UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Vítor Carreiro Ramalho

Categorias Derivadas e Dualidade de Grothendieck

Juiz de Fora
2022

Vítor Carreiro Ramalho

Categorias Derivadas e Dualidade de Grothendieck

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ramalho, Vítor Carreiro.

Categorias Derivadas e Dualidade de Grothendieck / Vítor Carreiro Ramalho. – 2022.

110 f.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Bacharelado em Matemática, 2022.

1. Dualidade de Grothendieck. 2. Categorias Derivadas. 3. Geometria Algébrica. 4. Representabilidade de Brown. I. Feitosa, Frederico Sercio, orient. II. Título.

Vítor Carreiro Ramalho

Categorias Derivadas e Dualidade de Grothendieck

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Aprovada em (dia) de (mês) de (ano)

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Marco Pacini
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Willian Versolati França
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho aos meus pais,
Murilo (em memória) e Consuelo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Consuelo, por todo sacrifício feito e todo suporte e incentivo que me ofereceu para que pudesse levar o curso até o fim.

Agradeço ao meu irmão e meus amigos por todo incentivo e por tornarem este período mais divertido e leve.

Agradeço aos meus tios Paulo (em memória) e Iza, por me acolherem e me auxiliarem em tudo enquanto me preparava para o vestibular.

Agradeço ao Professor Frederico Sercio Feitosa, por me apresentar o incrível mundo da Geometria Algébrica e também por suas contribuições e orientação atenciosa e crítica tanto durante a escrita deste trabalho quanto anteriormente, durante a iniciação científica, possibilitando o estudo de conteúdos incomuns para um aluno de graduação.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática. Agradeço especialmente aos professores Willian Versolati França, cujos conselhos foram muito importantes para a minha decisão de ingressar no curso de matemática, e Lonardo Rabelo, pelo incentivo e por, através da disciplina Introdução à Topologia Algébrica, motivar grande interesse na área.

Por fim, agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora por todas as oportunidades, em especial pelo apoio à pesquisa na forma da Bolsa de Iniciação Científica (BIC) que foi essencial para a elaboração deste trabalho do modo como está apresentado.

Nam si homines clarè totum ordinem naturæ intelligerent, omnia æquè necessaria reperirent, ac omnia illa, quæ in Mathesi tractantur.[1]

(Spinoza, COGITATA METAPHYSICA.)

[1] Pois, se os homens conhecessem claramente a ordem toda da Natureza, notariam que todas as coisas são tão necessárias quanto aquelas tratadas pela Matemática. (Trad. de Chauí, M. em Col. Os Pensadores.)

RESUMO

O trabalho objetiva a construção de categorias derivadas não limitadas sobre uma categoria abeliana assim como a demonstração do Teorema de Dualidade de Grothendieck na categoria derivada de feixes quase coerentes sobre um esquema X, através do Teorema da Representabilidade de Brown para categorias triangulares. Para isso, mostraremos que a categoria de feixes quase coerentes sobre X é compactamente gerada e que o funtor derivado da imagem direta de um morfismo separado comuta com coprodutos.

Palavras-chave: Dualidade de Grothendieck. Categorias Derivadas. Geometria Algébrica. Representabilidade de Brown.

ABSTRACT

The work aims at the construction of unbounded derived categories of an abelian category as well as the demonstration of Grothendieck Duality Theorem in the category derived of quasi-coherent sheaves over a scheme X, through Brown Representability Theorem for triangular categories. For this purpose, we will show that the category of quasi-coherent sheaves over X is compactly generated and that the functor derived from the direct image of a separate morphism commutes with co-products.

Keywords: Grothendieck Duality. Derived Categories. Algebraic Geometry. Brown Representability.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$	Conjunto de objetos de uma categoria $\mathcal{C}$.
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$	Conjunto de homomorfismos entre os objetos X e Y na categoria $\mathcal{C}$.
$\mathcal{U}$-Set	Categoria dos conjuntos em um universo $\mathcal{U}$.
Group	Categoria de grupos.
Ab	Categoria de grupos abelianos.
Ring	Categoria de anéis.
Field	Categoria de corpos.
Top	Categoria de espaços topológicos.
Sh-Ab	Categoria de feixes de grupos abelianos sobre um esquema X.
Sh-$\mathsf{Mod}(X)$	Categoria de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos.
QCoh/X	Categoria de feixes quase coerentes sobre X.
$\mathsf{C}(\mathcal{C})$	Categoria de complexos da categoria $\mathcal{C}$.
$\mathsf{K}(\mathcal{C})$	Categoria de homotopia da categoria $\mathcal{C}$.
$\mathsf{D}(\mathcal{C})$	Categoria derivada da categoria $\mathcal{C}$.
$M(f)$	Cone de mapeamento do morfismo f.
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Funtores.
$R\mathcal{F}$	Funtor derivado à direita do funtor $\mathcal{F}$.
$L\mathcal{G}$	Funtor derivado à esquerda do funtor $\mathcal{G}$.
$\mathscr{F}, \mathscr{G}$	Feixes.
$\mathscr{H}om$	Feixe hom.
H	Funtor de Cohomologia.
$\mathcal{H}$	Cohomologia de feixes.
$\varprojlim$	Limite.
$\underrightarrow{\mathrm{colim}}$	Colimite.
$\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}$	Colimite homotópico.
$\bigoplus$	Soma direta.
$\prod$	Produto.
$\coprod$	Coproduto.
Ker	Equalizador.
Coker	Coequalizador.
Im	Imagem.
Coim	Coimagem.
$\forall$	Para todo.
$\in$	Pertence.
$\otimes$	Produto tensorial.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Na segunda metade do Século XX a Geometria Algébrica foi marcada por uma revolução em seus fundamentos, consequência de trabalhos de matemáticos como Alexander Grothendieck, seus alunos e colaboradores. Trabalhos esses, que propõem um novo ponto de vista e uma nova linguagem para abordar a teoria clássica. Como explica Grothendieck em suas memórias,

> [...] s'il y a une chose en mathématique qui me fascine plus que toute autre, ce n'est ni 'le nombre', ni 'la grandeur', mais toujours la forme. Et parmi les mille-et-un visages que choisit la forme pour se révéler à nous, celui qui m'a fasciné plus que tout autre et continue à me fasciner, c'est la structure cachée dans les choses mathématiques.[1]
>
> (RÉCOLTES ET SEMAILLES, 1986, p.42)

Essa nova abordagem é marcada por um uso intensivo da Teoria de Categorias, criada por Eilenberg e Mac Lane nos anos 1940, cuja ênfase é colocada não nos objetos e suas propriedades, mas nas relações entre objetos dentro de uma mesma categoria. A partir de então, as ideias de Grothendieck vem inspirando outros matemáticos e a linguagem de Categorias tornando-se cada vez mais popular e ganhando mais relevância em outras áreas da Matemática e até da Física.

Um caso notável da utilização dessa linguagem é o desenvolvimento do conceito de Categoria Derivada $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{C}$, que foi introduzido por Jean-Louis Verdier [25] , por volta de 1960, e posteriormente sumarizado no seminário SGA 4 por Pierre Deligne [4]. Trata-se de uma construção de álgebra homológica que tem por objetivo refinar e, em certo sentido, simplificar a teoria dos funtores derivados definidos sobre $\mathcal{C}$. Uma das grandes vantagens é que nessa linguagem, não trabalhamos com invariantes cohomológicos, mas diretamente nos complexos, ver [13].

O impulso original para desenvolver o formalismo "derivado" veio da necessidade de encontrar uma formulação adequada da teoria da dualidade de Grothendieck, isto é, a teoria de dualidade naturalmente esperada após o desenvolvimento da cohomologia de feixes quase coerentes sobre esquemas, que gira em torno da existência de um isomorfismo

$$R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F},\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} Rf_*R\mathscr{H}om(\mathscr{F},f^!\mathscr{G}). \tag{1.1}$$

na categoria derivada de feixes quase coerentes sobre um esquema Y, onde $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo próprio dado. À este resultado chamamos Teorema da dualidade de

[1] Se há uma coisa na matemática que me fascina mais do que qualquer outra, não é nem 'o número', nem 'a grandeza', mas sempre a forma. E entre os mil e um rostos que a forma escolhe para se revelar a nós, aquele que me fascinou mais do que qualquer outro e continua me fascinando, é a estrutura escondida nas coisas matemáticas.

Grothendieck[2], que garante a existência de um adjunto à direita, denotado por $f^!$, para o funtor derivado da imagem direta Rf_*. A demonstração original de Grothendieck, ver [11], é construtiva e baseada em cálculos locais. Mas como categorias derivadas são inadequadas para esse tipo de argumento a demonstração torna-se trabalhosa. Como ressalta Grothendieck no prefácio de suas notas para o "Seminário Hartshorne".

> La construction donnée ici est compliquée et indirecte et n'est pas valable sous conditions aussi générales qu'on est en droit de s'y attendre. Il faudra sans doute une idée nouvelle por apporter des simplifications substantielles.[3]
>
> (GROTHENDIECK, IN RESIDUES AND DUALITY, 1966, Prefácio)

Felizmente, existem métodos abstratos na literatura para garantir a existência do funtor $f^!$, como o apresentado por Deligne [5] e complementado por Verdier em [24]. Posteriormente temos a demonstração de Lipman [16], que até mesmo enfraquece a hipótese inicial de X ser um esquema Noetheriano. Mas entre todas, destaca-se a abordagem homotópica proposta por Amnon Neeman [17] que após formular uma versão do Teorema da Representabilidade de Brown para categorias triangulares, muitas vezes chamado Teorema de Brown-Neeman, que fornece condições necessárias e suficientes para que um funtor triangular seja representável, pôde concluir a Dualidade de Grothendieck como uma consequência imediata até mesmo para o caso não Noetheriano. No entanto, como no contexto do Teorema de Brown é essencial que a categoria triangular admita somas diretas, torna-se necessário trabalhar com categorias derivadas não limitas.

> The point of this article is that Grothendieck duality is very easy to prove by homotopy theoretic techniques. It is an immediate consequence of Brown representability.[4]
>
> (THE GROTHENDIECK DUALITY THEOREM VIA BOUSFIELD'S TECHINIQUES AND BROWN REPRESENTABILITY, 1996, p. 208)

Assim, este trabalho busca construir categorias derivadas não limitadas a partir de uma categoria abeliana e desenvolver uma teoria que permita o cálculo de funtores derivados nessas categorias. Na sequência, visa um estudo dos métodos de demonstração apresentados no artigo de Neeman [17], objetivando apresentar a demonstração do Teorema de Dualidade de Grothendieck via Representabilidade de Brown.

Tendo em vista tais objetivos, podemos detalhar o conteúdo apresentado no trabalho da seguinte maneira.

---

2 Ver nota histórica em [19], página 1.

3 A construção aqui apresentada é complicada e indireta e não é válida sob condições tão gerais como seria de esperar. Será sem dúvida necessária uma nova ideia para introduzir simplificações substanciais.

4 O ponto deste artigo é que a dualidade de Grothendieck é muito fácil de provar por técnicas teóricas de homotopia. É uma consequência imediata da representabilidade de Brown.

Capítulo 2. Na primeira parte, visando tornar o texto mais acessível, são introduzidas noções gerais de Teoria de categorias, como categorias e funtores, transformações naturais, adjunção entre funtores, representatividade, limites e colimites. Na seção 2.4, define-se Categorias Aditivas e Abelianas por exemplo a categoria de módulos, grupos abelianos ou feixes de grupos abelianos . Em seguida, com o objetivo de lançar mão de ferramentas poderosas da teoria de homotopia, definimos Categorias Triangulares, que foram concebidas por Dieter Puppe e Verdier, como uma categoria abeliana munida de um funtor de translação e uma família de triângulos distintos satisfazendo certos axiomas. E tratamos do sofisticado processo de localização de categorias por um sistema multiplicativo, inspirado pela operação de localização de anéis. O resultado mais importante do Capítulo é o Teorema da Representabilidade de Brown.

Capítulo 3. O capítulo é dedicado à construção de categorias derivadas que podemos resumir do seguinte modo. Começando com uma categoria abeliana $\mathcal{C}$, consideramos a categoria $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ de complexos de $\mathcal{C}$. Identificando os morfismos homotopicamente nulos em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ com o morfismo nulo obtemos a categoria $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ de homotopia de $\mathcal{C}$, e como vantagem, temos que muitos diagramas que não comutavam em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ agora comutam em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Além disso gostaríamos de "enriquecer" essa categoria de modo que morfismos de complexos que induzem isomorfismos na cohomologia tornam-se isomorfismos de complexos. Com esse propósito, localizamos a categoria $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ por um certo sistema multiplicativo, e assim, obtemos $\mathsf{D}(\mathcal{C})$. Como consequência dessa construção temos que $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ é uma categoria triangular. Na sequência, definimos funtores derivados à direita e à esquerda e fornecemos métodos de calcular essas derivações através de resoluções acíclicas e homotopicamente injetivas. A partir de então, podemos apresentar e estudar nas seções 3.3 e 3.4 alguns funtores derivados particulares que são de extrema importância no desenvolvimento da Geometria Algébrica.

Capítulo 4. Verificaremos, através do Teorema da Localização de Thomason, que a categoria de feixes quase coerentes de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre um esquema separado X cumpre as hipóteses do Teorema de Brown, isto é, é compactamente gerada. Como no capítulo anterior foi provado que, para todo morfismo separado de esquemas $f : X \longrightarrow Y$, o funtor derivado à direita da imagem direta, Rf_*, respeita coprodutos, concluiremos a existência de um funtor adjunto à direita que denotamos por $f^!$. Finalmente, demonstraremos na seção 4.3 a versão para feixes dessa adjunção, conhecida como Dualidade de Grothendieck.

Os pré-requisitos do trabalho se concentram em resultados e conceitos de Geometria Algébrica, pois é assumido uma familiaridade com a linguagem de esquemas e feixes. Todos esses resultados podem ser encontrados no Capítulo II de [10], assim como em [8] e [9]. Os conceitos de Teoria de Categorias presentes no Capítulo 1 foram baseados em [21] e principalmente em [15], além do excelente tratamento de Categorias Triangulares e Localização feita em [18]. Para o Capítulo 2 a principal referência utilizada foi [16]. Também foram consultados [11] e [4] assim como os capítulos 13 e 14 de [15]. Por fim, o Capítulo 4 foi quase totalmente baseado nos métodos de demonstrações apresentados em [17].

2 CATEGORIAS TRIANGULARES E REPRESENTABILIDADE DE BROWN

2.1 CATEGORIAS E FUNTORES

Definição 2.1.1. *Um **universo de Grothendieck** $\mathcal{U}$, ou simplesmente universo, é um conjunto satisfazendo os seguintes axiomas:*

1. *$x \in \mathcal{U}$ e $y \in x$, então $y \in \mathcal{U}$. ($\mathcal{U}$ é um conjunto transitivo);*
2. *$x, y \in \mathcal{U}$ então $\{x, y\} \in \mathcal{U}$;*
3. *$x \in \mathcal{U}$, então $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$;*
4. *Se $I \in \mathcal{U}$ e $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{U}$, então $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$.*

O Axioma de Tarski, ou axioma do universo, garante que, dado um conjunto x, existe um universo $\mathcal{U}$ contendo x.

Axioma de Tarski: Para todo conjunto x, existe um conjunto y cujos membros incluem: O conjunto x, todo subconjunto de cada membro de y, o conjunto das partes de cada membro de y e cada subconjunto de y com cardinalidade menor que y.

Para uma apresentação completa do conceito de universo ver exposé I em [1].

Definição 2.1.2. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ consiste de um conjunto de **objetos**, $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, para cada $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$[1] um conjunto de **morfismos** denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e uma lei de composição entre morfismos:*

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

que satisfaz

1. *Associatividade: Dados $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ temos*
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$
2. *Identidade: Para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe o morfismo identidade $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tal que para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ temos*
$$f \circ id_X = f \qquad id_X \circ g = g.$$

[1] Quando não houver prejuízo para a compreensão, escreveremos simplesmente $X \in \mathcal{C}$ para significar $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

*Um **isomorfismo** em $\mathcal{C}$ é um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ para o qual existe um morfismo $g : Y \longrightarrow X$ onde $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Dado uma categoria $\mathcal{C}$ definimos a **categoria oposta** $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ por*

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X).$$

Onde a lei de composição é dada por $f \circ^{\mathrm{op}} g = g \circ f$ para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

Definição 2.1.3. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas categorias. Dizemos que $\mathcal{C}'$ é uma **subcategoria** de $\mathcal{C}$ se*

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

*para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$, a lei de composição em $\mathcal{C}'$ é induzida pela lei de composição de $\mathcal{C}$ e os morfismos identidade em $\mathcal{C}'$ são morfismos identidade em $\mathcal{C}$. Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é **plena** se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$.*

Dado um universo $\mathcal{U}$, gostaríamos de sempre trabalhar com categorias onde a coleção de objetos e morfismos são conjuntos deste universo, é nesse sentido que consideramos categorias menores que o universo $\mathcal{U}$ e formalmente temos a seguinte definição.

Definição 2.1.4. *Seja $\mathcal{U}$ um universo. Um conjunto $X \in \mathcal{U}$ é chamado um $\mathcal{U}$-conjunto. Um conjunto Y isomorfo a um conjunto em $\mathcal{U}$ é dito **pequeno** em $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{U}$-**pequeno**. Uma categoria $\mathcal{C}$ é uma $\mathcal{U}$-categoria se para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é pequeno em $\mathcal{U}$. Finalmente diremos que uma $\mathcal{U}$-categoria $\mathcal{C}$ é pequena em $\mathcal{U}$, se $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ for pequeno em $\mathcal{U}$.*

Denotamos por $\mathcal{U}$-Set, ou simplesmente Set, a categoria dos conjuntos, cujos objetos são todos os conjuntos que pertencem a $\mathcal{U}$, e $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(X,Y)$ é o conjunto de todas as funções $f : X \longrightarrow Y \in \mathcal{U}$.

Note que a noção de categoria de conjuntos está ligada a definição de universo, pois não existe uma categoria de todos os conjuntos, já que a coleção de todos os conjuntos não é um conjunto.

Alguns exemplos de categorias são, a categoria dos espaços topológicos Top onde os morfismos são funções contínuas, as categorias grupos Group, grupos abelianos Ab, anéis Ring e corpos Field onde os morfismos são os respectivos homomorfismos. Um conjunto $\mathcal{I}$ com uma ordem parcial $\leq$ pode ser associado a uma categoria $I = (\mathcal{I}, \leq)$ do seguinte modo

$$\mathrm{Obj}(I) = \mathcal{I} \qquad \mathrm{Hom}_I(i,j) = \begin{cases} \{i \longrightarrow j\} \text{ se } i \leq j \\ \varnothing \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Definição 2.1.5. *Dado $\mathcal{C}$ uma categoria. Dois morfismos f e g são **paralelos** se possuem o mesmo domínio e contradomínio, isto é $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, neste caso escrevemos $f, g : X \rightrightarrows Y$.*

*Um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um **monomorfismo** se para todos $g_1, g_2 : Z \rightrightarrows Y$, $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implica $g_1 = g_2$. Ou seja, a aplicação*

$$(f\circ) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$$

é injetiva para todo $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Denotamos esse fato escrevendo $f : X \rightarrowtail Y$.

*Um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um **epimorfismo** se para todos $g_1, g_2 : Y \rightrightarrows Z$, $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ implica $g_1 = g_2$. Ou seja, a aplicação*

$$(\circ f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

é injetiva para todo $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Ou ainda, $f^{\mathrm{op}} : X^{\mathrm{op}} \longrightarrow Y^{\mathrm{op}}$ é um monomorfismo.

Definição 2.1.6. *Sejam duas categorias $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$. Um **funtor** $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma regra que associa um elemento $\mathcal{F}(X) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$ para todo elemento $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e um morfismo $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ respeitando as leis de composição. Isto é*

$$\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}, \qquad \textit{para todo } X \in \mathcal{C}.$$

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f), \quad \textit{para todo } f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \textit{ e } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z).$$

*Seja $\mathcal{C}''$ uma categoria. Um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ é chamado de **bifuntor**.*

Definição 2.1.7. *Um **diagrama** em uma categoria $\mathcal{C}$ é um funtor $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$ cujo domínio é uma categoria pequena chamada **categoria de índices**.*

Observação 2.1.1. *Em razão da definição de funtor, a noção de diagrama comutativo pela Definição 2.1.7 coincide com a noção usual de diagrama comutativo. De fato, usualmente, dizemos que um diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

com objetos e morfismo na categoria $\mathcal{C}$ comuta, se $h \circ f = k \circ g$. Assim, como os objetos na categoria I não desempenham papel significativo nessa questão, podemos tomar a categoria I como um grafo direcionado onde subgrafos do tipo $\begin{tikzcd}[sep=tiny] & \bullet \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \end{tikzcd}$ denotam pela seta horizontal a composição das duas setas superiores. De modo que, podemos considerar o diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$ dado por

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] & & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{\quad\alpha\quad}"] & & C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

Já que α é um funtor, deve respeitar composições, assim $h \circ f = k \circ g$.

Definição 2.1.8. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias e X e Y objetos de $\mathcal{C}$. Dizemos que o funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é **pleno**, respectivamente **fiel**, se a aplicação*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$

*for sobrejetiva, respectivamente injetiva. Assim, $\mathcal{F}$ é **plenamente fiel** se $\mathcal{F}$ é pleno e fiel. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **essencialmente sobrejetivo** se, para todo objeto $X' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$ existir $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $\mathcal{F}(X) \simeq X'$ em $\mathcal{C}'$. Finalmente, $\mathcal{F}$ é uma **equivalência de categorias** se for plenamente fiel e essencialmente sobrejetivo.*

Definição 2.1.9. *Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ dois funtores. Uma **transformação natural** $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, é a coleção de morfismos $(\varphi_X)_{X \in \mathcal{C}} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$, tal que*

$$\mathcal{G}(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ \mathcal{F}(f)$$

para todos $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e todos os morfismo $f : X \longrightarrow Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(X) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & \mathcal{G}(Y).
\end{tikzcd}$$

*Dizemos que φ é um **isomorfismo natural** se todos os φ_X são isomorfismos em $\mathcal{C}$. Dado duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, definimos $\mathrm{Ft}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ a categoria dos funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}'$. Assim, dados dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ft}(\mathcal{C},\mathcal{C}')}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é o conjunto de todas as transformações naturais de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{G}$.*

Segue das definições que se $\mathcal{C}$ é $\mathcal{U}$-pequena e $\mathcal{C}'$ é uma $\mathcal{U}$-categoria então os conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ft}(\mathcal{C},\mathcal{C}')}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ são pequenos em $\mathcal{U}$ e, portanto, $\mathrm{Ft}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ é uma $\mathcal{U}$-categoria.

Definição 2.1.10. *Denotamos por $\{\mathrm{pt}\}$ o conjunto contendo somente um elemento, pt. Assim, dado uma categoria $\mathcal{C}$ e objetos quaisquer $\mathcal{I}, \mathcal{T} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ dizemos que $\mathcal{I}$ é um objeto **inicial** se para todo $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{I}, Y) \simeq \{\mathrm{pt}\}$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é um objeto **terminal** se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathcal{T}) \simeq \{\mathrm{pt}\}$, isto é, $\mathcal{T}$ é inicial em $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.*

Exemplos, na categoria Set o conjunto vazio $\varnothing$ é um objeto inicial, já que para todo conjunto X, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\varnothing, X) = \{\hookrightarrow\}$ e todo conjunto contendo um único elemento, $\{pt\}$ é um objeto terminal. A categoria Field não possui objeto terminal ou inicial. De fato, homomorfismos de corpos preservam a característica, logo não existe homomorfismo entre corpos de características diferentes.

2.2 Lema de Yoneda e Funtores Adjuntos

Sejam $\mathcal{U}$ um universo e $\mathcal{C}$ uma $\mathcal{U}$-categoria. Cada objeto $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ define naturalmente os funtores Hom do seguinte modo.

1. Funtor Hom Contravariante

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \textsf{Set} \\
Y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \\
f : Z \to Y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g \longmapsto g \circ f
\end{aligned}$$

2. Funtor Hom Covariante

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bullet) : \mathcal{C} &\longrightarrow \textsf{Set} \\
Y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\
f : Y \to Z &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g \longmapsto f \circ g
\end{aligned}$$

Frequentemente denotamos $\mathrm{Hom}(f, X)$ simplesmente por $(\circ f)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f)$ por $(f\circ)$.

Já que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathcal{U}$ para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ temos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in$ Set, e portanto os funtores acima estão bem definidos.

Definição 2.2.1. *Denotamos por $\mathcal{C}^{\wedge}_{\mathcal{U}}$ a categoria dos funtores de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ para $\mathcal{U}$-**Set** e por $\mathcal{C}^{\vee}_{\mathcal{U}}$ a categoria dos funtores de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ para $\mathcal{U}$-**Set**$^{\mathrm{op}}$. Isto é*

$$\mathcal{C}^{\wedge}_{\mathcal{U}} = \mathrm{Ft}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{U}\text{-}\textsf{Set}).$$

$$\mathcal{C}^{\vee}_{\mathcal{U}} = \mathrm{Ft}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{U}\text{-}\textsf{Set}^{\mathrm{op}}) \simeq \mathrm{Ft}(\mathcal{C}, \mathcal{U}\text{-}\textsf{Set})^{\mathrm{op}}.$$

*Quando não for necessário destacar o universo $\mathcal{U}$ escrevemos simplesmente $\mathcal{C}^{\wedge}$ e $\mathcal{C}^{\vee}$. Assim podemos definir os **funtores de Yoneda** como*

$$h_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\wedge}_{\mathcal{U}} \quad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X),$$

$$k_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\vee}_{\mathcal{U}} \quad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bullet).$$

Observação 2.2.1. *Existe um isomorfismo de categorias*

$$\mathcal{C}^{\vee} \simeq \mathrm{Ft}(\mathcal{C}, \textsf{Set})^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Ft}((\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}, \textsf{Set})^{\mathrm{op}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\wedge^{\mathrm{op}}}$$

Definição 2.2.2. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto de $\mathcal{C}$. Dizemos que um isomorfismo $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{G}(X)$ é **funtorial** em X, quando vale para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, isto é, quando $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$.*

Teorema 2.2.1 (Lema de Yoneda). *Para qualquer funtor $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^{\wedge}$ e para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ existe um isomorfismo natural, com relação a $\mathcal{F}$ e a X.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X), \mathcal{F}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X) \\
\varphi &\longmapsto \varphi_X(id_X)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Do mesmo modo, dado $\mathcal{G} \in \mathcal{C}^{\vee}$ e $X \in \mathcal{C}$ existe um isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\vee}}(\mathcal{G}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(X) \tag{2.2}$$

Demonstração. Pela Observação 2.2.1, é suficiente mostrar o primeiro isomorfismo. Inicialmente, podemos definir o mapa $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ como a composição $\varphi \longmapsto \varphi_X \longmapsto \varphi_X(id_X)$. Agora, para mostrar o isomorfismo queremos definir um morfismo inverso para ϕ

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{F}(X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{F}) \\ s &\longmapsto (\psi(s)_Y)_{Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

Nesse sentido, para cada elemento $s \in \mathcal{F}(X)$ e $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ basta definir de maneira natural o seguinte morfismo

$$\begin{aligned} \psi(s)_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \\ f &\longmapsto \qquad \mathcal{F}(f) \qquad \longmapsto \mathcal{F}(f)(s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vamos verificar que $\psi(s)_Y$ é uma transformação natural, isto é, dado $g : Z \longrightarrow Y$ temos um diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \arrow[r, "\psi_Y"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X)"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \arrow[r, "\psi_Z"] & \mathcal{F}(Z) \end{tikzcd}$$

O que segue diretamente da definição

$$\psi_Z \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g, X)(f) = \psi(s)_Z(g \circ f) = \mathcal{F}(g \circ f)(s) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)(s) = \mathcal{F}(g) \circ \psi_Y(s)(f).$$

Concluímos que ψ está bem definida. Dados $s \in \mathcal{F}(X)$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{F})$ temos

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(s) &= \phi(\psi(s)) = \psi(s)_X(id_X) = \mathcal{F}(id_X)(s) = id_{\mathcal{F}(X)}(s) = s. \\ \psi \circ \phi(\varphi) &= \psi(\varphi_X(id_X)) = (\psi(\varphi_X(id_X))_Y)_{Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} = (f \longmapsto \mathcal{F}(f)(\varphi_X id_X))_{Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \\ &\overset{(*)}{=} (f \longmapsto \varphi_Y(f))_{Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} = \varphi. \end{aligned}$$

Onde $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ é um mapa que depende de Y e onde na igualdade $(*)$ usa-se a naturalidade de φ, isto é, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ temos $\mathcal{F}(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, X)$.

Para verificar a naturalidade do isomorfismo com relação a $\mathcal{F}$, seja dado uma transformação natural $\beta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ em $\mathcal{C}^\wedge$. Esta induz os morfismos $\beta\circ : \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{G})$ e $\beta_X : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$ de modo para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}(h_C(X), \mathcal{F})$ temos $\phi_{\mathcal{G}}(\beta \circ \alpha) = (\beta \circ \alpha)_X(id_X) = \beta_X(\alpha_X(id_X)) = \beta_X \circ \phi_{\mathcal{F}}(\alpha)$, isto é, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{F}) \arrow[r, "\phi_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\beta\circ"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\beta_X"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{G}) \arrow[r, "\phi_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{G}(X) \end{tikzcd}$$

Do mesmo modo, verificamos a naturalidade em relação ao objeto X. Dado $f : X \longrightarrow Y$, temos induzido os morfismos $- \circ (f\circ) : \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_{\mathcal{C}}(Y), \mathcal{F})$ e $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$, de forma que para toda transformação natural $\alpha \in \mathrm{Hom}(h_C(X), \mathcal{F})$ temos $\mathcal{F}(f) \circ \phi_X(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha_X(id_X)) \overset{(*)}{=} \alpha_Y(f) = \alpha_Y \circ (f \circ id_Y) = (\alpha \circ f\circ)_Y(id_Y) = \phi_Y(\alpha \circ f\circ)$. Assim, para todo $f : X \longrightarrow Y$ temos um diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(h_{\mathcal{C}}(X), \mathcal{F}) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "- \circ (f\circ)"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(h_{\mathcal{C}}(Y), \mathcal{F}) \arrow[r, "\phi_Y"] & \mathcal{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

O que conclui a demonstração. □

Corolário 2.2.1. *Dado uma categoria $\mathcal{C}$, os funtores $h_{\mathcal{C}}$ e $k_{\mathcal{C}}$ são plenamente fieis.*

Demonstração. Para cada $X, Y \in \mathcal{C}$ usando o lema de Yoneda, obtemos as seguintes bijeções

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(X), h_{\mathcal{C}}(Y)) \simeq h_{\mathcal{C}}(Y)(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(k_{\mathcal{C}}(X), k_{\mathcal{C}}(Y)) \simeq k_{\mathcal{C}}(X)(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Assim, usando a definição, vemos que $h_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ e $k_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^\vee$ são plenamente fieis. □

Observação 2.2.2. *Como o funtor $h_{\mathcal{C}}$ é claramente injetivos o Corolário 2.2.1 permite visualiza-lo como uma imersão $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}^\wedge$ sendo $h_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ subcategoria plena de $\mathcal{C}^\wedge$. O que justifica o abuso de linguagem ao dizer que existe um isomorfismo entre um objeto de $X \in \mathcal{C}$ e um funtor $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^\wedge$, significando que existe um isomorfismo $h_{\mathcal{C}}(X) \simeq \mathcal{F}$. O mesmo vale para o caso covariante.*

Corolário 2.2.2. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'^\wedge$ um funtor. Se $\mathcal{F}(X)$ é isomorfo a um objeto Y de $\mathcal{C}'$ para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, então existe um único funtor $\mathcal{F}_0 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, a menos de isomorfismo único, tal que $\mathcal{F} \simeq h_{\mathcal{C}'} \circ \mathcal{F}_0$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_0"'] & \mathcal{C}'^\wedge \\
& \mathcal{C}' \arrow[u, hook, "h_{\mathcal{C}'}"']
\end{tikzcd}$$

Seja $\theta_0 : \mathcal{F} \simeq h_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{F}_0$ o isomorfismo do Corolário 2.2.2 acima, a unicidade de $\mathcal{F}_0$ significa que, dado mais um objeto $\mathcal{F}_1$ tal que exista $\theta_1 : \mathcal{F} \simeq h_{\mathcal{C}} \circ \mathcal{F}_1$, então existe um único isomorfismo $\theta : \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ tal que $\theta_1 = (h_{\mathcal{C}} \circ \theta) \circ \theta_0$.

Demonstração. Por hipótese, para cada $X \in \mathcal{C}$ existe $Y \in \mathcal{C}'$ tal que existe um isomorfismo $\varphi_X : Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(X)$, então definimos $\mathcal{F}_0(X) = Y$. Dado um morfismo $f : X \longrightarrow X'$ na categoria $\mathcal{C}$ definimos $\mathcal{F}_0(f)$ como a seguinte composição

$$\mathcal{F}_0(f) : \mathcal{F}_0(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(X') \xrightarrow{\varphi_{X'}^{-1}} \mathcal{F}_0(X').$$

Agora, segue diretamente da definição que $\mathcal{F}(id_X) \simeq id_{\mathcal{F}(X)}$ implica $\mathcal{F}_0(id_X) \simeq id_{\mathcal{F}_0(X)}$. Do mesmo modo, dado uma composição $g \circ f : X \longrightarrow X' \longrightarrow X''$ de morfismos em $\mathcal{C}$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(g \circ f) &= \varphi_{X''}^{-1} \circ \mathcal{F}(g \circ f) \circ \varphi_X = \varphi_{X''}^{-1} \circ (\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)) \circ \varphi_X \\ &= (\varphi_{X''}^{-1} \circ \mathcal{F}(g) \circ \varphi_{X'}) \circ (\varphi_{X'}^{-1} \circ \mathcal{F}(f) \circ \varphi_X) = \mathcal{F}_0(g) \circ \mathcal{F}_0(f). \end{aligned}$$

De onde segue que $\mathcal{F}_0$, como definido acima, é um funtor. □

Definição 2.2.3. *Dizemos que um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Set** é **representável** por um objeto X de $\mathcal{C}$ se existir um isomorfismo $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X) = h_{\mathcal{C}}(X)$ se $\mathcal{F}$ for contravariante ou $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bullet) = k_{\mathcal{C}}(X)$ se $\mathcal{F}$ for covariante.*

Notemos que, φ é um isomorfismo natural entre funtores representados por objetos X, Y de $\mathcal{C}$ se, e só se, $\varphi_X(id_X)$ é um isomorfismo entre esses objetos na categoria $\mathcal{C}$.

Corolário 2.2.3. *Um objeto que representa um funtor é único a menos de isomorfismo único.*

Demonstração. Suponha $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ um funtor contravariante representável por dois objetos X, Y. Isto é

$$h_{\mathcal{C}}(X) \simeq \mathcal{F} \simeq h_{\mathcal{C}}(Y).$$

Seja, $\varphi : h_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow h_{\mathcal{C}}(Y)$ o isomorfismo natural. Pelo Lema de Yoneda

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_{\mathcal{C}}(X), h_{\mathcal{C}}(Y)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \varphi &\longmapsto \varphi_X(id_X) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Logo, sendo φ um isomorfismo em $\mathcal{C}^\wedge$, obtemos o seguinte isomorfismo em $\mathcal{C}$, $\varphi_X(id_X) : X \xrightarrow{\sim} Y$. Além disso, segue diretamente do Lema de Yoneda a unicidade de $\varphi_X(id_X)$. □

Definição 2.2.4. *Uma **propriedade universal** de um elemento $X \in \mathcal{C}$ é expressa como um funtor representável $\mathcal{F}$ munido de um **elemento universal** $s \in \mathcal{F}(X)$ que define, pelo lema de Yoneda (2.3), um isomorfismo natural $\psi(s) : \mathrm{Hom}(\bullet, X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$, caso $\mathcal{F}$ seja contravariante, ou $\psi(s) : \mathrm{Hom}(X, \bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$, caso $\mathcal{F}$ seja covariante.*

Exemplo 2.2.1 (Propriedade universal do produto tensorial)**.** *Sejam A um anel e $N, M \in \mathrm{Obj}(\mathsf{Mod}_A)$. Denotamos por $B(N \times M, \bullet)$ o funtor que associa cada A-módulo L ao conjunto $B(N \times M, L)$ das transformações bilineares de $N \times M$ para L, e cada morfismo de A-módulos $f : L \longrightarrow P$ o morfismo $(f\circ) : B(N \times M, L) \longrightarrow B(N \times M, P)$. Notemos que o funtor*

$B(N \times N, \bullet) : \mathsf{Mod}_A \longrightarrow \mathsf{Set}$ *esta na categoria* $(\mathsf{Mod}_A{}^{\vee})^{\mathrm{op}}$. *Então o isomorfismo (2.2) é escrito do seguinte modo*

$$B(N \times M, L) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}_A{}^{\vee}}(\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}_A}(L, \bullet), B(N \times M, \bullet)).$$

Para todo A*-módulo* L. *O produto tensorial* $N \otimes_A M$ *pode ser definido como o objeto em* Mod_A *que representa o funtor* $B(N \times M, \bullet)$. *Desse modo, temos o seguinte isomorfismo*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}_A}(N \otimes_R M, \bullet) \xrightarrow{\sim} B(N \times M, \bullet).$$

Denotamos por $\otimes = \varphi_{N \otimes M}(id_{N \otimes M}) \in B(N \times M, N \otimes M)$ *o elemento universal associado ao isomorfismo* φ *pelo Lema de Yoneda. Assim, dado um* A*-módulo* L *e um mapa* $f \in B(N \times M, L)$ *existe um único* $f' = \varphi^{-1}(f) = \psi(\otimes)^{-1}(f) \in \mathrm{Hom}(N \otimes M, L)$ *tal que, usando a naturalidade de* $\psi(\otimes)$, *temos o seguinte diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(N \otimes M, N \otimes M) \arrow[r, "\psi(\otimes)_{N \otimes M}"] \arrow[d, "f' \circ"'] & B(N \times M, N \otimes M)) \arrow[d, "f' \circ"] \\
\mathrm{Hom}(N \otimes M, L) \arrow[r, "\psi(\otimes)_L"] & B(N \times M, L)
\end{tikzcd}$$

Tomando a identidade $id_{N \otimes M}$ *no diagrama acima temos*

$$f = \psi(\otimes)_L(f') = \psi(\otimes)_L(f' \circ id_{N \otimes M}) = f' \circ \psi(\otimes)_{N \otimes M}(id_{N \otimes M}) = f' \circ (id_{N \otimes M} \circ \otimes) = f' \circ \otimes.$$

O que define a propriedade universal do produto tensorial que pode ser enunciada do seguinte modo; Para todo A*-módulo* L *e todo mapa bilinear* $f : N \times M \longrightarrow L$ *existe um único mapa* $f' : N \otimes M \longrightarrow L$ *tal que* $f = f' \circ \otimes$. *E que pode ser visualizada como o seguinte diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
N \times M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & L \\
N \otimes M \arrow[ur, dotted, "\exists!\, f'"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição 2.2.5. *Dados dois funtores* $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *e* $R : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, *dizemos que* (L, R) *é um par de* ***funtores adjuntos***, L *é um funtor adjunto a esquerda de* R *e* R *é adjunto a direita de* L *se existir um isomorfismo natural entre os seguintes bifuntores*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(\bullet), \bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, R(\bullet)) \tag{2.5}$$

isto é, para cada $Y \in \mathcal{C}'$ *e* $X \in \mathcal{C}$ *temos um isomorfismo,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y))$, *natural em ambas variáveis.*

Vamos analisar a hipótese da naturalidade do isomorfismo (2.5), para isso utilizamos a notação $f^\sharp : L(X) \longrightarrow Y$ e $f^\flat : X \longrightarrow R(Y)$ para denotar dois morfismos correspondentes sob a bijeção (2.5). Pela Definição 2.1.9 da naturalidade em $\mathcal{C}'$, para todo morfismo $k : Y \longrightarrow Y'$, obtemos o seguinte diagrama à esquerda e da naturalidade em $\mathcal{C}$, para todo morfismo $h : X' \longrightarrow X$, obtemos o diagrama à direita

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X),Y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "k\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,R(Y)) \arrow[d, "R(k)\circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L(X),Y') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,R(Y'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X),Y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\circ L(h)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,R(Y)) \arrow[d, "\circ h"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L(X'),Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',R(Y))
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Assim, a comutatividade dos diagramas em (2.6) garante, respectivamente, as seguintes afirmações.

