

Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Matemática

Gisele Teixeira Paula

*Domínios Fundamentais para Grupos
Fuchsianos*

Juiz de Fora

2013

Gisele Teixeira Paula

***Domínios Fundamentais para Grupos
Fuchsianos***

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2013

Teixeira Paula, Gisele.

Domínios Fundamentais para Grupos Fuchsianos / Teixeira Paula, Gisele. - 2013.
58f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de
Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Geometria Hiperbólica.
I. Título.

CDU 51

Gisele Teixeira Paula

Domínios Fundamentais para Grupos Fuchsianos

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
(Orientador)
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Laércio José dos Santos
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Juiz de Fora, 12 de abril de 2013.

Para meu pai e minha mãe, José e Célia.

Agradecimentos

- A Deus, pois é Ele quem me dá forças;
- Aos meus pais, Célia e José, e minhas irmãs, Gabriela e Rafaela, por serem pessoas sempre presentes na minha vida, me apoiando em qualquer decisão que eu tome;
- Ao Roberto, pelo companheirismo e pela força;
- A toda a minha família pelo apoio e torcida que deles recebo sempre;
- Aos amigos, pelo suporte e apoio que sempre encontrei nas horas em que achava que não daria conta;
- Ao Professor Sérgio pela generosidade e pela paciência com que me orientou nesse trabalho;
- Aos professores do Departamento de matemática, especialmente aos professores Luis Fernando Crocco Afonso e Laércio José dos Santos, pela participação na banca examinadora;
- A todos um muito obrigada!

Sumário

Introdução	p. 8
1 Transformações de Möbius em \mathbb{R}^n	p. 9
1.1 Grupo de Möbius	p. 9
1.2 Propriedades das Transformações de Möbius	p. 10
1.3 Extensão de Poincaré	p. 12
1.4 Aplicações em \mathbb{B}^{n+1}	p. 13
2 Transformações de Möbius em \mathbb{C}	p. 15
2.1 Representação Matricial	p. 15
2.2 Classificação das Transformações de Möbius	p. 17
2.3 Classes de conjugação	p. 17
2.4 Alguns resultados sobre a razão cruzada	p. 20
3 Subgrupos Discretos de \mathcal{M}	p. 22
3.1 Os grupos Elementares	p. 22
3.1.1 Classificação dos grupos elementares	p. 23
3.1.2 Grupos com um disco invariante	p. 23
3.2 Grupos Descontínuos	p. 24
4 Domínios Fundamentais	p. 28
4.1 Domínios Fundamentais Localmente Finitos	p. 30
4.2 Polígonos fundamentais convexos	p. 40

4.3 O polígono de Dirichlet p. 47

Referências

p. 56

Introdução

Neste trabalho, fazemos um estudo da ação de um Grupo Fuchsiano de Transformações de Möbius sobre o espaço hiperbólico.

Para tal, definimos primeiramente o que são tais transformações, vemos como é sua ação em subconjuntos de \mathbb{H}^2 e fazemos uma classificação das mesmas de acordo com esta ação, principalmente com relação ao número de pontos fixos em \mathbb{H}^2 ou na sua fronteira.

Todas estas definições e resultados se encontram nas seções 2 e 3 do trabalho. Uma discussão mais detalhada e as demonstrações dos teoremas e proposições dessas seções podem ser encontradas nos capítulos 3 e 4 de [1].

Em seguida, na seção 4, discutimos a ação de subgrupos discretos do grupo de transformações de Möbius em \mathbb{H}^2 . Definimos também grupos elementares e citamos alguns resultados sobre tais grupos, cujas demonstrações são encontradas no capítulo 5 de [1].

Por fim, chegamos à definição de grupos Fuchsianos e de domínios fundamentais para esses grupos. Fazemos então alguns resultados e um exemplo importante de domínio fundamental para um dado grupo Fuchsiano, o seu Polígono de Dirichlet.

Para uma introdução à geometria hiperbólica e ao estudo da ação de um grupo sobre um espaço topológico, o leitor pode consultar [2].

1 Transformações de Möbius em \mathbb{R}^n

1.1 Grupo de Möbius

A esfera $S(a, r)$ em \mathbb{R}^n é dada por $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}$, onde $r > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1. A inversão na esfera $S(a, r)$ é dada por

$$\phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a).$$

É claro que ϕ não está definida para $x = a$ e isto é recuperado adicionando-se a \mathbb{R}^n um ponto extra, não pertencente a \mathbb{R}^n , que chamamos ∞ . Formamos, então, a união $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Definindo $\phi(a) = \infty$ e $\phi(\infty) = a$, temos que ϕ é uma bijeção de $\hat{\mathbb{R}}^n$ sobre si mesmo. Além disso, ϕ satisfaz $\phi^{-1} = \phi$.

Chamamos de plano (hiperplano) em \mathbb{R}^n um conjunto da forma

$$P(a, t) = x \in \mathbb{R}^n; \langle x, a \rangle = t.$$

Definição 2. Definimos a inversão no plano $P(a, t)$, $\psi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} x + 2(t - \langle x, a \rangle) \frac{a}{|a|^2}, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \\ \infty, & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

Assim como ϕ , ψ é uma bijeção de $\hat{\mathbb{R}}^n$ em $\hat{\mathbb{R}}^n$ satisfazendo $\psi^{-1} = \psi$.

Construímos em $\hat{\mathbb{R}}^n$ uma métrica em que estas inversões são contínuas. Esta métrica, chamada métrica da corda é definida por

$$d(x, y) = |\pi(\tilde{x}) - \pi(\tilde{y})|,$$

onde, dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, escrevemos $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e π é a projeção estereográfica de $\hat{\mathbb{R}}^n$ sobre \mathbb{S}^n .

Podemos mostrar que, dados $x, y \in \hat{\mathbb{R}}^n$, vale que

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}}, & \text{se } x, y \neq \infty \\ \frac{2}{1+|x|^2}, & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

Definição 3. Uma Transformação de Möbius em $\hat{\mathbb{R}}^n$ é uma composição de um número finito de inversões (em esferas ou hiperplanos).

Como essas transformações são suas próprias inversas, o conjunto $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ (Grupo Geral de Möbius) das transformações de Möbius é um grupo com a composição de funções.

Teorema 1.1. Toda isometria euclideana de \mathbb{R}^n é uma transformação de Möbius, sendo que é uma composição de no máximo $n + 1$ inversões.

Como um corolário da demonstração do teorema anterior, temos:

Corolário 1.2. Uma função $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria euclideana se, e somente se, é da forma $\phi(x) = Ax + x_0$, onde A é uma matriz ortogonal e $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Definição 4. Uma aplicação $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita conforme se existe $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(p) \neq 0, \forall p \in \mathbb{R}^n$ e $\langle d\phi_x v_1, d\phi_x v_2 \rangle_{\phi(p)} = \langle v_1, v_2 \rangle_p \cdot \lambda^2(x)$.

Teorema 1.3. Toda reflexão é conforme e inverte orientação.

Definição 5. O Grupo de Möbius, $M(\hat{\mathbb{R}}^n)$ agindo em $\hat{\mathbb{R}}^n$ é o subgrupo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ consistindo de todas as transformações de Möbius que preservam orientação.

1.2 Propriedades das Transformações de Möbius

Denominamos *esferas* em $\hat{\mathbb{R}}^n$ as esferas euclidianas $S(a, r)$ e os hiperplanos $P(a, t)$.

A equação geral de uma esfera em $\hat{\mathbb{R}}^n$ é dada por:

$$\Sigma = a_0|x|^2 - 2\langle x, a \rangle + a_{n+1} = 0$$

e dizemos que os coeficientes vetoriais de Σ são $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})$.

Note que se $a_0 = 0$, então $-2\langle x, a \rangle + a_{n+1} = 0 \Rightarrow \langle x, a \rangle = \frac{a_{n+1}}{2}$. Logo Σ é um hiperplano.

Teorema 1.4. Sejam $\phi \in M(\hat{\mathbb{R}}^n)$ e Σ uma esfera em $\hat{\mathbb{R}}^n$. Então $\phi(\Sigma)$ é uma esfera (generalizada).

Definição 6. Definimos o produto inversivo de duas esferas,

$$\Sigma = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \text{ e } \Sigma' = (b_0, b_1, \dots, b_{n+1}),$$

por

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2 \langle a, b \rangle - a_0 b_{n+1} - b_0 a_{n+1}|}{2 \sqrt{|a|^2 - a_0 a_{n+1}} \sqrt{|b|^2 - b_0 b_{n+1}}}$$

No caso em que Σ e Σ' se intersectam, então o produto inversivo (Σ, Σ') representa o módulo do cosseno de um dos ângulos de intersecção.

Teorema 1.5. Para toda Transformação de Möbius ϕ e quaisquer esferas Σ e Σ' , temos:

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma'),$$

ou seja, transformações de Möbius preservam o produto inversivo.

Teorema 1.6. Seja Σ uma esfera e σ a inversão em Σ . Se ϕ é uma transformação de Möbius que fixa os pontos de Σ , isto é, $\phi(x) = x, \forall x \in \Sigma$ então ou $\phi = \sigma$, ou $\phi = Id$.

Corolário 1.7. Duas inversões quaisquer em $\hat{\mathbb{R}}^n$ são conjugadas. Isto é, se σ_1, σ_2 são inversões em $\hat{\mathbb{R}}^n$, então existe $\phi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ tal que $\sigma_2 = \phi \sigma_1 \phi^{-1}$

Alternativamente, podemos reformular o Teorema anterior da seguinte forma:

Seja Σ uma esfera em $\hat{\mathbb{R}}^n$ e σ a reflexão nesta esfera. Dizemos que x e y são pontos inversos com relação a Σ se, e somente se, $\sigma(x) = y$. Se x e y são pontos inversos com relação a Σ e ϕ é uma transformação de Möbius, então $\phi(x)$ e $\phi(y)$ são pontos inversos em relação à esfera $\phi(\Sigma)$. A prova é devida ao fato de todas as inversões serem conjugadas.

Definição 7. Definimos a Razão Cruzada dos pontos distintos $x, y, u, v \in \hat{\mathbb{R}}^n$ por

$$[x, y, u, v] = \begin{cases} \frac{|x-u||y-v|}{|x-y||u-v|}, & \text{se } x, y, u, v \in \mathbb{R}^n \\ \frac{|x-u|}{|u-v|}, & \text{se } y = \infty \end{cases}$$

Teorema 1.8. Uma aplicação $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ é uma transformação de Möbius se, e somente se, preserva a razão cruzada.

Um teorema simples, porém muito útil será demonstrado a seguir:

Teorema 1.9. Dados três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^n$, existe única transformação de Möbius f tal que

$$f(z_1) = 0, f(z_2) = \infty \text{ e } f(z_3) = 1.$$

Demonastração. Para mostrar a existência, basta considerarmos $f(z) = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}$.

Suponha que existam f, g transformações de Möbius tais que $f(z_1) = g(z_1) = 0$, $f(z_2) = g(z_2) = \infty$ e $f(z_3) = g(z_3) = 1$. Então fg^{-1} fixa 3 pontos, $0, 1, \infty \in \hat{\mathbb{C}}$.

Logo, $fg^{-1} = Id$, ou seja, $f = g$. □

Assim, se precisamos estudar o comportamento de alguma transformação de Möbius em três pontos quaisquer, podemos “levar” o problema para os pontos mais fáceis de se estudar.

1.3 Extensão de Poincaré

Poincaré notou que toda transformação de Möbius ϕ agindo em $\hat{\mathbb{R}}^n$ possui uma extensão natural $\tilde{\phi}$ agindo em $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ e, assim, podemos enxergar $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ como um subgrupo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$. Basta para isto considerarmos a imersão $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0)$. Esta extensão age da seguinte forma:

- Se ϕ é a inversão em $S(a, r)$, então $\tilde{\phi}$ é a inversão em $S(\tilde{a}, r)$;
- Se ψ é a inversão em $P(a, t)$, então $\tilde{\psi}$ é a inversão em $P(\tilde{a}, t)$;
- Para toda transformação de Möbius ϕ , tem-se: $\tilde{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0)$.

Isto é, se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \hat{\mathbb{R}}^n$ e $y = \phi(x)$, então

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \tilde{\phi}(x_1, \dots, x_n, 0) = (y_1, \dots, y_n, 0) = \tilde{y} := \widetilde{\phi(x)}$$

Note que $\tilde{\phi}$ deixa invariante o plano $x_{n+1} = 0$, bem como os semi-espacos $\{x_{n+1} > 0\}$ e $\{x_{n+1} < 0\}$.

Como toda Transformação de Möbius ϕ agindo em $\hat{\mathbb{R}}^n$ é a composição de um número finito de inversões, digamos $\phi = \phi_1, \dots, \phi_m$, existe pelo menos uma transformação $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 \circ \dots \circ \tilde{\phi}_m$, que extende a ação de ϕ a $\hat{\mathbb{R}}^{n+1}$ da forma descrita acima e que preserva

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}); x_{n+1} > 0\}.$$

Na verdade, podemos ver que $\tilde{\phi}$ é única com essa propriedade. De fato, se ψ_1 e ψ_2 são duas dessas extensões, então $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ preserva \mathbb{H}^2 e fixa cada ponto de sua fronteira. Como consequência do Teorema 1.6, $\psi_1 = \psi_2$.

Denominamos $\tilde{\phi}$ por Extensão de Poincaré de ϕ e temos que \sim é um isomorfismo de $GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$ sobre sua imagem em $GM(\hat{\mathbb{R}}^{n+1})$.

Nosso primeiro modelo para o espaço hiperbólico é \mathbb{H}^{n+1} , munido da métrica ρ , dada por:

$$\cosh(\rho(x, y)) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}.$$

Proposição 1.10. A enxtensão de Poincaré preserva a expressão $\frac{|x-y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}$. Logo, preserva a distância hiperbólica entre dois pontos de $\hat{\mathbb{R}}^n$.

Concluímos que as transformações de Möbius são isometrias hiperbólicas.

1.4 Aplicações em \mathbb{B}^{n+1}

Seja $\mathbb{B}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| \leq 1\}$ a bola fechada de raio 1 em \mathbb{R}^n . Considere ϕ_0 a inversão na esfera $S(e^{n+1}, \sqrt{2})$. Temos que

$$\phi_0(x) = e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2} \text{ e } \phi_0|_{\{x_{n+1}=0\}} = \pi,$$

onde π é a projeção estereográfica.

Além disto, podemos ver, por um simples cálculo, que $|\phi_0(x)|^2 = 1 + \frac{4x_{n+1}}{|x - e_{n+1}|^2}$. Daí, se $x_{n+1} > 0$, então $|\phi_0(x)|^2 > 1$ e $\phi_0(x)$ está fora de \mathbb{B}^{n+1} . Caso $x_{n+1} < 0$, então $|\phi_0(x)|^2 < 1$ e $\phi_0(x)$ está no interior de \mathbb{B}^{n+1} .

