_i(t_j + h, \omega_{1,j} + k_{3,1}, \omega_{2,j} + k_{3,2}, \dots, \omega_{n,j} + k_{3,n}), \\
 \omega_{i,j+1} &= \omega_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}),
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  e para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , onde  $\omega_{i,j}$  é a aproximação da  $i$ -ésima equação no  $j$ -ésimo ponto discreto, e, analogamente,  $N$  é o número de passos desejados na simulação,  $h = \frac{|b - a|}{N} = |t_{i+1} - t_i|$ , ou seja,  $h$  é a medida da discretização do domínio da equação e  $k_{1,i}$ ,  $k_{2,i}$ ,  $k_{3,i}$  e  $k_{4,i}$  são chamados de coeficientes de Runge-Kutta (Burden e Faires, 2008).

O método utilizado neste trabalho para os experimentos numéricos é o esquema numérico dado por 5.3.

## 5.1 O Problema de Gýlden

Considere que a órbita da partícula teste do problema de Gýlden está em  $\mathbb{R}^2$ . O sistema que governa o movimento desta partícula é dado por

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{1 + \epsilon\lambda(t)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}x \\ \ddot{y} = -\frac{1 + \epsilon\lambda(t)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}y, \end{cases} \tag{5.4}$$

que, ao ser transformado em um sistema de equações de primeira ordem, se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = -\frac{1 + \epsilon\lambda(t)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}x \\ \dot{v}_y = -\frac{1 + \epsilon\lambda(t)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}y, \end{cases} \quad (5.5)$$

onde  $v_x$  e  $v_y$  são as componentes em  $x$  e em  $y$ , respectivamente do vetor velocidade (Eshagh e Najafi-Alamdari, 2007).

Foram realizados experimentos considerando-se  $\epsilon = 0,01$ ,  $\lambda(t) = \cos(t)$ ,  $\Delta t = 10^{-3}$  e como posições e velocidades iniciais  $x = 1,0, 1,01, 1,02$  e  $1,03$ ,  $y = 0,0$ ,  $v_x = 0,0$ ,  $v_y = 1,0$ , ou seja,  $y$ ,  $v_x$  e  $v_y$  foram mantidos fixos, variando-se somente a posição inicial em  $x$ , conforme ilustrado na figura 5.1.

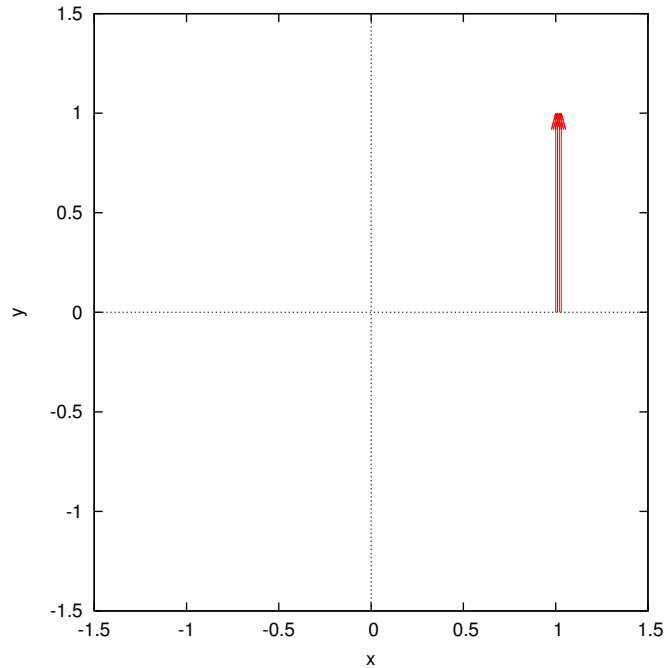


Figura 5.1: Posições e velocidades iniciais da partícula teste.

No problema dos dois corpos, sabe-se que estes descrevem círculos, elipses, parábolas ou hipérbolas ao redor do centro de massa do sistema (Collins II, 2004; Volchan, 2007). Assim, a uma certa velocidade, no problema não perturbado, o resultado esperado é que a partícula teste retorne à posição inicial a cada volta.