(1) Dados $f^\sharp : L(X) \longrightarrow Y$ e $k : Y \longrightarrow Y'$, existe $(k \circ f^\sharp) : L(X) \longrightarrow Y'$ tal que $(k \circ f^\sharp)^\flat = R(k) \circ f^\flat$.

(2) Dados $f^\sharp : L(X) \longrightarrow Y$ e $h : X \longrightarrow X'$, existe $(f^\sharp \circ L(h)) : L(X') \longrightarrow Y$ tal que $(f^\sharp \circ L(h))^\flat = f^\flat \circ h$.

O que obtemos até agora pode ser dualizado, isto é, tomando $k : Y' \longrightarrow Y$ e $h : X \longrightarrow X'$ na hipótese de naturalidade do isomorfismo (2.5) obteremos os diagramas em (2.6) com setas invertidas. Assim, concluímos as propriedades:

(3) Dados $g^\flat : X \longrightarrow R(Y')$ e $k : Y' \longrightarrow Y$, existe $(R(k) \circ g^\flat) : X \longrightarrow R(Y)$ tal que $(R(k) \circ g^\flat)^\sharp = k \circ g^\sharp$.

(4) Dados $g^\flat : X' \longrightarrow R(Y)$ e $k : X' \longrightarrow X$, existe $(g^\flat \circ h) : X \longrightarrow R(Y)$ tal que $(g^\flat \circ h)^\sharp = g^\sharp \circ L(h)$.

Podemos usar essas propriedades para demonstrar o seguinte Lema.

Lema 2.2.1. *Seja (L, R) um par de funtores adjuntos. A naturalidade do isomorfismo (2.5) implica na afirmação de que dados os seguintes diagramas em $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}$ respectivamente*

$$\begin{tikzcd}
L(X) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d, "L(h)"'] & Y \arrow[d, "k"] \\
L(X') \arrow[r, "g^\sharp"] & Y'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f^\flat"] \arrow[d, "h"'] & R(Y) \arrow[d, "R(k)"] \\
X' \arrow[r, "g^\flat"] & R(Y')
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

o diagrama à esquerda comuta se, e somente se, o diagrama à direita comuta.

Demonstração. Como (L, R) são funtores adjuntos, são validas as igualdades acima. Então, supondo que o diagrama da esquerda comute, isto é $k \circ f^\sharp = g^\sharp \circ L(h)$, segue que

$$R(k) \circ f^\flat \overset{(1)}{=} (k \circ f^\sharp)^\flat = (g^\sharp \circ L(h))^\flat \overset{(2)}{=} g^\flat \circ h.$$

Dualmente, supondo que o diagrama da direita comute, isto é $R(k) \circ f^\flat = g^\flat \circ h$, temos que

$$k \circ f^\sharp \overset{(3)}{=} (R(k) \circ f^\flat)^\sharp = (g^\flat \circ h)^\sharp \overset{(4)}{=} g^\sharp \circ L(h).$$

$\square$

Teorema 2.2.2. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ duas categorias. Um funtor $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ admite adjunto a direita se e somente se o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(\bullet), Y)$ é representável para cada $Y \in \mathcal{C}'$. De modo similar, um funtor $R : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ admite adjunto a esquerda se e somente se o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(\bullet))$ é representável para cada $X \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. A ida das asserções segue diretamente da definição, então basta mostrar a volta. Dado um funtor $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ definimos de forma natural o seguinte funtor

$$\begin{aligned} L_* : \mathcal{C}' &\longrightarrow \mathcal{C}^\wedge \\ Y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(\bullet), Y) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}. \end{aligned}$$

Para cada $Y \in \mathcal{C}'$, suponhamos que $L_*(Y)$ é representável e seja $X \in \mathcal{C}$ o objeto que o representa. Isto garante a existência de um isomorfismo de funtores $h_{\mathcal{C}}(X) \simeq L_*(Y)$. Assim, aplicando o Corolário 2.2.2 existe um único funtor $R : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $L_* \simeq h_{\mathcal{C}} \circ R$, de onde segue que para cada $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{C}'$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y) \simeq L_*(Y)(X) \simeq (h_{\mathcal{C}} \circ R)(Y)(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y)).$$

Concluímos que R é adjunto a direita do funtor L.

De modo similar, dado um funtor $R : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ definimos o funtor

$$\begin{aligned} R_* : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C}'^\vee \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(\bullet)) : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{Set}. \end{aligned}$$

Assim, seguindo o mesmo argumento concluímos que existe único L adjunto a esquerda de R. $\square$

Dados $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{C}'$, suponha, (L, R) um par de funtores adjuntos. Aplicando primeiro X e $L(X)$ no isomorfismo (2.5), e depois $R(Y)$ e Y, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), L(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(L(X))). \tag{2.8}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(R(Y)), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R(Y), R(Y)). \tag{2.9}$$

Assim, o primeiro isomorfismo leva o morfismo identidade $id_{L(X)}$ em um morfismo $\varepsilon_X : X \to R \circ L\ (X)$ e, do mesmo modo, a inversa do segundo isomorfismo leva a identidade $id_{R(Y)}$ em um morfismo $\eta_Y : L \circ R\ (Y) \to Y$. Notemos ainda que essa identificação independe dos objetos X e Y, logo se tratam de morfismos funtoriais que definem os seguintes morfismos de funtores

$$\varepsilon : id_{\mathcal{C}} \longrightarrow R \circ L \tag{2.10}$$

$$\eta : L \circ R \longrightarrow id_{\mathcal{C}'}, \tag{2.11}$$

onde chamamos ε e η, respectivamente, de **unidade** e **co-unidade da adjunção** entre L e R. Note que, comparando essas construções com a feita no Exemplo 2.2.1, e levando em conta o Teorema 2.2.2, podemos entender a unidade e a co-unidade como elementos universais relacionados respectivamente aos isomorfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L(X), \bullet)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(\bullet), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, R(Y))$.

O Teorema 2.2.3 abaixo, mostrará que todo par de funtores adjuntos está relacionado com transformações naturais ε e η. Assim, dizemos que $(L, R, \varepsilon, \eta)$ é uma **adjunção**.

Teorema 2.2.3. *Sejam $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ e $R : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ dois funtores munidos das transformações naturais ε e η definidas em* (2.10) *e* (2.11). *Então (L, R) é um par de funtores adjuntos se, e somente se, as transformações naturais*

$$(\eta \circ L) \circ (L \circ \varepsilon) : L \longrightarrow L \circ R \circ L \longrightarrow L \tag{2.12}$$

$$(R \circ \eta) \circ (\varepsilon \circ R) : R \longrightarrow R \circ L \circ R \longrightarrow R \tag{2.13}$$

são respectivamente isomorfas a id_L e id_R.

Demonstração. Supondo que (L, R) é um par de funtores adjuntos. Por construção, para todo $X \in \mathcal{C}$ temos $(id_{L(X)})^\flat = \varepsilon$ e $(\eta \circ L(X))^\flat = (\eta_{L(X)}) = id_{RL(X)}$. Logo temos, através da adjunção e pelo Lema 2.2.1, uma equivalência entre a comutatividade dos dois diagramas abaixo.

$$\begin{tikzcd} L(X) \arrow[r, "id_{L(X)}"] \arrow[d, "L \circ \varepsilon_X"'] & L(X) \arrow[d, "id_{L(X)}"] \\ LRL(X) \arrow[r, "\eta_{L(X)}"] & L(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & RL(X) \arrow[d, "id_{RL(X)}"] \\ RL(X) \arrow[r, "id_{RL(X)}"] & RL(X) \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

Como o diagrama da esquerda comuta, segue a comutatividade do diagrama da direita. Além disso, como a construção é funtorial em X, obtemos a igualdade $(\eta \circ L) \circ (L \circ \varepsilon) = id_L$.

De modo dual, notando que $(id_{LR(Y)})^\flat = \varepsilon_{R(Y)}$ e que $(\eta_Y)^\flat = id_{R(Y)}$, obtemos através da adjunção e do Lema 2.2.1 a equivalência entre a comutatividade dos seguintes diagrama para todo $Y \in \mathcal{C}'$s.

$$\begin{tikzcd} LR(Y) \arrow[r, "id_{LR(Y)}"] \arrow[d, "id_{LR(Y)}"'] & LR(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ LR(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & (Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R(Y) \arrow[r, "\varepsilon_{R(Y)}"] \arrow[d, "id_{R(Y)}"'] & RLR(Y) \arrow[d, "R \circ \eta_Y"] \\ R(Y) \arrow[r, "id_{R(Y)}"] & R(Y) \end{tikzcd} \tag{2.15}$$

Como o diagrama a direita comuta para todo Y temos que o diagrama da esquerda comuta para todo Y. Assim concluímos que $(R \circ \eta) \circ (\varepsilon \circ R) = id_R$.

Reciprocamente, vamos verificar a adjunção entre L e R mostrando que as seguintes composições

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y) \xrightarrow{R} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(RL(X), R(Y)) \xrightarrow{\circ \varepsilon_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y)) \tag{2.16}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y)) \xrightarrow{L} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), LR(Y)) \xrightarrow{\eta_Y \circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), Y) \tag{2.17}$$

são inversas uma da outra. De fato, dado $f^\sharp : L(X) \longrightarrow Y$ temos, pela naturalidade da transformação $\eta : L \circ R \longrightarrow id_R$ o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} LRL(X) \arrow[r, "\eta_{L(X)}"] \arrow[d, "LR(f^\sharp)"'] & L(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ LR(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & Y \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

De onde segue que

$$\eta_Y \circ L(R(f^\sharp) \circ \varepsilon_X) = \eta_Y \circ LR(f^\sharp) \circ L(\varepsilon_X) \overset{(2.18)}{=} f^\sharp \circ \eta_{L(X)} \circ \varepsilon_X \overset{(2.12)}{=} f^\sharp.$$

Do mesmo modo, dado $f^\flat : X \longrightarrow R(Y)$ verificamos, utilizando a naturalidade de ε e a hipótese, que $R(\eta_Y \circ L(f^\flat)) \circ \varepsilon_X = R(\eta_Y) \circ \varepsilon_R(Y) \circ f^\flat = f^\flat$. O que conclui a prova. □

Proposição 2.2.1. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ três categorias. Consideremos os seguintes funtores $\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}' \underset{R'}{\overset{L'}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}''$. Se (L, R) e (L', R') são pares de funtores adjuntos, então $(L' \circ L, R \circ R')$ também é.*

Demonstração. Basta notar que para cada $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{C}''$ temos o isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}''}(L'L(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(L(X), R'(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, RR'(Y)).$$

De onde segue o resultado. □

2.3 Limites e Colimites

Dado I uma categoria pequena em $\mathcal{U}$ podemos chamar de sistema direto qualquer funtor covariante $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$ e sistema inverso todo funtor contravariante $\beta : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$.

Para definirmos limites em categorias arbitrarias primeiro precisamos definir limite na categoria Set, para isso, notemos que um sistema projetivo $\beta : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ é um objeto na categoria $I^\wedge$.

Definição 2.3.1. *Dado um funtor contravariante* $\beta : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *definimos o limite,* $\varprojlim \beta$*, como o conjunto*

$$\varprojlim \beta = \mathrm{Hom}_{I^\wedge}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}, \beta),$$

onde $\mathrm{pt}_{I^\wedge}$ *denota o funtor constante em* $I^\wedge$*, definido por* $\mathrm{pt}_{I^\wedge}(i) = \{\mathrm{pt}\}$ *para todo* $i \in I$*.*

Notemos que $\mathrm{pt}_{I^\wedge}$ é um objeto terminal de $I^\wedge$. Como primeira consequência da definição temos para cada $i \in I$ uma aplicação

$$\mathrm{Hom}_{I^\wedge}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}, \beta) \xrightarrow{\phi_i} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}(i), \beta(i)) = \big\{\{pt\} \longrightarrow \beta(i)\big\} \simeq \beta(i) \tag{2.19}$$

define o mapa $\varprojlim \beta \xrightarrow{\Pi(\phi_i)} \prod_{i \in I} \beta(i)$, induzindo a seguinte bijeção.

$$\varprojlim \beta \xrightarrow{\sim} \Pi(\phi_i)(\varprojlim \beta) = \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} \beta(i) \;\middle|\; \begin{array}{l} \beta(f)(x_j) = x_i \\ \text{para todo } f \in \mathrm{Hom}_I(i,j) \end{array} \right\} \tag{2.20}$$

De fato, definimos uma inversa construindo, para cada $(x_i)_i$, uma transformação natural ρ em $I^\wedge$ definida por $(\rho_i : \mathrm{pt}_{I^\wedge}(i) \longrightarrow x_i)_i$. Verificamos que dado $f : i \longrightarrow j$ temos $\rho_i(id_{\mathrm{pt}}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}(j))) = x_i = \beta(f)(x_j) = \beta(f)(\rho_j(\mathrm{pt}_{I^\wedge}(j)))$, logo ρ está bem definida.

Definição 2.3.2.

1. *Dados funtores* $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$, $\beta : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ *definimos os funtores* $\varinjlim \alpha \in \mathcal{C}^\vee$ *e* $\varprojlim \beta \in \mathcal{C}^\wedge$ *como*

$$\varinjlim \alpha : X \longmapsto \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(\bullet), X) = \varprojlim (h_{\mathcal{C}}(X) \circ \alpha)$$

$$\varprojlim \beta : X \longmapsto \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \beta(\bullet)) = \varprojlim (k_{\mathcal{C}}(X) \circ \beta)$$

2. *Se esses funtores forem representáveis, chamamos de* ***colimite*** *e* ***limite*** *e denotamos* $\varinjlim \alpha$ *e* $\varprojlim \beta$ *respectivamente seus representantes em* $\mathcal{C}$*.*

3. *Dado uma categoria pequena* I*. Se para todo funtor* $\alpha \in \mathrm{Ft}(I, \mathcal{C})$, $\varinjlim \alpha$ *é representável, dizemos que* $\mathcal{C}$ ***admite colimite pequeno****, ou simplesmente admite colimite, indexado por* I*. Bem como, se para todo funtor* $\beta \in \mathrm{Ft}(I^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$, $\varprojlim \beta$ *for representável, dizemos que* $\mathcal{C}$ ***admite limite pequeno****, ou simplesmente admite limite, indexado por* I*. Dizemos que* $\mathcal{C}$ ***admite colimite finito*** *ou* ***admite limite finito*** *se os funtores forem representáveis e a categoria* I *for finita.*

4. *Desse modo os limites podem ser visualizados como os funtores:*

$$\varinjlim : \mathrm{Ft}(I, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}, \qquad \alpha \longmapsto \varinjlim \alpha.$$

$$\varprojlim : \mathrm{Ft}(I^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}, \qquad \beta \longmapsto \varprojlim \beta.$$

Segue da definição que se os funtores $\underrightarrow{\mathrm{colim}}\,\alpha \in \mathcal{C}^\vee$ e $\underleftarrow{\mathrm{lim}}\,\beta \in \mathcal{C}^\wedge$ forem representáveis, então temos os isomorfismos em $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\underrightarrow{\mathrm{colim}}\,\alpha, X) \simeq \underleftarrow{\mathrm{lim}}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, X), \tag{2.21}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underleftarrow{\mathrm{lim}}\,\beta) \simeq \underleftarrow{\mathrm{lim}}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \beta). \tag{2.22}$$

Podemos usar o Lema de Yoneda para caracterizar a **propriedade universal do colimite e limite**. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria que admite colimite indexado por uma categoria I e $\mathcal{A}$ o objeto de $\mathcal{C}$ que representa o funtor $\underrightarrow{\mathrm{colim}}\,\alpha$. Assim, obtemos o isomorfismo

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, \bullet) \xrightarrow{\sim} \underleftarrow{\mathrm{lim}}\, \mathrm{Hom}(\alpha, \bullet) = \mathrm{Hom}_{I^\wedge}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \bullet)).$$

Denotamos por ι o elemento universal, isto é, a transformação natural $(\iota_i : \mathrm{pt}_{I^\wedge}(i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\alpha(i), \mathcal{A}))_{i \in I}$ tal que $\iota = \varphi_{\mathcal{A}}(id_{\mathcal{A}})$. De modo que, dado um objeto X de $\mathcal{C}$ e um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{I^\wedge}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, X))$ que, em vista do isomorfismo (2.20), nada mais é que uma família $(f_i : \alpha(i) \longrightarrow X)_i$. Existe uma única $f' = \varphi_X^{-1}(f) = \psi(\iota)^{-1}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, X)$ de modo que pela naturalidade de $\psi(\iota)$ obtemos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \arrow[r, "\psi(\iota)_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "f' \circ"'] & \mathrm{Hom}_{I^\wedge}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \mathcal{A})) \arrow[d, "f' \circ"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, X) \arrow[r, "\psi(\iota)_X"] & \mathrm{Hom}_{I^\wedge}(\mathrm{pt}_{I^\wedge}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, X))
\end{tikzcd}$$

Onde tomando a identidade $id_{\mathcal{A}}$ temos

$$f = \psi(\iota)_X(f') = \psi(\iota)_X(f' \circ id_{\mathcal{A}}) = f' \circ \psi(\iota)_{\mathcal{A}}(id_{\mathcal{A}}) = f' \circ (id_{\mathcal{A}} \circ \iota) = f' \circ \iota.$$

Do mesmo modo se $\mathcal{C}$ é uma categoria que admite limites indexados por I, o limite fica caracterizado pela propriedade universal: Existe o elemento universal $(\rho_i : \underleftarrow{\mathrm{lim}}\,\beta \longrightarrow \beta(i))$ tal que para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ e toda família $g_i : X \longrightarrow \beta(i)$, satisfazendo as condições de compatibilidade naturais, existe uma única $g' \in \mathrm{Hom}(X, \underleftarrow{\mathrm{lim}}\,\beta)$ tal que $g' \circ \rho_i = g_i$ para todo $i \in I$. Essas propriedades podem ser visualizadas nos seguintes diagramas.

$$\begin{tikzcd}
\alpha(i) \arrow[dd, "\alpha(s)"'] \arrow[dr, "\iota_i"] \arrow[drr, bend left, "f_i"] & & \\
& \underrightarrow{\mathrm{colim}}\,\alpha \arrow[r, dotted, "f'"] & X \\
\alpha(j) \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & \beta(i) \\
X \arrow[urr, bend left, "g_i"] \arrow[r, dotted, "g'"] \arrow[drr, bend right, "g_j"'] & \underleftarrow{\mathrm{lim}}\,\beta \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[dr, "\rho_j"'] & \\
& & \beta(j) \arrow[uu, "\beta(s)"']
\end{tikzcd}$$

Proposição 2.3.1. *Sejam I e J categorias pequenas e $\mathcal{C}$ uma categoria que admita limite e colimite. Para todo bifuntor $\alpha : I \times J^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ existe um morfismo canônico*

$$\varinjlim_{i \in I} \varprojlim_{j \in J} \alpha(i,j) \longrightarrow \varprojlim_{j \in J} \varinjlim_{i \in I} \alpha(i,j) \tag{2.23}$$

Demonstração. Ver [21] Lema 3.8.3, página 112. □

Exemplo 2.3.1. *Considere a categoria $(\mathbb{R}, \leq)$, isto é, a categoria onde os objetos são números reais e $\mathrm{Hom}(x,y)$ tem um único elemento se $x \leq y$. Dado uma categoria pequena de índices I e um diagrama $\alpha : I \longrightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ denotamos por $X \subset \mathbb{R}$ o conjunto $\alpha(\mathrm{Obj}(I))$. Então, se o colimite existir em $\mathbb{R}$ segue da sua propriedade universal que*

1. *se $x \in X$ então existe $\iota : x \longrightarrow \varinjlim \alpha$, isto é, $x \leq \varinjlim \alpha$.*
2. *se $c \leq x$ para todo $x \in X$, então existe $(c \longrightarrow \alpha(i))_i$ logo existe um único morfismo $\varinjlim \alpha \longrightarrow c$ e portanto $\varinjlim \alpha \leq c$.*

De onde concluímos que na categoria $(\mathbb{R}, \leq)$ o colimite de um conjunto é o supremo deste conjunto. Do mesmo modo, vemos que o limite de um conjunto é o ínfimo desse conjunto. Além disso, na categoria $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ onde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cap \{\infty, -\infty\}$ temos que o limite e o colimite sempre existem. Dado uma sequência de números reais $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Associamos a esta sequência o bifuntor $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$. Então

$$\liminf_n x_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{m \geq n} x_m = \sup_{n \geq 0} \inf_{m \geq 0} x_{n+m} = \varinjlim_n \varprojlim_m x_{n+m}.$$

$$\limsup_n x_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{m \geq n} x_m = \inf_{n \geq 0} \sup_{m \geq 0} x_{n+m} = \varprojlim_n \varinjlim_m x_{n+m}.$$

Desse modo, segue da Proposição 2.3.1 que para toda sequência (x_n)

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n$$

Quando houver a igualdade dizemos que o limite da sequência $\lim x_n$ existe.

Definição 2.3.3. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ um funtor e I uma categoria pequena. Suponha que $\mathcal{C}$ admita limite indexado por I. Dizemos que o funtor $\mathcal{F}$ **comuta com colimite** se para todo $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$ se o funtor $\varinjlim(\mathcal{F} \circ \alpha) \in \mathcal{C}'^{\vee}$ é representado por $\mathcal{F}(\varinjlim \alpha)$ na categoria $\mathcal{C}'$. Do mesmo modo dizemos que $\mathcal{F}$ **comuta com limite** se para todo $\beta : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$ o funtor $\varprojlim(\mathcal{F} \circ \beta) \in \mathcal{C}'^{\wedge}$ é representado por $\mathcal{F}(\varprojlim \beta)$ na categoria $\mathcal{C}'$.*

Proposição 2.3.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$. Se $\mathcal{C}$ admite colimite e $\mathcal{F}$ admite adjunto a direita então $\mathcal{F}$ comuta com o colimite. Assim como, se $\mathcal{C}$ admite limite e $\mathcal{F}$ admite adjunto a esquerda, então $\mathcal{F}$ comuta como o limite.*

Demonstração. Vamos mostrar a primeira implicação, sendo a segunda análoga. Seja $\mathcal{G} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ o adjunto a direita de $\mathcal{F}$. Então, para todo $Y \in \mathcal{C}'$ e todo $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$ fazendo uso dos isomorfismos (2.5) e (2.21) temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(\varinjlim \alpha), Y) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim \alpha, \mathcal{G}(Y)) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, \mathcal{G}(Y)) \\ &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(\alpha), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varinjlim \mathcal{F}(\alpha), Y).\end{aligned}$$

Como o objeto que representa um funtor é único segue que $\mathcal{F}(\varinjlim \alpha) \simeq \varinjlim \mathcal{F}(\alpha)$. $\square$

Definição 2.3.4. *Uma categoria I é **discreta** quando os únicos morfismos em I são os morfismos identidade id_i, $i \in \mathrm{Obj}(I)$. Assim, toda coleção de objetos $\{X_i\}_{i\in I}$ em $\mathcal{C}$, pode ser visualizado como um diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$ indexado por uma categoria discreta I.*

1. *Definimos o **coproduto** de uma família $\{A_i\}$ de objetos de $\mathcal{C}$, denotado por $\coprod X_i$ como o colimite*
$$\coprod_{i\in I} X_i = \varinjlim \alpha\,, \qquad \alpha \in \mathrm{Ft}(I, \mathcal{C}).$$
*O elemento universal ι define os mapas $\iota_i : X_i \longrightarrow \coprod X_i$ chamados i-ésima **coprojeção**.*

2. *Definimos o **produto** de uma família $\{X_i\}$ de objetos de $\mathcal{C}$, denotado por $\prod X_i$ como o limite*
$$\prod_{i\in I} X_i = \varprojlim \beta\,, \qquad \beta \in \mathrm{Ft}(I^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}).$$
*O elemento universal ρ define os mapas $\rho_i : \prod X_i \longrightarrow X_i$ chamados i-ésima **projeção**.*

Usando a propriedade universal do limite temos que dado $A \in \mathcal{C}$ com mapas $(f_i : A \longrightarrow X_i)$, existirá um único um $f : A \longrightarrow \coprod X_i$ tal que $f \circ \iota_i = f_i$. Do mesmo modo que dado $B \in \mathcal{C}$ e os mapas $(g_i : B \longrightarrow X_i)$, existirá um único $g : \prod X_i \longrightarrow B$ tal que $g \circ \rho_i = g_i$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod X_i, A) & \xrightarrow{\sim} & \prod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, A) \\ \coprod X_i \xrightarrow{f} A & \longmapsto & (X_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, \prod X_i) & \xrightarrow{\sim} & \prod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X_i) \\ B \xrightarrow{g} \prod X_i & \longmapsto & (B \xrightarrow{g_i} X_i)_{i\in I} \end{array} \tag{2.24}$$

Dado uma categoria discreta I com apenas dois objetos $\mathrm{Obj}(I) = \{0, 1\}$. Se a categoria $\mathcal{C}$ admite coproduto e produto finitos indexados por I, serão denotados respectivamente por $X_0 \sqcup X_1$ e $X_0 \times X_1$. Neste caso, podemos visualizar as propriedades universais do coproduto e produto respectivamente como os seguintes diagramas.

$$\begin{tikzcd} & A & \\ X_0 \arrow[ur, "f_0"] \arrow[r, "\iota_0"'] & X_0 \sqcup X_1 \arrow[u, dotted, "\exists!\ f"] & X_1 \arrow[ul, "f_1"'] \arrow[l, "\iota_1"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "g_0"'] \arrow[dr, "g_1"] \arrow[d, dotted, "\exists!\ g"] & \\ X_0 & X_0 \times X_1 \arrow[l, "\rho_0"] \arrow[r, "\rho_1"'] & X_1 \end{tikzcd}$$

Definição 2.3.5. *Seja por $I = \bullet \rightrightarrows \bullet$ a categoria consistindo de dois objetos e dois morfismos paralelos, além das identidades. De modo que todo par de morfismos paralelos $f, g : X \rightrightarrows Y$ pode ser visualizado como um diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$.*

1. *Definimos o **coequalizador** de um par de morfismos paralelos $f, g : X \rightrightarrows Y$ como o colimite $\mathrm{Coker}(f, g) = \varinjlim \alpha$ com $\alpha \in \mathrm{Ft}(I, \mathcal{C})$.*

2. *Definimos o **equalizador** de um par de morfismos paralelos $f, g : X \rightrightarrows Y$ como o limite $\mathrm{Ker}(f, g) = \varprojlim \beta$ com $\beta \in \mathrm{Ft}(I^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$.*

Suponha que a categoria $\mathcal{C}$ admite colimite e limite finito, considere um par $f, g : X_0 \rightrightarrows X_1$ definindo diagramas $\alpha \in \mathrm{Ft}(I, \mathcal{C})$ e $\beta \in \mathrm{Ft}(I^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$. Dado $Y \in \mathcal{C}$, podemos fazer uso de (2.20) para expressar os isomorfismos (2.21) e (2.22) do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Coker}(f, g), Y) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, Y) \\
&\simeq \left\{ (u, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \;\middle|\; \begin{matrix} u = v \circ f \\ u = v \circ g \end{matrix} \right\} \\
&\simeq \{ v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \mid v \circ f = v \circ g \}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Ker}(f, g)) \simeq \{ u \in \mathrm{Hom}(Y, X_0) \mid f \circ u = g \circ u \} \tag{2.26}$$

Exemplo 2.3.2. *Na categoria dos conjuntos, dado um objeto $X \in$ **Set** podemos considerar $x \in X$ como um morfismo $\{\mathrm{pt}\} \xrightarrow{x} X$, onde $\{\mathrm{pt}\}$ é um objeto terminal. De modo que para todo par de morfismos paralelos $f, g : X \rightrightarrows Y$ temos*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f, g) &\simeq \mathrm{Hom}(\{pt\}, \mathrm{Ker}(f, g)) \simeq \{ x \in \mathrm{Hom}(\{\mathrm{pt}\}, X) \mid f \circ x = g \circ x \} \\
&\simeq \{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

O que remete à noção habitual de equalizador.

O isomorfismo (2.25) nos leva a definir a seguinte propriedade universal do coequalizador $\mathrm{Coker}(f, g) = L$: Dado $Y \in \mathcal{C}$ e um morfismo $h : X_1 \longrightarrow Y$ tal que $h \circ f = h \circ g$ então existe uma única $k : L \longrightarrow Y$ tal que $\iota \circ k = h$. A propriedade universal do equalizador $\mathrm{Ker}(f, g) = K$ é obtida do mesmo modo pelo isomorfismo 2.26. Essas propriedades ficam resumidas nos seguintes diagramas.

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \\
X_0 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_1 \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\iota"'] & L \arrow[u, dotted, "\exists!"', "k"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, dotted, "\exists!"', "k"] \arrow[dr, "h"] & & \\
K \arrow[r, "\rho"'] & X_0 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_1
\end{tikzcd}$$

Observação 2.3.1. *Em consequência das propriedades universais, os mapas* $\iota\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, \bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, \bullet)$ *e* $\circ\rho : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X_0)$ *são ambos injetivos, de onde segue que* ι *é um monomorfismo e* ρ *é um epimorfismo.*

Uma vez definidos produtos e equalizadores em uma categoria arbitrária $\mathcal{C}$ podemos reescrever o limite na categoria Set como composição dessas operações.

De fato, pelo isomorfismo (2.20), uma família (x_i) pertence à $\varprojlim \beta$ se, e somente se, para todo $s : i \longrightarrow j$ na categoria $\mathrm{Mor}(I)$ onde os objetos são morfismos da categoria I, $\beta(s)(x_j) = (x_i)$. Podemos escrever as condições de compatibilidades naturais do limite em termos de s. Definindo os morfismos domínio e codomínio como segue

$$\begin{aligned} d &: \mathrm{Obj}(\mathrm{Mor}(I)) \longrightarrow \mathrm{Obj}(I), \quad (s : i \longrightarrow j) \longmapsto i \\ c &: \mathrm{Obj}(\mathrm{Mor}(I)) \longrightarrow \mathrm{Obj}(I), \quad (s : i \longrightarrow j) \longmapsto j. \end{aligned}$$

temos, para todo s, um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \{\mathrm{pt}\} \arrow[r, "x_{c(s)}"'] \arrow[rr, bend left, "x_{d(s)}"] & \beta(c(s)) \arrow[r, "\beta(s)"'] & \beta(d(s)) \end{tikzcd} \qquad \beta(s) \circ x_{c(s)} = x_{d(s)}.$$

e assim, vemos que estas condições identificam pares de morfismos paralelos em $\prod_{s\in\mathrm{Mor}(I)} \beta(s)$. Então é natural, definir os morfismos paralelos

$$\prod_{i\in I} \beta(i) \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} \prod_{s\in\mathrm{Mor}(I)} \beta(s) \qquad \begin{aligned} a &: (x_i)_i \longmapsto (x_d(s))_s, \\ b &: (x_i)_i \longmapsto (\beta(s)(x_c(s)))_s. \end{aligned}$$

De modo que $\varprojlim \beta \simeq \mathrm{Ker}(a, b)$ pois

$$\mathrm{Ker}(a,b) \overset{(2.27)}{\simeq} \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i\in I} \beta(i) \,\middle|\, a((x_i)_i) = b((x_i)_i) \right\} \simeq \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i\in I} \beta(i) \,\middle|\, \begin{array}{c} \beta(s)(x_j) = x_i \\ s \in \mathrm{Hom}_I(i,j) \end{array} \right\}.$$

Esse resultado pode ser generalizado na seguinte proposição.

Proposição 2.3.3. *Se uma categoria* $\mathcal{C}$ *admite coprodutos pequenos e coequalizadores para qualquer par de morfismos paralelos, então* $\mathcal{C}$ *admite colimites pequenos. Explicitamente, para todo diagrama* $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$*, temos*

$$\varinjlim \alpha \simeq \mathrm{Coker}\left(\coprod_{s\in\mathrm{Mor}(I)} \alpha(d(s)) \rightrightarrows \coprod_{i\in I} \alpha(i) \right). \tag{2.28}$$

Do mesmo modo, se $\mathcal{C}$ *admite produtos pequenos e equalizadores, então* $\mathcal{C}$ *admite limites pequenos. Explicitamente, para todo diagrama* $\beta : I^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$*, temos*

$$\varprojlim \beta \simeq \mathrm{Ker}\left(\prod_{i\in I} \beta(i) \rightrightarrows \prod_{s\in\mathrm{Mor}(I)} \beta(d(s)) \right). \tag{2.29}$$

Demonstração. Vamos mostrar o resultado para o colimite. Dado um diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$, para todo $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim \alpha, Z) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, Z) &\simeq \mathrm{Ker}\left(\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(\alpha(i), Z) \rightrightarrows \prod_{s\in \mathrm{Mor}(I)} \mathrm{Hom}(\alpha(d(s)), Z) \right) \\
&\simeq \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}\left(\coprod_{i\in I} \alpha(i), Z \right) \rightrightarrows \mathrm{Hom}\left(\coprod_{s\in \mathrm{Mor}(I)} \alpha(d(s)), Z \right) \right) \\
&\simeq \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Coker}\left(\coprod_{s\in \mathrm{Mor}(I)} \alpha(d(s)) \rightrightarrows \coprod_{i\in I} \alpha(i) \right), Z \right).
\end{aligned}$$

De onde segue o resultado pelo Lema de Yoneda. $\square$

Definição 2.3.6. *Uma categoria I é **filtrante** se satisfaz as seguintes condições,*

1. *A categoria I não é vazia.*
2. *Para cada $i, j \in I$, existem um objeto $k \in I$, e morfismos $i \longrightarrow k$ e $j \longrightarrow k$.*
3. *Dadas dois morfismo paralelos $f, g : i \rightrightarrows j$, existe um morfismo $h : j \longrightarrow k$ tal que $h \circ f = h \circ g$.*

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, dotted] & \\
 & k \\
j \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dr, dotted] & j \arrow[d, dotted] \\
 & k
\end{tikzcd}$$

*Dizemos que I é uma categoria **cofiltrante** se I^{op} for filtrante.*

Podemos reescrever a condição (2), na Definição 2.3.6, do seguinte modo:

2'. Dados dois morfismos $f' : i \longrightarrow j$ e $f''i \longrightarrow k$ em I existem $l \in I$ e os morfismos $g' : j \longrightarrow l$, $g'' : k \longrightarrow l$ tal que $g' \circ f' = g'' \circ f''$.

Ver [15] Lema 3.1.2, página 72.

Proposição 2.3.4. *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbf{Set}$ um funtor, onde I é pequena e filtrante. Definimos a relação $\sim$ no conjunto $\coprod_i \alpha(i)$ dada por*

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \alpha(i), y \in \alpha(j),\ \exists\, s : i \longrightarrow k, t : j \longrightarrow k \\ \textit{tal que } \alpha(s)(x) = \alpha(t)(y) \end{cases}$$

Então a relação $\sim$ é uma relação de equivalência e $\varinjlim \alpha \simeq \coprod_i \alpha(i)/\sim$.

Demonstração. A reflexividade e a simetria são imediatas. Dados $x_1 \in \alpha(i_1)$, $x_2 \in \alpha(i_2)$ e $x_3 \in \alpha(i_3)$, tal que $x_1 \sim x_2$ e $x_2 \sim x_3$. Então existem os pares de morfismo $s_1 : i_1 \longrightarrow j_1$, $s_2 : i_2 \longrightarrow j_1$ e $t_2 : i_2 \longrightarrow j_2$, $t_3 : i_3 \longrightarrow j_2$ de modo que

$$\alpha(s_1)(x_1) = \alpha(s_2)(x_2), \qquad \alpha(t_2)(x_2) = \alpha(t_3)(x_3)$$

Como a I é filtrante, existem u_1 e u_2 tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r, "s_1"] & j_1 \arrow[dr, dashed, "u_1"] & \\
i_2 \arrow[ur, "s_2"'] \arrow[dr, "t_2"] & & k \\
i_3 \arrow[r, "t_3"'] & j_2 \arrow[ur, dashed, "u_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Temos $\alpha(u_1 \circ s_2) = \alpha(u_2 \circ t_2)$. Logo $\alpha(u_1 \circ s_1)(x_1) = \alpha(u_1 \circ s_2)(x_2) = \alpha(u_2 \circ t_2)(x_2) = \alpha(u_2 \circ t_3)(x_3)$. Concluímos que $x_1 \sim x_3$. Finalmente, dado um elemento $l \in I$ temos que

$$\begin{aligned}
(\varinjlim \alpha)(l) = \varprojlim \operatorname{Hom}(\alpha, l) &\simeq \left\{ (s_i)_{i\in I} \in \prod \operatorname{Hom}_{\textsf{Set}}(\alpha(i), l) \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i = s_j \circ \alpha(r) \\ \forall r : i \longrightarrow j \end{array} \right\} \\
&\simeq \left\{ s \in \operatorname{Hom}_{\textsf{Set}}(\coprod \alpha(i), l) \;\middle|\; \begin{array}{l} s(x) = s(y) \\ \text{se } x \sim y \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Como o objeto l foi tomado arbitrariamente, o isomorfismo é funtorial e concluímos que $\varinjlim \alpha \simeq \coprod_i \alpha(i)/\sim$. $\square$

Teorema 2.3.1. *Seja I uma categoria pequena. Então I é filtrante se, e somente se, o funtor $\varinjlim : \operatorname{Ft}(I, \textbf{\textsf{Set}}) \longrightarrow \textbf{\textsf{Set}}$ comuta com o limites finitos. Isto é, para toda categoria finita J e todo bifuntor $\alpha : I \times J^{\mathrm{op}} \longrightarrow \textbf{\textsf{Set}}$ o morfismo canônico*

$$\varinjlim_{i\in I} \varprojlim_{j\in J} \alpha(i,j) \longrightarrow \varprojlim_{j\in J} \varinjlim_{i\in I} \alpha(i,j)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Ver [15] Teorema 3.1.6, página 74 ou [21] Teorema 3.8.9, página 114. $\square$

2.4 Categorias Triangulares

Definição 2.4.1. *Definimos uma **categoria aditiva** como uma categoria $\mathcal{C}$ que admite produtos finitos tal que para todos $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tem uma estrutura de grupo abeliano com operação de grupo denotada por $+$, além disso, a lei de composição é bilinear. Dizemos que um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é um **funtor aditivo** se para todos $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$,*

$$\mathcal{F} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

é um homomorfismo de grupos.

Observação 2.4.1. *A propriedade bilinear da lei de composição, garante que para todos os pares* $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *e* $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ *de morfismos em uma categoria aditiva temos as igualdades*

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f', \qquad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Além disso, para todos objetos $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *denotamos por* 0_{XY} *o elemento nulo do grupo* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *onde para todo* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *temos*

$$0_{XZ} = 0_{YZ} \circ f = 0_{YZ} \circ (0_{XY} + f) = 0_{YZ} \circ 0_{XY} + 0_{YZ} \circ f = 0_{YZ} \circ 0_{XY}$$

de modo que se justifica a notação 0 *para o morfismo nulo de qualquer grupo* Hom.