Sendo σ a inversão em $\{x_{n+1} = 0\}$, temos que, se $\phi = \phi_0 \circ \sigma$, então $\phi(\mathbb{B}^{n+1}) = \mathbb{B}^{n+1}$ e ϕ induz uma métrica em \mathbb{B}^{n+1} :

$$ds = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}.$$

Pode-se ver mais informações sobre essa métrica no capítulo 7 de [1].

Além disso, as isometrias ψ de \mathbb{H}^{n+1} são identificadas com as isometrias de \mathbb{B}^{n+1} , com essa métrica, através de $\psi \mapsto \phi\psi\phi^{-1}$.

Teorema 1.11. Seja ϕ uma transformação de Möbius tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$. Então $\phi(x) = Ax$, para alguma matriz ortogonal A .

Teorema 1.12. Seja σ a reflexão na esfera $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:

1. $S(a, r)$ é ortogonal à esfera \mathbb{S}^{n-1} ;
2. $\sigma(a^*) = 0$ (ou $\sigma(0) = a^*$, onde $a^* = \frac{a}{|a|}$);
3. $\sigma(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$.

Teorema 1.13. (Forma Geral de uma Transformação de Möbius). Seja $\phi : \hat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ uma Transformação de Möbius. Temos:

1. Se $\phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{B}^n$, então $\phi(x) = Ax$ ou $\phi(x) = A(\sigma(x))$, onde A é uma matriz ortogonal e σ é a inversão em alguma esfera ortogonal a \mathbb{S}^{n-1} ;
2. Se $\phi(\infty) = \infty$, então $\phi(x) = rA(x) + x_0$, onde $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz ortogonal;
3. Se $\phi(\infty) \neq \infty$, então $\phi(x) = rA(\sigma(x)) + x_0$, onde $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, σ é a inversão em alguma esfera ortogonal a \mathbb{S}^{n-1} e A é uma matriz ortogonal.

2 Transformações de Möbius em \mathbb{C}

2.1 Representação Matricial

Denominamos por $\hat{\mathbb{C}}$ o conjunto $\hat{\mathbb{R}}^2$, que é identificado naturalmente com $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definição 8. Uma transformação racional linear é uma função $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

T está definida para todo $z \neq \frac{-d}{c}$ em \mathbb{C} no caso em que $c \neq 0$ e para todo $z \in \mathbb{C}$, caso $c = 0$ (aqui, $T(z) = a'z + b'$, com $a', b' \in \mathbb{C}$).

Se $c = 0$, T é claramente linear e bijetora. Se $c \neq 0$, T é injetora caso $ad - bc \neq 0$. É fácil ver que neste caso T também admite inversa e T^{-1} é também uma transformação racional linear.

Estendemos T a $\hat{\mathbb{C}}$ da seguinte forma:

$$T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{se } z \neq \frac{-d}{c}; \\ \infty, & \text{se } z = \frac{-d}{c}; \\ \frac{a}{c}, & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Assim definida, T é um homeomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ sobre $\hat{\mathbb{C}}$ e o conjunto desses homeomorfismos forma um grupo com a composição de funções.

Representamos cada transformação $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ por uma matriz da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Teorema 2.1. $\mathcal{M} = \{T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; ad - bc \neq 0\} = M(\hat{\mathbb{R}}^2)$.

Definição 9. Uma matriz em $GL(2, \mathbb{C})$ (conjunto das matrizes 2×2 complexas com determinante não nulo) é dita unitária se $AA^* = Id$, onde $A^* = \overline{A}^t$.

Chamamos de $SU(2, \mathbb{C})$ o conjunto das matrizes unitárias com determinante 1.

Podemos olhar para $GL(2, \mathbb{C})$ com a norma:

$$\|A\|^2 = \text{tr}(AA^*) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2.$$

Esta norma induz naturalmente uma métrica em $GL(2, \mathbb{C})$, onde $d(A, B)$ é definida por $\|A - B\|$.

Teorema 2.2. Seja $A \in SL(2, \mathbb{C})$ (uma matriz de determinante 1). Então são equivalentes:

1. $A \in SU(2, \mathbb{C})$;
2. $\|A\|^2 = 2$;
3. A é da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{C}$, isto é, A é um quatérnio.

Considere $\Phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}$ dada por

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T(z) := \frac{az + b}{cz + d}.$$

É fácil ver que Φ é um homomorfismo de grupos, sobrejetor (pois as matrizes em \mathcal{M} são invertíveis), e temos também que

$$\text{Ker}(\Phi) = \{a \cdot \text{Id}; a \in \mathbb{C}\}.$$

De fato, se $\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{Id}$, então temos

$$\begin{cases} T(0) = \frac{b}{d} = 0 \implies b = 0 \\ T(\infty) = \frac{a}{c} = \infty \implies c = 0 \\ T(1) = 1 \implies a + b = c + d \implies a = d. \end{cases}$$

Podemos usar o Teorema do Homomorfismo para concluir que

$$\frac{GL(2, \mathbb{C})}{\{a \cdot \text{Id}; a \in \mathbb{C}\}} \simeq \mathcal{M}$$

Restringindo Φ a $SL(2, \mathbb{C})$, temos que $Ker(\Phi) = \{Id, -Id\}$ e, daí,

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{-Id, Id\}} \simeq \mathcal{M}$$

As duas funções $\frac{tr^2(A)}{\det A}$ e $\frac{\|A\|^2}{|\det(A)|}$ são invariantes sob a função $A \mapsto \lambda A$, para todo $\lambda \neq 0$ e toda $A \in GL(2, \mathbb{C})$. Definimos então, para $g \in \mathcal{M}$ as funções

$$tr^2(g) = \frac{tr^2(A)}{\det A} \text{ e } \|g\|^2 = \frac{\|A\|^2}{|\det(A)|},$$

onde A é qualquer representante de g em $\frac{GL(2, \mathbb{C})}{\{a \cdot Id; a \in \mathbb{C}\}}$.

2.2 Classificação das Transformações de Möbius

Façamos uma análise sobre os pontos fixos de transformações de Möbius.

- Se $c = 0$, $g(\infty) = \infty$. Logo, ∞ é ponto fixo de g em $\hat{\mathbb{C}}$.
- Se $c \neq 0$, então $g(\frac{-d}{c}) = \infty$ e $g(\infty) = \frac{a}{c}$. Logo os únicos pontos fixos possíveis estão em \mathbb{C} . Temos que $g(z) = z \Leftrightarrow az + b = (cz + d)z \Leftrightarrow cz^2 - (a - d)z - b = 0$ (*). Logo g tem no máximo 2 pontos fixos em \mathbb{C} .
- No caso de $c = 0$, temos $(*) \Leftrightarrow -(a - d)z = b$. Assim, caso $a \neq d$, $z = \frac{-b}{a-d}$ é o único ponto fixo de g em \mathbb{C} .
- Se $c = 0$ e $a = d$, então $g(z) = z + \frac{b}{d}$, isto é, g é uma translação. Logo, o único ponto fixo de g em $\hat{\mathbb{C}}$ é ∞ .

Portanto, toda função $g \in \mathcal{M}$ possui um ou dois pontos fixos em $\hat{\mathbb{C}}$.

2.3 Classes de conjugação

Defina em \mathcal{M} a seguinte relação de equivalência:

$$f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \sim g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{M}, \text{ com } f = hgh^{-1}.$$

Definição 10. Chamamos de $Fix(g)$ o conjunto $\{z \in \hat{\mathbb{C}}; g(z) = z\}$.

Se $g \neq Id$, então $Fix(g)$ tem 1 ou 2 elementos.

Sejam $z \in Fix(g)$ e $f = hgh^{-1}$, com $h \in \mathcal{M}$. Temos:

$$f(h(z)) = hgh^{-1}(h(z)) = h(z).$$

Logo, $z \in Fix(g) \Rightarrow h(z) \in Fix(f)$.

Reciprocamente,

$$f(z) = z \Rightarrow hgh^{-1}(z) = z \Rightarrow g(h^{-1}(z)) = h^{-1}(z).$$

Concluímos que se $f \sim g$, então $Fix(f) = h(Fix(g))$, onde $h \in \mathcal{M}$ é tal que $f = hgh^{-1}$.

Definição 11. Definimos as transformações-padrão $m_k : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ por:

$$\begin{cases} m_1(z) = z + 1 \\ m_k(z) = kz, \quad \text{se } k \neq 1, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Temos que $\forall k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, vale que $tr^2(m_k) = k + 2 + \frac{1}{k}$.

Teorema 2.3. Sejam $f, g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$. Então $f \sim g$ se, e somente se, $tr^2(f) = tr^2(g)$.

Olhemos agora para as extensões de Poincaré das transformações-padrão m_k em $\hat{\mathbb{R}}^3$. Escrevemos cada elemento em $\hat{\mathbb{R}}^3$ na forma $z + t \cdot j$, onde j é o terceiro vetor canônico na base ordenada de \mathbb{R}^3 . Temos então:

$$\begin{cases} m_1(z + tj) = z + 1 + tj \\ m_k(z + tj) = kz + |k|tj, \quad \text{se } k \neq 1, k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Temos então que se $k = 1$, m_k fixa somente ∞ em $\hat{\mathbb{R}}^3$. Se $|k| \neq 1$, m_k fixa apenas os pontos $\{0, \infty\}$. Já no caso em que $k \neq 1$, mas $|k| = 1$, então m_k fixa todos os pontos do eixo $\{tj; t \in \mathbb{R}\}$, além de ∞ .

Definição 12. Seja $g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$. Então:

1. g é dita PARABÓLICA quando fixa exatamente um ponto em $\hat{\mathbb{R}}^3$
($g \sim m_1$);
2. g é dita LOXODRÔMICA quando fixa exatamente dois pontos em $\hat{\mathbb{R}}^3$
($g \sim m_k; |k| \neq 1$);
3. g é dita ELÍPTICA quando fixa infinitos pontos em $\hat{\mathbb{R}}^3$
($g \sim m_1$, com $|k| = 1, k \neq 1$).

Definição 13. Seja $g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$ loxodrômica. Então g é dita HIPERBÓLICA quando existe um disco D (generalizado) tal que $g(D) = D$. Caso contrário, g é dita NÃO-HIPERBÓLICA ou ESTRITAMENTE LOXODRÔMICA.

Obs.: g é hiperbólica $\Leftrightarrow g \sim m_k$, onde $k \in \mathbb{R}, k \neq 1$ e $k > 0$.

Teorema 2.4. Seja $g \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$. Então:

1. g é parabólica $\Leftrightarrow \text{tr}^2(g) = 4$;
2. g é elíptica $\Leftrightarrow \text{tr}^2(g) \in [0, 4)$;
3. g é hiperbólica $\Leftrightarrow \text{tr}^2(g) \in (4, +\infty)$;
4. g é estritamente loxodrômica $\Leftrightarrow \text{tr}^2(g) \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Definimos o comutador de g e h em \mathcal{M} por $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Se A e B são matrizes em $SL(2, \mathbb{C})$ representando g e h , respectivamente, então $\text{tr}[g, h] = \text{tr}[ABA^{-1}B^{-1}]$.

Teorema 2.5. (i) Duas transformações de Möbius g e h tem ponto fixo em comum em $\hat{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $\text{tr}[g, h] = 2$;

(ii) Se g e h tem um ponto fixo em comum em $\hat{\mathbb{C}}$, então ocorre uma das duas opções:

1. $[g, h] = Id$ e daí $gh = hg \Rightarrow \text{Fix}(h) = \text{Fix}(g)$;
2. $[g, h]$ é parabólico e $\text{Fix}(g) \neq \text{Fix}(h)$.

Teorema 2.6. Sejam $g, h \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$. São equivalentes:

- (i) $gh = hg$;
- (ii) $h(\text{Fix}(g)) = \text{Fix}(g)$ e $g(\text{Fix}(h)) = \text{Fix}(h)$;
- (iii) $\text{Fix}(g) = \text{Fix}(h)$ ou g e h tem um ponto fixo em comum em \mathbb{H}^3 , com $g^2 = h^2 = (gh)^2 = Id$ e $\text{Fix}(g) \cap \text{Fix}(h) = \emptyset$.

Teorema 2.7. Um subgrupo $G \subset \mathcal{M}$ possui somente elementos elípticos (além da identidade) \Leftrightarrow todos os elementos de G possuem um ponto fixo comum em \mathbb{H}^3 .

Lema 2.8. Suponha que g, h e gh são elementos elípticos. Então os pontos fixos de g e h estão em um mesmo círculo em $\hat{\mathbb{C}}$. Além disto, se $[g, h] = Id$ ou se $[g, h]$ for elíptico, então g e h tem um ponto fixo comum em \mathbb{H}^3 .

Definição 14. Definimos o Eixo de um elemento elíptico $g \in \mathcal{M}$, com $Fix(g) = \{\alpha, \beta\}$, por:

$$A_g = \{z + tj \in \mathbb{H}^3 \text{ tal que } g(z + tj) = z + tj\}.$$

Temos que o eixo de g é o semi-círculo ortogonal a $\hat{\mathbb{C}}$ que passa por α e β (equivalente, é a geodésica de \mathbb{H}^3 passando por α e β).

Lema 2.9. Sejam $g, h \in \mathcal{M}$ transformações de Möbius que preservam \mathbb{B}^3 e fixam a origem. Então ocorre uma das opções:

1. Os elementos de $\langle g, h \rangle$ tem o mesmo eixo (e os mesmos pontos fixos);
2. Existe $f \in \langle g, h \rangle$ tal que A_g, A_h e A_f são coplanares.

2.4 Alguns resultados sobre a razão cruzada

Voltemos à Razão Cruzada, definida anteriormente. Temos que, para $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Sua extensão a $\hat{\mathbb{C}}$ é dada por

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

Temos também que a razão cruzada é invariante por transformações de Möbius. De fato, se $g \in \mathcal{M}$ é tal que $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$, então:

$$g(z) - g(w) = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} = \frac{bcw - adw - bcz + adz}{(cz+d)(cw+d)} = \frac{(z-w)(ad-bc)}{(cz+d)(cw+d)}.$$

Daí:

$$\begin{aligned} [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] &= \frac{(g(z_1) - g(z_3))(g(z_2) - g(z_4))}{(g(z_1) - g(z_2))(g(z_3) - g(z_4))} = \\ &= \frac{\left[\frac{(z_1 - z_3)(ad-bc)}{(cz_1+d)(cz_3+d)} \right] \cdot \left[\frac{(z_2 - z_4)(ad-bc)}{(cz_2+d)(cz_4+d)} \right]}{\left[\frac{(z_1 - z_2)(ad-bc)}{(cz_1+d)(cz_2+d)} \right] \left[\frac{(z_3 - z_4)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_4+d)} \right]} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]. \end{aligned}$$

Portanto, se queremos encontrar o valor de $[z_1, z_2, z_3, z_4]$, basta tomarmos $g \in \mathcal{M}$ tal que $g(z_1) = 0, g(z_2) = 1, g(z_4) = \infty$. Logo, $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [0, 1, g(z_3), \infty] = g(z_3)$.