A figura 5.2 mostra a posição que a partícula cruzou o semi-eixo positivo  $x$  a cada volta, sendo que sua posição inicial em  $x$  é de 1,00 (figura 5.2(a)), 1,01 (figura 5.2(b)), 1,02 (figura 5.2(c)) e 1,03 (figura 5.2(d)).

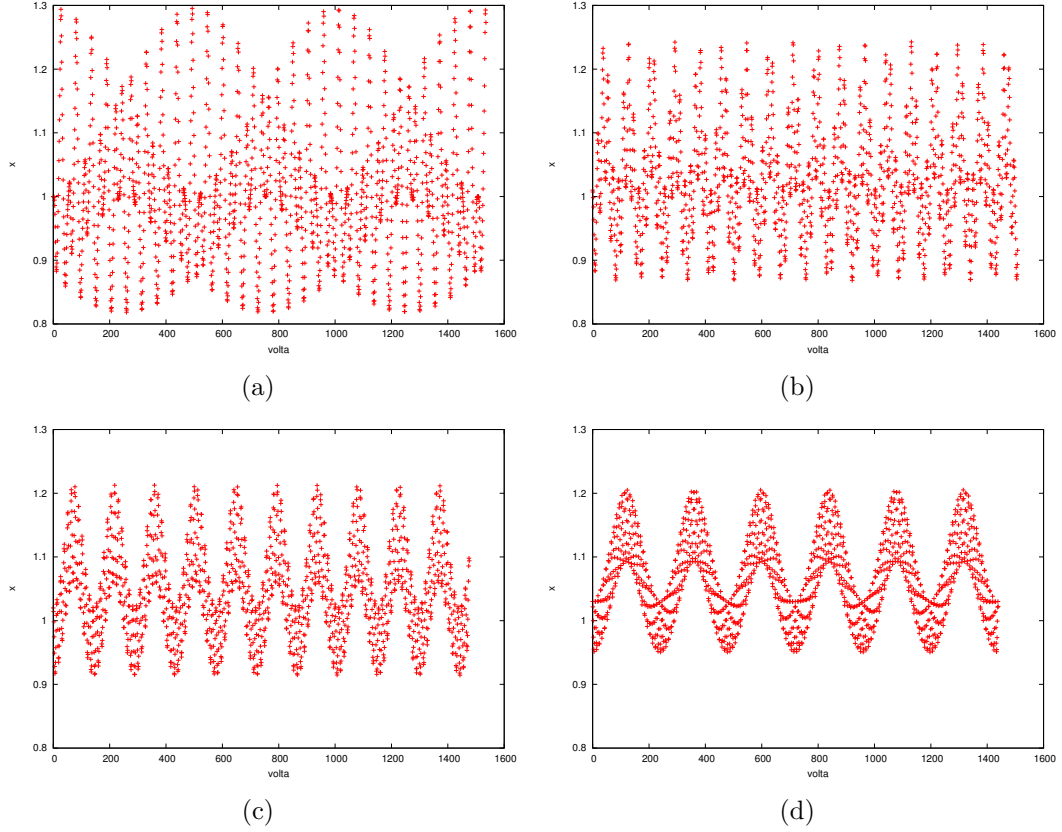


Figura 5.2: Gráficos da posição em  $x$  pelo número da volta; com posição inicial em  $x$  (a)  $x = 1,00$ , (b)  $x = 1,01$ , (c)  $x = 1,02$ , (d)  $x = 1,03$ .

Pode-se perceber, através da figura 5.2, que a pequena perturbação introduzida na condição inicial do sistema altera o comportamento da partícula, pois sendo  $x_i$  a posição na qual a partícula cruza o semi-eixo positivo de  $x$  na  $i$ -ésima volta, com a posição inicial  $x = 1,00$  (figura 5.2(a)) a distância entre  $x_{i+1}$  e  $x_i$  é maior do que com a posição inicial  $x = 1,03$ , e também, essa distância em  $x = 1,00$  além de atingir um intervalo maior de valores -  $(0,8; 1,3)$  contra  $(0,95; 1,22)$  com o  $x$  inicial em  $x = 1,03$  - varia um número maior de vezes dentro desse intervalo, isto quer dizer, geometricamente, que a órbita com  $x$  inicial igual a 1,00 muda seu comportamento, aumentando e diminuindo seu raio, mais rapidamente do que com  $x$  inicial igual a 1,03.