Assumimos ainda, a existência do objeto nulo $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *definido como o objeto de* $\mathcal{C}$ *tal que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,0) = \{0\}$ *para todo objeto* X*. Isto é,* 0 *é um objeto terminal e inicial em* $\mathcal{C}$*.*

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria que admita limites e colimites, considere I e J duas categorias pequenas e $\{X_i\}_{i\in I}$ e $\{Y_j\}_{i\in J}$ coleções de objetos em $\mathcal{C}$ indiciados por I e J respectivamente. Então dado um morfismo $f : \coprod X_i \longrightarrow \prod Y_i$, pela propriedade universal do limite e colimite, existe uma única família de morfismos $(f_{i,j} : X_i \longrightarrow Y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ definida por $f_{i,j} = \rho_j \circ f \circ \iota_i$ de modo que o diagrama abaixo comuta para todo par $(i,j) \in I \times J$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, "f"] & \prod_{j\in J} Y_j \arrow[d, "\rho_j"] \\
X_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[r, "f_{i,j}"] & Y_j
\end{tikzcd}$$

O que nos permite entender f como uma matriz cujas componentes são os mapas $f_{i,j}$. Consideramos, assim, I e J categorias finitas e o morfismo definido pela matriz identidade Id. Denotando por 1 o morfismo identidade id_i quando $i \in I$.

$$\coprod X_i \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}} \prod X_i$$

Caso o mapa acima seja um isomorfismo entre produtos e coprodutos finitos em $\mathcal{C}$, $\coprod X_i \simeq \prod X_i$ serão denotados por $\bigoplus X_i$ e chamados de **soma direta** de $\{X_i\}$.

O Teorema 2.4.1 abaixo garante a existência da soma direta de toda coleção finita de elementos de uma categoria aditiva $\mathcal{C}$.

Teorema 2.4.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Então $\mathcal{C}$ admite coprodutos finitos e o morfismo, definido para toda coleção $\{X_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ indexada por uma categoria finita I,*

$$Id : \coprod X_i \longrightarrow \prod X_j, \qquad Id_{i,j} = \begin{cases} id_{X_i} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Dado uma coleção $\{X_i\}$ de objetos de $\mathcal{C}$, considere os mapas $Id_{i,j} : X_i \longrightarrow X_j$ como definido acima. Então, aplicando a pela propriedade universal do produto para cada i, existe uma única u_i tal que $\rho_j \circ u_i = Id_{i,j}$. De onde obtemos uma família de morfismos $(u_i : X_i \longrightarrow \prod X_i)_i$, com $\rho_i \circ u_i = 1$ e $\rho_j \circ u_i = 0$ quando $i \neq j$. Além disso,

$$\rho_j \circ \left(\sum_i u_i \circ \rho_i\right) = \sum_i (\rho_j \circ u_i) \circ \rho_i = \rho_j = \rho_j \circ id_{\Pi X_i}$$

para todo $j \in I$. Logo, usando que $\rho = (\rho_j)$ é um epimorfismo, temos

$$\sum u_i \circ \rho_i = id_{\Pi X_i}. \tag{2.30}$$

Vamos verificar que o produto munido do elemento universal $u \simeq (u_i)$ cumpre a propriedade universal do coproduto. Dado um objeto Y de $\mathcal{C}$ e uma família de morfismo $(f_i : X_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$, tomamos o morfismo $f = \sum(f_i \circ \rho_i)$. Verificamos que, para todo $j \in I$

$$f \circ u_j = \sum f_i \circ \rho_i \circ u_j = f_j.$$

Resta mostrar que f é única. De fato, dado $f' : \prod X_i \longrightarrow Y$ tal que $f' \circ u_j = f_j$. Nesse sentido, usando (2.30), temos

$$f' = f' \circ id_{\Pi X_i} = f' \circ \left(\sum u_i \circ \rho_i\right) = \sum f' \circ u_i \circ \rho_i = \sum f_i \circ \rho_i = f.$$

Assim, concluímos que $\mathcal{C}$ admite coproduto e $\prod X_i$ é o objeto que representa $\prod \mathrm{Hom}(X_i, \bullet)$. Logo existe um isomorfismo $\varphi : \mathrm{Hom}(\prod X_i, \bullet) \xrightarrow{\sim} \prod \mathrm{Hom}(X_i, \bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\coprod X_i, \bullet)$. De onde segue pelo Lema de Yoneda, que $Id : \coprod X_i \longrightarrow \prod X_i = \varphi_{\Pi X_i}(id_{\Pi X_i})$ é um isomorfismo. Além disso, denotando por ι o elemento universal do coproduto, o isomorfismo φ é dado por (2.24) como $\varphi = (\circ u) \circ (\circ \iota)^{-1}$, de modo que

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\prod X_i, \prod X_i) & \xrightarrow{\sim} & \prod \mathrm{Hom}(X_i, \prod X_i) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\coprod X_i, \prod X_i). \\ id_{\Pi X_i} & \longmapsto & id_{\Pi X_i} \circ u = Id \circ \iota & \longleftarrow & Id \end{array}$$

Isto é, $Id \circ \iota_i = u_i$ logo $Id_{i,j} = \rho_j \circ Id \circ \iota_i$, o que fica ilustrado no seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, dotted, "Id"] & \prod_{j\in I} X_j \arrow[d, "\rho_j"] \\ X_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, "u_i"] \arrow[r, "Id_{i,j}"'] & X_j \end{tikzcd}$$

Deste modo, concluímos o resultado. $\square$

Assumindo que $\mathcal{C}$ é uma categoria aditiva, para cada par de morfismo paralelos $f, g : X_0 \rightrightarrows X_1$ e $u : Y \longrightarrow X_0$ temos que $f \circ u = g \circ u$ se, e só se, $(f-g)\circ u = f\circ u - g\circ u = g \circ u - g \circ u = 0 \circ u$. O que nos permite expressar o isomorfismo (2.26) como

$$\operatorname{Hom}(Y, \operatorname{Ker}(f,g)) \simeq \{u \in \operatorname{Hom}(Y, X_0) \mid (f-g)\circ u = 0 \circ u\}. \tag{2.31}$$

O mesmo vale para o $\operatorname{Coker}(f,g)$. De modo que, torna-se natural considerar as seguintes definições.

Definição 2.4.2. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva, X e Y objetos de $\mathcal{C}$ e $f : X \longrightarrow Y$. Considere o morfismo $0 : X \longrightarrow 0 \longrightarrow Y$. Definimos o **núcleo** de f, como o equalizador dos morfismos paralelos $f, 0 : X \rightrightarrows Y$, $\operatorname{Ker} f := \operatorname{Ker}(f, 0)$. Do mesmo modo, definimos o **conúcleo** do morfismo f como o coequalizador dos morfismos paralelos $f, 0 : X \rightrightarrows Y$, $\operatorname{Coker} f := \operatorname{Coker}(f, 0)$.*

Segue diretamente da definição que se $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Coker} f$ existirem, então serão os objetos que representam respectivamente os seguintes funtores.

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, f)) : Z \longmapsto \operatorname{Ker}\big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)\big) = \{u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \mid f{\circ}u = 0\}$$

$$\operatorname{Coker}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \bullet)) : Z \longmapsto \operatorname{Ker}\big(\operatorname{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \operatorname{Hom}(X,Z)\big) = \{u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \mid u{\circ}f = 0\}$$

Podemos deduzir da propriedade universal do equalizador a propriedade universal do núcleo de um morfismo $f : X \longrightarrow Y$. Existe uma única $\rho : \operatorname{Ker} f \longrightarrow X$ tal que $f \circ \rho = 0$ e para todo morfismo $g : W \longrightarrow X$ com $f \circ g = 0$ existe única k tal que $k \circ \rho = g$. A propriedade universal do conúcleo é obtida do mesmo modo. Essas propriedades ficam resumido nos seguintes diagramas.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "\exists!\, k"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & \operatorname{Ker} f \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & Y \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\iota"] & Z \\ & \operatorname{Coker} f \arrow[ur, dotted, "\exists!\, k"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos que $\operatorname{Ker} f \simeq 0$ se, e somente se, f é um monomorfismo. De fato, se f é um monomorfismo, então $\operatorname{Hom}(W, \operatorname{Ker} f) \simeq \{u \in \operatorname{Hom}(W,X) |\ f \circ u = 0\} \simeq \{0\}$. Por outro lado, de $\operatorname{Ker} f \simeq 0$ então dado $g_1, g_2 : W \longrightarrow X$, temos $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implica $f \circ (g_1 - g_2) = 0$ logo existe única $k = 0 : W \longrightarrow 0$ tal que $k \circ \rho = 0 = g_1 - g_2$. Assim, $g_1 = g_2$ e f é um monomorfismo. Deste modo, vemos que $\operatorname{Ker} \rho \simeq 0$. Similarmente, para o conúcleo temos que $\operatorname{Coker} f \simeq 0$ se, e somente se, f é um epimorfismo. De onde segue que $\operatorname{Coker} \iota \simeq 0$.

Definição 2.4.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva que admita núcleos e conúcleos. Dado um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$, denotado por $\rho : \operatorname{Ker} f \longrightarrow X$ e $\iota : Y \longrightarrow \operatorname{Coker} f$ os respectivos* *elementos universais do núcleo e conúcleo de f, definimos a imagem de f, $\operatorname{Im} f$ e a coimagem de f, $\operatorname{Coim} f$ respectivamente como*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(Y \xrightarrow{\iota} \operatorname{Coker} f), \qquad \operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\rho} X).$$

Aplicando as propriedades universais do núcleo e conúcleo, obtemos um morfismo canônico $u : \operatorname{Coim} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$. Pois como $f \circ \rho = 0$, existe única k tal que $f = k \circ \overline{\iota}$. Agora, como $(\iota \circ k) \circ \overline{\iota} = \iota \circ f = 0$ e $\overline{\iota}$ é um epimorfismo, devemos ter $\iota \circ k = 0$. Logo existe única $u : \operatorname{Coim} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$ tal que $\overline{\rho} \circ u = k$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\rho"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{\iota}"'] & Y \arrow[r, "\iota"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[ur, dotted, "k"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\overline{\rho}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definição 2.4.4. *Definimos uma* ***categoria abeliana*** *como uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ que satisfaz as seguintes condições*

1. *Para todo morfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Coker} f$ existem.*
2. *O isomorfismo canônico $\operatorname{Coim} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$ é um isomorfismo.*

Observação 2.4.2. *Sejam $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana e $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Se $f : X \longrightarrow Y$ é um monomorfismo, então $\operatorname{Ker} f \simeq 0$ de modo que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f \longrightarrow X) = \operatorname{Coker}(0_X : 0 \longrightarrow X) \simeq X$, pois temos, para todo W, $\operatorname{Hom}(\operatorname{Coker}(0_X), W) \simeq \{u \in \operatorname{Hom}(X, W) | u \circ 0_X = 0\} = \operatorname{Hom}(X, W)$, pelo lema de Yoneda, $\operatorname{Coker}(0 \longrightarrow X) \simeq X$. Do mesmo modo, se f for um epimorfismo então $\operatorname{Coker} f \simeq 0$, logo $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(Y \longrightarrow \operatorname{Coker} f) = \operatorname{Ker}(0 \longrightarrow Y) \simeq Y$. Notadamente, se f é um monomorfismo e um epimorfismo, então f é um isomorfismo.*

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ um par de morfismos em $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = 0$. Então $\operatorname{Im} f \xrightarrow{\overline{\rho}_f} Y \xrightarrow{g} Z$ é o morfismo nulo, pois $g \circ \overline{\rho}_f = g \circ (f \circ k_f) = 0 \circ k_f = 0$. Assim, existe único $\varphi : \operatorname{Im} f \longrightarrow \operatorname{Ker} g$ tal que $\overline{\rho}_f = \rho_g \circ \varphi$. Do mesmo modo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k_g} \operatorname{Im} g$ é o morfismo nulo, $\overline{\rho}_g \circ k_g \circ f = g \circ f = 0$ mas $\overline{\rho}_g$ é um epimorfismo de modo que $k_g \circ f = 0$. Logo existe única $\psi : \operatorname{Coker} f \longrightarrow \operatorname{Im} g$ tal que $k_g = \psi \circ \iota f$. Assim, temos um diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Im} f \arrow[rr, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "\overline{\rho}_f"] & & \operatorname{Ker} g \arrow[dl, "\rho_g"'] & \\
X \arrow[ur, dashed, "k_f"] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "\iota_f"'] \arrow[dr, dashed, "k_g"] & & Z \\
& \operatorname{Coker} f \arrow[rr, dotted, "\psi"] & & \operatorname{Im} g \arrow[ur, "\overline{\rho}_g"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.32}$$

Notemos que φ é um epimorfismo e ψ um monomorfismo.

Definição 2.4.5. *Um par de morfismos* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *é* ***exato*** *se satisfizer as seguintes condições*

1. $g \circ f = 0$. *Nesse caso dizemos que o par* f *e* g *é um* ***complexo****.*

2. *O morfismo natural* $\operatorname{Im} f \longrightarrow \operatorname{Ker} g$ *é um isomorfismo.*

Uma sequencia de morfismos é uma ***sequência exata*** *se todo par de morfismos consecutivos é exato.*

Observação 2.4.3. *Note que, como* f *é um monomorfismo se e só se* $\operatorname{Ker} f \simeq 0$ *temos que a sequência* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ *é exata se e só se* f *é um monomorfismo. Do mesmo modo,* $X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ *é exata se, e só se,* f *é um epimorfismo.*

Notemos ainda que a sequência $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *é exata, se e somente se,* $X \simeq \operatorname{Ker} g$. *Assim como, a sequência* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *é exata se, e somente se,* $Y \simeq \operatorname{Coker} f$.

Logo, para todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$ *em uma categoria abeliana* $\mathcal{C}$, *por definição temos as seguintes sequências exatas*

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow X \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow 0, \\ &0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow Y \to \operatorname{Coker} f \to 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Vamos mostrar que existem outros critérios para a exatidão de uma sequencia. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ um complexo em $\mathcal{C}$. Seja $u : \operatorname{Ker} g \longrightarrow \operatorname{Coker} f$ como a composição $\iota_f \circ \rho_g$. Então existe uma sequência de epimorfismos

$$\operatorname{Im} f \overset{e_1}{\rightarrowtail} \operatorname{Ker} u \overset{e_2}{\rightarrowtail} \operatorname{Ker}(Y \longrightarrow \operatorname{Coker} f) = \operatorname{Im} f.$$

De fato, como $u \circ \varphi = \iota_f \circ \overline{\rho}_f = 0$ pela propriedade universal de $\operatorname{Ker} u$ existe uma única $e_1 : \operatorname{Im} f \longrightarrow \operatorname{Ker} u$ tal que $\rho_u \circ e_1 = \varphi$ e, já que, φ é um epimorfismo, temos que e_1 é um epimorfismo. Além disso, temos $\iota_f \circ \rho_g \circ \rho_u = u \circ \rho_u = 0$, mas ι_f é monomorfismo, logo $\rho_g \circ \rho_u = 0$. Pela propriedade universal da imagem, isto é, do núcleo $\operatorname{Ker}(Y \longrightarrow \operatorname{Coker} f)$, existe única $e_2 : \operatorname{Ker} u \longrightarrow \operatorname{Im} f$ tal que $\rho_g \circ \rho_u = \overline{\rho}_f \circ e_2$, de onde segue que e_2 é um epimorfismo.

Assim, segue que $\operatorname{Ker} u \simeq \operatorname{Im} f$. Do mesmo modo, podemos mostrar que $\operatorname{Coker} u \simeq \operatorname{Im} g$. Além disso como $\mathcal{C}$ é abeliana, temos $\operatorname{Coim} u \simeq \operatorname{Im} u$, de modo que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u &\simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f \xrightarrow{\iota_u} \operatorname{Coker} u) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f \longrightarrow \operatorname{Im} g) \\ &\simeq \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} u \xrightarrow{\rho_u} \operatorname{Ker} g) \simeq \operatorname{Coker}(\operatorname{Im} f \longrightarrow \operatorname{Ker} g). \end{aligned} \tag{2.34}$$

De modo que $u = 0$ se e somente se $\operatorname{Im} f \simeq \operatorname{Ker} g$ se e somente se $\operatorname{Coker} f \simeq \operatorname{Im} g$.

Lema 2.4.1 (Lema dos 5)**.** *Considere um diagrama comutativo onde as linhas são complexos*

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & X^3 \arrow[d, "f^3"] \\
Y^0 \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] & Y^2 \arrow[r] & Y^3
\end{tikzcd}$$

onde $X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow X^3$ *e* $Y^0 \longrightarrow Y^1 \longrightarrow Y^2$ *são sequências exatas.*

1. *Se* f^0 *é um epimorfismo e* f^1 *e* f^3 *são monomorfismos, então* f^2 *é um monomorfismo.*

2. *Se* f^3 *é um monomorfismo e* f^0 *e* f^2 *são epimorfismos, então* f^1 *é um epimorfismo.*

Demonstração. Ver [15] Lema 8.3.13, página 181. □

Observação 2.4.4. *O "Lema dos 5"clássico pode ser enunciado como: Dado um complexo exato* $f^i : X^i \longrightarrow Y^i$*, para* $i = 0, \cdots, 4$.

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & X^3 \arrow[r] \arrow[d, "f^3"] & X^4 \arrow[d, "f^4"] \\
Y^0 \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] & Y^2 \arrow[r] & Y^3 \arrow[r] & Y^4
\end{tikzcd}$$

Se f^0, f^1, f^3 *e* f^4 *forem isomorfismos então* f^2 *também será um isomorfismo.*Ver [12], página 129. *Este resultado é uma consequência direta do Lema 2.4.1 acima.*

Lema 2.4.2 (Snake Lemma)**.** *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria abeliana. Considere o diagrama comutativo em* $\mathcal{C}$*, onde as sequencias horizontais são exatas:*

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "f'"] & Y \arrow[r, "g'"] & Y'' &
\end{tikzcd}$$

Esse diagrama, induz a seguinte sequência exata:

$$\operatorname{Ker} u \xrightarrow{f_1} \operatorname{Ker} v \xrightarrow{g_1} \operatorname{Ker} w \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Coker} u \xrightarrow{f_2} \operatorname{Coker} v \xrightarrow{g_2} \operatorname{Coker} w$$

Demonstração. Ver [15] Lema 12.1.1, página 297. □

Definição 2.4.6.

1. *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{C}'$ *duas categorias abelianas. Dizemos que um funtor aditivo* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ *é* ***exato a esquerda*** *se para toda sequência* $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X''$ *exata em* $\mathcal{C}$ *a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X') \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X'')$$

em $\mathcal{C}'$, for exata. Dizemos que $\mathcal{F}$ é ***exato a direita*** *e para toda sequência $X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ exata em $\mathcal{C}$ a sequência*

$$\mathcal{F}(X') \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X'') \longrightarrow 0$$

for exata em $\mathcal{C}'$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é um funtor ***exato*** *se é exato a esquerda e a direita.*

2. *Seja $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Dizemos que I é um objeto* ***injetivo*** *se o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, I)$ for exato. Dizemos que P é um objeto* ***projetivo*** *se o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \bullet)$ for exato.*

Proposição 2.4.1. *Um objeto $I \subset \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ é um objeto injetivo se, e somente se, para todos $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e todo diagrama de linhas exatas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

pode ser completado com um mapa h de modo a obter um diagrama comutativo.

Demonstração. Como f é injetivo, Podemos tomar uma sequencia exata $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$. Já que Hom é sempre exato à esquerda, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}(\bullet, I)$ obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, I)$$

Assim, para que $\mathrm{Hom}(\bullet, I)$ seja exato é necessário e suficiente que o mapa $\mathrm{Hom}(Y, I) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}(X,$ seja sobrejetivo, ou equivalentemente, que dado $k : X \longrightarrow I$ exista $h : Y \longrightarrow I$ tal que $f \circ h = k$.

□

Definição 2.4.7.

1. *Uma categoria com translação $(\mathcal{C}, T)$ é uma categoria $\mathcal{C}$ munido de uma equivalência de categorias $T : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ chamado funtor de translação.*

2. *Um funtor de categorias com translação, denotado por $\mathcal{F} : (\mathcal{C}, T) \longrightarrow (\mathcal{C}', T')$, é um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ para o qual existe um isomorfismo $\mathcal{F} \circ T \simeq T' \circ \mathcal{F}$.*

3. *Uma subcategoria com translação de $(\mathcal{C}, T)$ é um par $(\mathcal{C}', T')$ onde $\mathcal{C}'$ é subcategoria de $\mathcal{C}$ e T' é a restrição do funtor T à $\mathcal{C}'$.*

Denotamos T^{-1} o funtor quase-inverso de T, isto é $T \circ T^{-1} \simeq T^{-1} \circ T \simeq id_{\mathcal{C}}$. Assim o funtor composição $T^n = T \circ \cdots \circ T$, único a menos de isomorfismo único, esta bem definido para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.4.8. *Seja $(\mathcal{C}, T)$ uma categoria aditiva com translação. Um triangulo em $\mathcal{C}$ é uma sequencia de morfismos*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX.$$

Um morfismo de triângulos é um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & TX \arrow[d, "T(\alpha)"'] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & TX' \end{tikzcd}$$

Definição 2.4.9. *Definimos uma* ***categoria triangular*** $(\mathcal{C}, T)$*, como uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ com translação, munida de uma família de triângulos chamados* ***triângulos distintos*** *que satisfaz as propriedades* $\mathrm{TR}\,0 - \mathrm{TR}\,5$ *chamadas axiomas de categorias triangulares.*

$\mathrm{TR}\,0$*: Um triangulo isomorfo a um triangulo distinto é distinto.*

$\mathrm{TR}\,1$*: Para todo objeto $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,*

$$X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$$

é um triangulo distinto.

$\mathrm{TR}\,2$*: Todo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ pode ser imerso em um triangulo distinto*

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX.$$

$\mathrm{TR}\,3$*: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ é um triangulo distinto se e somente se $Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY$ for um triangulo distinto.*

$\mathrm{TR}\,4$*: Dado dois triângulos distintos $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$ e $X' \xrightarrow{f'} Y' \longrightarrow Z' \longrightarrow TX'$, um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

pode ser imerso em um morfismo de triângulos, não necessariamente único.

$\mathrm{TR}\,5$*: Sejam dados os triângulos distintos*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z' \longrightarrow TX$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TY$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{l} Y' \longrightarrow TX$$

Então existe um triangulo distinto

$$Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} TZ'$$

tal que o seguinte diagrama comute

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "u"] & TX \arrow[d, "id_{TX}"] \\
X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "id_Z"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "v"] & TX \arrow[d, "T(f)"] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "l"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id_{X'}"'] & TY \arrow[d, "T(h)"] \\
Z' \arrow[r, dotted, "u"] & Y' \arrow[r, dotted, "v"] & X' \arrow[r, dotted, "w"] & TZ'
\end{tikzcd} \tag{2.35}$$

Observação 2.4.5.

1. *Dado uma categoria triangular* $(\mathcal{C}, T)$, *o axioma* TR 3 *equivale a seguinte propriedade,*

TR 3′ : *Um triangulo* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX$ *é distinto se, e somente se, os seguintes triângulos*

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-T(f)} TY \qquad T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(h)} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

são distintos.

De fato, assumindo TR 3, *para o primeiro triangulo temos um isomorfismo*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "-1"'] & TX \arrow[r, "-T(f)"] \arrow[d, equal] & TY \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "-g"] & Z \arrow[r, "-h"] & TX \arrow[r, "-T(f)"] & TY
\end{tikzcd}$$

Como a linha inferior do diagrama é um triangulo distinto a superior também será, por TR 0. *Notemos que por* TR 3 *o segundo triangulo será distinto, se e somente se*

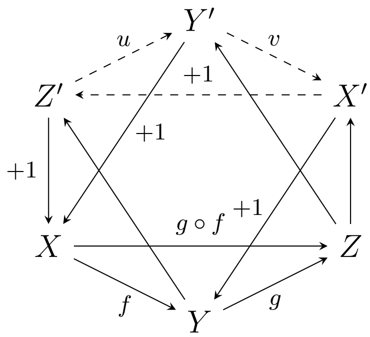
$$X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{T(f)} TX$$

for distinto. Assim, basta notarmos que existe um isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "-f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "-g"] \arrow[d, "-1"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & TX
\end{tikzcd}$$

Já que a linha inferior do diagrama é um triangulo distinto, segue de $\mathrm{TR}\,0$ *que a superior também será, de onde concluímos que* $-T^{-1}Z \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ *é um triangulo distinto. Para os dois casos, vale a volta seguindo o mesmo argumento.*

2. *Omitindo as identidades, o diagrama da propriedade* $\mathrm{TR}\,5$ *pode ser visualizado como o seguinte diagrama octaédrico:*



Onde os morfismos $X \xrightarrow{+1} Y$ *denotam os morfismos* $X \longrightarrow TY$.

Segue naturalmente das definições acima a definição de funtor triangular ou δ-funtor.

Definição 2.4.10.

1. *Sejam* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *duas categorias triangulares, com* T_1 *e* T_2 *as respectivas translações. Um* ***funtor triangular*** *covariante, ou um funtor que preserva triângulos, é definido como um par* $(\mathcal{F}, \delta)$ *onde* $\mathcal{F} : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ *é um funtor aditivo munido de um isomorfismo de funtores*

$$\delta : \mathcal{F} \circ T_1 \xrightarrow{\sim} T_2 \circ \mathcal{F}$$

tal que para todo triangulo distinto

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T_1 X$$

em $\mathcal{C}_1$*, o diagrama correspondente*

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(v)} \mathcal{F}(Z) \xrightarrow{\delta \circ \mathcal{F}(w)} T_2\mathcal{F}(X)$$

é um triangulo distinto em $\mathcal{C}_2$.

2. *Seja* $\mathcal{C}_3$ *uma terceira categoria triangular com translação* T_3. *Se* $(\mathcal{F}, \delta_1)$ *e* $(\mathcal{G}, \delta_2)$ *são* δ*-funtores, então*

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}, \delta_2 \circ \delta_1) : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$$

é um δ*-funtor. Onde a composição* $\delta_2 \circ \delta_1$ *é definida por*

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ T_1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{G} \circ (T_2 \circ \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_2} T_3 \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F}.$$

3. *Sejam $(\mathcal{F},\delta_1),(\mathcal{G},\delta_2):\mathcal{C}_1\longrightarrow\mathcal{C}_2$. Um morfismo $\eta:(\mathcal{F},\delta_1)\longrightarrow(\mathcal{G},\delta_2)$ um* ***morfismo de funtores triangulares*** *é um morfismo de funtores $\eta:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ tal que para todo objeto X em $\mathcal{C}_1$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\circ T_1(X) \arrow[r, "\delta_1(X)"] \arrow[d, "\eta(T_1(X))"'] & T_2\circ\mathcal{F}(X) \arrow[d, "T_2(\eta(X))"] \\
\mathcal{G}\circ T_1(X) \arrow[r, "\delta_2(X)"'] & T_2\circ\mathcal{G}(X)
\end{tikzcd}$$

Definição 2.4.11. *Seja $(\mathcal{C},T)$ uma categoria triangular. Um* ***funtor cohomológico*** *é Um funtor aditivo $\mathcal{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ tal que para todo triangulo distinto $X\longrightarrow Y\longrightarrow Z\longrightarrow T(X)$ em $\mathcal{C}$, a sequência $\mathcal{F}(X)\longrightarrow\mathcal{F}(Y)\longrightarrow\mathcal{F}(Z)$ é exata em $\mathcal{D}$.*

Observação 2.4.6. *Se $\mathcal{F}$ é um funtor cohomológico, dado um triangulo distinto $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}TX$ pelo axioma $\mathrm{TR\,3}$ o seguinte triangulo é distinto*

$$TX\xrightarrow{-T(f)}TY\xrightarrow{-T(g)}TZ\xrightarrow{-T(h)}T^2X.$$

Além disso, pela propriedade $\mathrm{TR\,3'}$ os triângulos

$$Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}TX\xrightarrow{-T(f)}TY\qquad\qquad Z\xrightarrow{h}TX\xrightarrow{-T(f)}TY\xrightarrow{-T(g)}TZ$$

também são distintos, assim pela definição de funtor cohomológico aplicada à cada triangulo, temos que a seguinte sequência é exata.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] & \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(g)"] & \mathcal{F}(Z) \arrow[r, dotted, "\mathcal{F}(h)"] & \mathcal{F}(TX) \arrow[r, "\mathcal{F}(-T(f))"] & \mathcal{F}(TY) \arrow[r, "\mathcal{F}(-T(g))"] & \mathcal{F}(TZ).
\end{tikzcd}$$

De modo geral, denotando $\mathcal{F}^k$ por $\mathcal{F}\circ T^k$, então para todo triangulo distinto $X\longrightarrow Y\longrightarrow Z\xrightarrow{h}T(X)$ temos uma sequência exata longa:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{F}^{k-1}(Z) \arrow[r, dotted, "\delta^{k-1}"] & \mathcal{F}^k(X) \arrow[r] & \mathcal{F}^k(Y) \arrow[r] & \mathcal{F}^k(Z) \arrow[r, dotted, "\delta^k"] & \mathcal{F}^{k+1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Onde $\delta^k=\mathcal{F}\circ(-1)^kT^k(h)$, para todo $k\in\mathbb{Z}$.

Proposição 2.4.2.

1. *Se $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\longrightarrow T(X)$ é um triangulo distinto então $g\circ f=0$.*

2. *Para todo $W\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ os funtores, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\bullet)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet,W)$ são funtores cohomológicos.*

Demonstração. (1) Pelo axioma TR 1, $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ é um triangulo distinto. Pelo axioma TR 4, id_X e f garantem a existência de uma ϕ fazendo o diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "id_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi"'] & T(X) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & T(X) \end{tikzcd}$$

Portanto $g \circ f = \phi \circ 0 = 0$.

(2) Seja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow T(X)$ um triangulo distinto. Para mostrar que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z)$$

é uma sequencia exata, precisamos mostrar que para todo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ com $g \circ \phi = 0$, existe $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ com $\phi = f \circ \psi$. Pelo axioma TR 1 existe o triangulo distinto $W \xrightarrow{id_W} W \longrightarrow 0 \longrightarrow T(W)$, já que $\phi \circ g = 0$ o axioma TR 4 garante a existência de ψ fazendo o diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\psi"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T(W) \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & T(X) \end{tikzcd}$$

e temos que $\psi = f \circ \phi$. $\square$

Definição 2.4.12. *Seja $(\mathcal{C}, T)$ uma categoria aditiva com translação. Um triangulo em $\mathcal{C}$*

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y \xrightarrow{\quad g \quad} Z \xrightarrow{\quad h \quad} T(X)$$

*é dito **quase distinto** se para todo funtor cohomológico $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ a sequência*

$$H(T^{-1}Z) \xrightarrow{H(T^{-1}h)} H(X) \xrightarrow{H(f)} H(Y) \xrightarrow{H(g)} H(Z) \xrightarrow{H(h)} H(TX)$$

é uma sequência exata.

Proposição 2.4.3. *Seja um morfismo de triângulos quase distintos dado por*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & T(X) \arrow[d, "T(\phi)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X'). \end{tikzcd}$$

Se ϕ e ψ são isomorfismos então γ também é um isomorfismo.

Demonstração. Como o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \bullet)$ é cohomológico para todo objeto $W \in \mathcal{C}$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Z) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,T(X)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,T(Y)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Z') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,T(X')) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,T(Y'))
\end{array}$$

Agora, como $\mathcal{C}$ é aditiva, os conjuntos Hom são grupos abelianos, logo vale o Lema dos cinco. E já que γ é um isomorfismo se e somente se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,\gamma)$ for um isomorfismo segue o resultado. □

Proposição 2.4.4. *Seja $(\mathcal{C},T)$ uma categoria triangular que admita coprodutos indexados por uma categoria I. Então o funtor translação T comutam com coprodutos indexados por I e o coproduto de triângulos distintos indexados por I é um triangulo distinto.*

Demonstração. Primeiro, notemos que sendo T uma equivalência de categorias existe um isomorfismo $T(\coprod X_i) \simeq \coprod T(X_i)$. Além disso, o produto de triângulos quase distintos é um triangulo quase distinto. De fato, Suponha que exista um triangulo quase distinto $X_i \to Y_i \to Z_i \to T(X_i)$ para cada $i \in I$. Então dado um funtor cohomológico H obtemos uma família de sequências exatas indexadas por $i \in I$

$$H(T^{-1}Z_i) \longrightarrow H(X_i) \longrightarrow H(Y_i) \longrightarrow H(Z_i) \longrightarrow H(TX_i)$$

Como o coproduto dessa família de sequências exatas é uma sequência exata e como $\coprod H(X) = H(\coprod X)$ temos que a seguinte sequência é exata

$$H\big(T^{-1}\coprod Z_i\big) \longrightarrow H\big(\coprod X_i\big) \longrightarrow H\big(\coprod Y_i\big) \longrightarrow H\big(\coprod Z_i\big) \longrightarrow H\big(T\coprod X_i\big)$$

Desse modo, temos que o triângulo $\coprod X_i \longrightarrow \coprod Y_i \longrightarrow \coprod Z_i \longrightarrow T(\coprod X_i)$ é quase distinto.

Agora, pelo axioma $\mathrm{TR}\,4$ no morfismo $\coprod f_i : \coprod X_i \longrightarrow \coprod Y_i$ induz um triangulo distinto $\coprod X_i \longrightarrow \coprod Y_i \longrightarrow M(\coprod f_i) \longrightarrow T(\coprod X_i)$. Pelo axioma $\mathrm{TR}\,4$ as identidades induzem um morfismo de triângulos

$$\begin{array}{ccccccc}
\coprod X_i & \longrightarrow & \coprod Y_i & \longrightarrow & M(\coprod f_i) & \to & T\big(\coprod X_i\big) \\
\downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\
\coprod X_i & \longrightarrow & \coprod Y_i & \longrightarrow & \coprod Z_i & \longrightarrow & T\big(\coprod X_i\big)
\end{array}$$

onde, da Proposição 2.4.3, segue que γ é um isomorfismo, e assim, segue o resultado. □

Corolário 2.4.1. *Sejam $(\mathcal{C},T)$ uma categoria triangular e $X, Y \in \mathcal{C}$. Então os triângulos*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow TX \oplus Y \longrightarrow TX, \qquad X \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow Y \longrightarrow TX$$

são triângulos distintos.

Demonstração. Para o primeiro, basta considerar a soma direta dos triângulos distintos $X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \longrightarrow TX$ e $0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0$. E para o segundo, de $X \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow T_X$ e $0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0$. $\square$

Proposição 2.4.5. *Sejam $(\mathcal{C}, T)$ e $(\mathcal{C}', T')$ categorias triangulares, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ um funtor triangular. Se o funtor $\mathcal{F}$ admite adjunto, à esquerda ou à direita, $\mathcal{G} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$, então $\mathcal{G}$ também é um funtor triangular.*

Demonstração. Vamos assumir que $\mathcal{G}$ é adjunto à direita de $\mathcal{F}$, sendo o caso de funtores adjuntos à esquerda provado por um argumento dual. Como $\mathcal{F}$ é triangular, temos um isomorfismo natural $\mathcal{F}T \simeq T'\mathcal{F}$. Já que T é adjunto à esquerda de T^{-1} temos

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}T, T'\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}(id, T^{-1}\mathcal{G}T'\mathcal{F}) \qquad \mathrm{Hom}(T'\mathcal{F}, \mathcal{F}T) = \mathrm{Hom}(id, \mathcal{G}(T')^{-1}\mathcal{F}T)$$

Assim $T^{-1}\mathcal{G} \simeq (T'\mathcal{F})^{-1}$ e $\mathcal{G}(T')^{-1} = (\mathcal{F}T)^{-1}$ de onde segue que $T^{-1}\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}(T')^{-1}$, e aplicando T à esquerda e T' à direita obtemos $\mathcal{G}T \simeq T'\mathcal{G}$.