Por outro lado, se $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, então podemos encontrar $g \in \mathcal{M}$ tal que $g(z_i) = w_i$. De fato, sabemos que existem $f, h \in \mathcal{M}$ tais que:

$$f : \begin{cases} z_1 \mapsto 0 \\ z_2 \mapsto 1 \\ z_4 \mapsto \infty \end{cases} \quad \text{e} \quad h : \begin{cases} w_1 \mapsto 0 \\ w_2 \mapsto 1 \\ w_4 \mapsto \infty \end{cases}.$$

Assim,

$$f(z_3) = [0, 1, f(z_3), \infty] = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4] = [0, 1, h(w_3), \infty] = h(w_3).$$

Portanto, basta tomarmos $g = h^{-1} \circ f$ e o resultado segue.

Proposição 2.10. Temos que $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ estão em um mesmo círculo $\iff [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Considere g tal que

$$g : \begin{cases} z_1 \mapsto 0 \\ z_2 \mapsto 1 \\ z_4 \mapsto \infty \end{cases}.$$

$$\text{Então } g(z_3) = [0, 1, g(z_3), \infty] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Como $0, 1$ e ∞ estão no mesmo círculo (a reta real é um círculo generalizado em $\hat{\mathbb{C}}$), temos que z_1, z_2, z_3, z_4 estão em um mesmo círculo se, e somente se, $g(z_3)$ está no mesmo círculo, em $\hat{\mathbb{C}}$, que as imagens de z_1, z_2 e z_4 , ou seja, se, e somente se, $g(z_3) = [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$. \square

3 Subgrupos Discretos de \mathcal{M}

Estudaremos agora a ação de subgrupos discretos do grupo de Transformações de Möbius sobre subconjuntos de $\hat{\mathbb{C}}$. Vale lembrar que se $G \subset SL(2, \mathbb{C})$, então para toda sequência $\{A_n\} \subset G$, com $A_n \rightarrow X$, devemos ter $A_n = X$ para todo n suficientemente grande. Isto se deve ao fato de Id ser um elemento isolado de $SL(2, \mathbb{C})$, que é um grupo topológico. Daí:

$$A_n A_{n+1}^{-1} \rightarrow XX^{-1} = Id \implies A_n A_{n+1}^{-1} = Id, \forall n \text{ grande} \implies A_n = A_{n+1} \forall n \text{ grande}.$$

Definição 15. Seja G um grupo de homeomorfismos do espaço X .

Dado $x \in X$, definimos o Estabilizador de x por $G_x = \{g \in G; g(x) = x\}$ (observe que $G_x \leq G$).

Definimos também a órbita do elemento x por G pondo $G(x) = \{g(x); g \in G\}$.

Dizemos que dois elementos $x, y \in X$ são equivalentes por G se existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$. Denotamos $x \sim y$.

3.1 Os grupos Elementares

Definição 16. Um subgrupo $G \subset \mathcal{M}$ é dito um GRUPO ELEMENTAR se existe uma G -órbita finita em \mathbb{R}^3 , isto é, se existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $G(x)$ é finito.

Exemplos:

1. O estabilizador G_x de qualquer elemento $x \in X$ é grupo elementar, pois $G_x(x) = \{x\}$;
2. Se $G \leq \mathcal{M}$ é finito, então G é grupo elementar;
3. Todo subgrupo $G \leq \mathcal{M}$ abeliano é elementar. De fato, se fixarmos $g \in G$, então para

todo $h \in G$, como $gh = hg$, segue que $h(Fix(g)) = Fix(g)$. Logo, para $x \in Fix(g)$, temos que $G(x) = Fix(g)$, que é finito pois tem no máximo 2 elementos;

4. Se $G \leq \mathcal{M}$ possui somente elementos elípticos, além da identidade, então G é elementar, pois pelo teorema 2.7, existe $x \in \mathbb{H}^3$ que é ponto fixo comum de todos os elementos de G e, daí, $G(x) = \{x\}$.

3.1.1 Classificação dos grupos elementares

Sejam $G \leq \mathcal{M}$ elementar e $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma órbita finita.

Classificamos agora os grupos elementares de acordo com o número de pontos de alguma órbita finita contida em $\hat{\mathbb{C}}$.

Definição 17. Dizemos que G é um grupo elementar do TIPO 1 se $n \geq 3$ ou $\{x_1, \dots, x_n\} \not\subset \hat{\mathbb{C}}$. Grupos do tipo 1 são aqueles que contém apenas elementos elípticos.

Caso $n = 1$ e $x_1 \in \hat{\mathbb{C}}$, dizemos que G é grupo elementar do TIPO 2. A menos de uma conjugação, podemos supor que $x_1 = \infty$ e, daí, todo elemento de G fixa ∞ . Logo, $g(z) = az + b$, para todo $g \in G$.

Se $n = 2$ e $x_1, x_2 \in \hat{\mathbb{C}}$, G é dito elementar do TIPO 3. Neste caso, a menos de conjugação, podemos supor $x_1 = 0$ e $x_2 = \infty$. Daí, todo $g \in G$ deixa invariante o conjunto $\{0, \infty\}$. Assim, $g \in G$ é do tipo $g(z) = az$, com $g(0) = 0$ e $g(\infty) = \infty$ ou $g(z) = \frac{a}{z}$ sendo, neste caso, $g(0) = \infty$ e $g(\infty) = 0$.

Teorema 3.1. Se $g \in \mathcal{M}$ for loxodrômico e $f \in \mathcal{M}$ possui exatamente um ponto fixo comum com g , então $\langle f, g \rangle$ não é discreto.

Teorema 3.2. Todo subgrupo $G \leq \mathcal{M}$ não-elementar possui infinitos elementos loxodrômicos, que, dois a dois, não tem pontos fixos em comum.

Teorema 3.3. Seja $f \in \mathcal{M} \setminus \{Id\}$, com $f^2 \neq Id$. Defina $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ por $\theta(g) = gfg^{-1}$. Se, para alguns $n \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathcal{M}$, tem-se $\theta^n(g) = f$, então $\langle f, g \rangle$ é elementar e, além disso, $\theta^2(g) = f$.

3.1.2 Grupos com um disco invariante

Teorema 3.4. Seja G um subgrupo não-elementar de \mathcal{M} . Então existe um disco $D \subset \hat{\mathbb{C}}$, G -invariante se, e somente se, G não possui elementos estritamente loxodrômicos. Além

disso, se D é um disco G -invariante, então D e o seu complementar são os únicos discos G -invariantes em $\hat{\mathbb{C}}$.

3.2 Grupos Descontínuos

Seja G um grupo de homeomorfismos de um espaço topológico X . Dizemos que G age descontinuamente em X quando, para todo compacto $K \subset X$, tem-se que $g(K) \cap K = \emptyset$, exceto possivelmente para um número finito de elementos $g \in G$.

Propriedades:

Suponha que G seja um grupo que age descontinuamente em X . Então:

- (i) Todo subgrupo de G age descontinuamente em X ;
- (ii) Se φ é homeomorfismo de X , então $\varphi G \varphi^{-1}$ também age descontinuamente em X ;
- (iii) Se $Y \subset X$ é G -invariante, então G age descontinuamente em Y ;
- (iv) Se $x \in X$ e g_1, \dots, g_n, \dots são elementos distintos de G , então a sequência $\{g_n(x)\}_n$ não converge em X ;
- (v) Se $x \in X$, então o estabilizador de x , G_x , é finito;
- (vi) Em particular, se $X \subset \mathbb{R}^3$, então G é enumerável.

A demonstração do item (iv) se dá notando-se que se supomos $g_n(x) \rightarrow y$, então o conjunto $K = \{x, y, g_1(x), \dots, g_n(x), \dots\}$ é compacto e tal que $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$ para todo n . Logo, G não pode agir descontinuamente em X .

Teorema 3.5. Um subgrupo $G \leq \mathcal{M}$ é discreto se, e somente se, age descontinuamente em \mathbb{H}^3 .

Lema 3.6. Seja $G \leq \mathcal{M}$ e D um aberto de $\hat{\mathbb{C}}$ que contém um ponto fixo de algum elemento $g \in G$ parabólico ou loxodrômico. Então G não age descontinuamente em D .

Lema 3.7. Seja D um disco aberto de $\hat{\mathbb{C}}$ e suponha que $g \in \mathcal{M}$ é tal que $g(\overline{D}) \subset D$. Então g é loxodrômico e possui um ponto fixo em $g(\overline{D})$.

Definição 18. Seja G um subgrupo não-elementar de \mathcal{M} . Definimos o conjunto

$$\Lambda_0 = \{w \in \hat{\mathbb{C}}; \exists g \in G \text{ loxodrômico, com } g(w) = w\}.$$

Dizemos que o conjunto limite de G é $\Lambda(G) = \overline{\Lambda_0}$ e que o conjunto ordinário de G é $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Lambda(G)$.

Note que:

- G não elementar $\Rightarrow \Lambda_0$ é infinito;
- $G \subset G_1 \Rightarrow \Lambda(G) \subset \Lambda(G_1)$ e $\Omega(G) \subset \Omega(G_1)$;
- Λ_0 é G -invariante;
- Daí, $\Lambda(G)$ é G -invariante.

Teorema 3.8. Para qualquer grupo G não-elementar, o conjunto limite $\Lambda(G)$ é o menor fechado não-vazio G -invariante de $\hat{\mathbb{C}}$. Além disso, $\Lambda(G)$ é perfeito (fechado e não possui pontos isolados) e não-enumerável.

Teorema 3.9. Seja $G \subset \mathcal{M}$ um subgrupo não-elementar e sejam U_1, U_2 abertos disjuntos em $\hat{\mathbb{C}}$ que intersectam $\Lambda(G)$. Então existe $g \in G$ loxodrômico, com pontos fixos $\alpha \in U_1$ e $\beta \in U_2$.

Definição 19. Dado $z \in \hat{\mathbb{C}}$ definimos o conjunto limite de z com relação a G por

$$\Lambda(z) = \{w \in \hat{\mathbb{C}}; \exists g_1, \dots, g_n, \dots \in G \text{ distintos tais que } g_n(z) \rightarrow w\}$$

Teorema 3.10. Se $G \subset \mathcal{M}$ for subgrupo não-elementar e discreto, então $\Lambda(G) = \Lambda(z)$ para qualquer $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Teorema 3.11. Seja $G \subset \mathcal{M}$ subgrupo não-elementar e discreto. Então:

- (i) G age descontinuamente em Ω ;
- (ii) Se G age descontinuamente em um aberto $D \subset \hat{\mathbb{C}}$, então $D \subset \Omega$.

Corolário 3.12. Seja $G \subset \mathcal{M}$ subgrupo não-elementar e discreto. Então $\Omega \neq \emptyset$ se, e somente se, $G(z)$ não é denso em $\hat{\mathbb{C}}$ para algum $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Teorema 3.13. Suponha que $G \subset \mathcal{M}$ seja subgrupo não-elementar e discreto. Suponha também que $\Omega \neq \emptyset$. Então, para todo $z \in \Omega$, o estabilizador G_z é cíclico e finito.

Demonsitração. Se G é não-elementar e discreto, então age descontinuamente em Ω . Logo, Ω não contém pontos fixos de elementos parabólicos ou loxodrômicos. Então $G_z \setminus \{Id\}$ possui apenas elementos elípticos, $\forall z \in \Omega$. Daí, G_z é elementar do tipo 1 e, sendo discreto, é então cíclico e finito.

De fato, se G é elementar do tipo 1 e discreto, então G possui somente elementos elípticos e podemos supor que todo elemento de G fixe $j \in \mathbb{H}^3$. Logo, $\|g\|^2 = 2, \forall g \in G$. Assim, G é limitado e, sendo discreto, deve ser finito, pois caso contrário, teria ponto de acumulação, pois é limitado. \square

Teorema 3.14. Seja $G \subset \mathcal{M}$ subgrupo não-elementar e discreto. Então:

- (i) $\forall x \in \mathbb{H}^3$, existe bola aberta (hiperbólica) N , centrada em x , tal que para todo $g \in G$, $g(N) = N$, se $g(x) = x$ e $G(N) \cap N = \emptyset$, caso contrário.
- (ii) Para todo $z \in \Omega$ (se $\Omega \neq \emptyset$), existe vizinhança N de z em Ω , tal que $\forall g \in G$, $g(N) = N$, se $g(z) = z$, ou $G(N) \cap N = \emptyset$, se $g(z) \neq z$.

Teorema 3.15. Seja $G \subset \mathcal{M}$ subgrupo não-elementar e discreto.

- (i) Se $D \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ é aberto, não-vazio e G -invariante, então G age descontinuamente em D ;
- (ii) Se $D \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ é aberto, não-vazio e $g(D) \cap D = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{Id\}$, então G age descontinuamente em $\bigcup_{g \in G} g(D)$.

Definição 20. Se $D \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ é um aberto tal que $g(D) \cap D = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{Id\}$, dizemos que D é G -packing.

Teorema 3.16. Sejam G_1, G_2, \dots subgrupos de \mathcal{M} e seja G o subgrupo gerado pela união desses subgrupos. Considere também, para cada índice j , D_j um aberto G_j -packing e suponha que, dois a dois, $D_i \cup D_j = \hat{\mathbb{C}}$, se $i \neq j$ e que $D^* = \bigcap_j D_j$ é não-vazia. Então G é o produto livre dos subgrupos G_j , D^* é G -packing e G age descontinuamente em $\bigcup_{g \in G} g(D^*)$.

Teorema 3.17. (Desigualdade de Jorgensen.) Suponha que $f, g \in \mathcal{M}$ geram um subgrupo $\langle f, g \rangle$ não-elementar e discreto. Então:

$$|tr^2 f - 4| + |tr^2(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geq 1.$$

Definição 21. Uma Horobola Σ em \mathbb{H}^3 é uma bola euclideana em \mathbb{H}^3 tangente a $\hat{\mathbb{C}}$ em algum ponto de $\partial\mathbb{H}^3$ dado, chamado de base da horobola.

A fronteira $\partial\Sigma$ é chamada Horoesfera.

Definição 22. Um grupo Fuchsiano G é um subgrupo discreto de \mathcal{M} com um disco invariante D (temos que G age descontinuamente em D).

4 Domínios Fundamentais

Definição 23. Seja G um grupo Fuchsiano agindo em Δ (ou \mathbb{H}^2). Um conjunto fundamental para G é um subconjunto $F \subset \Delta$ que contém exatamente um ponto de cada órbita em Δ .