A figura 5.3 mostra a órbita da partícula em algumas voltas pré-determinadas (as voltas de números 1, 50, 200, 330, 580, 790, 1060 e 1370) com as posições iniciais testadas.

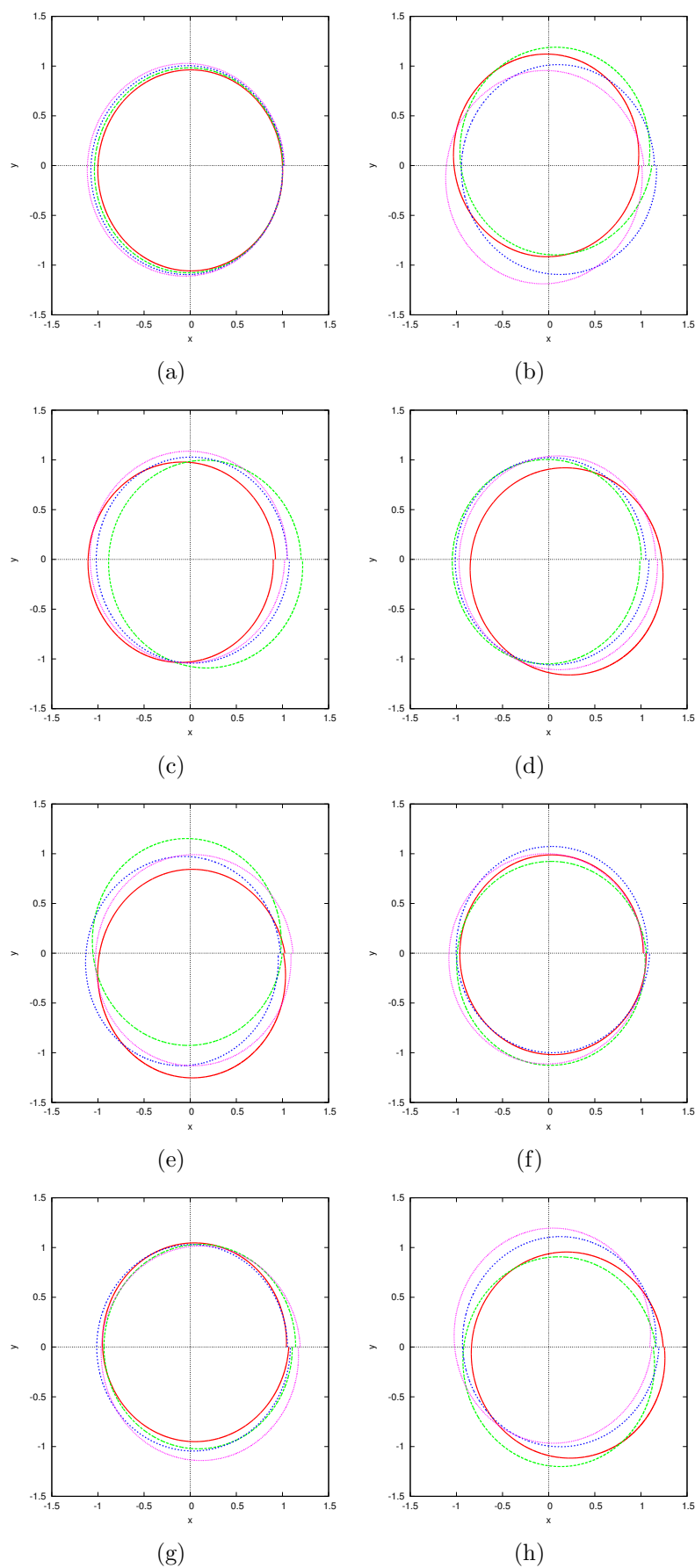


Figura 5.3: Voltas de número (a) 1, (b) 50, (c) 200, (d) 330, (e) 580, (f) 790, (g) 1060, (h) 1370.