Agora, seja $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$ um triangula distinto em $\mathcal{C}'$. Vamos mostrar que a imagem desse triangulo por $\mathcal{G}$ é um triangulo distinto em $\mathcal{C}$. Pelo axioma TR 3 podemos completar $\mathcal{G}X \longrightarrow \mathcal{G}Y$ e obter um triangulo distinto $\mathcal{G}X \longrightarrow \mathcal{G}Y \longrightarrow W \longrightarrow T\mathcal{G}X$ em $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{F}$ é triangular, $\mathcal{F}\mathcal{G}X \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{G}Y \longrightarrow \mathcal{F}W \longrightarrow \mathcal{F}T\mathcal{G}X$ é distinto em $\mathcal{C}'$. Pela naturalidade da counidade $\eta : \mathcal{F}\mathcal{G} \longrightarrow id_{\mathcal{C}'}$ da adjunção entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ obtemos um diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\mathcal{G}X \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X"] & \mathcal{F}\mathcal{G}Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

O que induz pelo TR 4 um morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\mathcal{G}X \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X"'] & \mathcal{F}\mathcal{G}Y \arrow[r] \arrow[d, "\eta_Y"'] & \mathcal{F}W \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & T\mathcal{F}\mathcal{G}X \arrow[d, "T\eta_X"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & TX
\end{tikzcd} \tag{2.36}$$

Então dado um objeto $D \in \mathcal{C}$, vamos considerar seguinte morfismo induzido por γ

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, W) \xrightarrow{\mathcal{F}(\bullet)} \mathrm{Hom}'_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}D, \mathcal{F}W) \xrightarrow{\gamma\circ} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}D, Z).$$

Note que, $\eta_X \circ \mathcal{F}(\bullet)$ é justamente o isomorfismo da adjunção $\mathrm{Hom}(D, \mathcal{G}X) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}D, X)$. Além disso, como pela Proposição 2.4.2 o funtor $\mathrm{Hom}(D, \bullet)$ é um funtor cohomológico, aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \bullet)$ no triângulo 2.36 obtemos o seguinte diagrama de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \mathcal{G}X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \mathcal{G}Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, T\mathcal{G}(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, T\mathcal{G}(Y)) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}D, X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}D, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}D, Z) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}D, T(X)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}D, T(Y))
\end{tikzcd}$$

De onde concluímos, pelo Lema dos 5 (2.4.1), que $\gamma \circ \mathcal{F}(\bullet)$ é um isomorfismo, logo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, W) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \mathcal{G}Z)$, como D foi tomado arbitrariamente, segue que $W = \mathcal{G}Z$. De onde segue o resultado por $\mathrm{TR}\,0$. □

Definição 2.4.13. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e S uma família de morfismos de $\mathcal{C}$. Dizemos que S é um sistema multiplicativo se satisfaz os seguintes axiomas:*

S1: *Para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $id_X \in S$.*

S2: *Para todo par (f, g) de S tal que $g \circ f$ existe, $g \circ f \in S$.*

S3: *Dados dois morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $s : Z \longrightarrow Y$ com $s \in S$, existem $g : W \longrightarrow Z$ e $t : W \longrightarrow X$ com $t \in S$, de modo a formar um diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d, dotted, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

S3′: *Dados dois morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $s : X \longrightarrow Z$ com $s \in S$, existem $g : Z \longrightarrow W$ e $t : Y \longrightarrow W$ com $t \in S$, de modo a formar um diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, dotted, "t"] \\ Z \arrow[r, dotted, "g"] & W \end{tikzcd}$$

S4: *Se $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, as seguintes condições são equivalentes*

a) Existe $(t : Y \longrightarrow Y') \in S$ tal que $t \circ f = t \circ g$.

b) Existe $(s : X' \longrightarrow X) \in S$ tal que $f \circ s = g \circ s$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "s"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "t"] & Y' \end{tikzcd}$$

Definição 2.4.14. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e S um sistema multiplicativo. Para todo objeto X de $\mathcal{C}$ definimos a categoria S_X por*

$$\mathrm{Obj}(S_X) = \{s : X' \longrightarrow X \mid s \in S\}$$

$$\mathrm{Hom}_{S_X}(s' : X' \longrightarrow X, s'' : X'' \longrightarrow X) = \{h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X'') \mid s'' \circ h = s'\}.$$

*Definimos a **localização** de $\mathcal{C}$ por S como a subcategoria $\mathcal{C}_S$ de $\mathcal{C}$ onde*

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}_S) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}).$$

E para todo par X, Y de objetos temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y) = \varinjlim_{(X'\to X)\in S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y).$$

Definimos o ***funtor localização*** $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ *como o funtor associado ao morfismo*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \varinjlim_{(X'\to X)\in S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y)$$

Proposição 2.4.6. *Seja S um sistema multiplicativo. A categoria S_X é uma categoria filtrante.*

Demonstração. a) Como para todo $X \in \mathcal{C}$ por $S1$ temos $id_X \in S$ segue que S_X é não vazia.

b) Dados $s' : X' \longrightarrow X$ e $s'' : X'' \longrightarrow X$ em S_X por S3 existem $h' : Y \longrightarrow X'$ e $h'' : Y \longrightarrow X''$ tal que $s' \circ h' = s'' \circ h''$. Assim, existe um objeto $t : Y \longrightarrow X = s' \circ h' = s'' \circ h' \in S$ tal que h', na categoria S_X, é um morfismo entre s' e t pois $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y)$ com $s' \circ h' = t$ e tal que h'', na categoria S_X, é um morfismo entre s'' e t pois $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y)$ com $s' \circ h' = t$.

c) Dados dois objetos $(s' : X' \longrightarrow X), (s'' : X'' \longrightarrow X) \in S_X$, e dois morfismos paralelos $f, g \in \mathrm{Hom}_{S_X}(s', s'')$. Por definição, temos $f, g : X' \longrightarrow X''$ com $f \circ s' = g \circ s' = s''$. Por S4, existe $t : X'' \longrightarrow Y$ tal que $t \circ f = t \circ g$.

$$\begin{tikzcd} (X', s') \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (X'', s'') \arrow[r, "t"] & (Y, t \circ s'') \end{tikzcd}$$

Além disso, como $t \in s$ temos que o objeto $t \circ s'' \in S_X$ por $S2$. □

Proposição 2.4.7. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e S um sistema multiplicativo em $\mathcal{C}$. Então todo morfismo $s : Y' \longrightarrow Y$ em S induz um isomorfismo $s\circ$ em $\mathcal{C}_S$ para todo objeto Y de $\mathcal{C}$.*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y') \xrightarrow{s\circ} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y)$$

Demonstração. Vamos mostrar primeiro a sobrejetividade e depois a injetividade. Seja (t, f) um morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y)$, como s tem como contradomínio Y, podemos usar o axioma $S3$ para garantir a existência dos morfismos t' e f' fazendo o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d, dotted, "t'"'] & Y' \arrow[d, "s"] \\ X & X' \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Já que o morfismo t' pertence ao sistema multiplicativo S temos que $(t \circ t', f')$ é um morfismo em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X,Y')$ tal que $(t \circ t', f' \circ s) \simeq (t, f)$.

Agora, considere os mapas (t, f) e (t, g) em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y')$ tal que $(t, s \circ f) = (t, s \circ g)$. Então pelo axioma $S4$ temos existe $t' \in S$ tal que $f \circ t' = g \circ t'$

$$
\begin{tikzcd}
X & X' \arrow[l, "t"'] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y' \arrow[r, "s"] & Y \\
 & X'' \arrow[u, dotted, "t'"] & &
\end{tikzcd}
$$

de modo que temos $(t, f) \simeq (t' \circ t, f \circ t') = (t' \circ t, g \circ t') \simeq (t, g)$. $\square$

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e S um sistema multiplicativo. Como consequência da Proposição 2.3.4 podemos visualizar o conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ como

$$\underset{(X' \longrightarrow X) \in S}{\underrightarrow{\mathrm{colim}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) = \coprod_{(X' \longrightarrow X) \in S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) \Big/ \sim$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \{(X', s, f) \mid X' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), s : X' \longrightarrow X, f : X' \longrightarrow Y, s \in S\} / \sim .$$

Onde (X, Y) é um par de objetos em $\mathcal{C}_S$, e onde $\sim$ é a seguinte relação de equivalência

$$(X', s, f) \sim (X'', t, g)$$

Se e somente se existe um diagrama comutativo, com $u \in S$

$$
\begin{tikzcd}
 & X & \\
X' \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & X''' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "u"] & X'' \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}
$$

Definimos a composição de dois morfismos $(X', s, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ e $(Y', t, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(Y, Z)$ usando o axioma S3 para construir o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

Onde $t' \in S$, desse modo, definimos

$$(Y', t, g) \circ (X', s, f) = (X\text{''}, s \circ t', g \circ h) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Z).$$

Assim, o funtor localização Q pode ser expresso por,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C}_S \\ X &\longmapsto X \\ (f : X \longrightarrow Y) &\longmapsto (X, id_X, f) \end{aligned}$$

Denotaremos usualmente o morfismo $(X', f, s) : X \longrightarrow Y$, em $\mathcal{C}_S$, por um diagrama $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$.

Observação 2.4.7. *Pode-se definir a localização de categorias de forma equivalente como o quociente de Verdier. Nos referimos à [18] para uma exposição completa. Para o seguimento do trabalho basta levar em conta a seguinte caracterização: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangular e $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ uma subcategoria. Então existe uma categoria triangular $\mathcal{C}/\mathcal{S}$ e um funtor $\mathcal{Q} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathcal{Q})$, e além disso, $\mathcal{Q}$ é universal com essa propriedade. Ver [18], Teorema 2.1.8, páginas 74,75. Chamamos a categoria $\mathcal{C}/\mathcal{S}$ de Quociente de Verdier de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{S}$.*

Proposição 2.4.8. *Para todo $s \in S$, $\mathcal{Q}(s)$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}_S$. Além disso, se $\mathcal{C}'$ é uma categoria e $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ um funtor tal que $\mathcal{F}(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in S$, então $\mathcal{F}$ se fatora em $\mathcal{Q}$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.4.7 Agora, dado um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ existe o funtor $\mathcal{F}_S$ definido por $\mathcal{F}_S(X) = \mathcal{F}(X)$, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_S) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, e $\mathcal{F}_S(f') : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ para todo morfismo $f = X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f'} Y$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$. Além disso, para todo par $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ temos o morfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) &= \varinjlim_{(X' \longrightarrow X) \in S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y) \\ &\longrightarrow \varinjlim_{(X' \longrightarrow X) \in S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X'), \mathcal{F}(Y)) \simeq \varinjlim_{(X' \longrightarrow X) \in S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)) \end{aligned}$$

□

Definição 2.4.15. *Sejam $(\mathcal{C}, T)$ uma categoria triangular e $\mathcal{N}$ uma subfamília de $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Dizemos que $\mathcal{N}$ é um* ***sistema nulo*** *(null) se satisfaz as seguintes propriedades.*

N1: $0 \in \mathcal{N}$.

N2: $X \in \mathcal{N}$ *se e somente se* $TX \in \mathcal{N}$.

N3: *Se* $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$ *é um triangulo distinto e* $X \in \mathcal{N}$, $Y \in \mathcal{N}$, *então* $Z \in \mathcal{N}$.

Definimos

$$S(\mathcal{N}) = \left\{ f : X \longrightarrow Y \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ é imerso em um triangulo distinto} \\ X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX;\ Z \in \mathcal{N} \end{array} \right\}$$

Teorema 2.4.2. *Se $\mathcal{N}$ é um sistema nulo, então $S(\mathcal{N})$ é um sistema multiplicativo.*

Demonstração. Vamos verificar as propriedades $\mathrm{N1}-\mathrm{N4}$.

$\mathrm{S1}$: Para todo $X \in S(\mathcal{N})$, temos que por $\mathrm{TR}\,1$, id_X induz um triangulo $X \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ discreto, como $\mathrm{N1}$ garante que $0 \in \mathcal{N}$, temos que $id_X \in S(\mathcal{N})$.

$\mathrm{S2}$: Dados $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z \in S(\mathcal{N})$, existem os triângulos

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow TX, \qquad X \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X' \longrightarrow TY$$

onde Z', X'. Por $\mathrm{TR}\,2$, $g \circ f$ pode ser imersa em um triangulo em $\mathcal{C}$

$$X \xrightarrow{g\circ f} Z \longrightarrow Y' \longrightarrow TX$$

Queremos mostrar que $Y' \in \mathcal{N}$ para que $g \circ f \in S(\mathcal{N})$. Por $\mathrm{TR}\,5$ existe o triangulo distinto $Z' \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow TZ'$, por $\mathrm{TR}\,3$ aplicado duas vezes temos que

$$X' \longrightarrow TZ' \longrightarrow TY' \longrightarrow TX'$$

é um triangulo distinto em $\mathcal{C}$. Agora, já que $X, TZ' \in \mathcal{N}$ por $\mathrm{N3}$, $TY' \in \mathcal{N}$ segue de $\mathrm{N2}$ que $Y' \in \mathcal{N}$.

$\mathrm{S3}$: Dados $f : X \longrightarrow Y, s : Z \longrightarrow Y \in S(\mathcal{N})$, existe o triangulo, $Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{k} X' \longrightarrow TZ$ onde $X' \in \mathcal{N}$. A composição $k \circ f$ pode ser imersa em um triangulo do tipo

$$W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{k\circ f} X' \longrightarrow TW$$

Pela propriedade $\mathrm{TR}\,4$, já que $(k \circ f) \circ id_{X'} = k \circ f$, existe o seguinte morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "t"] \arrow[d, dotted, "g"'] & X \arrow[r, "k\circ f"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id_{X'}"] & TW \arrow[d] \\
Z \arrow[r, "s"'] & Y \arrow[r, "k"'] & X' \arrow[r] & TZ
\end{tikzcd}$$

Como $X' \in \mathcal{N}$ temos que $t \in S(\mathcal{N})$.

$\mathrm{S3}'$: Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $s : X \longrightarrow Z$ dois morfismos com $s \in S(\mathcal{N})$. Existe um triangulo distinto $X' \xrightarrow{h} X \xrightarrow{s} Z \longrightarrow TX'$, com $X' \in \mathcal{N}$. Pelo axioma $\mathrm{TR}\,2$, existe um triangulo distinto $X' \xrightarrow{f\circ h} Y \xrightarrow{t} W \longrightarrow TX'$, e por $\mathrm{TR}\,4$ existe um morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "id_{X'}"'] & X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted, "g"] & TX' \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "f\circ h"'] & Y \arrow[r, "t"'] & W \arrow[r] & TX'
\end{tikzcd}$$

Como $X' \in \mathcal{N}$, temos $t \in S(\mathcal{N})$.

S4: Dados morfismos $f, g : X \rightrightarrows Y$ em $\mathcal{C}$. Vamos denotar $h : X \longrightarrow Y$ por $f - g$. Suponhamos que exista $s : X' \longrightarrow X \in S(\mathcal{N})$ tal que $h \circ s = 0$. Se mostrarmos que existe t tal que $t \circ h = 0$ teremos que $f \circ s = g \circ s$ implica $t \circ f = t \circ g$.

Como $s \in S(\mathcal{N})$ existe um triangulo $X' \xrightarrow{s} X \xrightarrow{k} Z \longrightarrow TX'$ com $Z \in \mathcal{N}$. Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Y)$ é um funtor cohomológico e covariante, temos a seguinte sequencia exata:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(k,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y).$$

Isto é, para todo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que $\phi \circ s = 0$, existe $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ tal que $k \circ \psi = 0$. Como já temos que $f \circ s = 0$, segue que existe $h : Z \longrightarrow Y$ tal que $k \circ h = f$. Podemos visualizar a construção no seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "s"] & X \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & TX \\
& & Y \arrow[d, dotted, "t"] & \\
& & Y' &
\end{tikzcd}$$

Pela propriedade $\mathrm{TR}\,2$, h pode ser imersa em um triangulo distinto $Z \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{t} Y' \longrightarrow TZ$. Assim, garantimos a existência de $t : Y \longrightarrow Y'$ tal que $h \circ t = 0$, usando a Proposição 2.4.2. Além disso, como $Z \in \mathcal{N}$ se e somente se $TZ \in \mathcal{N}$ segue que $t \in S(\mathcal{N})$. Para concluir, verificamos que

$$t \circ f = t \circ h \circ k = 0$$

como queríamos. O argumento é similar para a volta. □

Proposição 2.4.9. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangular e $\mathcal{N}$ um sistema nulo.*

1. *$\mathcal{C}_{S(\mathcal{N})}$ é uma categoria triangular, onde os triângulos distintos são triângulos isomorfos aos triângulos distintos em $\mathcal{C}$.*

2. *Denotando por $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{S(\mathcal{N})}$, $Q(X) \simeq 0$ para todo $X \in \mathcal{N}$.*

3. *Dado um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ de categorias triangulares tal que $\mathcal{F}(X) \simeq 0$ para todo $X \in \mathcal{N}$, se fatora unicamente em Q.*

Demonstração. Ver [15], Teorema 10.2.3, página 249. □

Observação 2.4.8. *Seja $\mathcal{N}$ um sistema nulo em $\mathcal{C}$ e $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{S(\mathcal{N})}$. Então $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ satisfaz $Q(X) \simeq 0$ se e somente se existe $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $X \oplus Y \in \mathcal{N}$, ou equivalentemente $X \oplus TX \in \mathcal{N}$.*

Proposição 2.4.10. *Seja $\mathcal{C}'$ uma categoria triangular que admita coproduto indexada por uma categoria pequena I e $\mathcal{N}$ um sistema nulo fechado para soma direta. Então $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ admite coproduto e o funtor localização $\mathcal{Q} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ comuta com tais coprodutos.*

Demonstração. Dado $\{X_i\}$ uma família de objetos em $\mathcal{C}$, vamos mostrar que existe um isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mathcal{N}}\big(\mathcal{Q}(\coprod_{i\in I} X_i), Y\big) \xrightarrow{\varphi} \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mathcal{N}}(\mathcal{Q}(X_i), Y) \overset{(2.24)}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mathcal{N}}\big(\coprod_{i\in I}\mathcal{Q}(X_i), Y\big),$$

onde $\varphi = \Pi(\circ\iota)$, de modo a obtermos $\mathcal{Q}(\coprod X_i) \simeq \coprod \mathcal{Q}(X_i)$.

Para a sobrejetividade, cada morfismo $u_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\mathcal{N}}(\mathcal{Q}(X_i), Y)$ é, por definição, uma classe de equivalência (X_i', s_i, u_i') onde $u_i' : X_i' \longrightarrow Y$ e um s_i pode ser imerso em um triangulo distinto $X_i' \overset{s_i}{\to} X_i \overset{w_i}{\to} Z_i \to TX_i'$. em $\mathcal{C}$ onde $Z_i \in \mathcal{N}$. Assim, obtemos um morfismo $u' : \coprod X_i \longrightarrow Y$ e um triangulo distinto $\coprod X_i' \to \coprod X_i \to \coprod Z_i \to T(\coprod X_i')$ em $\mathcal{C}$ onde $\coprod Z_i \in \mathcal{N}$ pois $\mathcal{N}$ é fechado para coprodutos, de fato, pela Proposição 2.4.4 e por $\mathrm{TR}\,3$ o triangulo $T^{-1}Z \longrightarrow Z \to \coprod Z \to Z$ é um triangulo distinto em $\mathcal{C}$, assim o resultado segue dos axiomas $N2$ e $N3$.

Para mostrar a injetividade, suponhamos que $\varphi(u)_i : \mathcal{Q}(X_i) \longrightarrow \mathcal{Q}(\coprod X_i) \xrightarrow{u} Q(Y)$ é zero para todo $i \in I$ e vamos concluir que $u = 0$. De fato, $\varphi(u)_i$ e u são respectivamente definidos por pares $X_i' \xrightarrow{v_i'} Y' \overset{s}{\leftarrow} Y$ e $\coprod X_i' \xrightarrow{u'} Y' \overset{r}{\leftarrow} Y$ onde $s \in S(\mathcal{N})$. Como $\varphi(u)_i = 0$, pela Observação $2.4.8$, existe $Z_i \in \mathcal{N}$ tal que v_i' se fatora unicamente em $X_i \longrightarrow Z_i \longrightarrow Y$ com $Z_i \in \mathcal{N}$, logo $u_i' : \coprod X_i \longrightarrow Y'$ se fatora unicamente em $\coprod X_i \longrightarrow \coprod Z_i \longrightarrow Y'$ com $\coprod Z_i \in \mathcal{N}$. Concluímos, pela Observação $2.4.8$ que $u = 0$. □

2.5 Teorema da Representabilidade de Brown

Definição 2.5.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria que admite limites filtrantes pequenos. Um objeto $X \in \mathcal{C}$ é dito **compacto**, ou de presentação finita, se para todo diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}$ com I pequena e filtrante tivermos um isomorfismo*

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, \varinjlim \alpha).$$

Definição 2.5.2. *Uma categoria triangular $(\mathcal{C}, T)$ é **compactamente gerada** se $\mathcal{C}$ contem coprodutos pequenos, e existe um conjunto pequeno G de objetos compactos de $\mathcal{C}$ para os quais, dado um objeto $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,*

$$\mathrm{Hom}(G, X) = 0 \;\Rightarrow\; X = 0.$$

*O conjunto G é um conjunto **gerador** se for fechado sobre translação, isto é $G = T(G)$.*

Um funtor $X : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow \mathcal{C}$ pode ser visualizado como uma sequência $X_0 \xrightarrow{d_0} X_1 \xrightarrow{d_1} X_2 \longrightarrow \cdots$ de objetos em $\mathcal{C}$. Tomamos o mapa deslocamento associado a X como $\mathrm{sh}_X : \coprod X_i \longrightarrow \coprod X_i$ definido pela composição

$$\textstyle\coprod_{i\geq 0} X_i \xrightarrow{\amalg d_i} \coprod_{i\geq 0} X_{i+1} \simeq \coprod_{i\geq 1} X_i \hookrightarrow \coprod_{i\geq 0} X_i$$

Assim o mapa $(1 - \mathrm{sh}_X)$ pode ser visualizado como a matriz infinita

$$\begin{pmatrix} 1_{X_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -d_1 & 1_{X_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -d_2 & 1_{X_2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -d_3 & 1_{X_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Definição 2.5.3. *Sejam $(\mathcal{C}, T)$ uma categoria triangular contendo coprodutos pequenos e*

$$X_0 \xrightarrow{d_0} X_1 \xrightarrow{d_1} X_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

uma sequência de objetos e morfismos em $\mathcal{C}$. Definimos o ***colimite homotópico***[2] *dessa sequência, $\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i$, pelo triângulo*

$$\coprod_{i\in\mathbb{Z}} X_i \xrightarrow{1-\mathrm{sh}_X} \coprod_{i\in\mathbb{Z}} X_i \longrightarrow \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i \longrightarrow T\left(\coprod_{i\in\mathbb{Z}} X_i\right) \tag{2.37}$$

Isto é, utilizando o axioma TR 2 *de categorias triangulares, podemos imergir $(1 - \mathrm{sh}_X)$ no triangulo* (2.37) *e assim, obtemos um terceiro objeto em $\mathcal{C}$ o qual tomamos por definição como o colimite homotópico de X.*

Lema 2.5.1. *Sejam Y um objeto compacto de $\mathcal{C}$ e uma sequência de objetos em $\mathcal{C}$*

$$X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_1} X_2 \xrightarrow{j_1} \cdots$$

Se $\mathcal{C}$ admite coprodutos pequenos, então

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \simeq \underrightarrow{\mathrm{colim}}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i).$$

Demonstração. Tomemos o triangulo $\coprod X_i \xrightarrow{1-\mathrm{sh}} \coprod X_i \to \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i \to T(\coprod X_i)$. Então, aplicando o funtor cohomológico $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \bullet)$, obtemos uma sequência exata longa. Em particular a sequência abaixo é exata.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \coprod X_i) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T(\coprod X_i)) \xrightarrow{1-\mathrm{sh}_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T(\coprod X_i)).$$

Além disso, usando o fato de Y ser um objeto compacto, obtemos um diagrama comutativo para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T^n(\coprod X_i)) \arrow[r, "\circ(1-\mathrm{sh}_X)"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T^n(\coprod X_i) \arrow[d, "\wr"] \\ \coprod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T^n X_i) \arrow[r, "\begin{pmatrix} \circ 1 & 0 & \cdots \\ \circ - d_1 & \circ 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}"] & \coprod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, T^n X_i) \end{tikzcd}$$

[2] Para maiores detalhes sobre o conceito de colimite homotópico, ver [22].

Já que o morfismo dado pela matriz é injetivo, temos como consequência a injetividade do morfismo $\circ(1-\mathrm{sh}_X)$. Assim, segue da exatidão da sequência que $\mathrm{Coker}\,\gamma \simeq \mathrm{Im}\,h \simeq \mathrm{Ker}(1-\mathrm{sh}_X) = 0$, isto é, γ é sobrejetora. De modo que a sequencia abaixo é exata.

$$\coprod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) \xrightarrow{1-\mathrm{sh}_X} \coprod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathrm{ho}\varinjlim X_i) \longrightarrow 0$$

Temos, portanto,

$$\begin{aligned}\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) &\simeq \mathrm{Coker}\left(\coprod \mathrm{Hom}(Y, X_i) \underset{\mathrm{sh}_X}{\overset{1}{\rightrightarrows}} \coprod \mathrm{Hom}(Y, X_i)\right) \\ &\simeq \mathrm{Im}\,\gamma = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathrm{ho}\varinjlim X_i).\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.5.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria triangular compactamente gerada e $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ um funtor cohomológico. Se H respeita coprodutos, isto é, o morfismo natural*

$$H\left(\coprod_{i\in I} X_i\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} H(X_i)$$

é um isomorfismo para todo produto e coproduto pequenos em $\mathcal{C}$, então H é representável.

Lema 2.5.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangular gerada por um conjunto G e $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ um funtor cohomológico que respeita coprodutos. Então existe uma sequência de morfismos em $\mathcal{C}$*

$$X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots$$

Tal que para todo $i \geq 0$ o seguinte diagrama comuta em $\mathcal{C}^\wedge$ onde $h_{\mathcal{C}}(X_0) \longrightarrow h_{\mathcal{C}}(X_1)$ é sobrejetiva.

$$\begin{tikzcd}
& & & H & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bullet, X_0) \arrow[urr] \arrow[r, dotted] & \mathrm{Hom}(\bullet, X_i) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}(\bullet, X_{i+1}) \arrow[ul] \arrow[r, dotted] & {}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Vamos construir a sequência X_i indutivamente. Seja G o conjunto gerador de $\mathcal{C}$, tomamos o conjunto $U_0 = \bigcup_{Y\in G} H(Y)$. Note que podemos escrever este conjunto como

$$U_0 = \{(\alpha, Y) \mid \alpha \in H(Y),\ Y \in G\}.$$

De modo que, definindo

$$X_0 = \coprod_{(\alpha,Y)\in U_0} Y \qquad \text{temos} \qquad H(X_0) = H\left(\coprod_{(\alpha,Y)\in U_0} Y\right) = \prod_{(\alpha,Y)\in U_0} H(Y).$$

Existe um objeto $\alpha_0 \in H(X_0)$. Seja $\psi(\alpha_0) : \mathrm{Hom}(\bullet, X_0) \longrightarrow H$ a transformação natural associada à α_0 pelo Lema de Yoneda. Notemos que para todo $Y \in G$ o morfismo $\psi(\alpha_0)(Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_0) \longrightarrow H(Y)$ é sobrejetivo, pois dado $\alpha \in H(Y)$ temos associado um par $(\alpha, Y) \in U_0$. Essa inclusão, por sua vez, induz a coprojeção $\iota_Y : Y \longrightarrow X_0$ de modo que aplicando o funtor H obtemos uma projeção $H(\iota_Y) : H(X_0) \longrightarrow H(Y)$ que leva α_0 em α. De onde segue que $\psi(\alpha_0)(\iota_Y) = H(\iota_Y)(\alpha_0) = \alpha$.

Agora, suponha que para um dado $i \geq 0$ temos definidos um objeto X_i de $\mathcal{C}$ e uma transformação natural $\psi(\alpha_i) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X_i) \longrightarrow H$. Então tomamos

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= \bigcup_{Y \in G} \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) \longrightarrow H(Y)\right) = \bigcup_{Y \in G} \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i) \mid \psi(\alpha_i)(f) = 0\} \\ &= \{(f, Y) \mid Y \in G,\ \psi(\alpha_i)_Y(f) = 0\} \end{aligned}$$

Seja $K_{i+1} = \coprod_{(f,Y) \in U_{i+1}} Y$. A família $(f : Y \longrightarrow X_i)_Y$ define, pela propriedade universal do coproduto, o mapa $\kappa : K_{i+1} \longrightarrow X_i$ tal que $\kappa \circ \iota_Y = f$. Assim, utilizando o axioma TR 2, κ pode ser imerso no triangulo

$$K_{i+1} \xrightarrow{\kappa} X_i \xrightarrow{d_i} X_{i+1} \longrightarrow TK_{i+1} \tag{2.38}$$

de onde, consequentemente, obtemos o objeto $X_{i+1} \in \mathcal{C}$. Aplicando o funtor cohomológico H temos a seguinte sequência exata

$$H(X_{i+1}) \xrightarrow{H(d_i)} H(X_i) \xrightarrow{H(\kappa)} H(K_{i+1}) = \textstyle\prod_{(f,Y) \in U_{i+1}} H(Y) \tag{2.39}$$

Dado $\alpha_i \in H(X_i)$ o objeto correspondente à transformação natural $\psi(\alpha_i)$ pelo Lema de Yoneda, então o mapa $H(\kappa)(\alpha_i) = \psi(\alpha_i)(\kappa) = (\psi(\alpha_i)_Y(f))_Y = 0$. Isto é, $\alpha_i \in \mathrm{Ker}(H(\kappa))$, logo, pela exatidão da sequência (2.39), existe $\alpha_{i+1} \in H(X_{i+1})$ tal que $H(d_i)(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$. Novamente, pelo Lema de Yoneda, existe a transformação natural $\psi(\alpha_{i+1}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, X_{i+1}) \longrightarrow H$ correspondente ao elemento α_{i+1} e, além disso, para todo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X_i)$ temos $\psi(\alpha_i)(g) = H(g)(\alpha_i) = H(g)(H(d_i)(\alpha_{i+1})) = H(d_i \circ g)(\alpha_{i+1}) = \psi(\alpha_{i+1})(d_i \circ g)$ de onde obtemos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} & H & \\ \mathrm{Hom}(\bullet, X_i) \arrow[ur, "\psi(\alpha_i)"] \arrow[rr, "d_i \circ"] & & \mathrm{Hom}(\bullet, X_{i+1}). \arrow[ul, "\psi(\alpha_{i+1})"'] \end{tikzcd}$$

□

Lema 2.5.3. *Sejam $\mathcal{C}$ e H satisfazendo as hipóteses do Lema 2.5.2 acima. Então existe uma transformação natural* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \longrightarrow H$ *fazendo o seguinte diagrama comutar para cada* $i \geq 0$.

$$\begin{tikzcd} & H & \\ \mathrm{Hom}(\bullet, X_i) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}(\bullet, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{2.40}$$

Mais ainda, a restrição da transformação natural $\mathrm{Hom}(\bullet, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \longrightarrow H$ *ao conjunto de geradores* G *é um isomorfismo.*

Demonstração. Tomando o triangulo $\coprod X_i \xrightarrow{1-\mathrm{sh}} \coprod X_i \xrightarrow{\gamma} \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i \longrightarrow T(\coprod X_i)$ e aplicando o funtor cohomológico H, obtemos a seguinte sequência exata

$$H(\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \xrightarrow{H(\gamma)} \prod_i H(X_i) \xrightarrow{H(1-\mathrm{sh}_X)} \prod_i H(X_i) \tag{2.41}$$

Então tomando $(\alpha_i)_i \in \prod H(X_i)$ como definido na demonstração do Lema 2.5.2 temos

$$\big(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots\big) \cdot \begin{pmatrix} 1_{X_0} & 0 & 0 & \cdots \\ -H(d_0) & 1_{X_1} & 0 & \cdots \\ 0 & -H(d_1) & 1_{X_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 - H(d_0)(\alpha_1) \\ \vdots \\ \alpha_i - H(d_i)(\alpha_{i+1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Isto é, $H(1-\mathrm{sh}_X)((\alpha_i)_i) = 0$. De modo que, existe $\alpha \in H(\underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i)$ tal que $H(\gamma)(\alpha) = (\alpha_i)_i$. Então tomamos a transformação natural correspondente ao elemento α pelo Lema de Yoneda, $\psi(\alpha) : \mathrm{Hom}(\bullet, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \longrightarrow H$. E segue que $\psi((\alpha_i)_i) = \psi(\alpha)(\gamma\circ)$ ou ainda $\psi(\alpha_i) = \psi(\alpha)(\gamma_i\circ)$, o que garante a comutatividade do diagrama (2.40).

Resta mostrar que para todo $Y \in G$, $\psi(\alpha)_Y$ é um isomorfismo. Pelo Lema 2.5.2, temos que $\psi(\alpha_0)_Y$ é sobrejetiva e, já que, $\psi(\alpha_0)_Y = \psi(\alpha)_Y(\gamma_0\circ)$ temos que $\psi(\alpha)_Y$ é sobrejetiva. Para mostrar a injetividade, vamos usar o Lema 2.5.1 e aplicar a propriedade universal do colimite, de modo que, para todo $Y \in G$ obtemos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Y, X_i) \arrow[dr, "\gamma_i\circ"] \arrow[dd, "d_i\circ"'] \arrow[drr, bend left, "\psi(\alpha_i)_Y"] & & \\ & \mathrm{Hom}(Y, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \arrow[r, dotted, "\psi(\alpha)_Y"] & H(Y) \\ \mathrm{Hom}(Y, X_{i+1}) \arrow[ur, "\gamma_{i+1}\circ"'] \arrow[urr, bend right, "\psi(\alpha_{i+1})_Y"'] & & \end{tikzcd} \tag{2.42}$$

Então, dado $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(Y, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \longrightarrow H(Y))$ existe uma família $(f_i)_i$ tal que para todo i, $f = \gamma_i \circ f_i \in \mathrm{Ker}(\psi(\alpha))$, ou seja, $\psi(\alpha_i)_Y(f_i) = 0$. Logo, para todo i, $(f_i, Y) \in U_{i+1}$. Pela construção de K_{i+1}, $(f_i : Y \longrightarrow X_i)_Y$ define o mapa κ tal que $\kappa \circ \iota_Y = f_i$. Além disso κ define o triangulo $K_{i+1} \xrightarrow{\kappa} X_i \xrightarrow{d_i} X_{i+1} \to TK_{i+1}$. De forma que $d_i \circ f_i = (d_i \circ \kappa) \circ \iota_Y = 0$. Agora, voltando ao diagrama (2.42), concluímos que $f = \gamma_i \circ f_i = \gamma_{i+1} \circ d_i \circ f_i = 0$, isto é, $\psi(\alpha)_Y$ é um isomorfismo. □

Lema 2.5.4. *Seja* $\mathrm{S} \subset \mathcal{C}$ *uma subcategoria plena contendo o conjunto de geradores* G *e fechada para triângulos e coprodutos de seus objetos. Então* $\mathrm{S} = \mathcal{C}$.

Demonstração. Notemos que o funtor $\mathrm{S} \hookrightarrow \mathcal{C}$ é plenamente fiel, assim resta mostra que também é essencialmente sobrejetivo. Nesse sentido, seja dado $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, tomamos

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Z)$ como um funtor cohomológico em S. Pelos isomorfismos (2.24), $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Z)$ respeita coprodutos. Assim, usando o Lema 2.5.3 existe um objeto X em S tal que a transformação natural $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\bullet, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, Z)$ fornece um isomorfismo quando aplicada a todo elemento de G.

Por outro lado, utilizando o Lema de Yoneda, obtemos o morfismo $\varphi_X(id_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, que pode ser imerso no triangulo

$$X \xrightarrow{\varphi_X(id_X)} Z \longrightarrow W \longrightarrow TX$$

Ao aplicarmos o funtor cohomológico $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \bullet)$ onde $Y \in G$ obtemos a sequência exata

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \xrightarrow{\varphi_Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W).$$

Mas, como vimos acima, φ_Y é um isomorfismo, logo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) = 0$. Pela definição de gerador segue que $W = 0$. Assim concluímos que existe um isomorfismo $X \xrightarrow{\sim} Z$ em $\mathcal{C}$. □

Prova do Teorema 2.5.1: Seja S a subcategoria de $\mathcal{C}$ definida como os objetos de $Y \in \mathcal{C}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe um isomorfismo

$$\psi(\alpha) : \mathrm{Hom}_S(T^nY, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \xrightarrow{\sim} H(T^nY)$$

Onde $\{X_i\}$ é a sequencia construída no Lema $2.5.2$. Temos que, $G \subseteq \mathrm{Obj}(S)$ pelo Lema $2.5.3$. Além disso S é uma categoria plena pois dados $X, Z \in \mathrm{Obj}(\mathrm{S})$ temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) &= \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(H(X), H(Z)) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ab}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(X, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i), \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(Z, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(X, Z).\end{aligned}$$

Assim, como S é plena e claramente fechada para translação, isto é, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathrm{S})$ implica $TY \in \mathrm{Obj}(\mathrm{S})$ temos, pelo Lema 2.4.1, que S é fechada para triângulos de seus elementos. Do mesmo modo vemos que S é fechada para coprodutos, pois dado uma família pequena $\{Y_j\} \subset \mathrm{Obj}(\mathrm{S})$ temos

$$H\left(\coprod_j Y_j\right) \simeq \prod_j H(Y_j) \simeq \prod_j \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(Y_j, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}\left(\coprod_j Y_j, \underrightarrow{\mathrm{hocolim}}\, X_i\right).$$

Portanto, usando o Lema $2.5.4$, concluímos que S é equivalente à $\mathcal{C}$, e assim, que o funtor H é representável. □

Teorema 2.5.2. *Sejam $(\mathcal{C}, T)$ uma categoria triangular compactamente gerada que admite coprodutos pequenos e $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ um funtor triangular que respeita coprodutos. Então $\mathcal{C}$ admite produtos pequenos e $\mathcal{F}$ admite adjunto a direita $\mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ é um funtor triangular.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{C}$ admite produtos pequenos, seja dado uma família pequena $\{X_i\}$ de objetos em $\mathcal{C}$. Basta notar que o funtor que define o produto

$$Z \longmapsto \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X_i) = \prod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X_i)$$

é um funtor cohomológico que respeita coprodutos pelo isomorfismo (2.24), e portanto, pelo Teorema 2.5.1, é representável. Para a segunda parte, basta notar o mesmo para o funtor

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), Y) \tag{2.43}$$

com $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}')$. O funtor é cohomológico, pois $\mathcal{F}$ é triangular e Hom é cohomológico, e respeita coprodutos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}\left(\mathcal{F}\Big(\coprod_i X_i\Big), Y\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}\left(\coprod_i \mathcal{F}(X_i), Y\right) \simeq \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}\left(\mathcal{F}(X_i), Y\right).$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 2.5.1 para concluir que o funtor (2.43) é representável. Portanto, pelo Teorema 2.2.2 concluímos que $\mathcal{F}$ admite adjunto a direta que é triangular pela Proposição 2.4.5. □

Teorema 2.5.3. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria triangular compactamente gerada, G um conjunto de gerador para $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ uma categoria triangular arbitraria que admita colimites indexados por I. Sejam ainda, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ um funtor triangular que comuta com colimites e $\mathcal{G} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ seu adjunto à direita cuja existência é garantida pelo Teorema 2.5.2. Então $\mathcal{G} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ comuta com colimites se, e somente se, para todo $X \in G$, $\mathcal{F}(X)$ é um objeto compacto de $\mathcal{C}'$.*

Demonstração. Se $\mathcal{G}$ preserva coprodutos, então dado $X \in G$ temos para todo diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}'$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}\big(\mathcal{F}(X), \varinjlim \alpha\big) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, \mathcal{G}\big(\varinjlim \alpha\big)\big) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, \varinjlim \mathcal{G}(\alpha)\big) \overset{(1)}{\simeq} \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(\alpha)) \\
&\simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}(X), \alpha).
\end{aligned}$$

Onde (1) usamos o fato de X ser compacto. Assim, temos $\mathcal{F}(X)$ compacto em $\mathcal{C}'$. Reciprocamente, suponhamos que para todo $X \in G$, $\mathcal{F}(X)$ é compacto em $\mathcal{C}'$. Então, para todo diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{C}'$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, \mathcal{G}\big(\varinjlim \alpha\big)\big) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}\big(\mathcal{F}(X), \varinjlim \alpha\big) \\
&\overset{(2)}{\simeq} \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \alpha) \simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}(\alpha)) \\
&\overset{(3)}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, \varinjlim \mathcal{G}(\alpha)\big).
\end{aligned}$$

Onde, em (2) segue da hipótese de $\mathcal{F}(X)$ ser compacto em $\mathcal{C}'$ e (3) de X ser compacto em $\mathcal{C}$. Agora, consideramos o triangulo distinto em $\mathcal{C}$ definido, através de $\mathrm{TR}\,2$, pelo mapa $\varphi : \varinjlim \mathcal{G}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{G}\big(\varinjlim \alpha\big)$.

$$\varinjlim \mathcal{G}(\alpha) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}\big(\varinjlim \alpha\big) \longrightarrow Z \longrightarrow T\big(\varinjlim \mathcal{G}(\alpha)\big) \tag{2.44}$$

Aplicando o funtor cohomológico $\mathrm{Hom}(X, \bullet)$, onde $X \in G$ é um gerador de $\mathcal{C}$, no triangulo (2.44) temos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) = 0$ pois, pelo observado acima, a pós-composição $(\varphi\circ)$ é um isomorfismo sempre que $X \in G$. Portanto, já que G é um conjunto gerador para $\mathcal{C}$, devemos ter $Z = 0$ ou seja, φ é um isomorfismo e $\mathcal{G}$ respeita colimites. $\square$

3 Categorias Derivadas em Geometria Algébrica

3.1 Categorias de Complexos

Definição 3.1.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Um* ***Complexo*** *em $\mathcal{C}$ consiste da família de pares $(X^n, d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$:*

$$X^n \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), \ \ d_X^n \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, X^{n+1}) \ \ ; \ \ d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0. \tag{3.1}$$

Ou seja, um complexo X pode ser entendido como uma sequência

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow[d_X^{n-1}]{} X^n \xrightarrow[d_X^n]{} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

A família $d_X = (d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é chamada de ***diferenciais*** *do complexo X. Um complexo X é* ***limitado*** *se $X^n = 0$ para $|n|$ suficientemente grande. Denotamos por $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ a categoria de complexos de $\mathcal{C}$. Um morfismo f de um complexo X para um complexo Y é um sequencia $(f^n : X^n \longrightarrow Y^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tal que para todo n*

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n. \tag{3.2}$$

Definição 3.1.2. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e k um número inteiro. Definimos o funtor $[k] : \mathsf{C}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{C})$ chamado* ***funtor deslocamento*** *de grau k associando à cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}(\mathcal{C}))$ o complexo $X[k] \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}(\mathcal{C}))$ definido do seguinte modo*

$$\left(X[k]^n, d_{X[k]}^n\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(X^{n+k}, (-1)^k d_X^{n+k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Dado um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$ definimos $f[k] : X[k] \longrightarrow Y[k]$ como $f[k]^n = f^{n+k}$.