Note que dois pontos distintos em F não são G -equivalentes e que $\bigcup_{f \in G} f(F) = \Delta$.

Definição 24. Um subconjunto D do plano hiperbólico é um domínio fundamental para o grupo Fuchsiano G se, e somente se:

- (1) D é um domínio;
- (2) existe um conjunto fundamental F para G , tal que $D \subset F \subset \overline{D}$;
- (3) $\mu(\partial D) = 0$, onde μ denota área hiperbólica.

Obs. 1: Se D é um domínio fundamental para G , então $\forall g \in G, g \neq Id$, tem-se $g(D) \cap D = \emptyset$, $\bigcup_{f \in G} f(D) = \Delta$ e dizemos que D e suas imagens “ladrilham” Δ . Note que se para algum $g \in G$ existe $w \in g(D) \cap D$, então $w = g(z)$ com $z, w \in D \subset F$, o que contradiz o fato de que F é conjunto fundamental. Concluímos que se $f \neq g \in G$, tem-se $g(D) \cap f(D) = \emptyset$. Logo, a união acima é disjunta.

Obs. 2: Não é suficiente substituir (2) pela exigência de que cada ponto de ∂D seja a imagem de algum outro ponto de ∂D por G . Por exemplo, o grupo gerado por $g : z \mapsto 2z$ age descontinuamente em \mathbb{H}^2 , mas o conjunto $\{x + yi; y > 0 \text{ e } 1 < x < 2\}$, que tem tal propriedade, não é domínio fundamental de G .

Demonstração. Para mostrar que $\langle g \rangle$ age descontinuamente em \mathbb{H}^2 , seja $K \subset \mathbb{H}^2$ compacto. Como $0 \notin \mathbb{H}^2$ e K é limitado, temos que existem $M, \epsilon > 0$ tais que $\epsilon < |x| < M, \forall x \in K$.

Assim, dado $x \in K$, temos: $|g^n(x)| = 2^n|x| > 2^n\epsilon$.

Deve existir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_1}\epsilon > M$. Assim, $g^n(x) \notin K$ e então $g^n(K) \cap K \neq \emptyset, \forall n \geq n_1$.

Analogamente, existe $n_0 < 0$ em \mathbb{Z} tal que $2^{n_0}M < \epsilon$. Daí, $|g^n(x)| = 2^n|x| < 2^nM < \epsilon, \forall n \leq n_0$. Logo $g^n(K) \cap K \neq \emptyset, \forall n \leq n_0$.

Logo $g(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas possivelmente para um número de $g \in G$.

Temos que D satisfaaz a propriedade descrita acima para todo $w \in \partial D$. De fato, se $w = 2 + yi$, tome $z = 1 + \frac{y}{2}i \in \partial D$ e tem-se $g(z) = w$. Analogamente, se $z = 1 + ti$, tome $w = 2 + 2ti \in \partial D$ e temos $g^{-1}(w) = z$.

Portanto, todo ponto em ∂D é imagem por $\langle g \rangle$ de algum outro ponto em ∂D . Mas como $g(D) \cap D \neq \emptyset$, temos que D não é um domínio fundamental.

□

Temos que (2) e (3) implicam que $\mu(F) = \mu(D)$. O teorema a seguir mostra que a área hiperbólica de D depende somente de G e não da escolha de D .

Teorema 4.1. (1) Sejam F_1, F_2 conjuntos fundamentais mensuráveis para G . Então $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.

(2) Seja F_0 conjunto fundamental mensurável de G_0 , subgrupo de índice k em G .

Então $\mu(F_0) = k\mu(F_1)$.

Demonstração. (1) Observe que $\bigcup_{f \in G} f(F_2) = \Delta \supset F_1$ e que esta união é disjunta. Daí:

$$\mu(F_1) = \mu\left(F_1 \cap \left(\bigcup_{g \in G} g(F_2)\right)\right) = \sum_{g \in G} \mu(F_1 \cap g(F_2)) = \sum_{g \in G} \mu(F_2 \cap g^{-1}(F_1)) = \mu(F_2).$$

(2) Para provar a segunda parte, escreva G como união disjunta de classes de equivalência $G = \bigcup_{n=1}^k G_0 g_n$ e ponha $F^* = \bigcup_{n=1}^k g_n(F_1)$.

Se $w \in \Delta$, então $g(w) \in F_1$ para algum $g \in G$, já que F_1 é conjunto fundamental para G e $g^{-1} = h^{-1} \circ g_n$, para alguns $n \in \mathbb{N}$ e $h \in G_0$. Então $h(w) = g_n(g(w)) \in g_n(F_1)$ e, daí, F^* contém pelo menos um ponto de cada órbita em Δ .

O que faremos é mostrar que, a menos de um conjunto enumerável de pontos, F^* é um conjunto fundamental para G_0 .

Suponha que $z, f(z) \in F^*$, para alguma $f \in G_0$ e algum $z \in \Delta$ que não seja fixado por nenhum elemento não-trivial de G . Devem existir $m, n \in \{1, \dots, k\}$ tais que $g_n^{-1}(z), g_m^{-1}(f(z))$ pertencem a F_1 e, portanto, são iguais. Daí, $g_n \circ g_m^{-1}(f(z)) = z$, o que nos dá $g_m \circ g_n^{-1} = f \in G_0$. Logo, $g_n G_0 = g_m G_0$ e segue que $m = n$ e $f = Id$.

Isto mostra que F^* contém exatamente um ponto de cada órbita que não possui pontos fixos e pelo menos um ponto de cada órbita com pontos fixos. Excluindo um conjunto adequado, enumerável, de pontos fixos de F^* (pois cada função em G tem no máximo 3 pontos fixos e G é enumerável), o conjunto resultante, que chamaremos também F^* , é um conjunto fundamental para G_0 e, pela primeira parte, $\mu(F^*) = \mu(F_0)$.

Claramente, F_1 intersecta cada uma de suas imagens em, no máximo, um conjunto enumerável de pontos (fixos). Então:

$$\mu(F^*) = \sum_{n=1}^k \mu(g_n F_1) = k\mu(F_1).$$

□

4.1 Domínios Fundamentais Localmente Finitos

No seguinte exemplo, retratamos a necessidade de condições extras para que se desenvolva uma teoria razoável sobre domínios fundamentais.

Exemplo:

Seja $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e G o grupo cíclico gerado por $g : z \mapsto 2z$. Temos que o espaço quociente \mathbb{C}^*/G é um toro.

Seja γ a curva em \mathbb{C} dada por

$$\gamma : \begin{cases} y = e^{-z}, & \text{se } z \text{ está no primeiro quadrante;} \\ |z| = 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A região D , entre γ e $g(\gamma)$ é um domínio fundamental para G , no sentido de que cada ponto de \mathbb{C}^* é equivalente a pelo menos um ponto de \overline{D} e a no máximo um ponto de D .

Apesar disto, identificando pontos equivalentes em ∂D , pode-se provar que \overline{D}/G não é compacto. Daí, \overline{D}/G e \mathbb{C}^*/G não podem ser homeomorfos.

□

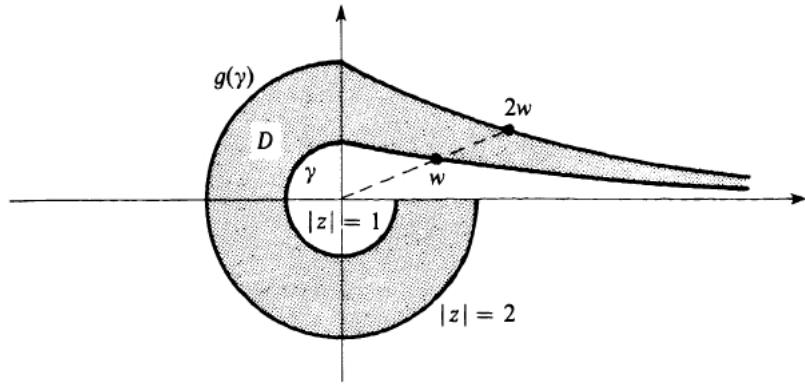


Figura 1: \overline{D}/G e \mathbb{C}^*/G não são homeomorfos.

A mesma situação pode surgir para um grupo Fuchsiano, mesmo quando D é um polígono convexo com número finito de lados. Queremos, então, impor uma condição que evite essa possibilidade. Antes disso, façamos um estudo sobre as projeções nesses espaços.

Sejam G um grupo Fuchsiano agindo em Δ e D um domínio fundamental para G em Δ . O grupo G induz a natural, contínua e aberta projeção $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/G$.

Podemos também usar G para induzir outra relação de equivalência em \overline{D} , identificando pontos equivalentes (em ∂D) e então, com \overline{D}/G herdando a topologia quociente, existe outra projeção contínua $\tilde{\pi} : \overline{D} \rightarrow \overline{D}/G$, de modo que:

- (i) Os elementos de Δ/G são órbitas $\{G(z); z \in \Delta\}$, $\pi(z) = G(z)$;
- (ii) Os elementos de \overline{D}/G são os conjuntos $\{\overline{D} \cap G(z); z \in \Delta\}$, $\tilde{\pi}(z) = G(z) \cap \overline{D}$.

Considere agora $\tau : \overline{D} \rightarrow \Delta$, a função inclusão (identidade em \overline{D}).

Construímos $\theta : \overline{D}/G \rightarrow \Delta/G$, dada por $\theta(\overline{D} \cap G(z)) = G(z)$. θ está bem-definida, pois para cada z , $\overline{D} \cap G(z) \neq \emptyset$. Além disto, $\theta\tilde{\pi} = \pi\tau$ e estas funções estão ilustradas na Figura 2.

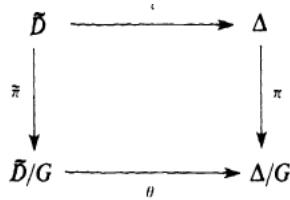


Figura 2: Diagrama representando as projeções acima.

Proposição 4.2. (i) θ e τ são injetivas;

- (ii) $\pi, \tilde{\pi}$ e θ são sobrejetivas;
- (iii) $\pi, \tilde{\pi}, \tau$ e θ são contínuas.

Demonstração. (i) Temos que

$$\theta(\overline{D} \cap G(z_1)) = \theta(\overline{D} \cap G(z_2)) \Rightarrow G(z_1) = G(z_2) \Rightarrow \overline{D} \cap G(z_1) = \overline{D} \cap G(z_2).$$

Logo θ é injetiva.

A função τ é injetiva por ser a função identidade em \overline{D} .

- (ii) π e $\tilde{\pi}$ são sobrejetivas por definição (pois são projeções).

Dada uma órbita $G(z)$, com $z \in \Delta$, temos que $\overline{D} \cap G(z) \neq \emptyset$ e, daí, $\theta(\overline{D} \cap G(z)) = G(z)$. Logo, θ é sobrejetiva.

- (iii) Como π e $\tilde{\pi}$ são as projeções naturais (sobre um espaço com a topologia quociente), temos que essas funções são contínuas por definição.

τ é contínua por ser a função identidade em \overline{D} .

A demonstração de que θ é contínua segue do fato de que $\theta\tilde{\pi} = \pi\tau$ e do seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [1] (Proposição 1.4.2):

“Suponha que $f : X \rightarrow Y$, onde X e Y são espaços topológicos e Y possui a topologia quociente. Para cada função $g : Y \rightarrow Z$, temos que g é contínua se, e somente se, gf é contínua.”

□

Definição 25. Um domínio fundamental D de G é dito localmente finito se, e somente se, cada subconjunto compacto de Δ intersecta apenas um número finito de G -imagens de \overline{D} .

Como consequências da definição, temos que se D é localmente finito, cada $z \in \Delta$ possui uma vizinhança compacta N , que intersecta somente um número finito de imagens $g_1(\overline{D}), \dots, g_n(\overline{D})$ (associados a N). Além disto, diminuindo N , se necessário, podemos supor que

- (i) $z \in \bigcap_{i=1}^n g_i(\overline{D})$;

- (ii) $N \subset \bigcup_{i=1}^n g_i(\overline{D})$;
- (iii) $h(D) \cap N = \emptyset$, a menos que h seja algum dos g_i .

Teorema 4.3. D é localmente finito se, e somente se, θ é homeomorfismo entre \overline{D}/G e Δ/G .

Demonstração. (\Leftarrow) Suponhamos que θ seja um homeomorfismo e que D não seja localmente finito. Assim, devem existir $w \in \Delta$, $z_1, \dots, z_n, \dots \in D$ e distintos $g_1, \dots, g_n, \dots \in G$ tais que $g_n(z_n) \rightarrow w$.

Escreva $K = \{z_1, z_2, \dots\}$. Então $K \subset D$ e toda vizinhança de w intersecta infinitas imagens $g_n(D)$. Daí, w não pertence a $h(D)$, $\forall h \in G$ (pois essas imagens são disjuntas) e $\pi(w) \notin \pi(K)$, pois $\pi(K) = \{\pi(z_n); n \in \mathbb{N}\} = \{G(z_n); n \in \mathbb{N}\} = \{g(z_n); n \in \mathbb{N}, g \in G\}$.

Provaremos que $\pi(w) \in \pi(K)$, o que nos dará uma contradição.

Os pontos $g_n^{-1}(w)$ não podem se acumular em Δ , pois G é discreto. Daí, os pontos z_n não podem se acumular em Δ , e isto mostra que K é fechado em D . Como $K \subset D$, temos que $K \cap \overline{D} = K$, o que nos dá:

$$\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(K)) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(\overline{D} \cap K)) = \tilde{\pi}^{-1}(K) = K \cap \overline{D} = K.$$

Podemos usar a definição da topologia quociente em \overline{D}/G para afirmar que $\tilde{\pi}(K)$ é fechado em \overline{D}/G . Como $\theta\tilde{\pi} = \pi\tau$, segue que $\pi(K) = \pi\tau(K) = \theta\tilde{\pi}(K)$ e, sendo θ um homeomorfismo, $\pi(K)$ é fechado em Δ/G . Daí, $\pi(w) = \lim_n \pi(g_n(z_n)) = \lim_n \pi(z_n) \in \pi(K)$. Logo, $\pi(w) \in \pi(K)$.

Temos uma contradição. Consequentemente, D é localmente finito.

(\Rightarrow) Suponhamos que D seja localmente finito. Sabemos que θ é contínua. Resta mostrar que θ^{-1} é contínua (ou, equivalentemente, que θ é uma função aberta, já que esta é bijetiva). Seja $A \in \overline{D}/G$ aberto e não-vazio. Como $\tilde{\pi}$ é sobrejetiva e contínua, existe um subconjunto aberto $B \subset \Delta$ com $\tilde{\pi}^{-1}(A) = \overline{D} \cap B$. Ponha $V = \bigcup_{g \in G} g(\overline{D} \cap B)$. Então

$$\pi(V) = \pi(\overline{D} \cap B) = \pi\tau(\overline{D} \cap B) = \theta\tilde{\pi}(\overline{D} \cap B) = \theta(A).$$

Precisamos mostrar que $\theta(A)$ é aberto e, como π é uma função aberta, resta mostrarmos que V é aberto.