## 5.2 Potencial do Tipo Monopolo + Quadrupolo

A força sentida por uma partícula sob a ação do centro de massa modelado por um potencial do tipo monopolo + quadrupolo  $\left(V(r) = -\frac{km}{r} - \frac{Qm}{r^3}\right)$  é dada por

$$F(\vec{r}) = -\frac{km}{||r||^2}\hat{r} - \frac{3Qm}{||r||^4}\hat{r}. \quad (5.6)$$

Considere  $k = GM = 1$ ,  $Q = \frac{GMJ_2R_0^2}{2} = \frac{J_2R_0^2}{2} = \frac{J_2(\frac{2\beta}{J_2})^2}{2} = \frac{2\beta^2}{J_2} = \frac{2\beta^2}{0.2} = 10\beta^2$  (Letelier e Vieira, 1998).

Ao considerar novamente que a órbita da partícula está em  $\mathbb{R}^2$ , o sistema (na sua forma não perturbada) responsável por governar o movimento da partícula é dado por

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\right)x \\ \ddot{y} = -\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\right)y, \end{cases} \quad (5.7)$$

que, ao ser transformado em um sistema de equações de primeira ordem, se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = -\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\right)x \\ \dot{v}_y = -\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\right)y, \end{cases} \quad (5.8)$$

onde  $v_x$  e  $v_y$  são as componentes em  $x$  e em  $y$ , respectivamente do vetor velocidade (Eshagh e Najafi-Alamdari, 2007).

Introduzindo a perturbação considerada nos exemplos de aplicação do método de Melnikov ( $g = \lambda(r)\cos(\Omega t)$ ), o sistema em sua forma perturbada é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = - \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) x + \epsilon \cos(\Omega t) \lambda'(r) \\ \dot{v}_y = - \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) y + \epsilon \cos(\Omega t) \lambda'(r). \end{cases} \quad (5.9)$$

Foram considerados um exemplo de perturbação com o polinômio  $\lambda$  com coeficientes positivos em  $r$  ( $\lambda(r) = \frac{r^2}{2}$ ) e um exemplo com coeficientes negativos ( $\lambda(r) = -\frac{1}{3r}$ ).

Para o caso de  $\lambda(r) = \frac{r^2}{2}$  o sistema (5.9) fica

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = - \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) x + \frac{1}{2} \epsilon \cos(\Omega t) (x^2 + y^2) \\ \dot{v}_y = - \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) y + \frac{1}{2} \epsilon \cos(\Omega t) (x^2 + y^2) \end{cases} \quad (5.10)$$

e para o caso de  $\lambda(r) = -\frac{1}{3r}$  o sistema (5.9) fica

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = - \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) x - \frac{\epsilon \cos(\Omega t)}{3\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{v}_y = - \left( \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{30\beta^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right) y - \frac{\epsilon \cos(\Omega t)}{3\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Além disso, para  $\lambda(r) = \frac{r^2}{2}$ , foram considerados os parâmetros  $\beta = 0,064$  e  $\Omega = 0,06$ , e para  $\lambda(r) = -\frac{1}{3r}$ , foram considerados  $\beta = 0,068$  e  $\Omega = 0,15$ . Em ambos os casos foram considerados  $\epsilon = 0,01$  e  $\Delta t = 10^{-3}$ , e, como condições iniciais  $y = 0,0$ ,  $v_x = 0,0$ ,  $v_y = 1,0$  e  $x = 1,03, 1,04, 1,05, 1,06, 1,07$  e  $1,08$ .

As figuras 5.4, 5.5 e 5.6 mostram a posição que a partícula cruzou o semi-eixo positivo  $x$  a cada volta, no sistema não perturbado, perturbado por  $\frac{r^2}{2}\cos(\Omega t)$  e perturbado por  $-\frac{1}{3r}\cos(\Omega t)$ , respectivamente, sendo que sua posição inicial em  $x$  é de 1,03 (figuras 5.4(a), 5.5(a) e 5.6(a)), 1,04 (figuras 5.4(b), 5.5(b) e 5.6(b)), 1,05 (figuras 5.4(c), 5.5(c) e 5.6(c)), 1,06 (figuras 5.4(d), 5.5(d) e 5.6(d)), 1,07 (figuras 5.4(e), 5.5(e) e 5.6(e)) e 1,08 (figuras 5.4(f), 5.5(f) e 5.6(f)).