Note que, para todo n inteiro, $X[k]^n = X^{n+k} = X[k+n]$. Além disso, o funtor deslocamento é uma equivalência de categorias, de modo que podemos considerar $[1]$ uma translação e $(\mathsf{C}(\mathcal{C}), [1])$ uma categoria aditiva com translação.

Definição 3.1.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ é chamado* ***homotópico a zero*** *se para todo n existe um morfismo $s^n : X^n \longrightarrow Y^{n-1}$ em $\mathcal{C}$ tal que ,*

$$f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n.$$

Dizemos que f é ***homotópico*** *a g se $f - g$ é homotópico a zero. Denotamos por $\mathrm{Ht}(X, Y)$ o subgrupo de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$ formado por todos os morfismos homotópicos a zero.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, dotted, "d_X^n"] \arrow[d, dashed, "f^n"] \arrow[dl, dotted, "s^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] \arrow[dl, dotted, "s^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, dotted, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definimos a categoria $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *como*

$$\mathrm{Obj}(\mathsf{K}(\mathcal{C})) = \mathrm{Obj}(\mathsf{C}(\mathcal{C})), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X,Y)/\,\mathrm{Ht}(X,Y).$$

Dizemos que os objetos X *e* Y *são* ***homotopicamente equivalentes*** *se existe um morfismo* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X,Y)$ *tal que* f *é um isomorfismo em* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *entre* X *e* Y*. Nesse caso* f *é chamado de* ***equivalência homotópica****.*

Proposição 3.1.1. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria abeliana e* $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ *um morfismo em* $\mathsf{C}^+(\mathcal{C})$*. Se* $I^\bullet$ *é um objeto injetivo em* $\mathsf{C}^+(\mathcal{C})$ *e o complexo* $X^\bullet$ *é exato, então* $f^\bullet$ *é homotópico à* 0*.*

Demonstração. Queremos mostrar que para todo n existe $s^n : X^n \longrightarrow I^{n-1}$ tal que

$$f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_I^{n-1} \circ s^n. \tag{3.3}$$

Para $n << 0$ assumimos $s^n = 0$. Então, assumindo por indução que existe s^n satisfazendo (3.3) para todo $n < a$, logo

$$\begin{aligned} f^a \circ d_X^{a-1} &= d_I^{a-1} \circ f^{a-1} = d_I^{a-1} \circ (s^a \circ d_X^{a-1} + d_I^{a-2} \circ s^a) \\ &= d_I^{a-1} \circ s^a \circ d_X^{a-1} \end{aligned}$$

Assim, definindo $g^a = f^a - d_I^{a-1} \circ s^a : X^a \longrightarrow I^a$ temos

$$g^a \circ d_X a - 1 = f^a \circ d_X^{a-1} - d_I^{a-1} \circ s^a \circ d_X^{a-1} = 0$$

de modo que g^a se fatora unicamente através de $\mathrm{Coker}\, d_X^{a-1}$ e como $X^\bullet$ é exato a sequência $0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_X^{a-1} \xrightarrow{d_X^a} X^{a+1}$ é exata, usando a Proposição 2.4.1 temos que existe um morfismo s^{a+1} fazendo o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, d_X^{a-1} \arrow[r, "d_X^a"] \arrow[d, "g^a"'] & X^{a+1} \arrow[dl, dotted, "s^{a+1}"] \\ & I^a & \end{tikzcd}$$

Assim, $s^{a+1} \circ d_X^a = f^a - d_I^{a-1} \circ s^a$ ou seja $f^a = s^{a+1} \circ d_X^a + d_I^{a-1} \circ s^a$ e o resultado é valido para $n = a$. □

Definição 3.1.4. *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria aditiva, e* $f : X \longrightarrow Y$ *um morfismo em* $\mathsf{C}(\mathcal{C})$*. Definimos o* ***cone de mapeamento*** *de* f *como o complexo* $M(f) = X[1] \oplus Y$ *em* $\mathsf{C}(\mathcal{C})$*. Assim, para todo* n*,*

$$M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \quad d_{M(f)}^n = \begin{pmatrix} -d_X^n[1] & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}.$$

Onde $d_{X[1]}^n = -d_X^{n+1}$*. Definimos o morfismo* $\alpha(f) : Y \longrightarrow M(f)$ *e* $\beta(f) : M(f) \longrightarrow X[1]$

$$\alpha(f)^n = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{pmatrix} \qquad \beta(f)^n = (id_{X^{n+1}} \quad 0).$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & X^{n+1} \arrow[rr, dotted, "d_X^{n+1}"] \arrow[dd, dotted, "f^{n+1}"'] & & X^{n+2} \\
& M(f)^n \arrow[ur, "\beta(f)^n"] \arrow[rr, dashed, "d^n_{M(f)}"] & & M(f)^{n+1} \arrow[ur, "\beta(f)^{n+1}"'] & \\
Y^n \arrow[ur, "\alpha(f)^n"] \arrow[rr, dotted, "d_Y^n"] & & Y^{n+1} \arrow[ur, "\alpha(f)^{n+1}"'] \arrow[rr] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definição 3.1.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Definimos um **triangulo** em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ como uma sequencia*

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

e um morfismo de triângulos como o seguinte diagrama comutativo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "\phi[1]"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

*Um triangulo $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ é um **triangulo distinto** se é isomorfo a um triangulo do tipo*

$$X' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X'[1]$$

Para algum f em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$.

Teorema 3.1.1. *Dado uma categoria aditiva $\mathcal{C}$, a categoria com translação $(\mathsf{K}(\mathcal{C}), [1])$ munida da família de triângulos distintos na Definição 3.1.5 é uma categoria triangular.*

Demonstração. A verificação dos axiomas $\mathrm{TR}\,0$ e $\mathrm{TR}\,2$ segue diretamente da definição. O axioma $\mathrm{TR}\,1$ segue de $\mathrm{TR}\,3$, pois dado $X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{K}(\mathcal{C}))$ o seguinte triangulo é distinto

$$0 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ id_X \end{pmatrix}} M(i) \longrightarrow 0[1]$$

onde i é a inclusão e $M(i) = 0[1] \oplus X = X$. Logo, aplicando $\mathrm{TR}\,3$ segue que

$$X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

é distinto.

$(\mathrm{TR}\,3)$. Seja $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ um triangulo distinto. Afim de verificar que $Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ é distinto devemos mostrar que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$ existe $\varphi : X[1] \longrightarrow M(\alpha(f))$ tal que φ induz um isomorfismo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "id_Y"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "id_{M(f)}"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\varphi"] & Y[1] \arrow[d, "id_{Y[1]}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha(f)"'] & M(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"'] & M(\alpha(f)) \arrow[r, "\alpha(\beta(f))"'] & Y[1]
\end{tikzcd}$$

Nesse sentido definimos os morfismos

$$\varphi : X[1] \longrightarrow M(\alpha(f)) = Y[1] \oplus X[1] \oplus Y, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} -f[1] \\ id_{X[1]} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi : M(\alpha(f)) = Y[1] \oplus X[1] \oplus Y \longrightarrow X[1], \qquad \psi = \big(0, id_{X[1]}, 0\big)$$

Assim, para concluir que φ é um isomorfismo de triângulos devemos verificar que

(i) φ e ψ são morfismos de complexos. De fato, temos

$$\begin{aligned}
d_{M(\alpha(f))} \circ \varphi &= \begin{pmatrix} -d_Y[1] & 0 \\ \alpha(f)[1] & d_{M(f)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f[1] \\ id_{X[1]} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_Y[1] & 0 & 0 \\ 0[1] & -d_X[1] & 0 \\ id_Y & f[1] & d_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f[1] \\ id_{X[1]} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (d_Y \circ f)[1] \\ -d_X[1] \\ f[1] - f[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f[1] \circ d_X)[1] \\ (id_{X[1]} \circ -d_X)[1] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f[1][1] \\ id_{X[1]}[1] \\ 0 \end{pmatrix} \circ -d_X[1] \\
&= \varphi[1] \circ d_{X[1]}.
\end{aligned}$$

Verifica-se, analogamente, que $d_{X[1]} \circ \psi = d_{M(\alpha(f))} \circ \psi[1]$.

(ii) O morfismo φ é um isomorfismo. Temos $\psi \circ \varphi = \big(0, id_{X[1]} \circ id_{X[1]}, 0\big)$. Para mostrar que $\varphi \circ \psi = id_{M(\alpha(f))}$ vamos mostrar que os morfismos são homotópicos na categoria $\mathsf{C}(\mathcal{C})$. De fato, definindo

$$s : M(\alpha(f)) \longrightarrow M(\alpha(f))[-1] \qquad s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_Y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 0 & -f[1] & 0 \\ 0 & id_{X[1]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad id_{M(\alpha(f))} - \varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} id_{Y[1]} & f[1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_Y \end{pmatrix}$$

e

$$s[1] \circ d_{M(\alpha(f))} = \begin{pmatrix} id_{Y[1]} & f[1] & d_Y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d_{M(\alpha(f))}[-1] \circ s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_Y[1][-1] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & id_{Y[1]}[-1] \end{pmatrix}$$

De onde segue que $id_{M(\alpha(f))} - \varphi \circ \psi = s[1] \circ d_{M(\alpha(f))} + d_{M(\alpha(f))}[-1] \circ s$.

(TR 4) Dado um diagrama comutativa na categoria $\mathsf{K}(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$$

Desse modo, $v \circ f - g \circ u$ é homotópico à zero em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ e, por definição, existe um morfismo $s : X \longrightarrow Y[-1]$ tal que

$$v \circ f - g \circ u = s[1] \circ d_X + d_{Y'}[-1] \circ s.$$

Então definimos o seguinte morfismo de complexos

$$w : M(f) = X[1] \oplus Y \longrightarrow M(g) = X'[1] \oplus Y' \quad w = \begin{pmatrix} u[1] & 0 \\ s[1] & v \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} d_{M(g)} \circ w &= \begin{pmatrix} d_{X'[1]} & 0 \\ g[1] & d_{Y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u[1] & 0 \\ s[1] & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{X'[1]} \circ u[1] & 0 \\ g[1] \circ u[1] + d_{Y'} \circ s[1] & d_{Y'} \circ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u[2] \circ d_{X[1]} & 0 \\ s[2] \circ d_{X[1]} + v[1] \circ f[2] & v[1] \circ d_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u[2] & 0 \\ s[2] & v[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{X[1]} & 0 \\ f[1] & d_Y \end{pmatrix} \\ &= w[1] \circ d_{M(f)}. \end{aligned}$$

Além disso, verificamos que w é um morfismo de triângulos.

$$w \circ \alpha(f) = \begin{pmatrix} u[1] & 0 \\ s[1] & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ id_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ id'_Y \end{pmatrix} v = \alpha(g) \circ v$$

$$\beta(g) \circ w = (id_{X'[1]}, 0) \begin{pmatrix} u[1] & 0 \\ s[1] & v \end{pmatrix} = (id_{X'[1]} \circ u[1], 0) = u[1](id_{X[1]}, 0) = u[1] \circ \beta(f).$$

Assim, temos um diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "v"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "w"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y' \arrow[r, "\alpha(g)"'] & M(g) \arrow[r, "\beta(g)"'] & X'[1]. \end{tikzcd}$$

(TR 5) Sejam dados os triângulos distintos

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\alpha(g)} M(g) \xrightarrow{\beta(g)} Y[1]$$

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{\alpha(g \circ f)} M(g \circ f) \xrightarrow{\beta(g \circ f)} X[1]$$

Então definimos o triangulo $T: \; M(f) \xrightarrow{u} M(g \circ f) \xrightarrow{v} M(g) \xrightarrow{w} M(f)[1]$ onde

$$u : X[1] \oplus Y \longrightarrow X[1] \oplus Z, \qquad u = \begin{pmatrix} id_{X[1]} & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

$$v : X[1] \oplus Z \longrightarrow Y[1] \oplus Z, \qquad v = \begin{pmatrix} f[1] & 0 \\ 0 & id_Z \end{pmatrix}$$

$$w : Y[1] \oplus Z \longrightarrow Y[1] \longrightarrow X[2] \oplus Y[1] \qquad w = \alpha(f)[1] \circ \beta(g)$$

A verificação de que o diagrama (2.35) comuta é imediata. Assim, resta mostrar que o triangulo T definido por u, v e w é um triangulo distinto. Isto é, deve existir um isomorfismo entre o triangulo T e um triangulo distinto. O candidato óbvio é o triangulo definido por u.

$$\begin{tikzcd} M(f) \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & M(g \circ f) \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & M(g) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\varphi"] & M(f)[1] \arrow[d, equal] \\ M(f) \arrow[r, "u"] & M(g \circ f) \arrow[r, "\alpha(u)"] & M(u) \arrow[r, "\beta(u)"] & M(f)[1]. \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Onde $M(u) = M(f)[1] \oplus M(g) = X[2] \oplus Y[1] \oplus X[1] \oplus Z$. Nesse sentido, definimos φ e sua inversa ψ como

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y[1]} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_Z \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 0 & id_{Y[1]} & f[1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z \end{pmatrix}$$

Verificamos que ψ é um morfismo de complexos.

$$\begin{aligned} \psi[1] \circ d_{M(u)} &= \begin{pmatrix} 0 & id_{Y[1]}[1] & f[2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{X[1]}[1] & 0 & 0 & 0 \\ -f[2] & -d_Y[1] & 0 & 0 \\ id_{X[2]} & 0 & d_{X[1]} & 0 \\ 0 & g[1] & (g \circ f)[1] & d_Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -id_{Y[1]}[1] \circ f[2] + f[2] \circ id_{X[1]}[1] & id_{Y[1]}[1] \circ d_{Y[1]} & f[2] \circ d_{X[1]} & 0 \\ 0 & id_{Z[1]} \circ g[1] & id_{Z[1]} \circ (g \circ f)[1] & id_{Z[1]} \circ d_Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & d_{Y[1]} \circ id_{Y[1]} & d_{Y[1]} \circ f[1] & 0 \\ 0 & g[1] \circ id_{Y[1]} & g[1] \circ f[1] & d_Z \circ id_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{Y[1]} & 0 \\ g[1] & d_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & id_{Y[1]} & f[1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z \end{pmatrix} \\ &= d_{M(g)} \circ \psi. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, pode-se verificar que φ é um morfismo de complexos. É imediato que o diagrama (3.4) é um triangulo, isto é, $\psi \circ \alpha(u) = v$, $\beta(u) \circ \varphi = w$. Assim como é imediato que $\psi \circ \varphi = id_{M(g)}$. Para mostrar que $\varphi \circ \psi = id_{M(u)}$ vamos mostrar que esses morfismos são homotópicos na categoria $\mathsf{C}(\mathcal{C})$. Definimos o morfismo

$$s : M(u) \longrightarrow M(u)[-1], \qquad s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{X[1]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim temos que

$s[1] \circ d_{M(u)} + d_{M(u)}[-1] \circ s =$

$$= s[1] \begin{pmatrix} -d_{X[1]}[1] & 0 & 0 & 0 \\ -f[2] & -d_Y[1] & 0 & 0 \\ id_{X[2]} & 0 & d_{X[1]} & 0 \\ 0 & g[1] & (g \circ f)[1] & d_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_{X[1]} & 0 & 0 & 0 \\ -f[1] & -d_Y & 0 & 0 \\ id_{X[1]} & 0 & d_{X[1]}[-1] & 0 \\ 0 & g & (g \circ f) & d_Z[-1] \end{pmatrix} s$$

$$= \begin{pmatrix} id_{X[2]} \circ id_{X[2]} & 0 & id_{X[2]} \circ d_{X[1]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -d_{X[1]} \circ id_{X[1]} & 0 \\ 0 & 0 & -f[1] \circ id_{X[1]} & 0 \\ 0 & 0 & id_{X[1]} \circ id_{X[1]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} id_{X[2]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & id_{Y[1]} - id_{Y[1]} & -id_{Y[1]} \circ f[1] & 0 \\ 0 & 0 & id_{X[1]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_Z - id_Z \end{pmatrix} = id_{M(u)} - \varphi \circ \psi$$

O que conclui a prova. □

Para definir a cohomologia de um complexo, precisamos admitir uma estrutura a mais para a categoria $\mathcal{C}$. Nesse sentido, dizemos que uma categoria $(\mathcal{C}, T)$ é uma categoria abeliana com translação se $(\mathcal{C}, T)$ é uma categoria aditiva com translação e, além disso, $\mathcal{C}$ é abeliana. Como consequência, temos que $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ e, portanto, $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ são categorias abelianas. Assim, definimos

Definição 3.1.6. *Sejam* $(\mathsf{C}(\mathcal{C}), [1])$ *uma categoria de complexos, de uma categoria abeliana* $\mathcal{C}$*, com translação e* X *um complexo em* $\mathsf{C}(\mathcal{C})$*. Definimos* $H : \mathsf{C}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{C}(\mathcal{C})$ *o* ***funtor de cohomologia*** *de* $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ *como*

$$H(X) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Im}\, d_X[-1] \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_X).$$

De maneira natural, definimos a imagem $H(f)$ *de um morfismo de complexos* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$ *pela propriedade universal do conúcleo* $H(X)$*.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}\, d_X[-1] \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f \circ \overline{\rho}_X"'] & \mathrm{Ker}\, d_X \arrow[r, "\iota_{\varphi_X}"] \arrow[d, "f \circ \rho_X"'] & \mathrm{Coker}\, \varphi_X \arrow[d, dotted, "H(f)"] \\ \mathrm{Im}\, d_Y[-1] \arrow[r, "\varphi_Y"] & \mathrm{Ker}\, d_Y \arrow[r, "\iota_{\varphi_Y}"] & \mathrm{Coker}\, \varphi_Y \end{tikzcd}$$

Existe única $H(f) : H(X) \longrightarrow H(Y)$ *com* $H(f) \circ \iota_{\varphi_X} = \iota_{\varphi_Y} \circ f \circ \rho_X$*.*

Como $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ *é uma categoria abeliana,* $H(X)$ *é um complexo. Assim, para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *definimos o funtor* $H^n : \mathsf{C}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ *dado por*

$$H^n(X) = H(X)^n = \mathrm{Coker}(\mathrm{Im}\, d_X^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d_X^n), \qquad H^n(f) = H(f)^n.$$

onde dizemos que o objeto $H^n(X)$ *é a* ***n-ésima cohomologia*** *do complexo* X*.*

Note que o morfismo $\varphi : \operatorname{Im} d_X[-1] \longrightarrow \operatorname{Ker} d_X$ é o morfismo definido por (2.32) para o complexo $X[-1] \xrightarrow{d_X[-1]} X \xrightarrow{d_X} X[1]$. Em decorrência de (2.34) temos os isomorfismos $H(X) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d_X[1] \longrightarrow \operatorname{Im} d_X) \simeq \operatorname{Im}(\operatorname{Ker} d_X[-1] \longrightarrow \operatorname{Coker} d_X)$ de modo que

$$\begin{aligned} H(X) &= \operatorname{Coker}(\operatorname{Im} d_X[-1] \longrightarrow \operatorname{Ker} d_X) \simeq \operatorname{Coker}(X[-1] \longrightarrow \operatorname{Ker} d_X) \\ &\simeq \operatorname{Coker}(\operatorname{Coker} d_X[-2] \longrightarrow \operatorname{Ker} d_X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(X) &\simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d_X[-1] \longrightarrow \operatorname{Im} d_X) \simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d_X[-1] \longrightarrow X[1]) \\ &\simeq \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d_X[-1] \longrightarrow \operatorname{Ker} d_X[1]). \end{aligned}$$

De onde seguem as sequência exatas

$$0 \longrightarrow H(X) \to \operatorname{Coker}(d_X[-1]) \xrightarrow{d_X} \operatorname{Ker}(d_X[1]) \longrightarrow H(X[1]) \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

$$0 \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow \operatorname{Coker}(d_X^{n-1}) \xrightarrow{d_X^n} \operatorname{Ker}(d_X^{n+1}) \longrightarrow H^{n+1}(X) \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

Além disso, notemos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "(-1)^n id_{X^{n-1}}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, equal] & X^{n+1} \arrow[d, "(-1)^n id_{X^{n+1}}"] \\ X[n-1]^0 \arrow[r, "(-1)^n d_{X[n]}^{-1}"] & X[n]^0 \arrow[r, "(-1)^n d_{X[n]}^0"] & X[n+1]^0 \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

nos fornece um isomorfismo

$$H^n(X) = \operatorname{Coker}(\operatorname{Im} d_X^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_X^n) \overset{(3.7)}{\simeq} \operatorname{Coker}(\operatorname{Im}(-1)^n d_{X[n]}^{-1} \longrightarrow \operatorname{Ker}(-1)^n d_{X[n]}^0) = H^0(X[n])$$

Lema 3.1.1. *O funtor H leva morfismos homotópicos a zero em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ no morfismo zero em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Dado um morfismos homotópico a zero $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$. Então existe $s : X \longrightarrow Y[-1]$ tal que $f = s[1] \circ d_X + d_Y[-1] \circ s$. Assim temos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d_X"] & X[1] \arrow[r, "{s[1]}"] & Y \\ \operatorname{Ker} d_X \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "0"] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] & Y[-1] \arrow[r, "{d_Y[-1]}"] \arrow[dr, "{d'_Y[-1]}"'] & Y \\ & & \operatorname{Im} d_Y[-1] \arrow[u, "\overline{\rho}"'] \end{tikzcd}$$

de modo que $s[1] \circ d_X \circ \rho = s[1] \circ 0 = 0$ e, além disso, $d_Y[-1]$ pode ser fatorado através de $\operatorname{Im} d_Y[-1]$, basta notarmos que $\overline{\rho}_Y = \varphi_Y \circ \rho_Y$, segue de (2.32), e que $\iota_{\varphi_Y} \circ \varphi_Y = 0$ para concluirmos que

$$\begin{aligned} H(f) \circ \iota_{\varphi_X} &= \iota_{\varphi_Y} \circ (s[1] \circ d_X + d_Y[-1] \circ s) \circ \rho_X \\ &= \iota_{\varphi_Y} \circ (0 + \overline{\rho}_Y \circ d'_Y[-1] \circ s) \circ \rho_X \\ &= \iota_{\varphi_Y} \circ \varphi_Y \circ \rho_Y \circ d'_Y[-1] \circ s \circ \rho_X = 0. \end{aligned}$$

Como ι_{φ_X} é um monomorfismo segue que $H(f) = 0$. $\square$

Como consequência do Lema 3.1.1 temos que os funtores $H : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$ e $H^n : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ estão bem definidos.

Teorema 3.1.2. *Dado uma sequência exata* $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *de objetos em* $\mathsf{C}(\mathcal{C})$. *Então, para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *a sequência*

$$H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z)$$

é uma sequência exata. Além disso, para cada $n \in \mathbb{Z}$, *existe um morfismo* δ^n *em* $\mathcal{C}$ *funtorial em relação à sequência dada, tal que sequência*

$$H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X) \longrightarrow H^{n+1}(Z)$$

é exata.

Demonstração. Utilizando a propriedade universal do núcleo e conúcleo e a sequência exata (3.6), para todo n, podemos montar a seguinte diagrama comutativo, onde as setas horizontais e verticais são exatas.

$$\begin{tikzcd} & H^n(X) \arrow[d] & H^n(Y) \arrow[d] & H^n(Z) \arrow[d] & \\ & \mathrm{Coker}(d_X^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "d_X^n"] & \mathrm{Coker}(d_Y^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "d_Y^n"] & \mathrm{Coker}(d_Z^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "d_Z^n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_X^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(d_Y^{n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(d_Z^{n+1}) \arrow[d] & \\ & H^{n+1}(X) & H^{n+1}(Y) & H^{n+1}(Z) & \end{tikzcd}$$

Assim, o Snake Lemma garante a existência da sequencia exata

$$H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X) \longrightarrow H^{n+1}(Y) \longrightarrow H^{n+1}(Z).$$

Como a construção é funtorial em n, segue o resultado. $\square$

Proposição 3.1.2. *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria abeliana. Então, para todo* $n \in \mathbb{Z}$, *o funtor* $H^n : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ *é um funtor cohomológico.*

Demonstração. Dado um triangulo distinto $T = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$, pelo axioma TR 3 T é distinto se e somente se $T' = Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ for distinto. Então existe, por definição, um isomorfismo entre T' e um triangulo do tipo $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\alpha(f')} M(f') \xrightarrow{\beta(f')} X'[1]$. De modo que T é isomorfo ao triangulo $Y' \xrightarrow{\alpha(f')} M(f') \xrightarrow{\beta(f')} X'[1] \longrightarrow Y'[1]$.

Agora, como $\alpha(f')$ é um monomorfismo e $\beta(f')$ um epimorfismo temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\alpha(f')} M(f') \xrightarrow{\beta(f')} X'[1] \longrightarrow 0$$

Assim, aplicando o Teorema 3.1.2 temos que a sequência

$$H^n(Y') \longrightarrow H^n(M(f')) \longrightarrow H^n(X'[1])$$

ou ainda, $H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z)$ é exata. Logo, H^n é cohomológico. □

3.2 Categorias Derivadas e Funtores Derivados

Definição 3.2.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Dizemos que f é um **quase isomorfismo** se $H^n(f)$ é um isomorfismo para todo n.*

Observação 3.2.1. *Dizemos que um complexo $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ é **exato** se para todo $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(X) = 0$. Ou seja, o mapa nulo $X \longrightarrow 0$ é um quase isomorfismo. Então, dado um triângulo distinto $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow M(f) \rightarrow X[1]$ aplicando o funtor de cohomologia obtemos a seguinte sequência exata.*

$$H(M(f)[-1]) \longrightarrow H(X) \longrightarrow H(Y) \longrightarrow H(M(f))$$

Assim, temos que f é um quase isomorfismo se, e somente se, $H(M(f)) = 0$, ou seja, $M(f)$ é um complexo exato. Logo, se $\mathcal{F}$ é um funtor para o qual $\mathcal{F}(X) \simeq 0$ sempre que X for exato, então $\mathcal{F}$ transforma quase isomorfismos em isomorfismos. Além disso, vale a volta.

Definição 3.2.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ a categoria de homotopia de $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{N}$ o sistema nulo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ dado por*

$$\mathcal{N} = \{X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{K}(\mathcal{C})) \mid H^n(X) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.8}$$

*Então, definimos $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ a **categoria derivada** de $\mathcal{C}$ como a seguinte localização*

$$\mathsf{D}(\mathcal{C}) = \mathsf{K}(\mathcal{C})_{S(\mathcal{N})} = \mathsf{K}(\mathcal{C})_{\mathcal{N}}$$

Onde denotamos por $\mathcal{Q} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C})$ o funtor de localização.

Definição 3.2.3. *Um objeto* $X \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C}(\mathcal{C}))$ *é limitado, (limitado superiormente, limitado inferiormente) se* $X^n = 0$ *para* $|n| >> 0$ *(respectivamente* $n >> 0$, $n << 0$*). Definimos* $\mathsf{C}^{\flat}(\mathcal{C})$ *a categoria de complexos em* $\mathcal{C}$ *limitados,* $\mathsf{C}^{+}(\mathcal{C})$ *a categoria de complexos em* $\mathcal{C}$ *limitados superiormente,* $\mathsf{C}^{-}(\mathcal{C})$ *a categoria de complexos em* $\mathcal{C}$ *limitados inferiormente. Similarmente como construímos* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *podemos definir*

$$\mathsf{K}^{\flat}(\mathcal{C}), \quad \mathsf{K}^{+}(\mathcal{C}) \quad \mathsf{K}^{-}(\mathcal{C}).$$

Como categorias homotópicas de $\mathsf{C}^{\flat}(\mathcal{C}), \mathsf{C}^{+}(\mathcal{C})$ *e* $\mathsf{C}^{-}(\mathcal{C})$*. Assim, definimos também as categorias*

$$\mathsf{D}^{\flat}(\mathcal{C}) = \mathsf{K}^{\flat}(\mathcal{C})_{\mathcal{N}^{\flat}}, \quad \mathsf{D}^{+}(\mathcal{C}) = \mathsf{K}^{+}(\mathcal{C})_{\mathcal{N}^{+}} \quad \mathsf{D}^{-}(\mathcal{C}) = \mathsf{K}^{-}(\mathcal{C})_{\mathcal{N}^{-}}.$$

Observação 3.2.2.

1. *Como* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ *é uma categoria triangular, se* $\mathcal{C}$ *for uma categoria abeliana. Segue da Proposição* 2.4.9 *que* $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ *é uma categoria triangular.*

2. *Para toda* $f \in S(\mathcal{N})$*, existe um triangulo* $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow M(f) \longrightarrow X[1]$ *com* $M(f) \in \mathcal{N}$*. Assim* $H^n(M(f)) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e portanto* $S(\mathcal{N})$ *é o conjunto de quase isomorfismos de* $\mathsf{K}(\mathcal{C})$*.*

3. *Como toda* $f \in S(\mathcal{N})$ *é um quase isomorfismo, temos que* $H^n(f)$ *é um isomorfismo para todo* $n \in \mathbb{Z}$*. Assim, pela Proposição 2.4.8* H^n *se fatora em* $\mathsf{D}(\mathcal{C})$*, isto é existe um único funtor* H^n_D *fazendo o diagrama comutar*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K}(\mathcal{C}) \arrow[r, "H^n"] \arrow[d, "\mathcal{Q}"'] & \mathcal{C} \\ \mathsf{D}(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, H^n_D"'] & \end{tikzcd}$$

Denotamos H^n_D *simplesmente por* H^n*.*

Proposição 3.2.1. *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria abeliana. Então toda sequência exata em* $\mathsf{C}(\mathcal{C})$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0, \tag{3.9}$$

induz um triangulo distinto $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$ *em* $\mathsf{D}(\mathcal{C})$*.*

Demonstração. Pelo axioma TR 2, f induz um triangulo distinto $X \xrightarrow{f} Y \to M(f) \to X[1]$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Basta mostrar, portanto, a existência de um quase isomorfismo $\varphi : M(f) \longrightarrow Z$ para concluir o resultado. Utilizando a exatidão da sequência (3.9) podemos construir o seguinte diagrama comutativo em $\mathsf{C}(\mathcal{C})$ com linhas exatas.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "id_X"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Assim, garantimos que a sequência dos cones de mapeamento seja exata

$$0 \longrightarrow M(id_X) \xrightarrow{(id_X, f)} M(f) \xrightarrow{(0,g)} M(0 \longrightarrow Z) \longrightarrow 0. \tag{3.10}$$

Então, definimos $\varphi = (0, g)$ e notamos, pela Observação 3.2.1 que $H(M(id_X)) = 0$, $H(M(id_X[1])) = 0$ e que $M(0 \longrightarrow Z) = 0[1] \oplus Z = Z$. Assim, aplicando o Teorema 3.1.2 na sequência (3.10) obtemos a sequência exata $0 \longrightarrow H(M(f)) \xrightarrow{H(\varphi)} H(Z) \xrightarrow{\delta} 0$ em $\mathsf{D}(\mathcal{C})$. De onde segue que φ é um quase isomorfismo. $\square$

Sejam K uma categoria triangular e $\mathcal{Q} : \mathsf{K} \longrightarrow \mathsf{D}$ uma localização. Sejam K', K'' subcategorias de K e D', D'' subcategorias de D tal que D' é a localização de K' e D'' é a localização de K''. Consideramos o funtor inclusão $i : K' \hookrightarrow K'$, então existe um único funtor $\mathcal{I}$ fazendo o diagrama abaixo comutar

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\mathcal{Q}|_{K'}"'] & K'' \arrow[d, "\mathcal{Q}|_{K''}"] \\ D' \arrow[r, "\mathcal{I}"] & D'' \end{tikzcd}$$

Proposição 3.2.2. *Se para todo X em K' existe um quase isomorfismo $\varphi_X : X \longrightarrow A_X$ com A_X em K'' então $\mathcal{I}$ é uma equivalência entre categorias triangulares onde denotamos por $(\mathcal{J}, \delta)$ o inverso de $\mathcal{I}$, isto é, temos os isomorfismos de funtores triangulares*

$$id_{D'} \simeq \mathcal{J} \circ \mathcal{I} \qquad\qquad id_{D''} \simeq \mathcal{I} \circ \mathcal{J}. \tag{3.11}$$

Demonstração. Como para cada $X \in D''$, $\varphi_X \in S(N)$ temos que existe um isomorfismo $\mathcal{Q}(\varphi_X) : X \xrightarrow{\sim} A_X$ em D''. Deste modo, definindo o funtor $\mathcal{J}$ por $\mathcal{J}(X) = A_X$ para todo $X \in D''$ verificamos imediatamente que $\mathcal{J}$ está bem definido. Para definir o morfismo $\delta : \mathcal{J} \circ [1] \longrightarrow [1] \circ \mathcal{J}$, utilizamos a Proposição 2.4.8 para garantir a existência de um único funtor $\theta : D'' \longrightarrow D''$ tal que $\mathcal{Q}[1] = \theta \circ \mathcal{Q}$. Então definimos $\delta_X = \theta(\varphi_X) : \mathcal{J}(X[1]) \longrightarrow \mathcal{J}(X)[1]$ para todo X. Notemos que δ_X é um isomorfismo para todo X, já que $\mathcal{Q}(\varphi_X)[1]$ e $\mathcal{Q}(\varphi_{X[1]})$ são isomorfismos e temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X[1] \arrow[r, "\mathcal{Q}(\varphi_X)[1]"] \arrow[d, "\mathcal{Q}(\varphi_{X[1]})"'] & A_{X[1]} \\ A_X[1] \arrow[ur, dashed, "\delta_X"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, δ é um isomorfismo natural. Para verificar que o par $(\mathcal{J}, \delta)$ forma um funtor triangular basta verificar que triângulos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$ distintos em D'' são levados em triângulos distintos em D'. Segue da construção o seguinte isomorfismo de triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & X[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}(\varphi_X)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}(\varphi_Y)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}(\varphi_Z)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}(\varphi_X)[1]} \\ A_X & \xrightarrow[\mathcal{J}(f)]{} & A_Y & \xrightarrow[\mathcal{J}(g)]{} & A_Z & \xrightarrow[\delta_X \circ \mathcal{J}(h)]{} & A_X[1] \end{array}$$

De onde concluímos, pelo axioma TR 1 que a segunda linha do diagrama acima é um triangulo distinto. Além disso, os isomorfismos (3.11) seguem diretamente da definição do funtor $\mathcal{J}$. □

Proposição 3.2.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva que admita soma direta exatas indexada por um conjunto I. Então $\mathsf{C}(\mathcal{C})$, $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ e $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ admitem soma direta e os funtores $\mathsf{C}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{Q} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C})$ comutam com a soma direta.*

Definição 3.2.4. [1] *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias abelianas, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ um funtor aditivo e $\mathcal{Q} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C})$ o funtor de localização. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **derivável à direita** se existir*

$$R\mathcal{F} : \mathsf{D}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}')$$

um funtor triangular e ζ um morfismos de funtores triangulares

$$\zeta : \mathcal{Q}' \circ \mathsf{K}(\mathcal{F}) \longrightarrow R\mathcal{F} \circ \mathcal{Q}$$

onde $\mathsf{K}(\mathcal{F}) : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}')$ é um funtor naturalmente associado a $\mathcal{F}$, tal que para todo funtor triangular $\mathcal{G} : \mathsf{D}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}')$, o morfismo

$$\mathrm{Hom}(R\mathcal{F}, \mathcal{G}) \overset{\mathcal{Q}(\bullet)}{=\!=\!=} \mathrm{Hom}(R\mathcal{F} \circ \mathcal{Q}, \mathcal{G} \circ \mathcal{Q}) \xrightarrow{\circ\zeta} \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}' \circ \mathsf{K}(\mathcal{F}), \mathcal{G} \circ \mathcal{Q}) \tag{3.12}$$

*é um isomorfismo. Então $(R\mathcal{F}, \zeta)$, que é único a menos de isomorfismo, é chamado de **funtor derivado a direita** de $\mathcal{F}$. Definimos o **n-ésimo funtor derivado à direita** de $\mathcal{F}$ como $R^n\mathcal{F} = H^n(R\mathcal{F})$.*

*Dizemos que $\mathcal{F}$ é **derivável à esquerda** se existir*

$$L\mathcal{F} : \mathsf{D}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}')$$

um funtor triangular e ξ um morfismos de funtores triangulares

$$\xi : L\mathcal{F} \circ \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}' \circ \mathsf{K}(\mathcal{F})$$

[1] Assim como a noção de categoria derivada segue de uma localização de categorias, a noção de funtor derivado remete à uma localização de funtores. Nesse segundo caso, optamos por uma definição direta e citamos [15] para um tratamento mais detalhado. Citamos ainda, [22] para uma apresentação de funtores derivados como uma aproximação homotópica universal para ou do functor original.

tal que para todo funtor triangular $\mathcal{G} : \mathsf{D}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}')$, o morfismo

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, L\mathcal{F}) \xlongequal{\mathcal{Q}(\bullet)} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}\circ\mathcal{Q}, L\mathcal{F}\circ\mathcal{Q}) \xrightarrow{\xi\circ} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}\circ\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'\circ\mathsf{K}(\mathcal{F})) \tag{3.13}$$

*é um isomorfismo. Então $(L\mathcal{F}, \xi)$, que é único a menos de isomorfismo, é chamado de **funtor derivado a esquerda** de $\mathcal{F}$. Definimos o **n-ésimo funtor derivado à esquerda** de $\mathcal{F}$ como $L^n\mathcal{F} = H^n(L\mathcal{F})$.*

As Proposições abaixo oferecem algumas condições para que a existência de funtores derivados seja garantida.