Seja $z \in V$. Como V é G -invariante, podemos assumir $z \in \overline{D} \cap B$. Sendo D localmente finito, existe um disco hiperbólico N , com centro em z e que intersecta somente as imagens $g_0(\overline{D}), g_1(\overline{D}), \dots, g_m(\overline{D})$; $g_0 = Id$. Podemos também supor que cada um desses conjuntos contém z .

Então $g_j^{-1}(z) \in \overline{D}, \forall j = 0, \dots, m$ e isto nos diz que $\tilde{\pi}$ está definida em cada um dos $g_j^{-1}(z)$. Claramente, $\tilde{\pi}$ envia esses pontos em $\tilde{\pi}(z)$ (em A). Portanto, $g_j^{-1}(z) \in \tilde{\pi}^{-1}(A) = \overline{D} \cap B$ e, daí, $z \in g_j(B), \forall j = 0, \dots, m$. Diminuindo N , se necessário, podemos então assumir $N \subset \bigcap_{j=0}^m g_j(B)$.

Fica claro que $N \subset V$ quando se nota que se $w \in N$, então para algum j , $w \in g_j(\overline{D})$ e $w \in g_j(B)$, o que nos dá $w \in g_j(\overline{D} \cap B) \subset V$.

Concluímos que, dado $z \in V$, existe vizinhança N de z inteiramente contida em V . Logo, V é aberto e, daí, $\pi(V) = \theta(A)$ é aberto, mostrando que θ é um homeomorfismo.

□

Exemplo:

Mostraremos neste exemplo que a convexidade de um domínio fundamental não é suficiente para assegurar finitude local.

Seja G o grupo gerado por $f(z) = z$ e $g(z) = \frac{3z+4}{2z+3}$. Considere as seguintes curvas, representadas na Figura 3:

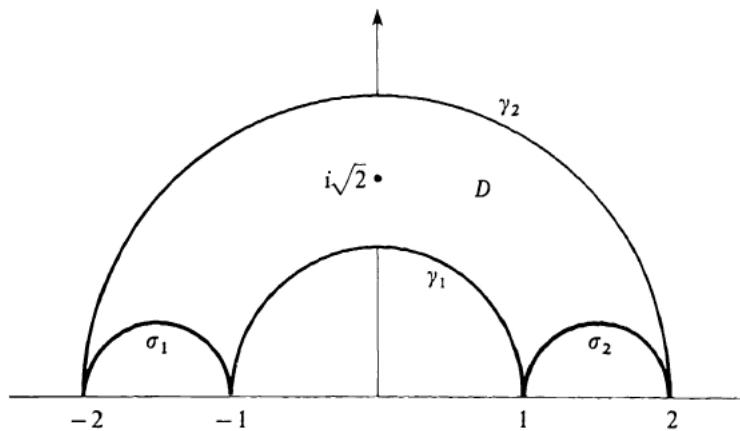


Figura 3: Um domínio fundamental para $\langle f, g \rangle$.

$$\gamma_1 = \{|z| = 1\};$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \{|z| = 2\}; \\ \sigma_1 &= \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right) i; \theta \in (0, \pi) \right\} \\ \sigma_2 &= \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right) i; \theta \in (0, \pi) \right\}\end{aligned}$$

É fácil ver que $f(\gamma_1) = \gamma_2$ e $g(\sigma_1) = \sigma_2$ (para a última, basta notar que $g(-1) = 1$ e $g(-2) = 2$).

Usando o Teorema 3.16, com $G_1 = \langle f \rangle$, $G_2 = \langle g \rangle$, D_1 a região entre γ_1 e γ_2 e D_2 a região entre σ_1 e σ_2 , concluímos que G é discreto e D , a região delimitada por estas quatro curvas, é G -packing. Consequentemente, $h(D) \cap D = \emptyset$, se $Id \neq h \in G$.

Podemos dizer mais: na verdade, D é um domínio fundamental (localmente finito) para G . De fato, dado $z \in \mathbb{H}^2$, escolha a imagem de z mais próxima de $i\sqrt{2}$. Esta escolha é possível, pois, sendo G discreto, temos que as imagens de z não podem se acumular.

Temos:

$$\rho(z, i\sqrt{2}) \leq \rho(z, f(i\sqrt{2})) = \rho(f^{-1}(z), i\sqrt{2}) \Leftrightarrow |z| \leq 2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\cosh(\rho(z, i\sqrt{2})) &\leq \cosh(\rho(z, f(i\sqrt{2}))) \Leftrightarrow 1 + \frac{|z - i\sqrt{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{|z - 2i\sqrt{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2|z - i\sqrt{2}|^2 \leq |z - 2i\sqrt{2}|^2 \Leftrightarrow 2[|z|^2 + zi\sqrt{2} - \bar{z}i\sqrt{2} + 2] \leq |z|^2 + 2\sqrt{2}iz - 2\sqrt{2}i\bar{z} + 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z|^2 \leq 4 \Leftrightarrow |z| \leq 2.\end{aligned}$$

Vale também que

$$\rho(z, i\sqrt{2}) \leq \rho(z, f^{-1}(i\sqrt{2})) \Leftrightarrow |z| \geq 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\cosh(\rho(z, i\sqrt{2})) &\leq \cosh(\rho(z, f^{-1}(i\sqrt{2}))) \Leftrightarrow 1 + \frac{|z - i\sqrt{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]\sqrt{2}} \leq 1 + \frac{|z - \frac{i\sqrt{2}}{2}|^2}{2\operatorname{Im}[z]\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z - i\sqrt{2}|^2 \leq 2|z - \frac{i\sqrt{2}}{2}|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + zi\sqrt{2} - \bar{z}i\sqrt{2} + 2 \leq 2[|z|^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}iz - \frac{\sqrt{2}}{2}i\bar{z} + \frac{1}{2}] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1.\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que z está mais próximo de $i\sqrt{2}$ do que $g(z)$ e $g^{-1}(z)$ se, e somente se, está entre σ_1 e σ_2 .

Daí, podemos concluir que o ponto mais próximo de $i\sqrt{2}$ da órbita de qualquer $z \in \mathbb{H}^2$ está em \overline{D} .

Ponha $D_1 = D \cap \{z; \operatorname{Re}[z] < 0\}$. Logo, $(D - D_1) \cup g(D_1)$ é ainda um domínio fundamental para G .

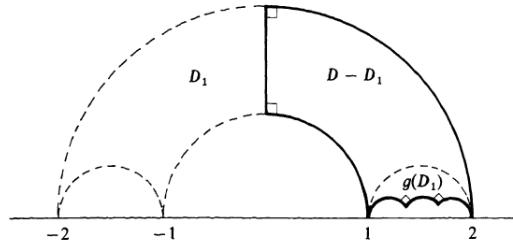


Figura 4: Construção de um novo Domínio Fundamental a partir de D .

Construindo as geodésicas $x = 1$ e $x = 2$ e os pontos ζ, ζ' e w como na Figura 5, substituímos o triângulo $T(w, 1, 2w)$ pelo triângulo $T(2w, 2, 4w) = f(T)$. Além disto, cada segmento euclideano $[\xi, 2\xi]$, onde $|\xi| = 1$ e ξ está entre w e i (estritamente), é substituído pelo segmento equivalente $[\zeta', 2\zeta']$.

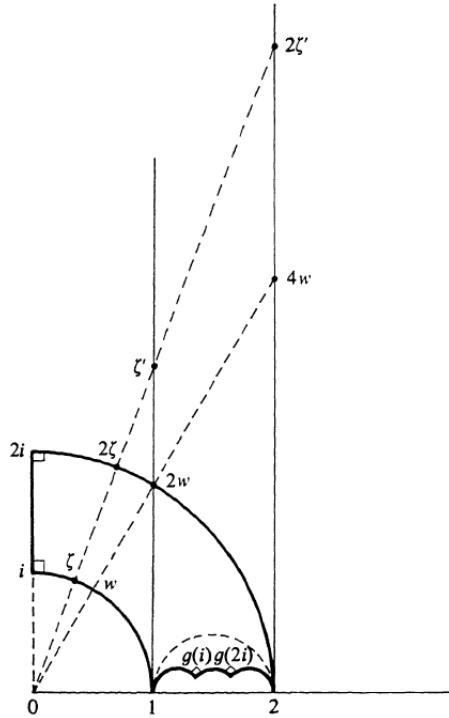


Figura 5: Σ

Finalmente, o segmento $[i, 2i]$ é apagado; note que $[i, 2i]$ é equivalente segmento hiperbólico $[g(i), g(2i)]$ na fronteira de $g(D_1)$ e, como este segmento é mantido, o novo domínio

Σ (na Figura 5, o polígono de vértices $1, g(i), g(2i), 2$ e ∞) ainda contém em seu fecho pelo menos um ponto de cada órbita.

A construção acima substitui o quadrilátero D pelo pentágono Σ . Por construção, Σ é um domínio fundamental para G e, pelo seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [1] (Capítulo 7, Teorema 7.16.1), Σ é convexo.

Lema 4.4. Um polígono em \mathbb{H}^2 , de ângulos $\theta_1, \dots, \theta_n$ é convexo se, e somente se, $0 \leq \theta_j \leq \pi$, para todo $j = 1, \dots, n$.

Observe que os pontos no segmento $[g(i), g(2i)]$ não possuem equivalentes em $\partial\Sigma$. A única possibilidade, então, é que as imagens de Σ se acumulem ao longo do segmento $[g(i), g(2i)]$.

Para uma prova mais específica de que Σ não é localmente finito, precisamos apenas observar que os pontos $z_n = 1 + 2^n i$ estão em $\overline{\Sigma}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f^{-n}(z_n) = i + 2^{-n} \rightarrow i$.

Concluímos que Σ é um domínio fundamental convexo não localmente finito. Como o domínio original D é localmente finito, temos que $\mathbb{H}^2/G \simeq \overline{D}/G$, o que é um toro com um ponto removido

Note que Σ/G é um cilindro com um ponto removido, logo não pode ser isomorfo a \mathbb{H}^2/G , uma consequência do fato de Σ não ser localmente finito.

□

Teorema 4.5. Seja D um domínio fundamental convexo para um grupo Fuchsiano G e suponha que, para todo $z \in \partial D$, temos:

- (1) Existe $g \in G$ tal que $g \neq Id$ e $g(z) \in \partial D$;
- (2) z pode ser ligado a um ponto em D por uma curva contida inteiramente em $D \cup \{z\}$.

Então D é localmente finito.

Faremos um esboço da demonstração num caso mais fraco, substituindo (2) pela convexidade de D . Antes disso, definimos:

Definição 26. Um ponto $z \in \mathbb{H}^2$ é dito regular quando existe uma vizinhança de z que intersecta somente um número finito de cópias de \overline{D} . Caso contrário, z é dito excepcional.

Então D é localmente finito se não existem pontos excepcionais em D .

Demonstração. Provaremos o teorema mostrando que:

- (a) O conjunto dos pontos excepcionais é enumerável;
- (b) Se existe um ponto excepcional em D , então D contém uma quantidade não-enumerável deles.

De fato,

- (a) Por (1), cada ponto excepcional z pertence a algum conjunto $g(\overline{D}) \cap h(\overline{D})$ (obrigatoriamente na fronteira), com $g \neq h$. Temos que os pontos interiores da interseção $\sigma(g, h) = g(\overline{D}) \cap h(\overline{D})$ (o que, por convexidade, é um segmento hiperbólico) são pontos regulares. Então existem no máximo dois pontos excepcionais em $\sigma(g, h)$. Como G é enumerável, segue que o conjunto dos pontos excepcionais é enumerável.
- (b) Suponha que w é um ponto excepcional; então existem $z_1, \dots, z_n, \dots \in D$ e distintos $g_1, \dots, g_n, \dots \in G$ tais que $g_n(z_n) \rightarrow w$.

Podemos assumir que D é ilimitado (como G é Fuchsiano, G age descontinuamente em D . Daí, se D for limitado, o que nos dá \overline{D} compacto, temos $g(\overline{D}) \cap \overline{D} \neq \emptyset$ somente para um número finito de elementos de G . Neste caso, D é claramente localmente finito). Então existe algum $\zeta \in \overline{D}$ com $|\zeta| = 1$. Considere $L_n = [z_n, \zeta]$. Os raios $g_n(L_n)$ se acumulam em outro raio $[w, \zeta^*]$, $|\zeta^*| = 1$. Por construção, todo ponto de $[w, \zeta^*]$ é excepcional.

□

Teorema 4.6. Seja D um domínio fundamental localmente finito para o grupo Fuchsiano G . Então $G_0 = \{g \in G; g(\overline{D}) \cap \overline{D} \neq \emptyset\}$ gera G .

Demonstração. Seja G^* o grupo gerado por G_0 . É claro que $G^* \subset G$. Mostremos então que $G \subset G^*$.

Podemos supor que G age em Δ e, para todo $z \in \Delta$, existe $g \in G$, com $g(z) \in \overline{D}$, pois D é domínio fundamental.

Defina a função $\phi : \Delta \rightarrow G/G^*$ dada por $\phi(z) = G^*g$, onde g é qualquer aplicação que satisfaça $g(z) \in \overline{D}$. Esta função está bem-definida, pois se $h(z) \in \overline{D}$, para alguma outra $h \in G$, temos que $h(z) \in \overline{D} \cap hg^{-1}(\overline{D})$ e daí segue que $hg^{-1} \in G_0 \subset G^*$, o que nos dá uma igualdade de classes, $G^*g = G^*h$.

Nossa prova se baseia em uma discussão sobre essa função.

Seja $z \in \Delta$ qualquer. Como D é localmente finito, existe um número finito de imagens, $g_1(\overline{D}), \dots, g_m(\overline{D})$, cada uma contendo z e tais que a união delas cobre uma vizinhança N de z . Se $w \in N$, então $w \in g_j(\overline{D})$, para algum $j \in \{1, \dots, m\}$. Consequentemente, $\phi(w) = G^*g_j^{-1} = \phi(z)$. Concluímos que cada $z \in \Delta$ possui uma vizinhança onde ϕ é constante. Como Δ é um aberto conexo, toda função que satisfaça esta propriedade é constante em Δ . Além disso, olhando para G/G^* com a topologia discreta, segue que ϕ é contínua e, como $\phi(\Delta)$ é conexo, esta imagem deve ser apenas um ponto. Logo, $\phi(z) = \phi(w), \forall z, w \in \Delta$.

Dada qualquer $g \in G$, sejam $z \in D$ e $w \in g^{-1}(D)$. Como ϕ é constante,

$$G^* = G^*Id = \phi(z) = \phi(w) = G^*g$$

e segue que $g \in G^*$.