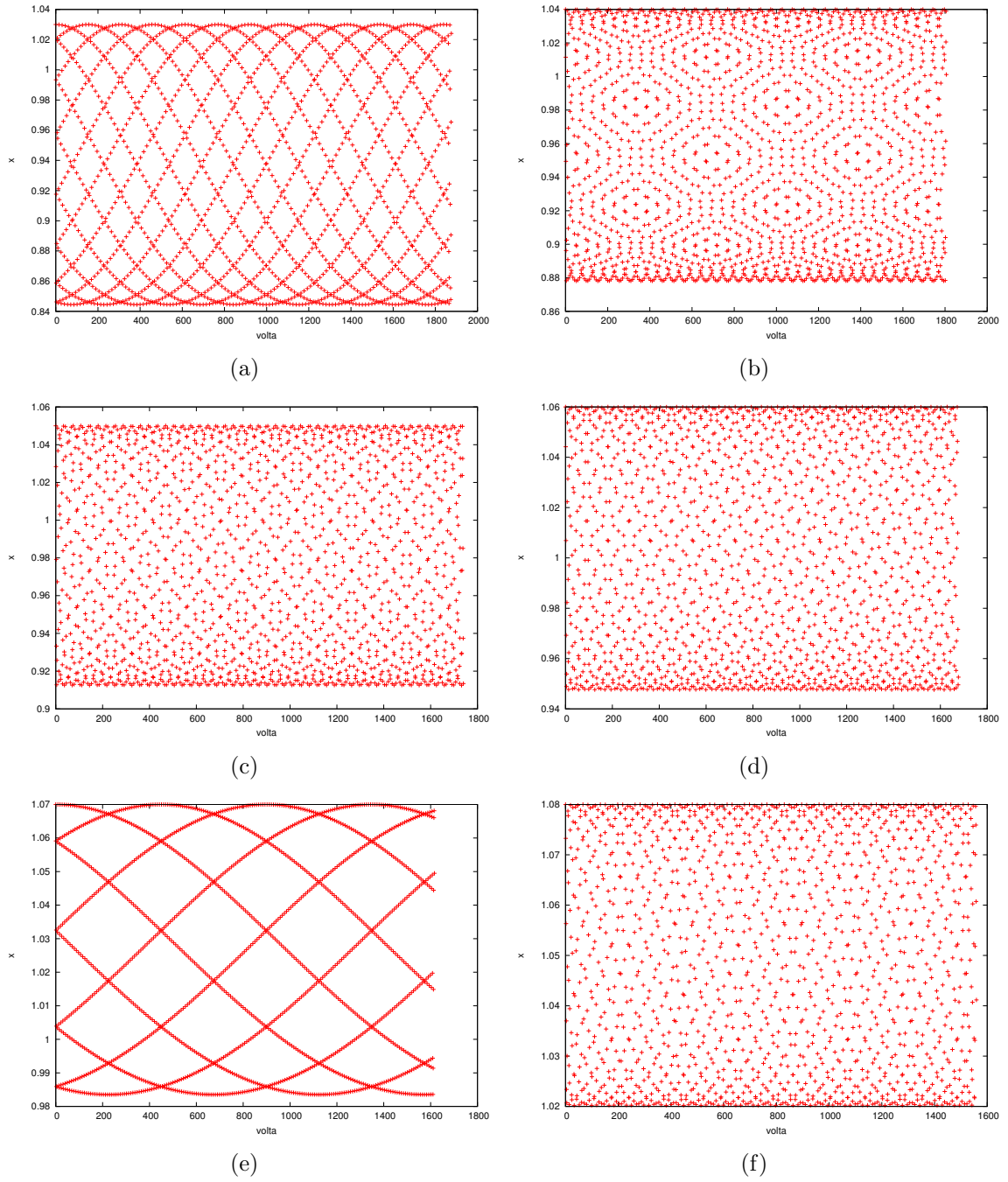


Figura 5.4: Gráficos da posição em  $x$  pelo número da volta no sistema não perturbado; com posição inicial em  $x$  (a)  $x = 1,03$ , (b)  $x = 1,04$ , (c)  $x = 1,05$ , (d)  $x = 1,06$ , (e)  $x = 1,07$  e (f)  $x = 1,08$ .