Proposição 3.2.4. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}''$ categorias abelianas e $\mathcal{F} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}'')$ um funtor triangular. Seja K uma subcategoria de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}|_K : K \longrightarrow D$ sua localização, onde $D = K_{S(N)}$ é uma subcategoria de $\mathsf{D}(\mathcal{C})$, e $i : K \hookrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$ o funtor inclusão tal que o funtor*

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}\circ i : K \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}')$$

possui funtor derivado à direita

$$R\mathcal{F}' : D \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}'') \quad \zeta' : \mathcal{Q}''\circ\mathcal{F}' \longrightarrow R\mathcal{F}'\circ\mathcal{Q}.$$

Se existe uma família de quase isomorfismos $(\varphi_X : X \longrightarrow A_X)_{X\in\mathsf{K}(\mathcal{C})}$ onde $A_X \in K$, então, tomando $\mathcal{J} = \mathcal{Q}(i)^{-1}$, temos que $\mathcal{F}$ possui funtor derivado à direita dado por

$$R\mathcal{F} = R\mathcal{F}'\circ\mathcal{J} : \mathsf{D}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}'')$$

tal que $R\mathcal{F}(X) = R\mathcal{F}'(A_X)$. Onde, para cada X, ζ_X é dado pela composição

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_X)} \mathcal{F}(A_X) = \mathcal{F}'(A_X) \xrightarrow{\zeta'_{A_X}} R\mathcal{F}'(A_X) = R\mathcal{F}(X).$$

Demonstração. A prova se resume a verificar que o funtor derivado $R\mathcal{F}$ está bem definido segundo a Definição 3.2.4. Temos que $R\mathcal{F}$ é um funtor triangular pois é definido como a composição de funtores triangulares. Para verificar que ζ é um morfismo de funtores devemos verificar, para todo $f : X \longrightarrow Y$, a comutatividade do seguinte diagrama em $\mathsf{D}(\mathcal{C}')$, que chamaremos de $\mathcal{D}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\zeta_X"] \arrow[d, "\mathcal{Q}''\mathcal{F}(f)"'] & R\mathcal{F}(X) \arrow[d, "R\mathcal{F}\mathcal{Q}(f)"] \\
\mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\zeta_Y"] & R\mathcal{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

Então dado $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, como $\mathcal{Q}(\varphi_X)$ e $\mathcal{Q}(\varphi_Y)$ são isomorfismos, existe $\widetilde{f} : A_X \longrightarrow A_Y$ em D tal que $\mathcal{Q}(\widetilde{f}) = \mathcal{Q}(f)$. Utilizando a axioma S2 para o par

$A_X \xleftarrow{\varphi_X} X \xrightarrow{\varphi_Y \circ f} A_Y$ existem g e φ um quase isomorfismo fazendo o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f"'] & A_X \arrow[d, "g"] & \\ Y \arrow[r, "\varphi_Y"] & A_Y \arrow[r, "\varphi"] & Z \arrow[r, "\varphi_Z"] & A_Z \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

Assim definimos $h = \varphi \circ \varphi_Y : Y \longrightarrow Z$, $\widetilde{h} = \varphi_Z \circ \varphi : A_Y \longrightarrow A_Y$ e $\widetilde{fh} = \varphi_Z \circ g : A_X \longrightarrow A_Z$. Note que em geral não podemos garantir que $\widetilde{fh} = \widetilde{f} \circ \widetilde{h}$, mas como φ é um quase isomorfismo, $\mathcal{Q}(\widetilde{fh}) = \mathcal{Q}(\widetilde{f}) \circ \mathcal{Q}(\widetilde{h})$. Agora, combinando $\mathcal{D}(f)$ e $\mathcal{D}(h)$ obtemos o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_X)"] \arrow[d, "\mathcal{Q}''\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{F}(A_X) \arrow[r, "\zeta'_X"] & R\mathcal{F}'(A_X) \arrow[d, "R\mathcal{F}'\mathcal{Q}(\widetilde{f})"] \\ \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Y)"] \arrow[d, "\mathcal{Q}''\mathcal{F}(h)"'] & \mathcal{F}(A_Y) \arrow[r, "\zeta'_Y"] \arrow[d, "\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\widetilde{h})"] & R\mathcal{F}'(A_Y) \arrow[d, "R\mathcal{F}'\mathcal{Q}(\widetilde{h})"] \\ \mathcal{F}(Z) \arrow[r, "\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Z)"] & \mathcal{F}(A_Z) \arrow[r, "\zeta'_Z"] & R\mathcal{F}'(A_Z) \end{tikzcd}$$

Como $\varphi_Z \circ h = \varphi_Z \circ \varphi \circ \varphi_Y = \widetilde{h} \circ \varphi_Y$, aplicando o funtor $\mathcal{Q}''\mathcal{F}$ obtemos que $\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Z) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(h) = \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\widetilde{h}) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Y)$. Agora, considerando a composição $(f \circ h)$ temos $\varphi_Z \circ (h \circ f) = \varphi_Z \circ \varphi \circ \varphi_Y \circ f = \varphi_Z \circ g \circ \varphi_X = (\widetilde{h \circ f}) \circ \varphi_X$. De onde segue que $\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Z) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(hf) = \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\widetilde{hf}) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_X)$. Assim, usando a hipótese de que ζ' é um morfismo de funtores, segue que $\mathcal{D}(h)$ e $\mathcal{D}(hf)$ comutam. Além disso, já que $\widetilde{h}$ é um quase isomorfismo segue que $R\mathcal{F}'\mathcal{Q}(\widetilde{h})$ é um isomorfismo e $\zeta'_Y = \zeta'_Z \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\widetilde{h})$. Assim

$$\begin{aligned} R\mathcal{F}\mathcal{Q}(f) \circ \zeta_X = R\mathcal{F}'\mathcal{Q}(\widetilde{f}) \circ \zeta'_X \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_X) &= R\mathcal{F}'\mathcal{Q}(\widetilde{h}) \circ R\mathcal{F}'\mathcal{Q}(\widetilde{f}) \circ \zeta'_X \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_X) \\ &\overset{\mathcal{D}(hf)}{=} \zeta'_Z \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Z) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(h) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(f) \\ &\overset{\mathcal{D}(h)}{=} \zeta'_Z \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\widetilde{h}) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Y) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(f) = \zeta'_Y \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_Y) \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(f) \\ &= \zeta_Y \circ \mathcal{Q}''\mathcal{F}(f). \end{aligned}$$

Para mostrar que ζ é um morfismo de funtores triangulares devemos verificar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}''\mathcal{F}(X[1]) \arrow[r, "\delta_{\mathcal{Q}''\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\zeta_{X[1]}"'] & \mathcal{Q}''\mathcal{F}(X)[1] \arrow[d, "\zeta_X[1]"] \\ R\mathcal{F}\mathcal{Q}(X[1]) \arrow[r, "\delta_{R\mathcal{F}\mathcal{Q}}"] & R\mathcal{F}\mathcal{Q}(X)[1] \end{tikzcd}$$

O que segue diretamente da construção. Finalmente, devemos verificar que existe um isomorfismo (3.12). Para isso, definimos um morfismo inverso do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\mathcal{Q}''\circ\mathcal{F},\mathcal{G}\circ\mathcal{Q}) &\xrightarrow{i(\bullet)} \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}''\circ\mathcal{F}\circ i,\mathcal{G}\circ\mathcal{Q}\circ i) = \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}''\circ\mathcal{F}',\mathcal{G}\circ\mathcal{I}\circ\mathcal{Q})\\
&\xrightarrow{\circ\zeta'^{-1}} \mathrm{Hom}(R\mathcal{F}'\circ\mathcal{Q},\mathcal{G}\circ\mathcal{I}\circ\mathcal{Q}) \overset{\mathcal{Q}^{-1}(\bullet)}{=\!=\!=} \mathrm{Hom}(R\mathcal{F}',\mathcal{G}\circ\mathcal{I})\\
&\xrightarrow{\mathcal{J}(\bullet)} \mathrm{Hom}(R\mathcal{F}'\circ\mathcal{J},\mathcal{G}\circ\mathcal{I}\circ\mathcal{J}) = \mathrm{Hom}(R\mathcal{F},\mathcal{G})
\end{aligned}$$

Onde temos que $\circ\zeta'^{-1}$ existe por hipótese. □

Corolário 3.2.1. *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}''$ categorias abelianas e $\mathcal{F}:\mathsf{K}(\mathcal{C})\longrightarrow\mathsf{K}(\mathcal{C}'')$ um funtor triangular. Sejam K uma subcategoria de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ tal que $D=K_{S(N)}$ é uma subcategoria de $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ e $i:K\hookrightarrow\mathsf{K}(\mathcal{C})$ o funtor inclusão. Se existe uma família de quase isomorfismos $(\varphi_X:X\longrightarrow A_X)_{X\in\mathsf{K}(\mathcal{C})}$ onde $A_X\in K$ e se o funtor restrição $\mathcal{F}'=\mathcal{F}\circ i$ transforma quase isomorfismos em quase isomorfismos, então $\mathcal{F}$ possui derivado a direita $(R\mathcal{F},\zeta)$.*

Demonstração. Primeiro, notemos que como o funtor $\mathcal{Q}''\mathcal{F}'$ transforma quase isomorfismos em isomorfismos temos que $\mathcal{Q}''\mathcal{F}'$ se fatora unicamente em $\mathcal{Q}$, pela Proposição **??**, isto é, existe $R\mathcal{F}'$ tal que $\mathcal{Q}''\mathcal{F}'=R\mathcal{F}'\mathcal{Q}$. Logo temos que $\mathcal{F}'$ admite derivado a direta $(R\mathcal{F}',id)$.

Agora, usando a Proposição 3.2.4, temos que $\mathcal{F}$ admite funtor derivado dado por

$$R\mathcal{F}(X)=R\mathcal{F}'(A_X)=\mathcal{Q}''\mathcal{F}(A_X)\qquad \zeta_X=\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\varphi_X):\mathcal{Q}''\mathcal{F}(X)\longrightarrow\mathcal{Q}''\mathcal{F}(A_X)=R\mathcal{F}(X)$$

Para todo morfismo $f:X\longrightarrow Y$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ definimos

$$R\mathcal{F}(f/1)=\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\widetilde{h})^{-1}\circ\mathcal{Q}''\mathcal{F}(\widetilde{hf})$$

onde $\widetilde{h}$ e $\widetilde{hf}$ denotam os morfismos definidos na demonstração da Proposição 3.2.4. Assim, para cada morfismo (f/s) em $\mathsf{D}(\mathcal{C})$ temos definido

$$R\mathcal{F}(f/s)=R\mathcal{F}(f/1)\circ R\mathcal{F}(s/1)^{-1}.$$

Além disso, o isomorfismo natural que define $R\mathcal{F}$ como um funtor triangular pode ser visualizado como a seguinte família de isomorfismos para cada $X\in\mathsf{D}(\mathcal{C})$

$$(\delta_{R\mathcal{F}})_X: R\mathcal{F}(X[1])=\mathcal{Q}''\mathcal{F}(A_{X[1]})\xrightarrow[\eta_X]{\sim}\mathcal{Q}''\mathcal{F}(A_X[1])\xrightarrow[(\delta_{\mathcal{F}})_X]{\sim}\mathcal{Q}''\mathcal{F}(A_X)[1]=R\mathcal{F}(X)[1]$$

Onde $\eta_X=\mathcal{Q}(\varphi_X[1])\circ\mathcal{Q}(\varphi_{X[1]})^{-1}$. Em particular, caso $X\in K$ então φ_X é um quase isomorfismo em K e portanto $\zeta_X=\mathcal{F}'(\varphi_X)$ é um isomorfismo por hipótese. □

Definição 3.2.5. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias abelianas e $\mathcal{F} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}')$ um funtor triangular. Dizemos que um complexo $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ é **$\mathcal{F}$-acíclico à direita**, ou acíclico à direita com respeito à $\mathcal{F}$, se para todo quase isomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ existe um quase isomorfismo $g : Y \longrightarrow Z$ tal que o mapa $\mathcal{F}(g \circ f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Z)$ é um isomorfismo em $\mathsf{K}(\mathcal{C}')$. Do mesmo modo, dizemos que X é **$\mathcal{F}$-acíclico à esquerda** se para todo quase isomorfismo $f : Y \longrightarrow X$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ existe um quase isomorfismo $g : Z \longrightarrow Y$ tal que o mapa $\mathcal{F}(f \circ g) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ é um isomorfismo.*

Lema 3.2.1. *Se X é $\mathcal{F}$-acíclico a direita e existe um quase isomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ tal que $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ é um epimorfismo, então $\mathcal{F}(Y)$ é $\mathcal{F}$-acíclico à direita.*

Demonstração. Seja X um complexo $\mathcal{F}$-acíclico à direita e $f : X \longrightarrow Y$ um quase isomorfismo tal que $\mathcal{F}(f)$ é um epimorfismo. Dado um quase isomorfismo $\varphi_{Y'} : Y \longrightarrow Y'$, então $\varphi_{Y'} \circ f : X \longrightarrow Y'$ é um quase isomorfismo, e como X é $\mathcal{F}$-acíclico existe um quase isomorfismo φ_Z tal que $\mathcal{F}(\varphi_Z \circ (\varphi_{Y'} \circ f))$ é um isomorfismo. Logo a composição

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi_{Y'})} \mathcal{F}(Y') \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi_Z)} \mathcal{F}(Z)$$

é um isomorfismo. Como $\mathcal{F}(f)$ é um epimorfismo, segue que $\mathcal{F}(\varphi_Y \circ \varphi_Z)$ é um isomorfismo. De onde concluímos que Z é $\mathcal{F}$-acíclico à direita. □

Lema 3.2.2. *Dado um funtor triangular $\mathcal{F}$. Os complexos em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ que são $\mathcal{F}$-acíclicos à direita são objetos de uma subcategoria triangular localizável K de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que o conjunto de complexos em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ que são $\mathcal{F}$-acíclicos forma uma subcategoria triangular de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ que denotaremos por K. Nesse sentido, dado um triangulo distinto $X_1 \to X_2 \to M(f) \to X_1[1]$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ onde X_1 e X_2 são objetos de K, vamos mostrar que $M(f)$ é um objeto de K. Denotando $M(f)$ por $X[1]$ e utilizando $\mathrm{TR}\,3$ obtemos o triangulo distinto $X \to X_1 \to X_2 \to X[1]$. Assim, para todo quase isomorfismo $u : X \longrightarrow Y$ dado, usando $\mathrm{S3}'$ podemos completar o diagrama $Y \xleftarrow{u} X \xrightarrow{f} X_1$ e que, por sua vez, induz um morfismos de triângulos por $\mathrm{TR}\,4$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "u_2"'] & X[1] \arrow[d, "u[1]"'] \\ Y \arrow[r, "f'"] & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y[1] \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

Notemos que u_1 é um quase isomorfismo por $\mathrm{S3}'$ e podemos verificar que u_2 é um quase isomorfismo aplicando o Lema dos cinco na sequência de cohomologia correspondente à (3.15). Agora, como X_1 e X_2 são $\mathcal{F}$-acíclicos, usamos $\mathrm{TR}\,3$ e $\mathrm{TR}\,4$ para obter outro morfismo de triângulos.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "v_1"'] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "v_2"'] & Y[1] \arrow[d, "v[1]"'] \\ Z \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & Z_2 \arrow[r] & Z[1] \end{tikzcd} \tag{3.16}$$

Onde v_1 e v_2 são quase isomorfismos tais que $\mathcal{F}(v_1u_1)$ e $\mathcal{F}(v_2u_2)$ são isomorfismos, assim, podemos usar S3′ e S3″ para garantir que v e $v[1]$ são quase isomorfismos. Então aplicando $\mathcal{F}$ obtemos um morfismo de triângulos distintos em $\mathsf{K}(\mathcal{C}')$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(v_1u_1)"'] & \mathcal{F}(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(v_2u_2)"'] & \mathcal{F}(X[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(vu[1])"'] & \mathcal{F}(X_1[1]) \arrow[d, "\mathcal{F}(v_1u_1[1])"'] \\ \mathcal{F}(Z_1) \arrow[r] & \mathcal{F}(Z_2) \arrow[r] & \mathcal{F}(Z[1]) \arrow[r] & \mathcal{F}(Z_1[1]) \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

Agora, usando a Proposição 2.4.3 obtemos que $\mathcal{F}(vu[1])$ é um isomorfismo e $M(f)$ é um complexo $\mathcal{F}$-acíclico à direta. Segue que o funtor inclusão $K \hookrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C})$ é um funtor triangular. Além disso, o elemento nulo 0 é trivialmente $\mathcal{F}$-acíclico e, pelo Corolário 2.4.1, K é fechada para soma direta. Concluímos que K é uma subcategoria triangular. □

Proposição 3.2.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana, $\mathcal{F} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}')$ um funtor triangular. Suponha que $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ possui uma família de quase isomorfismos $\varphi_X : X \longrightarrow A_X$ tal que A_X é $\mathcal{F}$-acíclico à direita para todo X. Então $\mathcal{F}$ possui uma derivação à direita $(R\mathcal{F}, \zeta)$ tal que para todo X*

$$R\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(A_X) \quad \zeta_X = \mathcal{F}(\varphi_X) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(A_X)$$

Além disso, X é $\mathcal{F}$-acíclico à direita se, e somente se, ζ_X é um isomorfismo.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.2 o conjuntos de complexos $\mathcal{F}$-acíclicos a direita forma uma subcategoria triangular de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Além disso temos que a restrição de $\mathcal{F}$ à categoria K transforma quase isomorfismos em isomorfismos. De fato, dado um complexo exato e $\mathcal{F}$-acíclico à direita X, para o quase isomorfismo natural $u : X \longrightarrow 0$, existe um quase isomorfismo $v : 0 \longrightarrow Z$ tal que $\mathcal{F}(uv)$ é um isomorfismo. Mas uv é o morfismo nulo, logo $\mathcal{F}(X) \simeq 0$. Assim, o resultado segue da Observação 3.2.1 e do Corolário 3.2.1. □

Corolário 3.2.2. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ três categorias abelianas, $\mathcal{Q} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C})$, $\mathcal{Q}' : \mathsf{K}(\mathcal{C}') \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}')$ os respectivos funtores de localização e $\mathcal{F} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}')$, $\mathcal{G} : \mathsf{K}(\mathcal{C}') \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}'')$ dois funtores triangulares. Suponha que $\mathcal{G}$ seja derivável à direita e que todo complexo $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ admita um quase isomorfismo para um complexo $(\mathcal{Q}'\mathcal{F})$-acíclico A_X tal que $\mathcal{F}(A_X)$ é $\mathcal{G}$-acíclico à direita. Então $\mathcal{Q}'\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}\mathcal{F}$ são deriváveis à direita e existe um único isomorfismo funtorial*

$$R(\mathcal{G} \circ \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{G} \circ R\mathcal{F}.$$

tal que o seguinte diagrama comuta para todo $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}\mathcal{F}(X) \arrow[r] \arrow[d] & R(\mathcal{G}\mathcal{F})(\mathcal{Q}X) \arrow[d, "\wr"] \\ R\mathcal{G}\mathcal{Q}'\mathcal{F}(X) \arrow[r] & R\mathcal{G}R\mathcal{F}(\mathcal{Q}X) \end{tikzcd}$$

Demonstração. Ver [16], Corolário 2.2.7, página 45. □

Seguindo os mesmos argumentos acima, pode-se, dualmente, enunciar e demonstrar a os resultados acima para a derivação à esquerda. Em particular obtemos que; se $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ possui uma família de quase isomorfismos $\psi_Y : B_Y \longrightarrow Y$ tal que B_Y é $\mathcal{F}$-acíclico à esquerda para todo Y, então $\mathcal{F}$ possui uma derivação à esquerda $(L\mathcal{F}, \xi)$ tal que para todo $Y \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$

$$L\mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(B_Y) \quad \xi_Y = \mathcal{F}(\psi_Y) : \mathcal{F}(B_Y) \longrightarrow \mathcal{F}(Y).$$

Definição 3.2.6. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e K uma subcategoria de $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Dizemos que um complexo $I \in K$ é **homotopicamente injetivo** [2] em K se para todo diagrama $Y \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} I$ em K com s um quase isomorfismo existir $g : Y \longrightarrow I$ tal que $g \circ s = f$.*

*Dado um objeto $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$, se existir um complexo homotopicamente injetivo $I_X \in K$ e um quase isomorfismo $\varphi : X \longrightarrow I_X$, dizemos que φ é uma **resolução homotopicamente injetiva** de X.*

Proposição 3.2.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Então as seguintes condições são equivalentes*

1. *$I \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ é um complexo homotopicamente injetivo.*
2. *Todo quase isomorfismo $i_Y : I \longrightarrow Y$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ é um monomorfismo, ou seja, possui inverso à esquerda.*
3. *Para todo complexo exato $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$, temos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, I) = 0$.*
4. *I é $\mathcal{F}$-acíclico à direita para todo funtor triangular $\mathcal{F} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}')$.*

Demonstração.

(1) ⇔ (2) Seja I um complexo homotopicamente injetivo sobre $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Então, dado um quase isomorfismo $s : I \longrightarrow Y$ sempre podemos tomar o diagrama $Y \xleftarrow{s} I \xrightarrow{id_I} I$. De modo que, por definição de complexo homotopicamente injetivo, existe um quase isomorfismo $g : Y \longrightarrow I$ tal que $g \circ s = id_I$.

Reciprocamente, suponhamos que todo quase isomorfismo $s : I \longrightarrow Y$ possui um inverso à esquerda $r : Y \longrightarrow I$. Então, dado um diagrama $Y \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} I$ onde s é um quase isomorfismo, podemos completa-lo de modo a obtermos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & I \arrow[d, "s'"] \\ Y \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

[2] Adotamos o mesmo nome utilizado em [15], mas este conceito pode ser encontrado na literatura com os nomes de complexos K-injetivos ou ainda q-injetivos em [16].

Como s' é um quase isomorfismos, por hipótese, s' admite inverso à esquerda que denotamos por r'. Logo, existe um mapa $g = r' \circ f'$ tal que $g \circ s = f$ de onde concluímos que I é um complexo homotopicamente injetivo.

$(2) \Leftrightarrow (4)$. Por hipótese, para todo quase isomorfismo $s : I \longrightarrow Y$ existe $r : Y \longrightarrow Y$ tal que $s \circ r = id_Y$, então $\mathcal{F}(g \circ s) = \mathcal{F}(id_I)$ é um isomorfismo e I é $\mathcal{F}$-acíclico à direta. Para mostrar a volta, supondo que um complexo I é $\mathcal{F}$-acíclico à direita para todo funtor triangular $\mathcal{F}$, então temos que I é acíclico à direita com respeito ao funtor identidade. De modo que, para todo quase isomorfismo $s : I \longrightarrow Y$ existe um quase isomorfismo $r : Y \longrightarrow Z$ tal que $s \circ r : I \longrightarrow Z$ é um isomorfismo, isto é, s possui um inverso à esquerda.

(1) ⇒ (3) Se I é um complexo homotopicamente injetivo, então dado X um complexo exato existe um isomorfismo $s : X \longrightarrow 0$ de modo que se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, I)$ então obtemos um diagrama $0 \overset{s}{\longleftarrow} X \overset{f}{\longrightarrow} I$ e pela definição de complexo homotopicamente injetivo, existe um quase isomorfismo $g : 0 \longrightarrow I$ tal que $g \circ s = f$. Mas como g é o morfismo nulo, resulta que f também é o morfismo nulo.

(3) ⇒ (2) Agora, suponhamos que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, I) = 0$ para todo complexo exato X. Então, dado um quase isomorfismo $\varphi : I \longrightarrow Y$, por $\mathrm{TR}\,2$ existe um triangulo distinto T, $I \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow I[1]$, usando a Observação 3.2.1, como φ é quase isomorfismo, segue que X é um complexo exato. Agora, aplicando o funtor cohomológico $\mathrm{Hom}(\bullet, I)$ no complexo acima obtemos a sequência exata

$$\mathrm{Hom}(X, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, I) \xrightarrow{\varphi\circ} \mathrm{Hom}(I, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X[-1], I).$$

Como X é exato, por hipótese, $\mathrm{Hom}(X, I) = 0$ de modo que $\varphi\circ$ é um isomorfismo. De onde segue que φ é um monomorfismo e, portanto, tem inversa à esquerda. □

Proposição 3.2.7. *Um complexo I é homotopicamente injetivo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ se, e somente se, para todo complexo $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ o mapa natural $\gamma : \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, I)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. A volta é facilmente verificável uma vez que supondo se o mapa γ acima é bijetivo, dar um diagrama $Y \overset{s}{\longleftarrow} X \overset{f}{\longrightarrow} I$ onde s é um quase isomorfismo nada mais é que dar um morfismo $(f/s) : Y \longrightarrow I$ em $\mathsf{D}(\mathcal{C})$, logo existe um único $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(Y, I)$

Agora, se I é um complexo homotopicamente injetivo, então dado um quase isomorfismo $f : Y \longrightarrow X$ existe um triangulo distinto $T :\ Y \overset{f}{\rightarrow} X \rightarrow M(f) \rightarrow Y[1]$. Mas, pela Observação 3.2.1, $M(f)$ é um complexo exato, logo, aplicando o funtor $\mathrm{Hom}(\bullet, I)$ no triangulo T obtemos a seguinte sequência

$$\mathrm{Hom}(M(f), I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M(f)[-1], I)$$

por hipótese $\mathrm{Hom}(M(f), I) = 0$ assim temos um isomorfismo

$$\circ f : \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(Y, I)$$

sempre que f for um quase isomorfismo. Concluímos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, I) = \underset{X \to Y \in S}{\underrightarrow{\mathrm{colim}}}\, \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(Y, I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, I).$$

□

Corolário 3.2.3. *Um objeto I em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ é homotopicamente injeto então, I^n é um objeto injetivo em $\mathcal{C}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que I^n não é nulo. Reciprocamente, todo complexo $I^\bullet$ limitado positivamente onde I^n é um objeto injetivo em $\mathcal{C}$, é homotopicamente injetivo em $\mathsf{K}^+(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Sejam I um objeto homotopicamente injetivo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ e n um inteiro. Então dado um diagrama $Y^n \xleftarrow{s^n} X^n \xrightarrow{f^n} I^n$ em $\mathcal{C}$ onde s^n é um mapa injetivo, definimos $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ como o seguinte complexo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dotted] & 0 \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{Coker}\, s^n \arrow[r, "\bar{\iota}"] & \mathrm{Coker}\, \iota \arrow[r] & 0 \arrow[r, dotted] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dotted] & 0 \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[u, "s_n"] \arrow[d, "f^n"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r] \arrow[u, "0"] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[r, dotted] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, dotted] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n \arrow[r] & I^{n+1} \arrow[r] & I^{n+2} \arrow[r] & I^{n+3} \arrow[r, dotted] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Assim $\mathrm{Coker}\, \iota \simeq 0$. Além disso, como s^n é um monomorfismo, segue da Observação 2.4.2 que $\mathrm{Im}\, s^n \simeq X^n$. Logo

$$H^n(X^\bullet) = \mathrm{Ker}(0 \longrightarrow X^n) = X^n \simeq \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\iota : Y^n \longrightarrow \mathrm{Coker}\, s^n) = H^n(Y^\bullet).$$

Temos que $s = (s^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, definido por s^n quando $i = n$ e 0 caso contrário, é um quase isomorfismo e como I é homotópicamente injetivo considerando o diagrama $Y^\bullet \xleftarrow{s} X^\bullet \xrightarrow{f} I^\bullet$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$, existe um mapa $g : Y^\bullet \longrightarrow I$ tal que, em particular, $g^n \circ s^n = f^n$. O que implica, pela Proposição 2.4.1, que I^n é um objeto injetivo em $\mathcal{C}$.

A segunda asserção segue em consequência da equivalência entre *(1)* e *(3)* na Proposição 3.2.6 pois assim, a Proposição 3.1.1 garante que todo objeto injetivo limitado inferiormente na categoria $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ é um complexo homotopicamente injetivo. □

Corolário 3.2.4. *Suponha que para cada $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ existe um quase isomorfismo $\varphi_X : X \longrightarrow I_X$ onde I_X é injetivo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Então todo funtor triangular $\mathcal{F} : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathcal{C}')$ possui funtor derivado à direita $(R\mathcal{F}, \zeta)$.*

Demonstração. Sob as condições de hipótese definimos, para cada $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$, o funtor derivado de $R\mathcal{F} : \mathsf{D}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathcal{C}')$ como

$$R\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(I_X), \quad \zeta(X) = \mathcal{F}(\varphi_X) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(I_X).$$

e tal que, para cada morfismo $f/s : X_1 \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} X_2$ em $\mathsf{D}(\mathcal{C})$, $R\mathcal{F}(f/s) = \mathcal{F}(f')^{-1} \circ \mathcal{F}(s')^{-1}$. Onde f' e s' são os únicos morfismos fazendo os diagramas comutarem em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & I_X \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f'} \\ X_2 & \xrightarrow{\varphi_{X_2}} & I_{X_2} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_X} & I_X \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f'} \\ X_1 & \xrightarrow{\varphi_{X_1}} & I_{X_1} \end{array}$$

O resultado segue da Proposição 3.2.6 e do Corolário 3.2.1. □

3.3 O BIFUNTOR $\mathrm{Hom}^\bullet$

Nesta seção vamos nos limitar a explorar um exemplo notável de bifuntor derivado à direita, o funtor de homomorfismos. Um tratamento mais geral pode ser encontrado em [15], seções 11.5, 11.6 , 11.7 e 13.4. Confira também a Proposição 2.2.7 de [4], na página 265 e [11], seção 6 do primeiro capítulo.

Definição 3.3.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Denotando por Gr a categoria dos grupos graduados, para todos objetos $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathsf{C}(\mathcal{C})$ definimos o complexo $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ como*

$$\mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Gr}}(X^\bullet, Y^\bullet[n]) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^p, Y^{p+n}).$$

De maneira que os diferenciais ficam definidos por $d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet}(f) = (d_Y^{p+n} \circ f^p + (-1)^{n+1} f^{p+1} \circ d_X^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, onde $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ com $f^p \in \mathrm{Hom}(X^p, Y^{p+n})$.

Proposição 3.3.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $X, Y \in \mathsf{C}(\mathcal{C})$. Então existe um isomorfismo*

$$H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X, Y[n]) \tag{3.18}$$

para todo inteiro n.

Demonstração. Temos que $\mathrm{Ker}(d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y[n])$. De fato, cada morfismo $(f^p)_{p\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$, pertence ao núcleo de $d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet}$ se e somente se $d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet}(f^p)_p = (d_Y^{p+n} \circ f^p + (-1)^{n+1} f^{p+1} \circ d_X^p)_p = 0$ ou equivalentemente, se para cada $p \in \mathbb{Z}$,

$$f^{p+1} \circ d_X^p = (-1)^n d_Y^{p+n} \circ f^p = d_{Y[n]}^p \circ f^p.$$

Assim, cada $(f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ determina unicamente um morfismo de complexos $f : X \longrightarrow Y[n]$.

Além disso, $\mathrm{Im}(d^{n-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet}) = \mathrm{Ht}(X, Y[n])$. Um morfismo $(f^p)_{p\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$ está em $\mathrm{Im}(d^{n-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet})$ se e somente se, existir um morfismo $(r^p) \in \mathrm{Hom}^{n-1}(X^\bullet, Y^\bullet)$ tal que para cada $p \in \mathbb{Z}$, $f^p = d^{n-1}r^p$. Então, tomando para todo p, $s^p = (-1)^n r^p$ temos

$$f^p = d^{n-1}((-1)^n s^p) = (-1)^n d_Y^{p+n-1} \circ s^p + s^{p+1} \circ d_X^p) = d_{Y[n]}^{p-1} \circ s^p + s^{p+1} \circ d_X^p.$$

Ou seja, para todo p inteiro, f^p é homotópico a zero, e $(f^p) \in \mathrm{Ht}(X, Y[n])$. Desse modo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y)) &= \mathrm{Ker}(d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet})/\,\mathrm{Im}(d^{n-1}_{\mathrm{Hom}^\bullet}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{C})}(X, Y[n])/\,\mathrm{Ht}(X, Y[n]) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(A)}(X, Y[n]). \end{aligned}$$

□

Corolário 3.3.1. *Um complexo I homotopicamente injetivo em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ se, e somente se, o funtor cohomológico $\mathrm{Hom}^\bullet(\bullet, I) : \mathsf{K}(\mathcal{C})^{op} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathit{Ab})$ leva quase isomorfismos em quase isomorfismos.*

Demonstração. De fato, pela Proposição 3.2.6, temos I homotopicamente injetivo se, e só se, $\mathrm{Hom}(X, I) \simeq 0$ para todo complexo exato $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$. Então, considere o triangulo $T : Y \xrightarrow{f} X \longrightarrow M(f) \longrightarrow Y[1]$ se f é um quase isomorfismo, então, pela Observação 3.2.1 $M(f)$ é exato. Aplicando $\mathrm{Hom}^\bullet(\bullet, I)$ em T obtemos a sequência exata

$$Hom^\bullet(M(f)[-1], I) \longrightarrow Hom^\bullet(X, I) \xrightarrow{\circ f} Hom^\bullet(Y, I) \longrightarrow Hom^\bullet(M(f), I)$$

Mas, para todo n, segue da Proposição 3.3.1 que

$$H^n(Hom^\bullet(M(f), I)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(M(f)[-n], I) = 0$$

Logo $(\circ f) : Hom^\bullet(X, I) \longrightarrow Hom^\bullet(Y, I)$ é um quase isomorfismo. □

Notemos, agora, que fixando o complexo X, obtemos um funtor

$$k^\bullet(X) = \mathrm{Hom}^\bullet(X, \bullet) : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathsf{Ab})$$

e, para todo $Y \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ e todo $n \in \mathbb{Z}$, temos $\mathrm{Hom}^n(X, Y[1]) \simeq \mathrm{Hom}^{n+1}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}^n(X, Y)[1]$. Notamos ainda que como $k^\bullet(X)$ comuta com soma direta, associa cones de mapeamento em cones de mapeamento, isto é, leva triângulos distintos em triângulos distintos. Logo, $k^\bullet(X)$ é um funtor triangular.

Além disso, Pelo Corolário 3.2.4, todo funtor triangular é derivável, de forma que, tomando $Y \longrightarrow I_Y$ uma resolução homotopicamente injetiva do complexo Y, temos

$$R(k^\bullet(X)) = R\,\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y) = \mathrm{Hom}^\bullet(X, I_Y)$$

Agora, para Y fixado e X variando, $h^\bullet(I_Y) = \mathrm{Hom}^\bullet(\bullet, I_Y) : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{K}(\mathsf{Ab})$ é um funtor contravariante triangular, confira [16], (1.5.3), página 23, que, pelo Corolário 3.3.1, leva quase isomorfismos em quase isomorfismos em $\mathsf{K}(\mathsf{Ab})$. Logo a composição com o funtor $\mathcal{Q}' : \mathsf{K}(\mathsf{Ab}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{Ab})$ define um único funtor $\mathcal{Q}' \operatorname{Hom}^\bullet : \mathsf{K}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{Ab})$ que leva quase isomorfismos em isomorfismos. Assim, obtemos um bifuntor derivado

$$R\operatorname{Hom}^\bullet : \mathsf{D}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{Ab}), \qquad R\operatorname{Hom}^\bullet(X,Y) = \mathcal{Q}' \operatorname{Hom}^\bullet(X, I_Y).$$

Teorema 3.3.1 (Yoneda). *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana onde todo complexo admita resolução homotopicamente injetiva. Então para todos $X, Y \in \mathsf{D}(\mathcal{C})$,*

$$H^n(R\operatorname{Hom}^\bullet(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n]).$$

Demonstração. Temos

$$H^n(R\operatorname{Hom}^\bullet(X,Y)) \simeq H^n(\operatorname{Hom}^\bullet(X, I_Y)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X[-n], I_Y).$$

Agora, aplicamos a Proposição 3.2.7 que garante que

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\mathcal{C})}(X[-n], I_Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X[-n], I_Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n]).$$

□

Observação 3.3.1. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana com X e Y objetos de $\mathsf{D}(\mathcal{C})$. Definimos o **n-ésimo hiperext** ou **grupo** Ext de X e Y como*

$$\operatorname{Ext}^n(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[n]).$$

Segue como consequência do Teorema 3.3.1 a definição usual do grupo Ext quando $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana e $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$,

$$\operatorname{Ext}^n(X,Y) = H^n(R\operatorname{Hom}^\bullet(X,Y)).$$

Isso é, $\operatorname{Hom}^\bullet$ é o funtor cuja cohomologia são os grupos Ext e o funtor $\operatorname{Ext}^n(X, \bullet)$ é o funtor derivado a direita do funtor $\operatorname{Hom}^n(X, \bullet)$.

3.4 Funtores Derivados em Geometria Algébrica

Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado e $\mathsf{Sh\text{-}Mod}(X)$ a categoria dos feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos. Denotamos simplesmente por $\mathsf{K}(X)$ a categoria de homotopia de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos, $\mathsf{K}(\mathsf{Sh\text{-}Mod}(X))$. De modo similar, denotamos por $\mathsf{D}(X)$ a categoria derivada de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos, $\mathsf{D}(\mathsf{Sh\text{-}Mod}(X))$. Denotamos por $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ a categoria derivada de feixes quase coerentes sobre X.

Resumiremos a seguir alguns conceitos e resultados de geometria algébrica importantes para a continuidade do trabalho.

Definição 3.4.1. *Dado um aberto U e $\mathscr{F}$ um $\mathcal{O}_X$-módulo, a restrição $\mathscr{F}|_U$ é um $\mathcal{O}_X|_U$-módulo, ou seja um $\Gamma(U,X)$-módulo. Se $\mathscr{F},\mathscr{G}$ são dois $\mathcal{O}_X$-módulos, então o pré-feixe*

$$U \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$

é um feixe, que possui uma estrutura de $\mathcal{O}_X$-módulo, chamamos esse feixe de ***Feixe*** $\mathscr{H}om$ *e denotamos por $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$. Dado $\mathscr{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos, definimos o* ***Feixe Dual*** *de $\mathscr{F}$ com o seguinte $\mathcal{O}_X$-módulo*

$$\mathscr{F}^\vee = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X).$$

Definição 3.4.2. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de espaços anelados. Dado um feixe $\mathscr{F}$ em X, definimos a* ***imagem direta*** *de f sobre $\mathscr{F}$ como o feixe $f_*\mathscr{F}$ em Y, onde para todo aberto $V \subseteq Y$*

$$f_*\mathscr{F}(V) \;=\; \mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

e os mapas restrição são dados pelos mapas restrição de $\mathscr{F}$; Dados abertos $V \subseteq U \subseteq Y$

$$\rho^{f_*\mathscr{F}}_{UV} = \rho^{\mathscr{F}}_{f^{-1}(U)f^{-1}(V)} : \mathscr{F}(f^{-1}(U)) \longrightarrow \mathscr{F}(f^{-1}(V))$$

Definição 3.4.3. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de espaços anelados. Dado um feixe $\mathscr{G}$ sobre Y, definimos a $f^{-1}\mathscr{G}$ como o feixe associado ao pré-feixe*

$$U \longmapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathscr{G}(V)$$

Se $\mathscr{G}$ é um feixe de $\mathcal{O}_Y$-módulos, definimos a ***imagem inversa*** *de G pelo morfismo f como o seguinte produto tensorial*

$$f^*\mathscr{G} = f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Observação 3.4.1. *Considere $i : X' \hookrightarrow X$ uma inclusão de espaços topológicos e $\mathscr{F}$ um $\mathcal{O}_X$-módulo. Já temos que $i^{-1}\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}|_X$. Assim*

$$i^*\mathscr{F} = i^{-1}\mathscr{F} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \simeq \mathscr{F}|_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X|_{X'}} \mathcal{O}_{X'} = \mathscr{F}|_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'} = \mathscr{F}|_{X'}.$$

Proposição 3.4.1. *O funtor f^* é adjunto à esquerda do funtor f_*. Isto é, para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ e todo $\mathcal{O}_Y$-módulo $\mathscr{G}$ existe um isomorfismo de $\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)$-módulos*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

Demonstração. Ver [10], seção 5, página 110. □

Proposição 3.4.2. *Sejam $(X,\mathcal{O}_X)$ um espaço anelado e $\mathscr{E}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulo localmente livre de posto finito, isto é, X pode ser coberto por uma cobertura aberta $\{U\}$ tal que $\mathscr{E}|_U = \bigoplus_{i<n} \mathcal{O}_X|_U$ onde n depende de U. Então*

1. *$(\mathscr{E}^\vee)^\vee \simeq \mathscr{E}$.*

2. *Para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$,* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \simeq \mathscr{E}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}$.

3. *Para todos $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$,* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}, \mathscr{G}))$.

4. *(Formula de Projeção) Se $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ é um morfismo de espaços anelados e $\mathscr{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos e $\mathscr{E}$ é um feixe de $\mathcal{O}_Y$-módulos localmente livre de posto finito. Então existe um isomorfismo natural*

$$f_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{E}.$$

Demonstração. Ver [10], exercício 5.1, página 123. □

Temos que, para todo esquema X a categoria $\mathsf{K}(\mathsf{Sh\text{-}Mod}(X))$ admite uma resolução homotopicamente injetiva para todo objeto $\mathscr{F}$. Este fato pode ser demonstrado de uma maneira mais geral considerando categorias de Grothendieck, que foram introduzidas em [7] com este objetivo. Para uma demonstração mais direta deste fato, ver [23] página 138, Teorema 4.5.