Portanto, $G = G^* = \langle G_0 \rangle$.

□

Teorema 4.7. Considere D um domínio fundamental localmente finito para o grupo Fuchsiano G . Temos:

- (i) Seja g um elemento elíptico em G e K um disco compacto com $g(K) = K$. Então \overline{D} intersecta um número finito e positivo de imagens distintas de K .
- (ii) Seja g um elemento parabólico em G e K uma região horocíclica tal que $g(K) = K$. Então \overline{D} intersecta um número finito e positivo de imagens distintas de K .
- (iii) Seja g um elemento hiperbólico de G e K uma região hiperbólica satisfazendo $g(K) = K$. Então \overline{D} intersecta um número finito e positivo de imagens distintas de K .

Demonstração. A demonstração de que \overline{D} intersecta pelo menos uma imagem de K é a mesma em todos os casos e só depende do fato de D ser domínio fundamental para G . De fato, dado $z \in K$, temos que existe $g \in G$ tal que $g(z) \in \overline{D}$. Daí, $g^{-1}(\overline{D}) \cap K \neq \emptyset$.

Mostremos agora, em cada caso, que essa interseção é não-vazia somente para um número finito de elementos de G .

- (i) Temos que se $\overline{D} \cap g(K) \neq \emptyset$, então $g^{-1}(\overline{D}) \cap K \neq \emptyset$. Mas isto só ocorre para um número finito de elementos $g \in G$, pois K é compacto e D é localmente finito.

- (ii) Podemos supor que G age em \mathbb{H}^2 e, como g é parabólico, supomos também $g(z) = z + 1 = m_1(z)$.

Como K é uma região horocíclica, deve ser da forma $K = \{x + iy; y > k > 0\}$.

Agora escrevemos $K_0 = \{x + iy; y \geq k_0\}$ e $K_1 = \{x + iy; k \leq y \leq k_0\}$, onde k_0 é escolhido de modo que $\bigcup_{f \in G} f(K_0) \neq \mathbb{H}^2$. Esta última condição nos dá que K_0 não

pode conter nenhuma imagem de \overline{D} . Assim, se $f(\overline{D}) \cap K \neq \emptyset$, temos necessariamente $f(\overline{D}) \cap K_1 \neq \emptyset$. Esta escolha de k_0 é possibilitada pela Desigualdade de Jorgensen.

Suponhamos que $\overline{D} \cap h(K) \neq \emptyset$. Daí, $h^{-1}(\overline{D}) \cap K \neq \emptyset$ e consequentemente $h^{-1}(\overline{D}) \cap K_1 \neq \emptyset$. Pondo $E = \{x + iy; 0 \leq x \leq 1, k \leq y \leq k_0\}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(E) = K_1$ e, para algum n_0 , devemos ter $g^{n_0}(h^{-1}(\overline{D})) \cap E \neq \emptyset$. Como E é compacto e D é localmente finito, somente um número finito de imagens de \overline{D} , $g_1(\overline{D}), \dots, g_s(\overline{D})$, intersectam E . Então $g^{n_0}h^{-1} = g_j$, para algum j , e assim $h(K) = g_j^{-1}g^{n_0}(K) = g_j^{-1}(K)$.

Logo, $\overline{D} \cap h(K) \neq \emptyset$ somente para um número finito de elementos de G .

- (iii) A prova é análoga à de (ii). Podemos assumir que G age em \mathbb{H}^2 e, como g é hiperbólico, supomos também $g(z) = kz$, com $k > 1$. A região hiperbólica é uma região da forma $K = \{re^{i\theta}; |\theta - \frac{\pi}{2}| < \epsilon \text{ e } r > 0\}$. Escrevemos $E = \{z \in K; 1 \leq |z| \leq k\}$. Então $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} g^n(E) = K$ e somente um número finito de imagens de \overline{D} , digamos $g_1(\overline{D}), \dots, g_s(\overline{D})$, intersectam E (E é compacto).

Se supomos que $h(K) \cap \overline{D} \neq \emptyset$, então, para algum n , $g^n h^{-1}(\overline{D}) \cap E \neq \emptyset$ e assim, para algum $j \in \{1, \dots, s\}$, temos $h(K) = g_j(K)$.

Portanto, \overline{D} intersecta somente um número finito de imagens distintas de K .

□

4.2 Polígonos fundamentais convexos

Observamos que em nosso estudo é mais natural que olhemos para polígonos convexos. Mas convém lembrar que, pelo que foi visto, apenas convexidade não é suficiente para garantir resultados satisfatórios.

Definição 27. Seja G um grupo Fuchsiano. Dizemos que P é um polígono fundamental convexo para G quando P é um domínio fundamental convexo localmente finito para G .

Definição 28. Seja P é um polígono fundamental convexo para G . Um LADO de P é um segmento geodésico da forma $\overline{P} \cap g(\overline{P})$, de comprimento positivo, onde $g \neq Id$. Um VÉRTICE de P é um ponto da forma $\overline{P} \cap g(\overline{P}) \cap h(\overline{P})$, com $g \neq h \neq Id$.

Observe que um lado de P não é necessariamente um lado no sentido convencional. Se chamamos uma geodésica maximal em ∂P de aresta, esta pode conter vários lados de P . Ou seja, é permitido um ângulo de π como ângulo interior em um vértice.

Serão listados agora alguns resultados a respeito de polígonos fundamentais convexos. Uma discussão mais detalhada sobre eles pode ser encontrada em [1] (Capítulo 9, Seção 9.3).

- (1) Para todo $z \in \partial P$, existe $g \in G, g \neq Id$, tal que $g(z) \in \partial P$;
- (2) P possui uma quantidade enumerável de lados e de vértices (e isto se deve ao fato de G ser enumerável);
- (3) Somente um número finito de lados ou vértices de P podem intersectar algum compacto K (pois P é localmente finito);
- (4) ∂P é a união dos lados de P ;
- (5) Cada vértice de P pertence a exatamente dois de seus lados e é o ponto final comum a eles;
- (6) Quaisquer dois lados somente podem se intersectar em um vértice (que é um ponto final comum a esses lados);
- (7) O diâmetro euclidiano de $g_n(D)$ converge a zero se $n \rightarrow \infty$.

Considere os dois conjuntos a seguir:

$$G^* = \{g \in G; \overline{P} \cap g(\overline{P}) \text{ é um lado de } P\}$$

$$S = \{ \text{lados de } P \}.$$

Cada $g \in G^*$ produz um único lado s de P , dado por $\overline{P} \cap g(\overline{P})$ e cada lado de P surge exatamente desta forma. Então existe uma bijeção $\Phi : G^* \rightarrow S$, dada por $\Phi(g) = \overline{P} \cap g(\overline{P})$. De fato, Φ é claramente sobrejetora e, se supomos $\Phi(g) = \Phi(h)$, então temos $\overline{P} \cap g(\overline{P}) = \overline{P} \cap h(\overline{P})$ e isto não pode ocorrer caso se tenha $g \neq h$, por (6).

A existência de $\Phi^{-1} : S \rightarrow G^*$ assegura que, para cada lado s de P , existe uma única função g_s associada a ele, tal que $s = \overline{P} \cap g_s(\overline{P})$. Assim, $g_s^{-1}(s) = g_s^{-1}(\overline{P}) \cap \overline{P} = s'$, onde s' tem comprimento positivo e também é um lado. Note que se $s' = g_s^{-1}(s)$, então $g_{s'} = g_s^{-1}$. Construímos então uma função $s \mapsto s'$, de S sobre S e esta função é chamada emparelhamento de P , pois

$$(s')' = (g_{s'})^{-1} = g_s(s') = s.$$

Desta forma, o conjunto de lados de P particiona-se naturalmente em uma coleção de pares $\{s, s'\}$. Não se exclui a possibilidade de que s seja igual a s' .

Teorema 4.8. O conjunto das funções de emparelhamento, G^* , gera G .

Demonastração. Pelo Teorema 4.6, basta mostrarmos que se $\overline{P} \cap h(\overline{P}) \neq \emptyset$, então h está no grupo gerado pelas funções g_s . Considere então algum $w \in \overline{P} \cap h(\overline{P})$. Existem um disco aberto N centrado em w e elementos $h_0 = Id, h_2, \dots, h_t \in G$ tais que $h = h_{j_0}$, para algum $j_0 \neq 0$ e tem-se $w \in \bigcap_{j=0}^t h_j(\overline{P})$ e $N \subset \bigcup_{j=0}^t h_j(\overline{P})$.

Diminuindo N , se necessário, podemos assumir que esta vizinhança não contém vértices de nenhum dos $h_j(\overline{P})$, exceto possivelmente w e que N não intersecta nenhum dos lados dos $h_j(\overline{P})$, exceto os que contém w . Como a fronteira de P é a união dos seus lados, sua fronteira em N consiste (pela escolha de N) de um lado contendo w ou de dois lados distintos partindo de w .

O mesmo é verdade para cada uma das imagens de P pelos h_j ($j = 1, \dots, t$), ou seja, acontece uma das situações ilustradas na Figura 6:

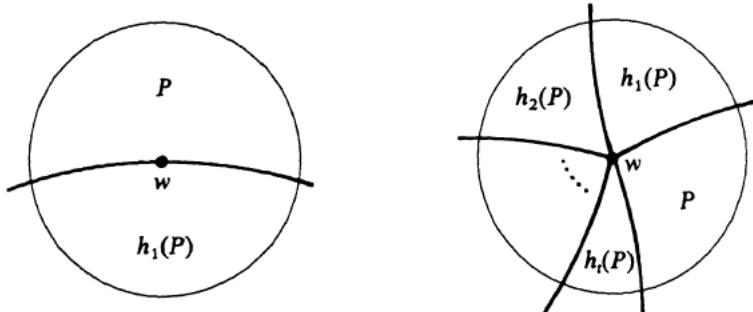


Figura 6: A fronteira de P em N .

Afirmamos então que, após renomear os h_j 's, se necessário, dois polígonos consecutivos na lista $h_0(P) = P, h_1(P), \dots, h_t(P)$ tem sempre um lado em comum. Consequentemente,

para todo $j = 0, \dots, t$, temos que $\overline{P} \cap h_j^{-1}h_{j+1}(\overline{P})$ é um segmento geodésico de comprimento positivo, e então é um lado de P . Daí, para cada j , $h_{j+1} = h_j g_s$, para alguma função de emparelhamento g_s (note que $h_1 = Id g_s = g_s$ e, a partir daí, h_j é sempre um produto de funções de emparelhamento). Concluímos que $h = h_{j_0} \in \langle G^* \rangle$.

Portanto, $G_0 \subset \langle G^* \rangle$ e, como $G = \langle G_0 \rangle \subset \langle G^* \rangle = G$, segue que G^* gera G .

□

Definição 29. (i) Um ciclo C em \overline{P} é definido pela interseção de uma G -órbita com \overline{P} .

Um ciclo é necessariamente um conjunto finito $\{z_1, \dots, z_n\}$ e, neste caso, dizemos que o comprimento de C é $|C| = n$.

(ii) Se C é um ciclo de pontos em Δ , então os estabilizadores G_j , de cada elemento $z_j \in C$, são conjugados dois a dois e são subgrupos cíclicos finitos de G . Definimos a ordem do ciclo C por $Ord(C) = Ord(G_j)$, para qualquer j .

Note que, dados $z_i, z_j \in C$, então deve existir $h \in G$ tal que $h(z_j) = z_i$. Assim, se tivermos $g \in G_j = \{g \in G; g(z_j) = z_j\}$, então $hgh^{-1}(z_i) = z_i$ e portanto $hgh^{-1} \in G_i$. Logo, estes estabilizadores são conjugados. Além disso, cada um deles é cíclico, pelo Teorema 3.13.

(iii) Seja $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ um ciclo em \overline{P} e θ_j o ângulo de P em z_j . A soma dos ângulos do ciclo C é dada por $\theta(C) = \theta_1 + \dots + \theta_n$.

Observe que caso C contenha um ponto z no interior de P , então $C = \{z\}$ e o ângulo em z é $\theta = 2\pi$ e no caso de algum ponto de C pertencer ao interior de um lado de P , então o ângulo nesse ponto é π .

Teorema 4.9. Para todo grupo Fuchsiano G , todo polígono fundamental para G , P , e todo ciclo C em \overline{P} , vale que

$$\theta(C) = \frac{2\pi}{Ord(C)}.$$

Demonstração. Se C consiste em apenas um ponto no interior de P , então $\theta(C) = 2\pi$ e o teorema é válido, já que $G_z = \{Id\}$.

Podemos então supor $C = \{z_1, \dots, z_n\} \subset \partial P$. Então existem $g_1 = Id, g_2, \dots, g_k \in G$ tais que $g_j(z_j) = z_1 \in \partial P$. Segue que $g_j(P)$ tem z_1 como vértice e o ângulo de $g_j(P)$ em z_1 é θ_j .

Além disso, $z_1 \in h(\overline{P}) \Leftrightarrow h^{-1}z_1 = z_j$, para algum $j \Leftrightarrow$ para este j , $hg_j^{-1}(z_1) = z_1$. Ou seja, se G_1 é o estabilizador de z_1 , temos que $z_1 \in h(\overline{P})$ se, e somente se, para algum j , $h \in G_1 g_j$.

Na Figura 6, temos

$$\{h_0, \dots, h_t\} = G_1g_1 \cup G_1g_2 \dots \cup G_1g_k,$$

e estas são exatamente as imagens de \bar{P} que contém z_1 . Como os elementos de G_1 são as rotações em torno de z_1 , cada $f \in G_1g_j$ determina um ângulo θ_j em z_1 .

Então

$$2\pi = [Ord(G_1)](\theta_1 + \dots + \theta_n) = Ord(C)\theta(C).$$

Portanto,

$$\theta(C) = \frac{2\pi}{Ord(C)}.$$

□

Veremos agora algumas consequências desse teorema.

- Suponha que z não seja fixado por nenhum elemento elíptico de G . O ciclo C contendo z em P é caracterizado por $Ord(C) = 1$ e é chamado ciclo acidental. Neste caso, $\theta(C) = 2\pi$.

Se $n = 1$, então $\theta_1 = 2\pi$ e $z \in P$;

Se $n = 2$, então $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ e z é então um ponto interior de um lado de P .

- Suponha agora que z seja fixado por algum elemento elíptico de G e que o estabilizador de z tenha ordem q em G . Então $\theta(C) = \frac{2\pi}{q}$.

Um caso especial de grande interesse é quando $|C| = 1$ (onde z não é equivalente a nenhum outro ponto em ∂P). Então $\theta_1 = \frac{2\pi}{q}$ e, caso $|C| = 1$ e $q = 2$, tem-se $\theta(C) = \theta_1 = \pi$. É fácil ver que, neste caso, $G_z = \{Id, g\}$, onde $g^2 = Id$, e z um ponto interior do lado $s = \bar{P} \cap g(\bar{P})$. Note que aqui $s = s'$, pois $g = g^{-1}$. Reciprocamente, se, em geral, $s = s'$, então é fácil ver que g_s é de ordem 2, com um ponto fixo em s (considere o efeito de g_s na geodésica contendo s e note que $P \cap g(P) = \emptyset$).