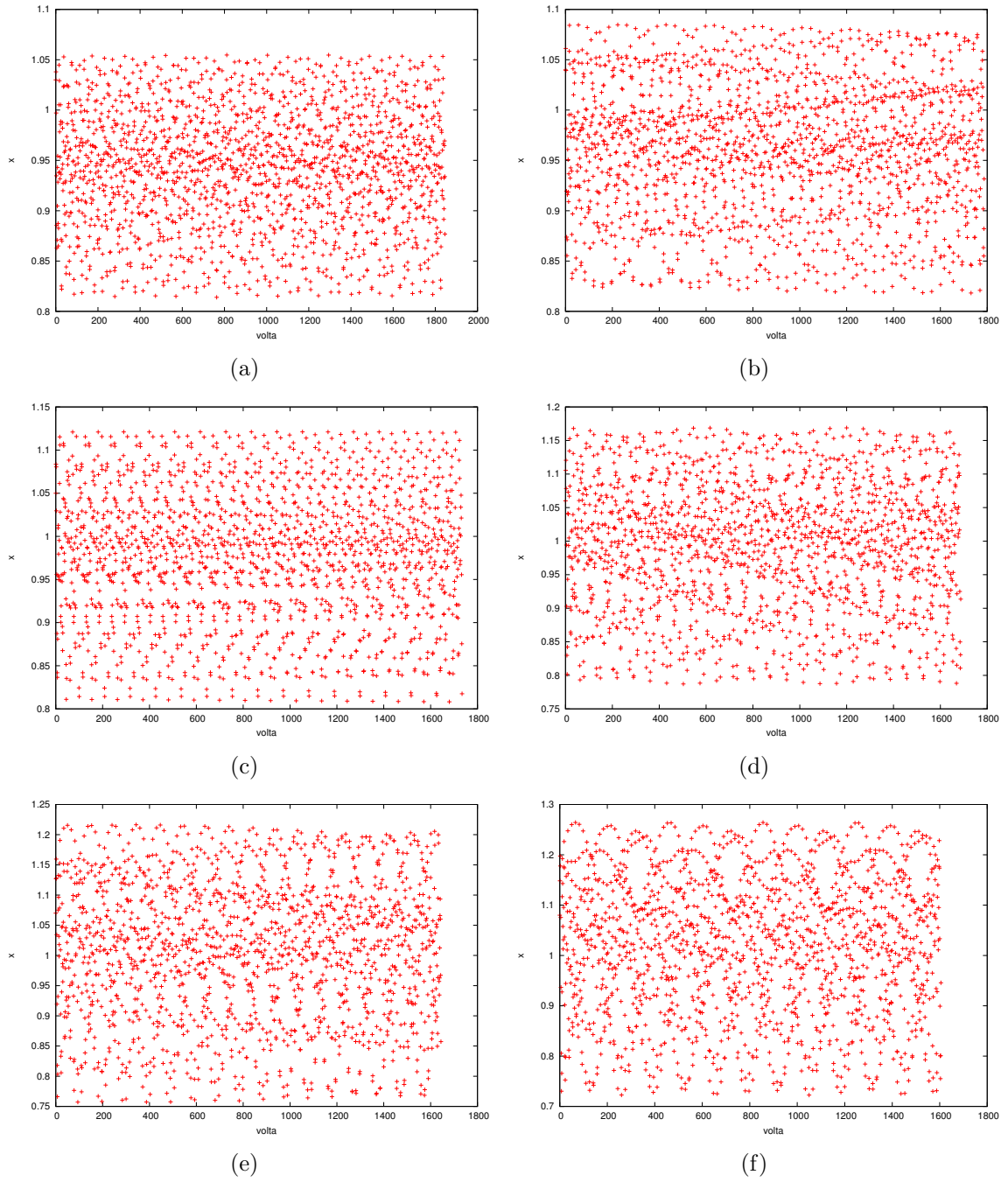


Figura 5.5: Gráficos da posição em  $x$  pelo número da volta no sistema perturbado por  $\frac{r^2}{2}\cos(\Omega t)$ ; com posição inicial em  $x$  (a)  $x = 1,03$ , (b)  $x = 1,04$ , (c)  $x = 1,05$ , (d)  $x = 1,06$ , (e)  $x = 1,07$  e (f)  $x = 1,08$ .