Definição 3.4.4. *Uma **Categoria de Grothendieck** $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ que admite um gerador e colimites tais que colimites filtrantes são exatos.*

Proposição 3.4.3. *Seja $(\mathcal{C}, T)$ uma categoria abeliana com translação tal que $\mathcal{C}$ é uma categoria de Grothendieck. Então, para todo $X \in \mathsf{C}(\mathcal{C})$ existe um quase isomorfismo $X \longrightarrow I$ onde I é um objeto homotopicamente injetivo de $\mathsf{C}(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Ver [15] seção 14.1 página 350. □

Para ver que a categoria $\mathsf{K}(\mathsf{Sh\text{-}Mod}(X))$ é uma categoria de Grothendieck pode-se consultar [7]. Temos a seguinte proposição.

Proposição 3.4.4. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado. Então para todo $\mathcal{F}$ na categoria $\mathsf{K}(\mathsf{Sh\text{-}Mod}(X))$ existe um quase isomorfismo $\varphi_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \longrightarrow I_{\mathscr{F}}$, funtorial em $\mathscr{F}$ tal que $I_{\mathscr{F}}$ é complexo homotopicamente injetivo e tal que $I_{\mathscr{F}[1]} = I_{\mathscr{F}}[1]$ e $\varphi_{shF[1]} = \varphi_{\mathscr{F}}[1]$.*

Funtores $\mathscr{H}om$ Locais. Seja X um espaço anelado. À exemplo da Definição 3.3.1, para todos objetos $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathsf{C}(X)$ definimos o complexo $\mathscr{H}om^\bullet(X, Y)$ como

$$\mathscr{H}om^n(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathscr{H}om(\mathscr{F}^p, \mathscr{G}^{p+n}).$$

A Proposição 3.3.1 garante que

$$H^n(\mathscr{H}om^\bullet(X, Y)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om(X, Y[n]) \tag{3.19}$$

Além disso, temos que, fixando-se $\mathscr{F}$ e depois $\mathscr{G}$, os funtores $\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}, \bullet)$ e $\mathscr{H}om^\bullet(\bullet, \mathscr{G})$ são triangulares. Contudo, para definir o derivado à direita de $\mathscr{H}om^\bullet$ precisamos dos seguintes resultados.

Lema 3.4.1. *Seja U um subconjunto aberto de X e $i : U \hookrightarrow X$ o mapa de inclusão. Então, para todo complexo homotopicamente injetivo $I \in \mathsf{K}(\textsf{Sh-Mod}(X))$ a restrição $i^*I = I|_U$ é um complexo homotopicamente injetivo em $\mathsf{K}(\textsf{Sh-Mod}(U))$.*

Demonstração. Dado um diagrama $\mathscr{G} \xleftarrow{s} \mathscr{F} \xrightarrow{f} i^*I$ de mapas em $\textsf{Sh-Mod}(U)$ onde s é um quase isomorfismo, podemos estender-lo à um diagrama em $\textsf{Sh-Mod}(X)$

$$i_!\mathscr{G} \xleftarrow{i_!s} i_!\mathscr{F} \xrightarrow{i_!f} i_!i^*I \xrightarrow{\iota} I$$

Onde, como $i_!$ é um funtor exato, temos que $i_!s$ é um quase isomorfismo e ι é a inclusão natural. Assim, por hipótese, existe um mapa $g : i_!\mathscr{G} \longrightarrow I$ tal que $g \circ i_!s = \iota \circ i_!f$. Agora, como i^* é adjunto à direita de $i_!$ temos

$$i^*g \circ s = i^*g \circ i^*i_!s = i^*\iota \circ i^*i_!f = 1 \circ f = f.$$

na categoria $\textsf{Sh-Mod}(U)$. Logo i^*I é homotopicamente injetivo. $\square$

Proposição 3.4.5. *Se I é um complexo homotopicamente injetivo em $\mathsf{K}(\textsf{Sh-Mod}(X))$, então o funtor $\mathscr{H}om^\bullet(\bullet, I)$ leva quase isomorfismos em quase isomorfismos.*

Demonstração. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}, I))$ é o feixe associado ao pré feixe,

$$V \longmapsto H^i(\Gamma(V, \mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}, I))) = H^i(\mathrm{Hom}^\bullet(\mathscr{F}|_V, I|_V)).$$

Como, pelo Lema 3.4.1 a restrição $I|_V$ é um complexo homotopicamente injetivo, pelo Corolário 3.3.1 o funtor $\mathrm{Hom}^\bullet(\bullet, I|_V)$ leva quase isomorfismos em quase isomorfismos. Logo, o funtor $\mathscr{H}om^\bullet(\bullet, I)$ também possui essa propriedade. $\square$

Assim, temos $\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}, \bullet)$ derivável à direita e $\mathscr{H}om(\bullet, \mathscr{G})$ preservando quase isomorfismos, basta tomar uma resolução homotopicamente injetiva de $\mathscr{G}$ caso necessário. Isso define o funtor derivado a direita do bifuntor $\mathscr{H}om^\bullet$ como

$$R\mathscr{H}om^\bullet : \mathsf{D}(X)^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D}(X) \longrightarrow \mathsf{D}(X), \quad R\mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathscr{H}om^\bullet(\mathscr{F}, I_{\mathscr{G}}).$$

Cohomologia e **Imagem direta**. Sejam X, Y espaços anelados, $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ um morfismo de espaços anelados e $(\mathscr{F} \longrightarrow I_{\mathscr{F}})_{\mathscr{F} \in \mathsf{K}(X)}$, $(P_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathscr{F})_{\mathscr{F} \in \mathsf{K}(X)}$ duas famílias de quase isomorfismos, onde $I_{\mathscr{F}}$ é um complexo q-injetivo e $P_{\mathscr{F}}$ é um complexo q-flat para todo $\mathscr{F}$. Então definimos o funtor

$$Rf_* : D(X) \longrightarrow D(Y), \quad \mathscr{F} \longmapsto Rf_*(\mathcal{F}) = f_*(I_{\mathscr{F}})$$

onde os morfismos ficam definidos segundo a demonstração do Corolário 3.2.4. Considere agora o funtor de seções globais

$$\Gamma(\bullet, X) : \textsf{Sh-Mod}(X) \longrightarrow \textsf{Mod}, \quad \mathscr{F} \longmapsto \mathscr{F}(X)$$

Notemos que, para toda função contínua $f : X \longrightarrow Y$, quando $Y = \{y\}$ é um espaço topológico constituído de um único ponto teremos $f_*(\mathscr{F}) = (\mathscr{F}(f^{-1}(U)))_{U \subset Y} = \mathscr{F}(X) = \Gamma(X, \mathscr{F})$. Nesse caso temos para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$Rf_* = R\Gamma, \qquad H^i(Rf_*(\bullet)) = H^i(R\Gamma(X, \bullet)) = \mathcal{H}^i(X, \bullet).$$

onde o funtor $\mathcal{H}(X, \bullet) : D(X) \longrightarrow D(\mathsf{Ab})$ é chamado de **funtor de cohomologia de feixes** e para cada feixe $\mathscr{F}$ e cada $i \in \mathbb{Z}$ o grupo abeliano $\mathcal{H}^i(X, \mathscr{F})$ é chamado de **i-ésimo grupo de cohomologia** do feixe $\mathscr{F}$.

Lema 3.4.2 (Mayer-Vietoris). *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de espaços anelados. Suponha que X possa ser escrito como a união entre dois abertos $X = U \cup V$. Então, para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ existe um triangulo*

$$Rf_*(\mathscr{F}) \longrightarrow Rf|_{U*}(\mathscr{F}|_U) \oplus Rf|_{V*}(\mathscr{F}|_V) \longrightarrow Rf|_{U \cap V*}(\mathscr{F}|_{U \cap V}) \longrightarrow Rf_*(\mathscr{F})[1]$$

Demonstração. Pela Proposição 3.4.4 para todo objeto $\mathscr{F} \in \mathsf{D}(X)$, existe uma resolução injetiva $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}$. Segue do Corolário 3.2.3 que $\mathcal{I}^n$ é um objeto injetivo sempre que $\mathcal{I}^n$ for não nulo. Assim, para todos conjuntos abertos $U' \subset U \subset X$ dadas imersões abertas $j : U \longrightarrow X$ e $j' : U' \longrightarrow X$ podemos considerar o funtor extensão por zero $j_!$. Como $j_!$ é adjunto à direita do funtor restrição j^* temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{O}_U, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathscr{F}|_U)) \simeq \mathscr{F}(U), \tag{3.20}$$

isto é, $j_!\mathcal{O}_U$ é o objeto que representa o funtor $\mathscr{F} \longmapsto \mathscr{F}(U)$. Agora, como o mapa $j'_!\mathcal{O}_{U'} \longrightarrow j_!\mathcal{O}_U$ é injetivo e $\mathcal{I}^n$ é um objeto injetivo temos que

$$\mathrm{Hom}(j_!\mathcal{O}_U, \mathcal{I}^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(j'_!\mathcal{O}_{U'}, \mathcal{I}^n)$$

é sobrejetivo, logo, pelo isomorfismo (3.20) o mapa $\mathcal{I}^n(U) \longrightarrow \mathcal{I}^n(U')$ também é. Pela condição de feixe e pelo observado acima para os mapas $1 : \mathcal{I}^n(U) \longrightarrow \mathcal{I}^n(U \cap V)$ e $-1 : \mathcal{I}^n(V) \longrightarrow \mathcal{I}^n(U \cap V)$ obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^n(X) \longrightarrow \mathcal{I}^n(U) \oplus \mathcal{I}^n(V) \xrightarrow{(1,-1)} \mathcal{I}^n(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Assim, para todo conjunto aberto $W \subseteq Y$ e todo inteiro n temos que a sequência abaixo é exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^n(f^{-1}(W)) \longrightarrow \mathcal{I}^n(U \cap f^{-1}(W)) \oplus \mathcal{I}^n(V \cap f^{-1}(W)) \longrightarrow \mathcal{I}^n(U \cap V \cap f^{-1}(W)) \to 0.$$

Que, por sua vez, induz uma sequência exata na categoria $\mathsf{K}(\textsf{Sh-Mod}(X))$,

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{I} \longrightarrow (f|_U)_*\mathcal{I}|_U \oplus (f|_V)_*\mathcal{I}|_V \longrightarrow (f|_{U \cap V})_*\mathcal{I}|_{U \cap V} \longrightarrow 0.$$

Agora, aplicando a definição de funtor derivado à direita da imagem direta obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Rf_*\mathscr{F} \longrightarrow R(f|_U)_*\mathscr{F}|_U \oplus R(f|_V)_*\mathscr{F}|_V \longrightarrow R(f|_{U\cap V})_*\mathscr{F}|_{U\cap V} \longrightarrow 0$$

Logo, o resultado segue da Proposição 3.2.1. □

Lema 3.4.3. *Sejam X um esquema separado quase-compacto e Y um esquema. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo separado e $Rf_* : \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ o funtor derivado a direita da imagem direta de f. Então o mapa natural*

$$\coprod_{i\in I} Rf_*(\mathscr{F}_i) \longrightarrow Rf_*\left(\coprod_{i\in I}\mathscr{F}_i\right)$$

é um isomorfismo. Em outras palavras, Rf_* respeita coprodutos.

Demonstração. Como a questão é local em Y, podemos assumir que Y é um esquema afim. Além disso, X admite uma cobertura finita $\{U_i\}_{i\leq n}$, i inteiro positivo, de n abertos afim, pois é um esquema quase compacto. Assim, podemos prosseguir por indução sobre n.

Se $n = 1$ então $X = U_1$ é um esquema afim. Assim, o mapa $f : \mathrm{Spec}(A) = X \longrightarrow Y = \mathrm{Spec}(B)$ corresponde a um homomorfismo de anéis $B \longrightarrow A$ e a categoria $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ nada mais é que a categoria derivada de complexos de A-módulos $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}(A))$. Desse modo, o mapa $Rf_* : \mathsf{D}(\mathsf{Mod}(B)) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{Mod}(A))$ claramente respeita coprodutos.

Agora, se $n > 1$ suponhamos o resultado para to esquema separado quase compacto que admita cobertura de $n-1$ abertos afins. Sejam $U = U_1$ e $V = \bigcup_{i=2}^n U_i$ de modo que $U \cap V = \bigcup_{i=2}^n (U_1 \cap U_i)$ onde cada interseção $U_1 \cap U_i$ é um aberto afim, pois X é separado. Segue por indução, o resultado para os mapas $f_U : U \longrightarrow Y$, $f_V : V \longrightarrow Y$ e $f_{U\cap V} : U \cap V \longrightarrow Y$. Além disso, pelo Lema 3.4.2 existe um triangulo,

$$Rf_*(\mathscr{F}) \longrightarrow R(f_U)_*(i_U^*\mathscr{F}) \oplus R(f_V)_*(i_V^*\mathscr{F}) \longrightarrow R(f_{U\cap V})_*(i_{U\cap V}^*\mathscr{F}) \longrightarrow Rf_*(\mathscr{F})[1]$$

onde denotamos $i_U : U \hookrightarrow X$, $i_V : V \hookrightarrow X$ e $i_{U\cap V} : U \cap V \hookrightarrow X$ as inclusões. Como o funtor i^* possui adjunto à esquerda, dado por i_*, pela Proposição 2.3.2, i^* comuta com coprodutos. De modo que obtemos o seguinte morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
\coprod Rf_*(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \coprod R(f_U)_*(i_U^*\mathscr{F}) \oplus R(f_V)_*(i_V^*\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \coprod R(f_{U\cap V})_*(i_{U\cap V}^*\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \coprod Rf_*(\mathscr{F})[1] \arrow[d] \\
Rf_*(\coprod \mathscr{F}) \arrow[r] & R(f_U)_*i_U^*(\coprod \mathscr{F}) \oplus R(f_V)_*i_V^*(\coprod \mathscr{F}) \arrow[r] & R(f_{U\cap V})_*i_{U\cap V}^*(\coprod \mathscr{F}) \arrow[r] & Rf_*(\coprod \mathscr{F})[1]
\end{tikzcd}$$

E já que, pela hipótese de indução ϕ e ψ são isomorfismos, concluímos, através de TR 3 e da Proposição 2.4.3, que γ é um isomorfismo e o resultado vale para f. □

Observação 3.4.2. *Note que na demonstração do Lema* 3.4.3 *podemos substituir coprodutos por colimites em geral. Assim Rf_* respeita colimites. Então se X é um esquema separado quase-compacto, como X é separado sobre* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, *existe um morfismo separado $f : X \longrightarrow$* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. *Assim, temos $Rf_* = R\Gamma(X, \bullet)$ e o resultado segue do Lema 3.4.3. Logo, o funtor de cohomologia de feixes .*

$$\mathcal{H}^i(X, \bullet) : D(X) \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

respeita colimites.

Produto Tensorial e Imagem Inversa

Definição 3.4.5. *Sejam X um espaço anelado e $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ complexos em* $\mathsf{C}(\mathsf{Sh\text{-}Mod}(X))$. *Definimos o complexo $\mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{G}^\bullet$ tomando para cada n inteiro*

$$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})^n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (\mathscr{F}^p \otimes \mathscr{G}^{n-p})$$

e onde cada diferencial $d^n_{\mathscr{F}^\bullet \otimes \mathscr{G}^\bullet} : (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})^n \longrightarrow (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})^{n+1}$ é o único mapa cuja restrição à $(\mathscr{F}^p \otimes \mathscr{G}^{n-p})$ é

$$d^n|_{(\mathscr{F}^p \otimes \mathscr{G}^{n-p})} = d^p_{\mathscr{F}} \oplus 1 + (-1)^p \oplus d^{n-p}_{\mathscr{G}}.$$

Pode-se mostrar que fixando $\mathscr{F}$, $\mathcal{F} = (\mathscr{F} \otimes \bullet)^\bullet : \mathsf{K}(X) \longrightarrow \mathsf{K}(X)$ é um funtor triangular, assim como é triangular o funtor $\mathcal{G} = (\bullet \otimes \mathscr{G})^\bullet : \mathsf{K}(X) \longrightarrow \mathsf{K}(X)$ com $\mathscr{G}$ fixado. Ver [16], (1.5.4), página 24.

Definição 3.4.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana, X e Y complexos em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$. Dizemos que um complexo $P \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$ é **flat** se para todo quase isomorfismo $X \longrightarrow Y$ em $\mathsf{K}(\mathcal{C})$ o morfismo $P \otimes X \longrightarrow P \otimes Y$ também é um quase isomorfismo, Ou equivalentemente, pela Observação* 3.2.1, *se para todo complexo exato $X \in \mathsf{K}(\mathcal{C})$, o complexo $P \otimes X$ é exato.*

Temos que $\mathsf{K}(\mathsf{Sh\text{-}Mod})$ também admite resoluções K-flat para todos os seus objetos.

Proposição 3.4.6. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado. Então para todo complexo $\mathscr{F}$ em $\mathsf{K}(X)$ existe um quase isomorfismo $\psi_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \longrightarrow P_{\mathscr{F}}$ funtorial em $\mathscr{F}$ onde $P_{\mathscr{F}}$ é um complexo flat e tal que $P_{\mathscr{F}[1]} = P_{\mathscr{F}}[1]$ e $\psi_{\mathscr{F}[1]} = \psi_{\mathscr{F}}[1]$.*

Demonstração. Ver [16] seção 2.5 página 56. □

Fixando o complexo $\mathscr{G}$, temos que complexos K-flat em $\mathsf{K}(X)$ são $\mathcal{G} = (\bullet \otimes \mathscr{G})^\bullet$-acíclicos à esquerda. De fato, se $\mathscr{F}$ é K-flat e exato, podemos assumir $\mathscr{G}$ K-flat, pois, existe um quase isomorfismo $P_{\mathscr{G}} \longrightarrow \mathscr{G}$, logo $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})^\bullet$ é um complexo exato, de onde segue, pela Proposição 3.4.6 que $\mathcal{G}$ leva quase isomorfismos em quase isomorfismos em $\mathsf{K}(X)$, de modo que $Q\mathcal{G}$ leva quase isomorfismos em isomorfismos em $\mathsf{D}(X)$.

Agora, utilizando o resultado dual à Proposição 3.2.5 definimos o derivado à esquerda do funtor $\mathcal{G}$ como

$$L\mathcal{G}(\mathscr{F}) = \mathcal{G}(P_{\mathscr{F}}) = P_{\mathscr{F}} \otimes \mathscr{G} \simeq P_{\mathscr{F}} \otimes P_{\mathscr{G}} \simeq \mathscr{F} \otimes P_{\mathscr{G}}$$
$$\xi(\mathscr{F}) = \mathcal{G}(\psi_{\mathscr{F}}) : \mathcal{G}(P_{\mathscr{F}}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathscr{F}).$$

Além disso, fixando $\mathscr{F}$, podemos supor que $\mathscr{F}$ é K-flat, logo por definição $\mathcal{F}$ leva quase isomorfismos em quase isomorfismos. Logo, define de modo único um funtor $\mathcal{QF} : \mathsf{D}(X) \longrightarrow \mathsf{D}(X)$. Então existe um bifuntor chamado **Produto tensorial** denotado por

$$\bullet \otimes^L \bullet : \mathsf{D}(X) \times \mathsf{D}(X) \longrightarrow \mathsf{D}(X), \quad \mathscr{F} \otimes^L \mathscr{G} = \mathscr{F} \otimes P_{\mathscr{G}}.$$

que é triangular em cada variável.

Sejam X, Y espaços anelados, $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ um morfismo de espaços anelados e $(P_{\mathscr{F}} \longrightarrow \mathscr{F})_{\mathscr{F} \in \mathsf{K}(X)}$ uma família de quase isomorfismos, onde $P_{\mathscr{F}}$ é um complexo K-flat para todo $\mathscr{F}$. Então definimos o funtor

$$Lf^* : D(Y) \longrightarrow D(X), \quad \mathscr{G} \longmapsto Lf^*(\mathscr{G}) = f^{-1}\mathscr{G} \otimes^L \mathcal{O}_X = f^{-1}P_{\mathscr{G}} \otimes \mathcal{O}_X = f^*(P_{\mathscr{G}})$$

onde os morfismos ficam definidos segundo a demonstração do Corolário 3.2.4.

Proposição 3.4.7. *Para todo mapa entre espaços anelados $f : X \longrightarrow Y$, o Lf^* é adjunto a esquerda do funtor Rf_*. Isto é, existe um isomorfismo*

$$\mathrm{Hom}_{D(Y)}(Lf^*\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathscr{F}, Rf_*\mathscr{G}) \tag{3.21}$$

funtorial em $\mathscr{F} \in \mathsf{D}(X)$ e em $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(Y)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.3 basta mostrar existência da unidade e da co-unidade para a adjunção (3.27). Pela Proposição 3.4.1 existe uma adjunção $(f^*, f_*, \varepsilon', \eta')$. Assim, como Lf^*Rf_* é o funtor derivado a direita de Lf^*f_* e o funtor derivado à esquerda de f^*Rf_*, segue da Definição 3.2.4 os isomorfismos

$$(\mathcal{Q} \circ \zeta) : \mathrm{Hom}(Lf^*Rf_*, id_{Rf_*}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Lf^*(\mathcal{Q}' \circ f_*), id_{Rf_*} \circ \mathcal{Q}), \tag{3.22}$$
$$(\xi \circ \mathcal{Q}) : \mathrm{Hom}(id_{Lf^*}, Lf^*Rf_*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(id_{Lf^*} \circ \mathcal{Q}, f^*(\mathcal{Q}' \circ Rf_*)), \tag{3.23}$$

para todo funtor $\mathcal{G} : \mathsf{D}(Y) \longrightarrow \mathsf{D}(X)$. De modo que definimos a co-unidade $\eta : Lf^*Rf_* \longrightarrow id_{Rf_*}$ como o morfismo associado, pelo isomorfismo (3.22) acima, à composição

$$Lf^*\mathcal{Q}'f_* \xrightarrow{\xi} \mathcal{Q}f^*f_* \xrightarrow{\eta'} \mathcal{Q}id_{f_*} = id_{Rf_*}\mathcal{Q}.$$

Por construção $\eta \circ \zeta = \eta' \circ \xi$. Assim, temos um diagrama comutativo para todo $\mathscr{F} \in \mathsf{K}(X)$

$$\begin{tikzcd} Lf^*f_*\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & Lf^*Rf_*\mathscr{F} \arrow[d, "\eta(\mathscr{F})"] \\ f^*f_*\mathscr{F} \arrow[r, "\eta'(\mathscr{F})"'] & \mathscr{F} \end{tikzcd} \tag{3.24}$$

Dualmente, definimos de modo similar a unidade $\varepsilon : id_{Lf^*} \longrightarrow Lf^*Rf_*$ como o morfismo associado, pelo isomorfismo (3.23) acima, à composição

$$id_{Lf^*}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}id_{f^*} \xrightarrow{\varepsilon'} \mathcal{Q}f^*f_* \xrightarrow{\zeta} f^*\mathcal{Q}'Rf_*,$$

obtendo assim o seguinte diagrama comutativo para todo $\mathscr{G} \in \mathsf{K}(Y)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G} \arrow[r, "\varepsilon(\mathscr{G})"] \arrow[d, "\varepsilon'(\mathscr{G})"'] & f_*f^*\mathscr{G} \arrow[d] \\
Rf_*Lf^*\mathscr{G} \arrow[r] & Rf_*f^*\mathscr{G}
\end{tikzcd} \tag{3.25}$$

Combinando os diagramas (3.24) e (3.25) obtemos

$$\begin{tikzcd}
Lf^* \arrow[rr, "\xi"] \arrow[d, equal] & & f^* \arrow[d, "\varepsilon' \circ f^*"] \\
Lf^* \arrow[r, "Lf^* \circ \varepsilon'"] \arrow[d, "Lf^* \circ \varepsilon"] & Lf^*f_*f^* \arrow[r] \arrow[d] & f^*f_*f^* \arrow[d, "f^* \circ \eta'"] \\
Lf^*Rf_*Lf^* \arrow[r] \arrow[d, "\eta \circ Lf^*"] & Lf^*Rf_*f^* \arrow[r, "\eta \circ f^*"] & f^* \arrow[d, equal] \\
Lf^* \arrow[rr, "\xi"] & & f^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f_* \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[d, equal] & & Rf_* \arrow[d, "\varepsilon \circ Rf_*"] \\
f_* \arrow[r, "\varepsilon \circ f_*"] \arrow[d, "\varepsilon' \circ f_*"] & Rf_*Lf^*f_* \arrow[r] \arrow[d] & Rf_*Lf^*Rf_* \arrow[d, "Rf_* \circ \eta"] \\
f_*f^*f_* \arrow[r] \arrow[d, "f_* \circ \eta'"] & Rf_*f^*f_* \arrow[r, "Rf_* \circ \eta'"] & Rf_* \arrow[d, equal] \\
f_* \arrow[rr, "\zeta"] & & Rf_*
\end{tikzcd} \tag{3.26}$$

onde os subdiagramas superior e inferior, de cada um dos diagramas em (3.25), comutam pela naturalidade das transformações ξ e ζ. Logo temos, pela comutatividade de (3.24) e (3.25), que os dois diagramas em (3.26) comutam. Assim

$$(Lf^* \circ \varepsilon) \circ (\eta \circ Lf^*) = \xi \circ (\varepsilon' \circ f^*) \circ (f^* \circ \eta') = \xi \circ id_{f^*} = id_{Lf^*} \circ \xi,$$

$$\zeta \circ (Rf_* \circ \eta) \circ (\varepsilon \circ Rf_*) = (f_* \circ \eta') \circ (\varepsilon' \circ f_*) \circ \zeta = id_{f_*} \circ \zeta = \zeta \circ id_{Rf_*}.$$

Já que ξ é um epmorfismo e ζ é um monomorfismo, concluímos que $(Lf^* \circ \varepsilon) \circ (\eta \circ Lf^*) = id_{Lf^*}$ e $(Rf_* \circ \eta) \circ (\varepsilon \circ Rf_*) = id_{Rf_*}$, o que caracteriza $(Lf^*, Rf_*, \varepsilon, \eta)$ como uma adjunção. $\square$

Proposição 3.4.8. *Para todo mapa $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços anelados, existe um isomorfismos triangular*

$$Rf_*R\mathscr{H}om(Lf^*\mathscr{G}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\;\sim\;} R\mathscr{H}om_Y(\mathscr{G}, Rf_*\mathscr{F}) \tag{3.27}$$

natural em $\mathscr{G} \in \mathsf{K}(Y)$ e $\mathscr{F} \in \mathsf{K}(X)$.

Demonstração. Note que, para todo feixe $\mathscr{G}$ e $V \subset Y$ aberto, $f^*\mathscr{G}|_{f^{-1}(V)} = (f|_{f^{-1}(V)})^*\mathscr{G}|_V$, logo temos $f_*\mathscr{H}om(f^*\mathscr{G}, \mathscr{F})(V) = \mathrm{Hom}((f^*\mathscr{G})|_{f^{-1}(V)}, \mathscr{F}|_{f^{-1}(V)}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{G}|_V, \mathscr{F}|_{f^{-1}(V)}) =$

$\mathscr{H}om(\mathscr{G}, f^*\mathscr{F})(V)$. Então, vamos mostrar que os seguintes mapas são de fato isomorfismos.

$$\begin{tikzcd} f_*\mathscr{H}om_X(f^*\mathscr{G},\mathscr{F}) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\wr"] & Rf_*\mathscr{H}om_X(f^*\mathscr{G},\mathscr{F}) \arrow[r, "b"] & Rf_*R\mathscr{H}om_X(Lf^*\mathscr{G},\mathscr{F}) \\ \mathscr{H}om_Y(\mathscr{G},f_*\mathscr{F}) \arrow[r, "c"] & R\mathscr{H}om_Y(\mathscr{G},f_*\mathscr{F}) \arrow[r, "d"] & R\mathscr{H}om_Y(\mathscr{G},Rf_*\mathscr{F}). \end{tikzcd}$$

Para isso, consideramos, sem perda de generalidade, $\mathscr{G}$ um complexo K-flat e $\mathscr{F}$ homotopicamente injetivo, pois caso contrario basta tomar as respectivas resoluções. Então, já temos que b e d são mapas identidade. Agora, como $\mathcal{O}_X$ é um complexo exato, sendo $\mathscr{G}$ K-flat, $f^*\mathscr{G} = f^{-1}(\mathscr{G}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$ também é exato, e temos que $f^*\mathscr{G}$ é K-flat. Além disso, seja $\mathscr{E}$ um complexo exato em $\mathsf{K}(X)$, temos

$$\mathscr{H}om(\mathscr{E}, \mathscr{H}om(f^*\mathscr{G},\mathscr{F})) = \mathscr{H}om(\mathscr{E}\otimes f^*\mathscr{G},\mathscr{F}) = 0$$

pois $\mathscr{E}\otimes f^*\mathscr{G}$ é exato e $\mathscr{F}$ é homotopicamente injetivo, assim podemos usar a Proposição 3.2.6. Por essa mesma Proposição, vemos que $\mathscr{H}om(f^*\mathscr{G},\mathscr{F})$ é homotopicamente injetivo, de onde segue que a é o mapa identidade.

Para o morfismo c, vamos checar que para todo aberto $V \subset Y$, $\Gamma(V,c)$ é um isomorfismo. Seja $j : V \hookrightarrow Y$ e $j' : f^{-1}(V) \hookrightarrow X$ os mapas de inclusão e $f' : f^{-1}(V) \longrightarrow V$ a restrição de f à $f^{-1}(V)$. Então, $j^*f_* = f'_*(j')^*$, e considerando resoluções homotopicamente injetivas, temos um diagrama comutativo de quase isomorfismos

$$\begin{tikzcd} j^*f_* \arrow[r] \arrow[d, equal] & j^*I_{f_*} \arrow[d, "\gamma"] \\ j^*f_* \arrow[r] & I_{j^*f_*} \end{tikzcd}$$

Sabemos, pelo Lema 3.4.1 que $j^*I_{f_*}$ é homotopicamente injetivo, logo γ é um isomorfismo em $\mathsf{K}(U)$. Então, podemos considerar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma(V,\mathscr{H}om_Y(\mathscr{G},f^*\mathscr{F})) \arrow[r, "\Gamma(V,c)"] \arrow[d, equal] & \Gamma(V,\mathscr{H}om_Y(\mathscr{G},f^*\mathscr{F})) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}(j^*\mathscr{G}, j^*f_*\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(j^*\mathscr{G}, j^*I_{f_*\mathscr{F}}) \arrow[d, "\gamma\circ", "\wr"'] \\ \mathrm{Hom}(j^*\mathscr{G}, j^*f_*\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(j^*\mathscr{G}, I_{j^*f_*\mathscr{F}}) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}(j^*\mathscr{G}, f'_*(j')^*\mathscr{F}) \arrow[r, "c'_V"] & R\,\mathrm{Hom}(j^*\mathscr{G}, f'_*(j')^*\mathscr{F}) \end{tikzcd} \tag{3.28}$$

Note que $j^*\mathscr{G}$ é $K-flat$ pois é a imagem inversa de um complexo $K-flat$ e $f'_*(j')^*\mathscr{F}$ é homotopicamente injetivo, pois é a imagem direta de uma restrição de um complexo homotopicamente injetivo. Logo c'_V é um isomorfismo, de onde concluímos que $\Gamma(V, c)$ também é um isomorfismo. $\square$

4 DUALIDADE DE GROTHENDIECK

4.1 $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ É COMPACTAMENTE GERADA

Proposição 4.1.1. *Sejam X um esquema separado quase compacto e $\mathscr{L}$ um feixe invertível. O complexo definido por $\mathscr{L}$ em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ é um objeto compacto dessa categoria. Além disso, se $\mathscr{L}$ é um feixe amplo, então o conjunto $G = \{\mathscr{L}^{\otimes m}[n] \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto de geradores compactos para $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$.*

Demonstração. Para todo feixe quase coerente $\mathscr{F}$ temos um isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{L}, \mathscr{F}) \simeq \Gamma(X, \mathscr{H}om(\mathscr{L}, \mathscr{F})) = \mathcal{H}^0(\mathscr{H}om(\mathscr{L}, \mathscr{F})) \simeq \mathcal{H}^0(\mathscr{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{F}) \tag{4.1}$$

Agora, como o funtor de cohomologia e o produto tensorial comutam com o colimite, pois o produto tensorial admite adjunto à direita, Proposição 2.3.2, para todo complexo de feixes invertíveis $\mathscr{L} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ e todo diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$, segue que

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{L}, \varinjlim \alpha) \simeq \mathcal{H}^0(\mathscr{L}^\vee \otimes \varinjlim \alpha) \simeq \varinjlim \mathcal{H}^0(\mathscr{L}^\vee \otimes \alpha) \simeq \varinjlim \mathrm{Hom}(\mathscr{L}, \alpha).$$

Logo, $\mathscr{L}$ é um objeto compacto de $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$.

Afirmamos que, dado $\mathscr{L}$ um complexo de feixes amplos invertíveis, o conjunto

$$G = \{\mathscr{L}^{\otimes m}[n] \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

é um conjunto de geradores para a categoria $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$. Para mostrar essa afirmação, vamos usar a contra-positiva na definição de objetos geradores. Seja $\mathscr{F} \neq 0$ um objeto de $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$. Então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $H^{-n}(\mathscr{F}) \neq 0$. Como $\mathscr{L}$ é amplo por hipótese, para $t \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande, $\mathscr{L}^{\otimes t} \otimes H^{-n}(\mathscr{F})$ tem seções globais não nulas. Agora, por definição do funtor H, para todo $\mathscr{F}$ existe um mapa sobrejetivo $\mathrm{Ker}(\mathscr{F}^{-n} \longrightarrow \mathscr{F}^{-n+1}) \longrightarrow H^{-n}(\mathscr{F})$ de forma que obtemos um mapa de grupos abelianos

$$\mathrm{Ker}\left(\Gamma(\mathscr{L}^{\otimes t} \otimes \mathscr{F}^{-n}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{L}^{\otimes t} \otimes \mathscr{F}^{-n+1})\right) \longrightarrow \Gamma(H^{-n}(\mathscr{L}^{\otimes t} \otimes \mathscr{F})$$

também sobrejetivo. Assim, podemos obter uma seção $s \in \Gamma(\mathscr{L}^{\otimes t} \otimes \mathscr{F}^{-n})$ cuja imagem em $\Gamma(\mathscr{L}^{\otimes t} \otimes \mathscr{F}^{-n+1})$ é 0 e a imagem em $\Gamma(H^{-n}(\mathscr{L}^{\otimes t} \otimes \mathscr{F}))$ não é nula. Dessa forma, a imagem de s nos da um mapa $\mathscr{L}^{\otimes -t}[n] \longrightarrow \mathscr{F}$ não nulo através do isomorfismo

$$\Gamma(H^{-n}(\mathscr{L}^t \otimes \mathscr{F})) \simeq \Gamma(H^{-n}\mathscr{H}om(\mathscr{L}^{-t}, \mathscr{F})) \simeq \Gamma(\mathscr{H}om(\mathscr{L}^{-t}[n], \mathscr{F})) = \mathrm{Hom}(\mathscr{L}^{-t}[n], \mathscr{F}).$$

Portanto, concluímos que $\mathrm{Hom}(\mathscr{L}^{\otimes -t}[n], \mathscr{F}) = 0$ implica em $\mathscr{F} = 0$. $\square$

Note que até agora se faz necessária a hipótese do esquema X admitir um feixe amplo invertível para que $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ seja compactamente gerada. Vamos mostrar, utilizando o Teorema da localização de Thomason, que esse resultado é valido para qualquer esquema. Comecemos mostrando que todo complexo perfeito em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ é um objeto compacto.

Definição 4.1.1. *Dizemos que um complexo $\mathscr{F} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ é um **complexo perfeito** se localmente, $\mathscr{F}$ for isomorfo a um complexo limitado finitamente gerado de $\mathcal{O}_X$-módulos projetivos. Isto é, para todo aberto $U \subset X$ tal que, denotando $j_U : U \hookrightarrow X$ a inclusão, $L(j_U)^*\mathscr{F}^\bullet \simeq (\bigoplus_m \mathscr{G})^\bullet$ onde $\mathscr{G} \in \mathsf{Sh\text{-}Mod}(X)$ e $(\bigoplus_m \mathscr{G})^n = 0$ para $|n| >> 0$.*

Proposição 4.1.2. *Seja X um esquema quase compacto separado. Dado um diagrama $\alpha : I \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$, o mapa natural*

$$\phi_{\mathscr{F}} : \varinjlim R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \alpha) \longrightarrow R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \varinjlim \alpha)$$

é um isomorfismo se $\mathscr{F}$ for um complexo perfeito.