Como os pontos fixos de elementos elípticos de G necessitam de uma atenção especial, é muitas vezes conveniente considerá-los como vértices de P . Esta é somente uma variação da definição usual e é uma questão de convenção qual definição adotar.

Discutiremos agora a fronteira euclideana de P em $\{|z| = 1\}$. Denotamos este conjunto por E . Ele pode possuir uma quantidade não-enumerável de componentes, mas somente uma quantidade enumerável de componentes de comprimento positivo. Estes são chamados "lados livres" de P e são intervalos não-degenerados em $\{|z| = 1\}$.

Se $w \in E$, então existe $\{z_n\} \subset P$ convergendo a w . Para todo $z \in P$, o segmento $[z, z_n]$ está contido em P e, obviamente, $[z, w) \subset \overline{P}$. O mesmo vale para todo ponto suficientemente próximo de z e, como P é convexo, temos que $[z, w) \subset P$.

Um ponto $w \in E$ pode não pertencer a nenhum lado ou lado livre de P . Por exemplo, podem existir infinitos lados de P se acumulando em w , sem conter w . Sabe-se pouco neste caso. Restringimos então nossa discussão a pontos-finais de dois lados:

Definição 30. Dizemos que $v \in E$ é um vértice próprio de P se v é o ponto final de dois lados de P . Caso v seja ponto final de um lado e um lado livre de P , então v é dito vértice impróprio de P . Nos dois casos, v é um vértice no infinito.

Na Figura 7, vemos um exemplo de cada caso. A primeira situação retrata um vértice impróprio e a segunda um vértice próprio.

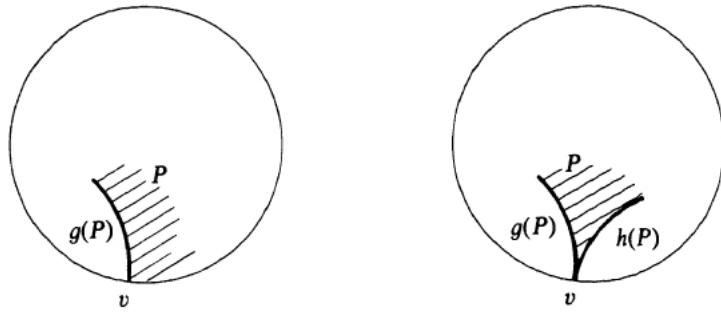


Figura 7: Um vértice impróprio e um vértice próprio, respectivamente.

Para todo $v \in E$, o ciclo de z é $G(z) \cap E$. Se z é um ponto ordinário, o ciclo de z deve ser finito (caso contrário, infinitas imagens de P intersectam uma vizinhança de z e, por (7), z seria um ponto limite). Além disso, z deve ser um vértice próprio ou impróprio no infinito.

A definição 29 se generaliza a esta situação e, se C é o ciclo de z , então

$$Ord(C) = 1 \text{ e } \theta_1 + \cdots + \theta_n = \pi.$$

Esta é a contrapartida do Teorema 4.9. Ela é válida também no caso em que z é ponto interior de um lado livre, onde $|C| = 1$ e $\theta_1 = \pi$. Por outro lado, note que θ_j somente pode tomar os valores 0 ou $\frac{\pi}{2}$. Assim, se $|C| = 2$, tem-se necessariamente $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e então z é o ponto final comum de um lado livre de P e um lado livre de algum $g(P)$.

Teorema 4.10. Ponha E como acima.

Seja $v \in E$ um ponto que seja fixado por algum $g \in G$ não-trivial. Então g deve ser

parabólico (e não pode ser hiperbólico). Além disso, o ciclo C de v em E é finito e cada um de seus pontos é um vértice próprio de P .

Demonastração. Primeiramente, v não pode ser fixado por nenhum elemento elíptico de G , pois $|v| = 1$.

Suponha que v seja fixado por um elemento hiperbólico $h \in G$. Considere A , o eixo de h (dado pela geodésica que passa pelos pontos fixos de h) e construa algum segmento $[z, v) \subset P$. Tome $\{z_n\} \in [z, v)$ com $z_n \rightarrow v$. Então existem pontos a_n em A com $\rho(a_n, z_n) \rightarrow 0$. Para todo n , existe alguma potência de h , digamos h_n tal que $h_n(a_n)$ pertence a um sub-arco compacto de A (podemos tomar os h_n 's distintos). Como h_n é sempre uma isometria, temos que os pontos $h_n(z_n)$ estão todos em um compacto $K \subset \Delta$. Isto contradiz o fato de P ser localmente finito.

Concluímos que v somente pode ser fixado por um elemento parabólico de G .

Obviamente, o ciclo de pontos em E determinado por v só pode conter pontos fixos parabólicos. Se este ciclo for infinito, digamos v_1, \dots, v_n, \dots , então existem $g_1, \dots, g_n, \dots \in G$, distintos, tais que $g_n(v) = v_n$. Se K é uma região horocíclica com base em v , então $g_n(K)$ é uma região horocíclica com base em v_n e $g_n(K)$ deve intersectar o convexo P , pois $v \in E$. Concluímos que P intersecta infinitas imagens de K , o que contradiz o Teorema 4.7. Segue que o ciclo determinado por v (ou por qualquer ponto fixo parabólico) é finito.

Finalmente, devemos mostrar que v é um vértice próprio de P . O mesmo deve ser verdade, pelo mesmo argumento, para todos os pontos no ciclo de v .

Escolha uma região horocíclica K com base em v . Pelo teorema Teorema 4.7, \overline{P} intersecta somente um número finito de imagens de K , digamos $K, g_1(K), \dots, g_t(K)$, sendo estas imagens regiões horocíclicas com base em v, v_1, \dots, v_t , respectivamente, onde $v_j = g_j(v)$. Se $v_j \notin E$, então \overline{P} é disjunto de alguma vizinhança desse ponto. Daí, $\overline{P} \cap g_j(\overline{P})$ é um subconjunto compacto de Δ . Diminuindo K , se necessário, podemos supor que para todo j , $v_j \in E$. Isto mostra que o ciclo de v em E é $\{v, v_1, \dots, v_t\}$.

Sem perda de generalidade, suponha que G age em \mathbb{H}^2 , $v = \infty$ e que o estabilizador de v é gerado por $p : z \mapsto z + 1$. É claro que K é da forma $\{x + iy; y > k\}$. Podemos assumir $k > 1$.

Se $a = \inf\{Re[z]; z \in P\}$ e $b = \sup\{Re[z]; z \in P\}$, então $a \leq b \leq a + 1$, pois, caso contrário $b - a > 1$ nos daria que P contém, por convexidade, um triângulo com largura excedendo 1. Assim, teríamos $P \cap p(P) \neq \emptyset$, um absurdo.

Note que

$$K \cap h(P) \neq \emptyset \Leftrightarrow h^{-1}(K) = g_j(K), \text{ onde } j \in \{0, \dots, t\} \Leftrightarrow \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } h^{-1} = g_j p^n.$$

Segue que $\infty \in \partial(h(P))$, pois $h(v_j) = \infty$. Exatamente como acima, $h(P)$ está em uma faixa vertical de largura 1 e, daí, há no máximo 3 valores de n consecutivos tais que $h(\overline{P}) = p^n g_j^{-1}(\overline{P})$ intersecta \overline{P} . Concluímos que somente um número finito de imagens de \overline{P} podem intersectar $\overline{P} \cap K$. Isto significa que $\overline{P} \cap K$ intersecta apenas um número finito de lados de P e, então, em um horociclo suficientemente pequeno em ∞ , a fronteira de P consiste de apenas duas geodésicas verticais. Portanto, v deve ser um vértice próprio de P .

□

4.3 O polígono de Dirichlet

Durante esta seção, seja G um grupo Fuchsiano agindo em Δ e $w \in \Delta$ um ponto que não seja fixado por nenhum elemento elíptico de G .

Definição 31. Para cada $g \in G$, defina:

- (i) $L_g(w) = \{z \in \Delta; \rho(z, w) = \rho(z, gw)\}$;
- (ii) $H_g(w) = \{z \in \Delta; \rho(z, w) < \rho(z, gw)\} = \{z \in \Delta; \rho(z, w) < \rho(g^{-1}z, w)\}$.

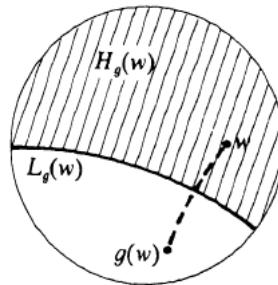


Figura 8: $L_g(w)$ e $H_g(w)$.

Segue da definição que $L_g(w)$ é uma geodésica que não contém w e que $H_g(w)$ é o semiplano contendo w que é limitado por $L_g(w)$.

Definição 32. O polígono de Dirichlet de centro w para G , $D(w)$, é definido por:

$$D(w) = \bigcap_{g \in G, g \neq Id} H_g(w).$$

Às vezes, $D(w)$ é chamado polígono de Poincaré de G . Dirichlet usou esta construção para espaços Euclídeos em 1850 e Poincaré a explorou, em seguida, para espaços hiperbólicos.

Podemos ver $D(w)$ como o conjunto dos pontos que estão mais próximos de w do que de qualquer imagem de w por G . Equivalentemente, $D(w)$ é o conjunto dos pontos $z \in \Delta$ que estão, dentre todos os pontos de suas órbitas, mais próximos de w .

Observe que $z \in H_g(w) \Leftrightarrow w \in H_{g^{-1}}(z)$. Logo, $z \in D(w) \Leftrightarrow w \in D(z)$. Note que isto quer dizer que qualquer ponto em $D(w)$ é um centro para este polígono.

Se h é uma isometria qualquer do espaço hiperbólico, então $h(H_g(w)) = H_{hgh^{-1}}(hw)$. De fato,

$$\begin{aligned} y \in h(H_g(w)) &\Leftrightarrow y = hz, \text{ com } \rho(z, w) < \rho(z, gw) \Leftrightarrow \rho(hz, hw) < \rho(hz, hgw) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho(y, hw) < \rho(y, hgw) \Leftrightarrow y \in H_{hgh^{-1}}(hw). \end{aligned}$$

Consequentemente (usando $D_G(w) = D(w)$) temos que $h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(h(w))$. Em particular, se $h \in G$, então $h(D(w)) = D(hw)$.

Teorema 4.11. O polígono de Dirichlet $D(w)$, definido acima, é um polígono fundamental convexo para G .

Demonstração. Como cada $H_g(w)$ é convexo e contém w , vemos que $D(w)$ é convexo e não vazio.

O restante da prova é consequência do fato de que somente um número finito dos $L_g(w)$ pode intersecar qualquer compacto dado em Δ . Isto segue diretamente do fato de que se $G = g_0, \dots, g_n, \dots$, então

$$\rho(w, L_{g_n}(w)) = \frac{1}{2}\rho(w, g_n(w)) \rightarrow \infty.$$

De fato, caso $\rho(w, g_n(w)) \not\rightarrow \infty$, teríamos que a sequência $g_n(w)$ estaria toda contida em um compacto e, portanto, possuiria subseqüência convergente, o que não pode acontecer.

Seja $z \in \overline{D(w)}$. Temos que existe algum disco compacto K centrado em z tal que, para todo $g \in G$, ou $K \subset H_g(w)$ ou $z \in L_g(w)$ e, além disto, a última opção só pode ocorrer para um número finito de $g \in G$.

É claro que se $z \in D(w)$, a segunda opção não ocorre e $K \subset D(w)$, o que nos diz

que $D(w)$ é aberto. Além disso, as duas opções acima sobre z nos dizem que $\partial(D(w)) \subset \bigcup_{g \in G} L_g(w)$. Portanto, $\mu(\partial(D(w))) = 0$.

Mostraremos agora que existe F , conjunto fundamental para G , tal que $D(w) \subset F \subset \overline{D(w)}$.

Para cada órbita $G(z)$, escolhemos exatamente um ponto $z^* \in \Delta$ satisfazendo

$$\rho(w, z^*) \leq \rho(w, gz), \forall g \in G.$$

Tal escolha é possível, pois $G(z)$ não possui ponto de acumulação. O conjunto F dos pontos escolhidos contém $D(w)$, pois, claramente, se $z \in D(w)$, não há outra escolha possível além de $z = z^*$.

Para mostrar que $F \subset \overline{D(w)}$, tome $z \in F$ e considere o segmento $[w, z]$. Como $w \in D(w)$, nenhum dos $L_g(w)$ passa por w . Se $L_g(w) \cap (w, z) \neq \emptyset$, então $\rho(z, w) > \rho(z, gw) = \rho(g^{-1}z, w)$, contrariando o fato de que $z \in F$. Daí, $L_g(w) \cap (w, z) = \emptyset$, para todo $g \in G$. Portanto, $(w, z) \subset D(w)$ e então $z \in \overline{D(w)}$.

Concluímos que $D(w) \subset F \subset \overline{D(w)}$ e, daí, $D(w)$ é um domínio fundamental convexo para G . Resta mostrar que $D(w)$ é localmente finito.

Seja $K \subset \Delta$ um disco compacto centrado em w de raio r . Suponha que $g(\overline{D(w)}) \cap K \neq \emptyset$. Então existe $z \in \overline{D(w)}$ com $\rho(gz, w) < r$. Como $z \in \overline{D(w)}$, temos:

$$\rho(w, gw) \leq \rho(w, gz) + \rho(gz, gw) \leq r + \rho(z, w) \leq r + \rho(z, g^{-1}w) = r + \rho(gz, w) \leq 2r.$$

Isto só pode ser verdade para um conjunto finito de elementos $g \in G$.

Observamos que isto completa a prova, pois, dado qualquer compacto $K \subset \Delta$, este contém um disco cujo centro é levado em algum ponto em $D(w)$ e, como este ponto também é um centro para $D(w)$, podemos supor que K é um disco centrado em w .

Portanto, $G(w)$ é um polígono fundamental convexo para G .

□

Em virtude do Teorema 4.11, todos os resultados para polígonos fundamentais convexos são válidos para os polígonos de Dirichlet. Em particular, o espaço quociente $D(w)/G$ independe (topologicamente) da escolha de w , desde que w não seja fixado por elementos elípticos de G . Isto é, para tais pontos, $D(w)/G$ é sempre homeomorfo a Δ/G .

Teorema 4.12. Seja $\{z_1, \dots, z_n\}$ um ciclo na fronteira do polígono de Dirichlet $D(w)$.