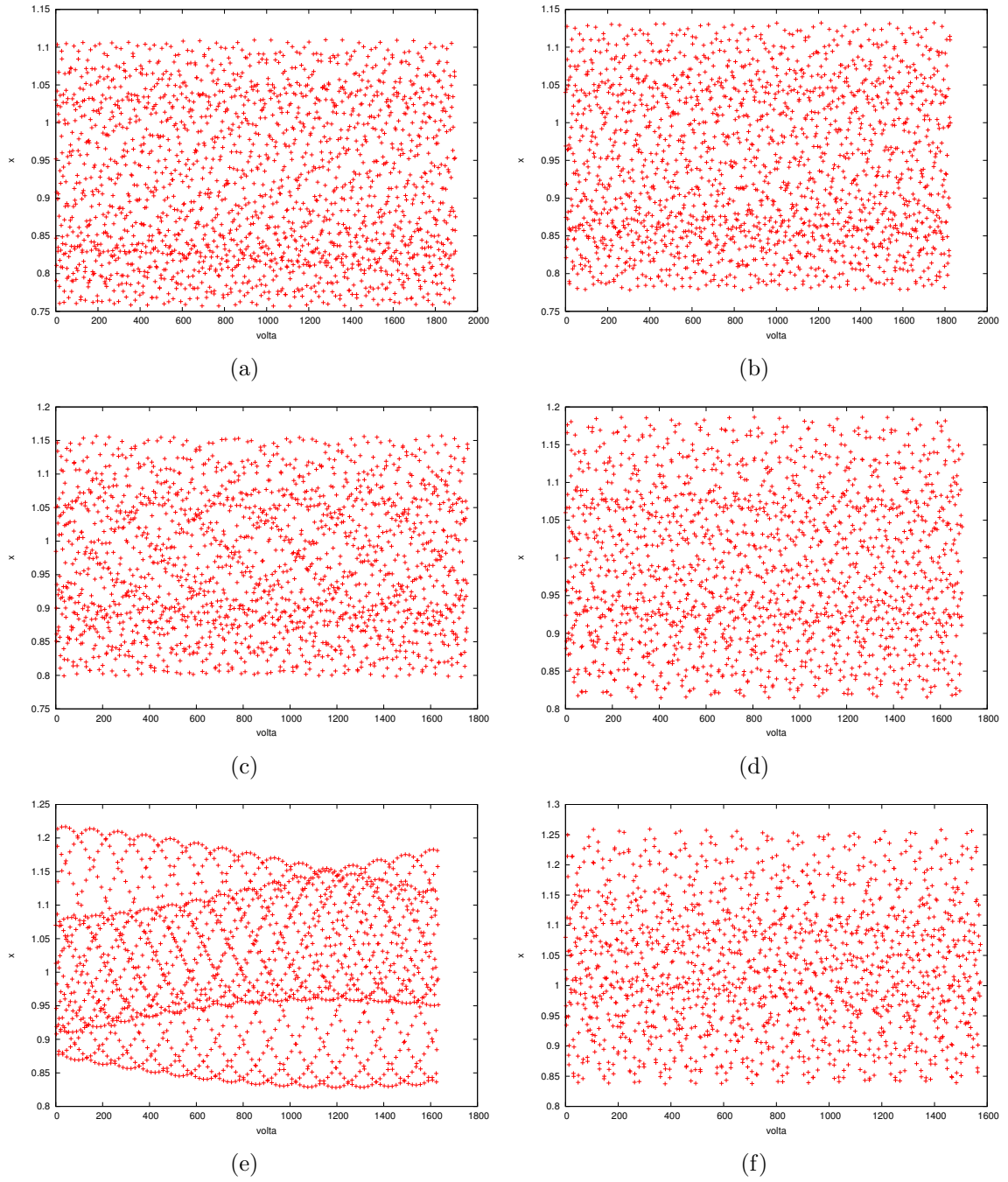


Figura 5.6: Gráficos da posição em  $x$  pelo número da volta no sistema perturbado por  $-\frac{1}{3r}\cos(\Omega t)$ ; com posição inicial em  $x$  (a)  $x = 1,03$ , (b)  $x = 1,04$ , (c)  $x = 1,05$ , (d)  $x = 1,06$ , (e)  $x = 1,07$  e (f)  $x = 1,08$ .



Conforme pode ser visto nos gráficos dos sistemas perturbados, a introdução da função de uma perturbação no sistema (5.8) afeta consideravelmente a órbita da partícula teste, considerando que, antes, no sistema não perturbado, a partícula cruzava o semi-eixo positivo dos  $x$  somente em valores menores ou iguais ao  $x$  inicial, e após a introdução da perurbação, a partícula cruza este semi-eixo em valores maiores e menores que o  $x$  inicial. Além disso, a distância entre o maior e o menor valor no qual a partícula cruza o semi-eixo positivo dos  $x$  no sistema não perturbado diminui conforme aumenta-se o valor de  $x$  inicial, comportamento esse que não se repete nos sitemas perturbados.

## 6 Considerações Finais

Conclui-se, através deste trabalho que o Método de Melnikov é realmente uma ferramenta poderosa para a classificação de sistemas caóticos, no entanto, os requisitos que o sistema tem que cumprir tornam a sua aplicação bastante restrita - órbitas homoclínicas com uma família de órbitas periódicas associadas e uma função perturbadora periódica não são facilmente encontráveis em problemas físicos - além disso, há também o fato de que a função de Melnikov é, por si só, difícil de ser calculada analiticamente - neste trabalho mesmo, a única obtenção de uma expressão direta para a função de Melnikov foi no exemplo do capítulo 3; nas aplicações motivadas por problemas físicos, foram utilizados outros meios para que o método de Melnikov pudesse ser aplicado (integração numérica e análise de gráficos) - no entanto, uma vez que o sistema possua todos os pré-requisitos e a função de Melnikov possa ser aplicada, o método garante (sem a necessidade de qualquer implementação computacional, sujeita a erros) que o sistema é caótico ou não.