Demonstração. Como a questão é local em X, podemos supor X um esquema afim e $\mathscr{F}$ um complexo limitado finitamente gerado de $\mathcal{O}_X$-módulos. Então, se $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X^{\oplus m}[n]$, o mapa $\phi_{\mathscr{F}}$ é um isomorfismo, pois

$$\varinjlim R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \alpha) \simeq \varinjlim \alpha \simeq R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \varinjlim \alpha).$$

Agora, se $\mathscr{F} = \mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}''$ e $\phi_{\mathscr{F}}$ for um isomorfismo, então $\phi_{\mathscr{F}'}$ e $\phi_{\mathscr{F}''}$ também serão, assim, $\phi_{\mathscr{F}}$ é um isomorfismo sempre que $\mathscr{F}$ for a translação de um módulo projetivo finitamente gerado. Com isso, podemos usar o Lema 2.5.4 para concluir a prova. Tomamos $\mathcal{C}$ a categoria dos complexos limitados finitamente gerado de $\mathcal{O}_X$-módulos e $\mathcal{S}$ a subcategoria plena de $\mathcal{C}$ formada por objetos $\mathscr{F}$ tais que $\phi_{\mathscr{F}}$ é um isomorfismo. Por definição $\mathcal{S}$ é fechada para soma direta e, pelo que vimos acima, contem o conjunto de geradores de $\mathcal{C}$, isto é, $\mathcal{O}_X$-módulos finitamente gerados. Resta mostrar que $\mathcal{S}$ é fechada para a geração de triângulos. Todo mapa $\mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F}''$ em $\mathcal{S}$ define um triangulo $\mathscr{F}' \longrightarrow \mathscr{F}'' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'[1]$ em $\mathcal{C}$. Aplicando os funtores triangulares $\varinjlim R\mathscr{H}om(\bullet, \alpha)$ e $R\mathscr{H}om(\bullet, \varinjlim \alpha)$ obtemos o seguinte morfismo de triângulos

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim R\mathscr{H}om(\mathscr{F}', \alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{\mathscr{F}'}"] & \varinjlim R\mathscr{H}om(\mathscr{F}'', \alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{\mathscr{F}''}"] & \varinjlim R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{\mathscr{F}}"] & \varinjlim R\mathscr{H}om(\mathscr{F}', \alpha)[1] \arrow[d] \\
R\mathscr{H}om(\mathscr{F}', \varinjlim \alpha) \arrow[r] & R\mathscr{H}om(\mathscr{F}'', \varinjlim \alpha) \arrow[r] & R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \varinjlim \alpha) \arrow[r] & R\mathscr{H}om(\mathscr{F}', \varinjlim \alpha)[1]
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $\phi_{\mathscr{F}'}$ e $\phi_{\mathscr{F}''}$ são isomorfismos, segue da Proposição 2.4.3 que $\phi_{\mathscr{F}}$ é um isomorfismo. Pelo Lema 2.5.4 $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ de onde segue $\phi_{\mathscr{F}}$ é um isomorfismo sempre que $\mathscr{F}$ é um complexo perfeito. □

Corolário 4.1.1. *Seja X um esquema quase compacto separado. Se $\mathscr{F}$ é um complexo perfeito em $\mathsf{D}(\mathit{QCoh}/X)$, então $\mathscr{F}$ é um objeto compacto.*

Demonstração. Se $\mathscr{F}$ é perfeito, então da Proposição 4.1.2 e da Observação 3.4.2 obtemos o isomorfismo

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \varinjlim \alpha) = \mathcal{H}^0(R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \varinjlim \alpha)) &\simeq \mathcal{H}^0(\varinjlim R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \alpha)) \\ &\simeq \varinjlim \mathcal{H}^0(R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, \alpha)) = \varinjlim \operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \alpha)\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Teorema 4.1.1 (Localização de Thomason)**.** *Seja $(\mathcal{C}, T)$ uma categoria triangular compactamente gerada denotamos por $\mathcal{C}^c$ a subcategoria plena de $\mathcal{C}$ de objetos compactos. Seja $R \subset \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^c)$ um subconjunto de objetos compactos de $\mathcal{C}$ fechado para translação e $\mathcal{R}$ a menor subcategoria de $\mathcal{C}$ contendo R. Seja ainda $\mathcal{D}$ o quociente de Verdier $\mathcal{C}/\mathcal{R}$. Então:*

1. *A categoria $\mathcal{R}$ é compactamente gerada, com R como o conjunto de geradores.*

2. *Se R é o conjunto de geradores de todo $\mathcal{C}$, então $\mathcal{R} = \mathcal{C}$.*

3. *Se $R \subseteq \mathcal{R}$ é fechado para a formação de triângulos e soma direta, então $R = \mathcal{R}$ com $\mathcal{R}^c = \mathcal{R} \cap \mathcal{C}^c$.*

4. *Suponha d um objeto compacto de $\mathcal{D}$. Então existe um objeto $d' \in \mathcal{D}^c$, um objeto $c \in \mathcal{C}^c$ tal que $c \simeq d \oplus d'$.*

5. *Dados dois objetos $c \in \mathcal{C}^c$, $c' \in \mathcal{C}$, e um morfismo $c \longrightarrow c'$ em $\mathcal{D}$, então existe um diagrama em $\mathcal{C}$*

$$c \longleftarrow \widetilde{c} \longrightarrow c'$$

onde $\widetilde{c}$ é compacto, além disso, no triangulo induzido pelo morfismo $\widetilde{c} \longrightarrow c \longrightarrow r \longrightarrow T\widetilde{c}$, o objeto r pertence à R e quando reduzimos o diagrama à $\mathcal{D}$ a composta entre $\widetilde{c} \longrightarrow c'$ com a inversa de $\widetilde{c} \longrightarrow c$ é o mapa $c \longrightarrow c'$ dado.

Demonstração. Ver [18], seção 4, Teorema 4.4.9, páginas 145-146. Além de [17] seção 2, Observação 2.2, página 214. □

Lema 4.1.1. *Sejam X um esquema separado quase compacto, $U \subset X$ um subesquema aberto quase compacto e $\mathscr{F}$ um objeto em $\mathsf{D}(\mathit{QCoh}/X)$. Então, para todo mapa $\mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathit{QCoh}/U)$ onde $\mathscr{P}$ é um complexo perfeito de $\mathsf{D}(\mathit{QCoh}/U)$ existe um complexo perfeito $\mathscr{P}'$ em $\mathsf{D}(\mathit{QCoh}/U)$ tal que o mapa $\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}' \longrightarrow \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{F}$ pode ser estendido a um mapa $\widetilde{\mathscr{P}} \longrightarrow \mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathit{QCoh}/X)$ onde $\widetilde{\mathscr{P}}$ é um complexo perfeito em $\mathsf{D}(\mathit{QCoh}/X)$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos supor X um esquema afim. Pela Proposição 4.1.1, temos que $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ é compactamente gerada por complexos de feixes amplos invertíveis, ou seja, complexos perfeitos. Seja, $Z = X - U$ e $\mathsf{D}_Z(\mathsf{QCoh}/X)$ a subcategoria plena de $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ onde os objetos são complexos com suporte em Z, isto é,

$$\mathsf{D}_Z(\mathsf{QCoh}/X) = \{\Gamma_Z(\mathscr{F}) \mid \mathscr{F} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)\} = \{\mathscr{F} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X) \mid \mathscr{F}|_U = 0\}.$$

Então, podemos aplicar o Teorema 4.1.1 com $\mathcal{C} = \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$, R o conjunto de geradores compactos de $\mathcal{R} = \mathsf{D}_Z(\mathsf{QCoh}/X)$, de modo que $\mathcal{D} = \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/U)$. De fato, existe um único funtor $\pi : \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/U)$ definido pela projeção onde $\mathsf{D}_Z(\mathsf{QCoh}/X)$ está contida no núcleo $\operatorname{Ker}\pi$, o que caracteriza $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/U)$ como o quociente de Verdier $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)/\mathsf{D}_Z(\mathsf{QCoh}/X)$. Portanto, de (4) e (5), o morfismo de complexos $\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}[1] \longrightarrow \mathscr{F}$ pode ser estendido a um morfismo de complexos $\widetilde{\mathscr{P}} \longrightarrow \mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ com $\widetilde{\mathscr{P}}$ um complexo perfeito.

Agora, suponhamos que X possa ser escrito como $U \cup W$ onde W é um subesquema afim. Pelo que já provamos, para todo mapa $\mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/U)$ com $\mathscr{P}$ perfeito existem $p : \mathscr{P} \oplus \mathscr{P}[1] \longrightarrow \mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/U)$ e $\widetilde{p} : \widetilde{\mathscr{P}} \longrightarrow \mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/W)$ com $\widetilde{\mathscr{P}}$ perfeito e tal que $\widetilde{\mathscr{P}}|_{U\cap W} \simeq (\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}[1])|_{U\cap W}$. Então, denotamos por $j_W : W \hookrightarrow X$, $j_U : U \hookrightarrow X$ e $j_{W\cap U} : W \cap U \hookrightarrow X$ as imersões abertas, considere os morfismos

$$\phi = \begin{pmatrix} (j_U)_*p & 0 \\ 0 & (j_W)_*\widetilde{p} \end{pmatrix} : (j_U)_*(\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}[1]) \oplus (j_W)_*\widetilde{\mathscr{P}} \longrightarrow (j_U)_*(j_U)^*\mathscr{F} \oplus (j_W)_*(j_W)^*\mathscr{F}$$
$$\psi = (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*p : (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*(\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}[1]) \longrightarrow (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*\mathscr{F}$$

Note que, como para todo aberto V de $W \cap U$, a inclusão $V \cap W \cap U \hookrightarrow V \cap U$, induz um morfismo restrição $\rho : \mathscr{F}(V \cap U) \longrightarrow \mathscr{F}(V \cap W \cap U)$, assim, já que

$$(j_U)_*(j_U)^*\mathscr{F}(V) = (j_U)_*\mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}|_U(U \cap V) = \mathscr{F}(U \cap V),$$

e do mesmo modo, $(j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*\mathscr{F} = \mathscr{F}(V \cap W \cap U)$, temos induzido um morfismo de feixes $u_{\mathscr{F}} = (\rho)_{V\subset W\cap U} : (j_U)_*(j_U)^*\mathscr{F} \longrightarrow (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*\mathscr{F}$. Seguindo o mesmo argumento, podemos definir os morfismos $w_{\mathscr{F}} : (j_W)_*(j_W)^*\mathscr{F} \longrightarrow (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*\mathscr{F}$, $u_{\mathscr{P}\oplus\mathscr{P}[1]}$ e $w_{\mathscr{P}\oplus\mathscr{P}[1]}$ e denotamos $q' = (u_{\mathscr{F}}, w_{\mathscr{F}})$ e $q = (u_{\mathscr{P}\oplus\mathscr{P}[1]}, w_{\mathscr{P}\oplus\mathscr{P}[1]})$.

Agora, notando que $q' \circ \phi = \psi \circ q$, podemos usar o axioma TR 4 para concluir a existência de um morfismo de triângulos de complexos.

$$\begin{tikzcd}
M(q)[-1] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & (j_U)_*(\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}[1]) \oplus (j_W)_*\widetilde{\mathscr{P}} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\phi"] & (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*(\mathscr{P} \oplus \mathscr{P}[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & M(q) \arrow[d] \\
M(q')[-1] \arrow[r] & (j_U)_*(j_U)^*\mathscr{F} \oplus (j_W)_*(j_W)^*\mathscr{F} \arrow[r, "q"] & (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*\mathscr{F} \arrow[r] & M(q')
\end{tikzcd}$$

onde $M(q')[-1] = (j_U)_*(j_U)^*\mathscr{F} \oplus (j_W)_*(j_W)^*\mathscr{F} \oplus (j_{W\cap U})_*(j_{W\cap U})^*\mathscr{F}[-1] = \mathscr{F}$, uma vez que $X = W \cup U$. Além disso, $M(q)[-1]$ é um complexo perfeito, já que é soma direta de complexos perfeitos. De forma que temos induzido um morfismo $\gamma : M(q)[-1] \longrightarrow \mathscr{F}$ em X, de onde segue o resultado.

Finalmente, para o caso geral, como por hipótese X é quase compacto, admite cobertura finita de abertos afins $\{W_i\}$. Logo, pelo caso anterior, vale o resultado para $(U \cup W) \cup W_i$ para todo aberto W, de modo que podemos concluir em um número finito de passos que vale o resultado para $X = \bigcup W_i$. $\square$

A próxima proposição garante a existência de um conjunto de geradores compactos para $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ sem a hipótese de que X admita um feixe amplo invertível.

Proposição 4.1.3. *Seja X um esquema separado quase compacto. Então a categoria $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ é compactamente gerada.*

Demonstração. Dado um aberto afim $U \subset X$, sabemos, pela Proposição 4.1.1 que $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/U)$ é compactamente gerada e seus geradores, complexos de feixes amplos invertíveis, são complexos perfeitos. Se $\mathscr{F}$ é um objeto de $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ não nulo, e cuja restrição à U é não nula, existe um mapa $\mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{F}$ em U com $\mathscr{P}$ um complexo perfeito, pois U é compactamente gerada. Pelo Lema 4.1.1 este mapa pode ser estendido a um mapa não nulo $\widetilde{\mathscr{P}} \longrightarrow \mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ onde $\widetilde{\mathscr{P}}$ é um complexo perfeito. Deste modo, podemos concluir que dado um complexo perfeito $\widetilde{\mathscr{P}} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$, $\mathrm{Hom}(\widetilde{\mathscr{P}}, \mathscr{F}) = 0$ implica $\mathscr{F}|_U = 0$ para todo aberto afim U e, uma vez que X é quase compacto, devemos ter $\mathscr{F} = 0$. $\square$

4.2 O funtor $f^!$

Pelos Teorema e Proposição 4.1.3, se X é um esquema separado e quase-compacto, então $(\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X), [1])$ é uma categoria triangular compactamente gerada que admite coprodutos. Além disso, pelo Lema 3.4.3, para todo morfismos separado de esquemas $f : X \longrightarrow Y$, Rf_* é um funtor triangular que respeita coprodutos. Logo, podemos aplicar o Teorema 2.5.2 para obter o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo separado de esquemas separados quase compactos. Então o funtor $Rf_* : \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ tem adjunto a direta triangular que denotamos por*

$$f^! : \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y) \longrightarrow \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X).$$

isto é, existe um isomorfismo natural em $\mathscr{F} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$ e em $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)}(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)}(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}). \tag{4.2}$$

Proposição 4.2.1. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas separados quase compactos, $\mathsf{D}(X)$ a categoria derivada de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos e $\mathsf{D}(Y)$ a categoria derivada de feixes de*

$\mathcal{O}_Y$-módulos. Sejam $\mathscr{F}$ um objeto de $\mathsf{D}(X)$ e $\mathscr{G}$ um objeto de $\mathsf{D}(Y)$. Então existe um mapa natural em $\mathsf{D}(Y)$

$$\mathscr{G} \otimes^L Rf_*\mathscr{F} \longrightarrow Rf_*\big(Lf^*\mathscr{G} \otimes^L \mathscr{F}\big). \tag{4.3}$$

Além disso, se $\mathscr{F} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X) \subset \mathsf{D}(X)$ e $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y) \subset \mathsf{D}(Y)$, então o mapa (4.3) é um isomorfismo.

Demonstração. Notamos que a questão é local em Y, de modo que podemos supor Y um esquema afim e, portanto, $\mathcal{O}_Y$ é um feixe amplo invertível e gera $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ pela Proposição 4.1.1. Então pela formula de projeção, Proposição 3.4.2 item (4), para todo $\mathscr{F} \in \mathsf{D}(X)$ e $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(Y)$, temos um isomorfismo

$$\mathscr{G} \otimes f_*\mathscr{F} \simeq f_*(f^*\mathscr{G} \otimes \mathscr{F}).$$

Assim, dado $\mathscr{F} \longrightarrow I_{\mathscr{F}}$ uma resolução injetiva de $\mathscr{F}$ e $P_{\mathscr{G}} \longrightarrow \mathscr{G}$ uma resolução flat de $\mathscr{G}$ o isomorfismo $P_{\mathscr{G}} \otimes f_*I_{\mathscr{F}} \simeq f_*(f^*P_{\mathscr{G}} \otimes I_{\mathscr{F}})$ garante o seguinte isomorfismo em $\mathsf{D}(X)$

$$\mathscr{G} \otimes^L Rf_*\mathscr{F} \simeq f_*(Lf^*\mathscr{G} \otimes^L \mathscr{F}).$$

No entanto, $Lf^*\mathscr{G} \otimes^L \mathscr{F}$ não é em geral um complexo homotopicamente injetivo, portanto o isomorfismo não vale para quaisquer $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$. Ainda assim, como para todo funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ existe um morfismo natural $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{Q} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{Q}' \simeq R\mathcal{F}$, pelo isomorfismo acima obtemos o seguinte morfismo natural

$$\mathscr{G} \otimes^L Rf_*\mathscr{F} \longrightarrow Rf_*(Lf^*\mathscr{G} \otimes^L \mathscr{F}). \tag{4.4}$$

Agora, resta mostrar que a restrição do morfismo (4.4) à categorias de derivados de feixes quase coerentes é um isomorfismo. Nesse sentido, fixando o feixe $\mathscr{F}$, (4.4) torna-se uma transformação natural de funtores em $\mathscr{G}$ que denotaremos por

$$\varphi = \big(\mathscr{G} \otimes^L Rf_*\mathscr{F} \longrightarrow Rf_*(Lf^*\mathscr{G} \otimes^L \mathscr{F})\big)_{\mathscr{G}}.$$

Então, tomamos $\mathcal{S} \subset \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ como a subcategoria plena dos objetos $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ tal que $\varphi_{\mathscr{G}[n]}$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que, como Lf^* e $\bullet \otimes^L \bullet$ respeitam somas diretas e, pelo Lema 3.4.3, na categoria $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$, Rf_* respeita coprodutos, segue que para todo $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$, o mapa $\varphi_{\mathscr{G}}$ respeita coprodutos, logo $\mathcal{S}$ é fechada com relação à triângulos e coprodutos de seus elementos. De modo que podemos concluir, em virtude do Lema 2.5.4, que existe uma equivalência de categorias $\mathcal{S} \simeq \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ o que garante o resultado. □

Teorema 4.2.2. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas. Suponha $R(f_*)$ tem um adjunto à direita $f^!$ que comuta com coprodutos e que Y é separado e quase compacto. Então existe um isomorfismo de funtores natural em $\mathscr{G}$*

$$f^!(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} (Lf^*\mathscr{G}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (f^!\mathcal{O}_Y). \tag{4.5}$$

Reciprocamente, se $f^!$ é naturalmente isomorfo à $(Lf^*\bullet)\otimes_{\mathcal{O}_Y}(f^!\mathcal{O}_Y)$, então $f^!$ respeita coprodutos.

Lema 4.2.1. *Nas condições do Teorema 4.2.2 acima, Para todo feixe $\mathscr{G}'\in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ existe um isomorfismo natural*

$$(Lf^*\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}(f^!\mathscr{G}') \xrightarrow{\sim} f^!(\mathscr{G}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{G}'). \tag{4.6}$$

Demonstração. Tomando a co-unidade da adjunção entre Rf_* e $f^!$, para cada $\mathscr{G}'\in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$, obtemos um mapa natural

$$\eta : Rf_*f^!\mathscr{G}' \longrightarrow \mathscr{G}'.$$

Além disso, pela formula de projeção, dado $\mathscr{G}\in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ temos

$$Rf_*\big((Lf^*\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}(f^!\mathscr{G}')\big) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}\otimes_{\mathcal{O}_Y} Rf_*f^!\mathscr{G}' \xrightarrow{1_y\otimes\eta} \mathscr{G}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{G}' \tag{4.7}$$

Pela adjunção, existe um único mapa natural em $\mathscr{G}$ e $\mathscr{G}'$ associado à (4.7) como desejado

$$(Lf^*\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}(f^!\mathscr{G}') \longrightarrow f^!(\mathscr{G}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{G}').$$

Agora supondo que $f^!$ respeite coprodutos, denotamos por $\phi_{\mathscr{G}}$ o mapa $(Lf^*\mathscr{G})\otimes_{\mathcal{O}_X}(f^!\mathscr{G}')\longrightarrow f^!(\mathscr{G}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{G}')$ natural em $\mathscr{G}'$. Seja

$$\mathcal{S}=\{\mathscr{G}\in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)\mid \phi_{\mathscr{G}[n]} \text{ é isomorfismo para todo } n\in\mathbb{Z}\}$$

uma subcategoria plena de $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$. Vamos mostrar que o conjunto de geradores de $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$, cujos objetos são compactos, esta contido em $\mathcal{S}$.

Seja $\mathscr{G}$ um objeto compacto. Denotando $\mathscr{G}^\vee = R\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G},\mathcal{O}_Y)$, temos que $Lf^*(\mathscr{G}^\vee)=Lf^*R\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{G},\mathcal{O}_Y)\simeq R\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(Lf^*\mathscr{G},\mathcal{O}_X)=(Lf^*\mathscr{G})^\vee$. Como $\mathscr{G}$ e $Lf^*\mathscr{G}$ são complexos perfeitos, isto é, finitamente gerados, existem os isomorfismos naturais.

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(X)}(\bullet\otimes Lf^*\mathscr{G}^\vee,\bullet)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(X)}(\bullet, Lf^*\mathscr{G}\otimes\bullet) \tag{4.8}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(X)}(\bullet\otimes \mathscr{G}^\vee,\bullet)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(X)}(\bullet, \mathscr{G}\otimes\bullet) \tag{4.9}$$

Então, dado um complexo arbitrário $\mathscr{F}$ em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/X)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}, Lf^*\mathscr{G}\otimes_{\mathcal{O}_X} f^!\mathscr{G}') &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} Lf^*\mathscr{G}^\vee, f^!\mathscr{G}') && (4.10)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_*(\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_X} Lf^*\mathscr{G}^\vee),\mathscr{G}') && (4.11)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_*(\mathscr{F})\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{G}^\vee,\mathscr{G}') && (4.12)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_*(\mathscr{F}),\mathscr{G}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathscr{G}') && (4.13)
\end{aligned}$$

Onde, (4.10) e (4.13) seguem de respectivamente de (4.8) e (4.9) , (4.11) segue da adjunção e (4.12) da formula de projeção, Proposição 4.2.1. Agora, dado um morfismo

$\gamma : \mathscr{F} \longrightarrow Lf^*\mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^!\mathscr{G}'$ é unicamente associado a um mapa $\gamma' : Rf_*(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}'$, pelo isomorfismo (4.13), onde $\gamma' = id_{\mathscr{G}} \otimes \eta \circ Rf_*(\gamma)$ dado pelo morfismo $Rf_*(\gamma)$: $Rf_*(\mathscr{F}) \longrightarrow Rf_*(Lf^*\mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^!\mathscr{G}')$ em composição com (4.7). Mas por definição, $\phi_{\mathscr{G}} \circ \gamma$ é identificado com γ' por adjunção, isto é, $f^!(id_{\mathscr{G}} \otimes \eta \circ Rf_*(\gamma)) = \phi_{\mathscr{G}} \circ \gamma$. Segue que $(\phi_{\mathscr{G}} \circ)$ é um isomorfismo e pelo Lema de Yoneda que $\phi_{\mathscr{G}}$ também é isomorfismo.

Temos que $\mathcal{S}$ contem o conjunto de geradores compactos, notemos ainda que $\mathscr{G} \longmapsto (Lf^*\mathscr{G}) \otimes f^!\mathscr{G}'$ é um funtor triangular, onde $\mathscr{G}'$ é um objeto fixado arbitrariamente. De fato, Lf_* e $\otimes^L$ são funtores triangulares e respeitam coprodutos, além disso, $f^!$ é triangular pelo Teorema 2.43. Assim, $\mathcal{S}$ é triangular e fechada para coprodutos em $\mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$. Logo, usando o Lema 2.5.4, concluímos que $\mathcal{S} = \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$ de modo que $\phi_{\mathscr{G}}$ é um isomorfismo natural para todo $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(\mathsf{QCoh}/Y)$. □

Prova do Teorema 4.2.2: A primeira implicação segue como um caso especial do Lema 4.2.1 acima, tomando $\mathscr{G}' = \mathcal{O}_Y$, assim teremos $\mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}' \simeq \mathscr{G}$ e obtemos o isomorfismo

$$f^!(\mathscr{G}) \longrightarrow (Lf^*\mathscr{G}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (f^!\mathcal{O}_Y).$$

Para a volta, basta notar que, como Lf^* e $\otimes^L$ possuem adjuntos à direita, esses funtor respeitam coprodutos, assim temos

$$\begin{aligned} f^!\big(\coprod \mathscr{G}\big) &\simeq \big(Lf^* \coprod \mathscr{G}\big) \otimes (f^!\mathcal{O}_Y) \simeq \big(\coprod Lf^*\mathscr{G}\big) \otimes (f^!\mathcal{O}_Y) \\ &\simeq \coprod (Lf^*\mathscr{G}) \otimes (f^!\mathcal{O}_Y) \simeq \coprod (f^!\mathscr{G}) \end{aligned}$$

Assim, $f^!$ respeita coprodutos. □

4.3 Versão para Feixes

Teorema 4.3.1. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo próprio de esquemas separados. Então o funtor $f^!$ induz um isomorfismo na categoria de homomorfismo de feixes*

$$R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} Rf_*R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}). \tag{4.14}$$

Para demonstrar o Teorema 4.3.1 faremos uso do importante conceito de subfeixe com suporte em um conjunto.

Definição 4.3.1. *Seja $\mathscr{F}$ um feixe sobre X e $s \in \mathscr{F}(U)$ uma seção sobre um conjunto aberto U. Definimos o **suporte** de s como o conjunto*

$$\operatorname{Supp} s = \{p \in U \mid s_p \neq 0\}$$

*onde s_p é o germe correspondente à s no talo $\mathscr{F}_p$. Definimos o **Suporte** de $\mathscr{F}$ como*

$$\operatorname{Supp} \mathscr{F} = \{p \in X \mid \mathscr{F}_p \neq 0\}.$$

Seja Z um subconjunto fechado de X. Definimos $\Gamma_Z(X, \mathscr{F}) = \{s \in \Gamma(X, \mathscr{F})|\ \operatorname{Supp} s \subset Z\}$ o subgrupo de $\Gamma(X, \mathscr{F})$ consistindo de todas as seções cujos suportes estão contidos em Z.

A definição dos grupos $\Gamma_Z(X, \mathscr{F})$ acima nos leva a definir o funtor

$$\Gamma_Z : \textsf{Sh-Ab}(X) \longrightarrow \textsf{Sh-Ab}(X), \quad \mathscr{F} \longmapsto \Gamma_Z(\mathscr{F}) = \big(V \longmapsto \Gamma_{Z\cap V}(V, \mathscr{F}|_V)\big)_{V\in O(Y)}$$

onde $\Gamma_Z(\mathscr{F})$ é chamado de **subfeixe de $\mathscr{F}$ com suporte em** Z, pois temos $\operatorname{Supp} \mathscr{F} \subseteq Z$.

Notemos que $\Gamma_Z(\mathscr{F})$ é de fato um feixe. Dado um conjunto aberto V, uma cobertura aberta $V = \bigcup V_i$ e uma família de seções correspondentes $\{s_i\}$ tal que $s_i \in \Gamma_{Z\cap V_i}(V_i, \mathscr{F}|_{V_i}(V_i))$, isto é, seções de $\mathscr{F}|_{V_i}$ com suportes em $Z \cap V_i$. Como $\mathscr{F}|_{V_i}$ é um feixe, essas seções podem ser coladas em uma única s em $\mathscr{F}|_V(V)$. Assim, basta mostrar que s tem suporte em $Z \cap V$. Mas, desde que $s|_{V_i} = s_i$ para todo i, dado $p \in V$, existe i com $p \in V_i$ logo $s_p = (s|_{V_i})_p = (s_i)_p \neq 0$. Temos $\operatorname{Supp} s = \cup \operatorname{Supp} s_i \subset Z \cap V$. Deste modo, concluímos que o funtor Γ_Z está bem definido.

O derivado a direita $R\Gamma_Z$ é chamado de **funtor de cohomologia local de Grothendieck**.

Lema 4.3.1. *Sejam X um espaço topológico, U um conjunto aberto de X e $Z = X - U$ seu complementar fechado em X. Então, para todo feixe $\mathscr{F} \in \textsf{Sh-Ab}(X)$, existe uma sequência exata de feixes sobre X*

$$0 \longrightarrow R\Gamma_Z(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{F} \to Rj_*(\mathscr{F}|_U) \longrightarrow 0. \tag{4.15}$$

Demonstração. Para cada feixe $\mathscr{F}$ e cada aberto V de X tomamos a inclusão i_V : $\Gamma_Z(\mathscr{F})(V) \longrightarrow \mathscr{F}(V),\ s \longmapsto s$, que induz uma inclusão de feixes $i : \Gamma_Z(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{F}$. Além disso, notando que $j_*(\mathscr{F}|_U)(V) = \mathscr{F}|_U(U \cap V) = \mathscr{F}(U \cap V)$, temos que a inclusão $U \cap V \hookrightarrow V$ induz o morfismo restrição $\rho_{\mathscr{F}} : \mathscr{F}(V) \longrightarrow \mathscr{F}(U \cap V) = j_*(\mathscr{F}|_U)(V)$. Agora, como escólio da demonstração do Lema 3.4.2 (Mayer-Vietoris) temos que se $\mathcal{I}$ é um feixe injetivo, $\rho_{\mathcal{I}}$ é sobrejetivo. Deste modo, para todo feixe injetivo $\mathcal{I}$ temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \Gamma_Z(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow j_*(\mathcal{I}|_U) \longrightarrow 0. \tag{4.16}$$

Assim, para todo feixe $\mathscr{F}$ tomamos $I^\bullet$ uma resolução homotopicamente injetiva, de sorte que, pelo Corolário 3.2.3 para todo n, I^n é um objeto injetivo em $\textsf{Sh-Mod}(X)$. Logo, para todo n vale a sequência exata (4.16), assim conseguimos uma sequência exata em $\mathsf{D}(X)$

$$0 \longrightarrow \Gamma_Z(I^\bullet) \longrightarrow I^\bullet \longrightarrow j_*(I^\bullet|_U) \longrightarrow 0. \tag{4.17}$$

O resultado segue da caracterização feita no Corolário 3.2.4, onde $\mathscr{F} = R1(\mathscr{F}) = 1(I)$, e do Lema $3.4.1$. $\square$

Lema 4.3.2. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas tal que Rf_* possui um adjunto à direita $f!$ que respeita coprodutos. Seja $V \subset Y$ um subconjunto aberto e $Z = Y - V$ seu complementar. Suponha que U e Y são quase compactos e separados. Então, denotando por $j' : f^{-1}(V) \hookrightarrow X$ a inclusão, temos*

$$(j')^* f^! R\Gamma_Z = 0.$$

Demonstração. Seja $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(Y)$ um feixe com suporte em Z, $\operatorname{Supp}\mathscr{G} \subseteq Z$. Temos $Lf^*(\mathscr{G}) = f^*(P_{\mathscr{G}}) = f^{-1}P_{\mathscr{G}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$, onde $P_{\mathscr{G}}$ é uma resolução flat de $\mathscr{G}$. Logo temos $\operatorname{Supp} Lf^*\mathscr{G} \subseteq f^{-1}Z$. Além disso, como, pelo Teorema 4.2.2, temos $f^!\mathscr{G} = Lf^*\mathscr{G} \otimes f^!\mathcal{O}_Y$, segue que $\operatorname{Supp} f^!\mathscr{G} \subseteq f^{-1}Z$.

Assim, para todo feixe $\mathscr{G} \in \mathsf{D}(Y)$, $\operatorname{Supp}(f^! R\Gamma_Z\mathscr{G}) \subseteq f^{-1}Z$, pois $\Gamma_Z\mathscr{G}$ é justamente o subfeixe de $\mathscr{G}$ com suporte em Z. Mas como $j' : f^{-1}(V) \hookrightarrow X$ é uma inclusão, $(j')^*$ é o funtor restrição à $f^{-1}(V)$, logo só podemos ter que $(j')^* f^! R\Gamma_Z\mathscr{G} = 0$ para todo $\mathscr{G}$. Assim, $(j')^* f^! R\Gamma_Z$ é o funtor nulo. $\square$

Prova do Teorema 4.3.1. Temos que a co-unidade $\tau : Rf_*f^! \longrightarrow id_{f^!}$ da adjunção $(Rf_*, f^!)$ e a unidade $\varepsilon : id_{Lf^*} \longrightarrow Lf^*Rf_*$ da adjunção (Lf^*, Rf_*) definem a transformação natural ϕ

$$\begin{aligned} Rf_*R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}) &\xrightarrow{\epsilon} Rf_*R\mathscr{H}om(Lf^*Rf_*\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}) \\ &= R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F}, Rf_*f^!\mathscr{G}) \\ &\xrightarrow{\tau} R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G}) \end{aligned}$$

Afim de mostrar que ϕ é um isomorfismo, precisamos mostrar que, para cada aberto $V \subset Y$, $R\Gamma(V, \phi)$ é um isomorfismo.

Primeiro notamos que, dado um aberto V, para todo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} f^{-1}V \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

temos $j^*Rf_* = Rf'_*(j')^*$. De fato, para cada $\mathscr{F} \in \mathsf{D}(X)$ temos $j^*Rf_*\mathscr{F} = j^*f_*I_{\mathscr{F}} = (f')_*(j')^*I_{\mathscr{F}} = R(f')_*(j')^*\mathscr{F}$. Onde na ultima igualdade usamos o Lema 3.4.1.

Agora, tomando adjuntos a direita obtemos $f^!Rj_* = Rj'_*(f')^!$ de modo que

$$(j')^*Rj'_*(f')^!j^* = (j')^*f^!Rj_*j^*$$

Note que $(j')^*Rj'_*$ é o funtor identidade, assim temos $(f')^!j^* = (j')^*f^!Rj_*j^*$. Aplicando a Proposição na sequência (4.15) do Lema 4.3.1 e compondo com o funtor $(j')^*f^!$ obtemos o seguinte triângulo

$$(j')^*f^!R\Gamma_Z \longrightarrow (j')^*f^! \longrightarrow (j')^*f^!Rj_*j^* \rightarrow (j')^*f^!R\Gamma_Z[1]$$

Já que, pelo Lema 4.3.2, $(j')^* f^! R\Gamma_Z = 0$ concluímos que $(f')^! j^* = (j')^* f^!$.

Então, levando em conta que $R\Gamma \circ Rf_* = R\Gamma$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned}\Gamma(V, f_*\mathscr{H}om(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G})) &= \Gamma(f^{-1}(V), \mathscr{H}om(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G})) = \operatorname{Hom}((j')^*\mathscr{F}, (j')^* f^!\mathscr{G}) \\ &= \operatorname{Hom}((j')^*\mathscr{F}, (f')^! j^*\mathscr{G}) = \operatorname{Hom}(R(f')_*(j')^*\mathscr{F}, j^*\mathscr{G}) \\ &= \operatorname{Hom}(j^* Rf_*\mathscr{F}, j^*\mathscr{G}) = \Gamma(V, R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G})).\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}R\Gamma(V, Rf_* R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G})) &= R(\Gamma(V, f_*\mathscr{H}om(\mathscr{F}, f^!\mathscr{G}))) = R(\Gamma(V, R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G}))) \\ &= R\Gamma(V, R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G}))\end{aligned}$$

□

5 Considerações Finais

A apresentação de alguns conceitos de Teoria de categorias nos permitiu a construção de categorias derivadas não limitadas e a caracterização de funtores derivados, através de resoluções acíclicas e homotopicamente injetivas, entre essas categorias. Paralelamente à isso, demonstramos na seção 2.5 a versão de Neeman do Teorema de Brown para categorias triangulares e, verificando na seção 4.1 que a categoria de feixes quase coerentes é compactamente gerada e na seção 3.4 que Rf_* respeita coprodutos, fomos capazes de concluir que o funtor Rf_* admite adjunto à direita $f^!$ para todo morfismo próprio de esquemas f. Deste modo, chegamos à conclusão que a Teoria homotópica de categorias está intimamente ligada à construções homológicas como a de categorias derivadas e suas aplicações à geometria algébrica, portanto, fornece ferramentas essenciais para o seu desenvolvimento.

Para ressaltar a importância da dualidade de Grothendieck, podemos citar algumas consequências. A primeira é a dualidade de Serre, ver [10] Teorema 7.6, página 243. Suponha $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo suave, $\mathscr{F} \in \mathsf{D}^b(X)$ e $\mathscr{G} \in \mathsf{D}^b(Y)$. Existe um isomorfismo $f^!\mathscr{G} \simeq L\mathscr{G} \otimes \omega_f[d]$, funtorial em $\mathscr{G}$ e onde $d = dim(Y) - dim(X)$ e $\omega_f = \omega_X \otimes f^*\omega_Y^\vee$ com ω_X denotando o feixe canônico de X, ver [10] página 180. A dualidade de Grothendieck garante a existência de um isomorfismo

$$R\mathscr{H}om(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} Rf_*R\mathscr{H}om(\mathscr{F}, Lf^*\mathscr{G} \otimes \omega_f[d]).$$

No caso particular em que $Y = \operatorname{Spec}(k)$ tal que k é um corpo, temos

$$\operatorname{Hom}_k(Rf_*\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}^b(X)}(\mathscr{F}, Lf^*\mathscr{G} \otimes \omega_f[d]).$$

Obtemos, assim, a dualidade de Serre. Isto é, para todo inteiro i, vale o isomorfismo

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{H}^i(X, \mathscr{F}), k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{d-i}(\mathscr{F}, \omega_X[\dim X]).$$

Outras aplicações estão presentes na construção de uma teoria global de interseções, onde a dualidade permite a formulação do Teorema de Riemann-Roch para esquemas arbitrários, ver [2], no estudo do espaço de moduli $\mathcal{M}_g$, de curvas do gênero g (o artigo [6] aplica a dualidade para mostrar que $\mathcal{M}_g$ é irredutível) e na Teoria das transformações de Fourier-Mukai, ver [14].

Além disso, os métodos de demonstrações apresentadas por Neeman podem ser utilizadas para demonstrar a dualidade de Grothendieck em um contexto mais geral, como principal exemplo citamos o artigo de Fabio Nironi [20], onde prova-se a dualidade de Grothendieck para morfismos de um stack de Deligne-Mumford projetivo para um esquema, e a dualidade de Grothendieck para morfismos representáveis próprios. Resultados esses que foram usados para propor uma definição de feixe dual no caso de feixes de dimensão não maximal.

Referências

1 Artin, M.; Grothendieck, A.; Verdier, J. L. **SGA 4, Seminaire de Geometrie Alegebrique du Bois Marie**: Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Heidelberg: Springer-Verlag, 1972-1973.

2 Berthelot, P.; Grothendieck, A.; Illusie, L. **SGA 6, Seminaire de Geometrie Alegebrique du Bois Marie**: Theorie des Intersections et Theoreme de Riemann Roch. Heidelberg: Springer-Verlag, 1971.

3 Bousfield, A.K. **The localization of spectra with respect to homology**. Topology 18, 1979, Páginas 257–281.

4 Deligne, P. **Cohomologie à supports propres em SGA-4, Tomo 3**. Lecture Notes in Math: 305, Springer-Verlag, New York, 1973. Páginas 250–461.

5 Deligne, P. **Cohomologie à Supports Propres, et Construction du Foncteur $f^!$ em Residues and Duality**. Lecture Notes in Math: 20. New York: Springer, 1966. Página 404.

6 Deligne, P.; Mumford, D. **On the irreducibility of the space of curves of given genus**. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques: 36.1. 1969. Páginas 75-109.

7 Grothendieck, A. **Sur Quelques Points d'Algèbre Homologique**. Tohoku Mathematical Journal: 9, 1957. Páginas:119-221.

8 Grothendieck, A.; Dieudonne, J. **EGA I, Eléments de Géometrie Algébrique** Le langage des schemas. Publ. Math. IHES 4 , 1960.

9 Grothendieck, A.; Dieudonne, J. **EGA II, Eléments de Géometrie Algébrique** Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. Publ. Math. IHES 8 , 1961.

10 Hartshorne, R. **Algebraic Geometry**. Graduate Texts in Mathematics: 52. New York: Springer, 1977.

11 Hartshorne, R. **Residues and Duality**. Lecture Notes in Math: 20. New York: Springer, 1966.

12 Hatcher, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, New York, 2001.

13 Houzel, C. **Les Débuts de la Théorie des Faisceaux** em Sheaves on Manifolds. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.

14 Huybrechts, D. **Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry**. Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 2006.

15 Kashiwara, M.; Schapira, P. **Categories and Sheaves**. Grundlehren der Math. Wiss.: 332. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006.

16 LIPMAN, J. **Notes on Derived Functors and Grothendieck Duality** In Foundations of Grothendieck Duality for Diagrams of Schemes. Lecture Notes in Math.: 1960. New York: Springer-Verlag, 2009.

17 NEEMAN, A. **The Grothendieck Duality Theorem via Bousfield's Techiniques and Brown Representability**. Journal of the American Mathematical Society. Volume 9, Number 1, January 1996.

18 NEEMAN, A. **Triangulated Catecories**. Annals of Mathematics Studies. 148, Princiton University Press, Princiton New Jersey 2001.

19 NEEMAN, A. **Grothendieck Duality Made Simple**. K-theory in algebra and topology. Comtemp. Math., 749 , Amer. Math. Soc., 2020.

20 NIRONI, F. **Grothendieck Duality for Projective Deligne-Mumford Stacks**. arXiv:0811.1955v2, 2009. Disponível em https://arxiv.org/abs/0811.1955v1.

21 RIEHL, E. **Categorical Theory in Context**. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2016.

22 RIEHL, E. **Categorical Homotopy Theory**. New Mathematical Monographs.: 24. New York: Cambridge University Press, 2014.

23 SPALTENSTEIN, N. **Resolutions of Unbounded Complexes**. Compositio Mathematica.: 65, 1988. Páginas: 121-154.

24 VERDIER, J.L. **Base change for twisted inverse images of coherent sheaves**. Collection: Algebraic Geometry (Internat. Colloq.), Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968. Páginas: 393-408.

25 VERDIER, J.L. **Categories derivees**. Lect. Notes Math. 569, Springer, New York, 1977.