Então

$$\rho(z_1, w) = \rho(z_2, w) = \cdots = \rho(z_n, w).$$

Demonstração. Considere, por exemplo, z_1 e z_2 , dois elementos de um mesmo ciclo na fronteira de $D(w)$. Então existe $h \in G$ tal que $h(z_1) = z_2$. Como $[w, z_1] \subset D(w)$, vemos que

$$[hw, z_2) = h([w, z_1]) \subset h(D(w)) = D(hw).$$

Segue que z_2 é equidistante de w e de hw . Daí,

$$\rho(w, z_2) = \rho(hw, z_2) = \rho(w, h^{-1}z_2) = \rho(w, z_1)$$

□

Cada lado de $D(w)$ é da forma $s = \overline{D(w)} \cap g(\overline{D(w)}) = \overline{D(w)} \cap \overline{D(gw)}$ e, em vista da discussão anterior, s deve estar contido em algum dos $L_g(w)$. Por razões parecidas, os vértices de $D(w)$ são pontos de sua fronteira, onde dois ou mais dos $L_g(w)$ se intersectam.

Exemplo:

Seja G o grupo modular agindo em \mathbb{H}^2 (grupo das transformações de Möbius cujas matrizes representantes tem entradas inteiras). Devemos mostrar que o polígono aberto P na Figura 9 é o polígono de Dirichlet de centro iv , $\forall v > 1$. Seja então $w = iv$, onde $v > 1$ e, por brevidade, escrevemos $D = D(w)$, $L_g = L_g(w)$ e $H_g = H_g(w)$.

Primeiramente, as isometrias $fz = z + 1$ e $gz = \frac{-1}{z}$ estão em G e os três lados geodésicos de P são precisamente L_f , $L_{f^{-1}}$ e L_g . De fato, $L_f = \{z \in \mathbb{H}^2; \rho(z, w) = \rho(z, w + 1)\}$ é justamente a reta $\{Re[z] = \frac{1}{2}\}$. Pelo mesmo argumento, $L_{f^{-1}} = \{Re[z] = -\frac{1}{2}\}$. Resta mostrar que $L_g = \{|z| = 1\}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, iv) = \cosh \rho(z, -\frac{1}{iv}) &\Leftrightarrow 1 + \frac{|z - iv|^2}{2\operatorname{Im}[z]v} = 1 + \frac{|z + \frac{1}{iv}|^2}{2\operatorname{Im}[z]\frac{1}{v}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z - iv|^2 = v^2|z + \frac{1}{iv}|^2 = |vz + \frac{1}{i}|^2 = |vz - i|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + ivz - iv\bar{z} + v^2 = v^2|z|^2 + ivz - iv\bar{z} + 1 \Leftrightarrow |z|^2(1 - v^2) = 1 - v^2. \end{aligned}$$

Como $v > 1$, segue que $\cosh \rho(z, iv) = \cosh \rho(z, g(iv)) \Leftrightarrow |z| = 1$ e, portanto, $L_g = \{|z| = 1\}$.

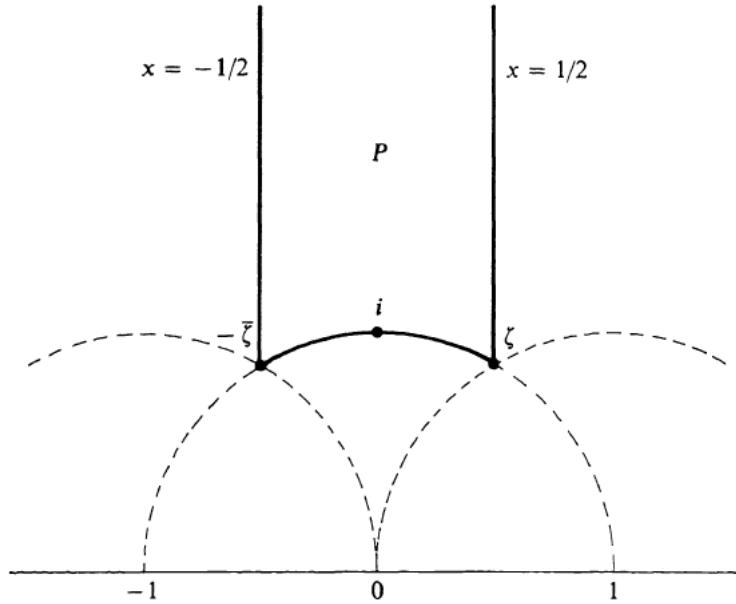


Figura 9: P

Isto mostra que $D \subset P$.

Se supomos $D \neq P$, então algum lado de D deve intersectar P e, daí, existe $z \in D$ tal que $h(z) \in h(D) \cap P$ e, assim, z é tal que $z, hz \in P$. Mostraremos que isto não pode ocorrer.

Escreva $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, onde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$. Então:

$$|cz+d|^2 = c^2|z|^2 + 2Re[z]cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd|, \text{ pois } |z| > 1 \text{ e } |Re[z]| < \frac{1}{2}.$$

Este limite inferior é um inteiro positivo (só seria 0 se $c = d = 0$, mas $ad - bc = 1$). Concluímos que $|cz + d| > 1$ e, como

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2},$$

segue que $Im[hz] = Im[\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}] = Im[\frac{(ad+bc)x + (ad-bc)y i}{|cz+d|^2}] = \frac{Im[z]}{|cz+d|^2}$, onde $z = x + iy$.

Daí,

$$Im[h(z)] = \frac{Im[z]}{|cz+d|^2} < Im[z].$$

O mesmo vale substituindo z e h por hz e h^{-1} . Daí, $Im[z] < Im[hz]$ e temos uma contradição.

Então $D = P$. □

Como D é um polígono fundamental convexo, os resultados da seção anterior valem. Podemos então ver D tendo 3 lados, $s_1 = [\zeta, \infty)$, $s_2 = [-\bar{\zeta}, \infty)$ e $[-\bar{\zeta}, \zeta]$, com as funções de emparelhamento satisfazendo $f(s_2) = s_1$, $f^{-1}(s_1) = s_2$ e $g(s_3) = s_3$, ou adotar a convenção alternativa, substituindo s_3 pelos dois lados $s_4 = [-\bar{\zeta}, i]$ e $s_5 = [i, \zeta]$ e considerando i um vértice de D .

Como P é um polígono fundamental para G , o polígono P_1 na Figura 9 também o é. Apenas substituimos uma faixa vertical de P pela sua imagem por f .

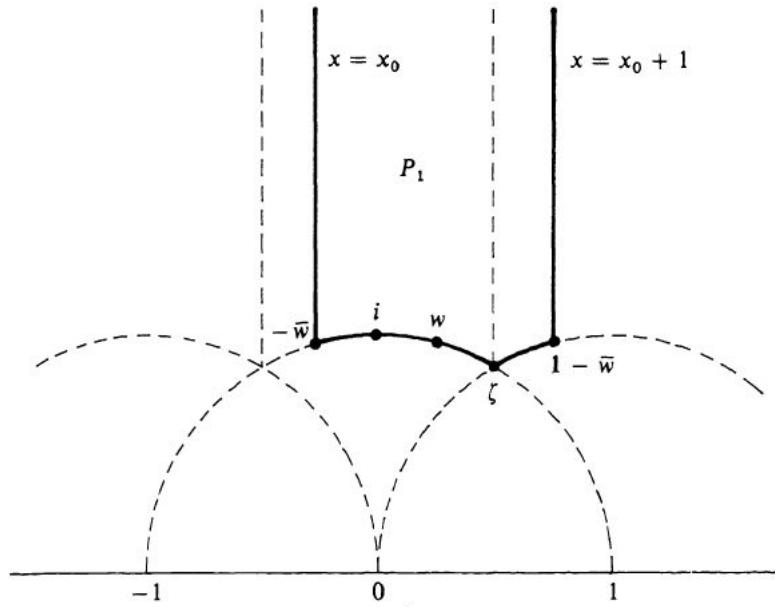


Figura 10: P_1

Aqui, P_1 tem 5 ou 6 lados. No caso em que consideramos P_1 com 6 lados, estes são:

$$\begin{aligned} s_1 &= [-\bar{w}, \infty], s_2 = f(s_1) = [1 - \bar{w}, \infty], s_3 = [-\bar{w}, i], \\ s_4 &= g(s_3) = [i, w], s_5 = [w, \zeta], s_6 = f(g(s_5)) = [\zeta, 1 - \bar{w}]. \end{aligned}$$

No caso em que consideremos P_1 com 5 lados, vemos $[-\bar{w}, w] = g([-w, w])$ como sendo um único lado.

Teorema 4.13. Seja G um grupo Fuchsiano e $D(w)$ o polígono de Dirichlet de centro w . Então, para quase todas as escolhas de w (a menos de um conjunto de medida nula), temos:

- (1) Todo ciclo elíptico em $D(w)$ tem comprimento 1;
- (2) Todo ciclo acidental em $\partial D(w)$ tem comprimento 3;

- (3) Todo vértice impróprio que é um ponto ordinário está em um ciclo de comprimento 2;
- (4) Todo vértice próprio tem comprimento de seu ciclo igual a 1 e é ponto fixo parabólico;
- (5) Todo ciclo parabólico tem comprimento 1 e é um vértice próprio.

Demonstração. A prova de cada item (k) , para $k = 1, \dots, 5$, segue o mesmo padrão: Se a condição (k) falha, então w deve pertencer a um conjunto excepcional E_k , de medida nula. Assim, se $w \notin \bigcup_{k=1}^5$, que tem medida nula, todas as condições são válidas.

Para verificar (1), seja E_1 a união (enumerável) de todas as geodésicas equidistantes de dois pontos fixos elípticos. Claramente, E_1 tem medida nula. Se existem u e v pontos fixos elípticos distintos em um mesmo ciclo, pelo Teorema 4.12, $\rho(u, w) = \rho(v, w)$. Daí, $w \in E_1$.

Para o restante da prova, fazemos uso do seguinte Lema, cuja prova pode ser encontrada em [1] (Capítulo 9, seção 9.4).

Lema 4.14. Seja $R(z)$ uma função racional não-constante em \mathbb{H}^2 . Então

$$E = \{z \in \mathbb{H}^2; R(z) \in \mathbb{R}\}$$

tem medida nula.

Para todas $f, g, h \in G$ distintas e não-triviais, definimos:

$$R(z) = \frac{(z - gz)(fz - hz)}{(z - fz)(gz - hz)}.$$

Note que $R(z)$ pode ser constante, por exemplo no caso em que f, g e h fixam 0 e ∞ .

Seja $E_2 = \bigcup\{z; R(z) \in \mathbb{R}\}$, sendo a união tomada sobre todos os trios $\{f, g, h\}$ para os quais R não é constante (note que denotamos $R(z)$, mas R depende também de f, g e h).

Pelo Lema 4.14, E_2 tem medida nula e mostraremos agora que se (2) não ocorre, $w \in E_2$.

Suponhamos que (2) falha. Então existem quatro pontos distintos $u, f^{-1}(u), g^{-1}(u), h^{-1}(u)$ em um mesmo ciclo acidental. Pelo Teorema 4.12, temos $\rho(w, u) = \rho(fw, u) = \rho(gw, u) = \rho(hw, u)$. Então os pontos w, fw, gw, hw pertencem a um círculo hiperbólico de centro

em u . Pela Proposição 2.10, segue que $R(w)$ é real. Então, a menos que R seja constante, $w \in E_2$.

Mostraremos que R não pode ser constante. De fato, caso tivéssemos $R(z) \equiv \lambda$, escolhendo $z \in \mathbb{H}^2$ que não seja fixado por nenhum dos elementos $g, f, f^{-1}h, g^{-1}h$, vemos que $\lambda = R(z) \neq 0, \infty$. Façamos agora $z \rightarrow v$, onde v é algum ponto fixo de g . O numerador e, consequentemente, o denominador de R convergem a zero. Assim, f ou h também fixa v . Suponha então que v seja ponto fixo comum de f e g (o mesmo argumento vale para h). Como $f, g \in G$ (Fuchsiano), segue que $\langle f, g \rangle$ é um grupo cíclico, gerado, digamos, por p . Temos que p é hiperbólico, parabólico ou elíptico, dependendo se a órbita de qualquer ponto em relação a $\langle f, g \rangle$ esteja, respectivamente, em um hiperciclo, horociclo ou círculo hiperbólico (possibilidades mutuamente exclusivas). Por hipótese, segue que p é elíptico e fixa o centro do único círculo hiperbólico através de w, fw, gw .

Concluímos que $fu = gu = u$, o que é uma contradição.

Isto prova (2).

Um argumento parecido prova (3), (4) e (5). Suponhamos inicialmente que v é um vértice próprio de D . Então existem dois lados, $s_1 = \overline{D} \cap g(\overline{D})$ e $s_2 = \overline{D} \cap h(\overline{D})$, terminando em v . Como s_1 está contido na geodésica bissectando $[w, gw]$, segue da seção 7.28 de [1] que v, w, gw, hw estão em um horociclo com base em v .

Considere agora a função $R_1(z) = [v, z, gz, hz] = \frac{(v-gz)(z-hz)}{(v-z)(gz-hz)}$.

Como um horociclo é um círculo Euclídeo, segue que $R_1(w) \in \mathbb{R}$. A partir daí, temos duas opções: ou R_1 é não-constante e w pertence a um conjunto de medida nula, ou R_1 é contante.

Devemos mostrar que no último caso, (3), (4) e (5) valem.

Suponhamos então que $R_1(z) \equiv \lambda$, onde $\lambda \neq 0, \infty$. Fazendo $z \rightarrow v$, vemos que g ou h fixa v . Por simetria, podemos supor que $g(v) = v$. Então, pelo Teorema 4.10, g é parabólico. Isto implica que o lado $g^{-1}(s_1)$ de D também termina em v e, então, é justamente o lado s_2 . Logo, $h = g^{-1}$ e v é ponto fixo parabólico em um ciclo de comprimento 1. Isto estabelece (4) e (5), pois todo ponto fixo parabólico em ∂D é um vértice próprio, pelo mesmo Teorema.

Finalmente, qualquer vértice impróprio v que é um ponto ordinário pertence a um ciclo finito v_1, \dots, v_n e D tem ângulos $\theta_1, \dots, \theta_n$ nesses pontos, onde cada θ_j vale $\frac{\pi}{2}$ ou 0 e $\sum \theta_j = \pi$.

Usando (4), vemos que θ_j não pode ser 0. Então $n = 2$ e está demonstrado (3).

□

Referências

- [1] Alan F. Beardon. The Geometry of Discrete Groups, 1srt edition. Springer - Verlag, New York, 1983
- [2] Celso Melchiades Doria, ESTRUTURAS GEOMÉTRICAS EM DIMENSÃO 2, UFSC (cmdoria@mtm.ufsc.br).
- [3] Lima, E.L., Elementos de topologia Geral. Editora SBM, Rio de Janeiro-RJ, 2009.