O método de Melnikov estudado neste trabalho só pode ser aplicado a sistemas bidimensionais. Há vários trabalhos presentes na literatura que buscam generalizá-lo em vários sentidos: perturbações não periódicas; perturbações de tempo finito; dimensões maiores; entre outras, sendo assim, perspectivas para a continuação deste trabalho seguem nesta linha de generalizações.

## Referências Bibliográficas

- Burden, R. L.; Faires, J. D. **Análise Numérica**. Cengage Learning Editores, 2008.
- Castilho, C.; Marchesin, M. A practical use of the Melnikov homoclinic method. **Journal of Mathematical Physics**, v.50, n.11, p. 112704, Nov. 2009.
- Collins II, G. W. **The Foundations of Celestial Mechanics**. Case Western Reserve University, 2004.
- Eshagh, M.; Najafi-Alamdari, M. Perturbations in orbital elements of a low earth orbiting (leo) satellite. **Journal of the Earth and Space Physics**, v.33, n.1, p. 1–12, 2007.
- Guckenheimer, J.; Holmes, P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**. Número vol. 42 em Applied Mathematical Sciences. Springer, 1983.
- Letelier, P. S.; Vieira, W. M. Chaos in periodically perturbed monopole + quadrupole like potentials. **Physics Letters A**, v.242, p. 7–12, Feb 1998.
- Panfilov, A. **Qualitative analysis of differential equations**, 2010.
- Perko, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2001.
- Silva, L. C. **Método de melnikov generalizado e aplicações**. 2011. Dissertação de mestrado - Departamento de Matemática - Universidade Federal de Viçosa.
- Sotomayor, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Projecto Euclides. Inst. de matemática pura e aplicada, 1979.
- Volchan, S. **Uma introdução à mecânica celeste**. IMPA, 2007.