Universidade Federal de Juiz de Fora

André Desiderio Maldonado

Integral de Lebesgue, Espaços de Sobolev e Aplicações

Juiz de Fora
2013

André Desiderio Maldonado

Integral de Lebesgue, Espaços de Sobolev e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para a obtenção do Grau Bacharel em Matemática

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora
2013

Maldonado, André Desiderio

Integral de Lebesgue, Espaços de Sobolev e Aplicações / André Desiderio Maldonado. -2013.

76 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Equações Diferenciais. 3. Integral de Lebesgue. 4. Espaços de Sobolev. 5. Métodos Variacionais. I. Título.

À minha mãe, que sempre me apoiou e me incentivou nos estudos.

`Até mesmo a maior das caminhadas começa com um primeiro Passo.`

Gandhi

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Luiz Fernando por todo suporte, apoio e principalmente paciência. Gostaria de agradecer também ao professor Wilson Oliveira, meu orientador dos tempos em que cursava Física.

Aos meus professores acadêmicos tanto da graduação como do mestrado com atenção especial para Bernhard, Jens e José Luiz do Departamento de Física da UFJF; Fabio, Flaviana, Sergio e Olimpio do Departamento de Matemática da UFJF e André da Faculdade de Engenharia Elétrica. Me ensinaram lições importantes, que não se encontram em livros e que vou levar para o resto da vida.

À Aline, minha namorada e companheira, pela paciência e compreensão e principalmente por todo o amor que recebi.

À minha família como um todo, com atenção especial para os meus avós Marco e Célia por todo o amor que me dedicam, e ao meu Tio Marco pela atenção.

Aos meus amigos Paulo, Wilker, Raony, Alcides e Daniel, companheiros de república; à Rodrigo, Sebastião, Pedrosa, Alexandre e Tassio, companheiros de curso; Felipe, Nicolai, Gadelha e Raul, amigos de escola; juntamente com todos os outros colegas de mestrado.

A todos que me apoiaram nos últimos tempos com atenção especial para meus colegas de trabalho Nelson, Roney, Sandra, Lonardo, Vitor, Laércio, Lucy e Tatiana.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Departamento de Matemática.

À FAPEMIG pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho fazemos uma introdução da Teoria da Integração de Lebesgue na reta real. Após uma exposição sistemática dos principais fatos da teoria, fazemos uma aplicação no estudo das equações diferenciais utilizando os espaços de Sobolev.

Palavras-chave: Integral de Lebesgue, Equações Diferenciais, Métodos Variacionais, Espaços de Sobolev

ABSTRACT

In this work we present an introduction to the Lebesgue Theory of Integration on real line. After systematic exposition of the main results, we show an application in the study of the Differencial Equations using the Sobolev Spaces.

Keywords: Lebesgue Integral, Differential Equations, Sobolev Spaces, Variational Techniques

LISTA DE SÍMBOLOS

E^*	espaço dual de E
$\sigma(E,E^*)$	topologia fraca definida em E
$\rightarrow$	convergência forte
$\rightharpoonup$	convergência fraca
q.t.p.	quase todo ponto
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$I \subset \mathbb{R}$	intervalo aberto
$B(x;r)$	Bola aberta de raio r e centro x no espaço normado E
	dada por $\{z \in E; \|z-x\|_E < r\}$
$S(x;r)$	Esfera de raio r e centro x no espaço normado E
	dada por $\{z \in E; \|z-x\|_E = r\}$
supp$f$	indica o suporte da função f
$L^p(I)$	espaço das funções Lebesgue-mensuráveis $u : I \rightarrow \mathbb{R}$
	com norma-L^p finita $\|u\|_p = \left(\int_I \|u\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$,$1 \leq p < \infty$
$L^\infty(I)$	espaço das funções Lebesgue-mensuráveis e essencialmente
	limitadas $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ com norma-L^∞ $\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in I} \|u(x)\|$
$C^k(I)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis em$I$
$C_0^k(I)$	conjunto das funções $C^k(I)$ com $u = 0$ em ∂I, $(k \geq 0)$
$C^\infty(I)$	$\bigcap_{k\geq 0} C^k(I)$
$W^{1,p}(I)$	Espaço de Sobolev com norma
	$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p})^{\frac{1}{p}}$
$W^{m,p}(I)$	Espaço de Sobolev definido indutivamente como
	$W^{m+1,p}(I) = \{u \in L^p(I); u' \in W^{m,p}(I)\}$
$H^m(I;\mathbb{R})$	Espaço de Sobolev $W^{m,2}(I)$ com produto interno
	$< u; v >_{H^m} = \int_I uvdx + \int_I u'v'dx + \int_I u''v''dx + \cdots + \int_I u^{(m)}v^{(m)}dx$
$\|x\|$	Valor absoluto de x ou medida de Lebesgue do conjunto x

Sumário

Introdução

A teoria da integração teve suas raizes no "método de exaustão", inventado por Eudoxos e posteriormente desenvolvido por Arquimedes para calcular áreas e volumes de figuras geométricas.

Nos Séculos XVII e XVIII, os trabalhos de Newton e Leibniz permitiram que este método se transformasse em uma ferramenta sistemática para calcular áreas, volumes e resolver problemas elementares de mecânica. Com o desenvolvimento da teoria do integral, a aplicação em geometria e à mecânica perdeu sua importância, dando lugar a questões mais analíticas para as quais a chamada "Teoria Clássica"não era suficiente.

Nos dias atuais matemáticos estão interessados no estudo da Teoria da Integracão aplicada em convergência de séries, equações diferenciais ou probabilidade. Para tal estudo, a Teoria Clássica da Integral, que culminou com a Integral de Riemann, foi substituida pelos trabalhos pioneiros de Henri Lebesgue, publicados no início do século XX. A razão desta mudança é simples: Os teoremas de convergência da Teoria da Integral de Lebesgue são mais gerais, mais completos e mais elegantes que os da Teoria da Integral de Riemann.

Neste trabalho fazemos uma exposicão básica da Teoria da Integral de Lebesgue na reta real. Ao final apresentamos uma aplicação da teoria demonstrando a existência de solução para um problema envolvendo equações diferenciais.

Capítulo 1

Integral de Lebesgue

Neste capítulo vamos fazer a construção da Integral de Lebesgue de funções reais definidas em subconjuntos da reta real. Para isto nós vamos definir uma estrutura chamada de $\sigma - algebra$ em um conjunto arbitrário X e, através dessa estrutura, nós vamos definir o que seriam os espaços mensuráveis e, sobre estes espaços, vamos definir o que seriam as funções mensuráveis. Após isso, vamos definir um tipo especial de função chamado de medida e, a partir daí, iremos construir o conceito de Integral de Lebesgue.

1.1 $\sigma - algebra$

No desenvolvimento da integral de Lebesgue a nossa atenção está voltada para uma classe de funções reais definidas em um conjunto X não vazio. Como o desenvolvimento da teoria não depende do conjunto em questão, nós não iremos fazer qualquer hipótese adicional sobre este conjunto.

Dado um conjunto $X \neq \emptyset$, nós vamos considerar um subconjunto χ de $\mathbb{P}(X)$ que é "bem comportado"num sentido técnico, isto é, vamos assumir que χ é uma $\sigma - algebra$.

Definição 1 ($\sigma - algebra$). *Uma família χ de subconjuntos de um conjunto X é chamada de $\sigma - algebra$ se satisfaz as seguintes condições:*

i. $\emptyset, X \in \chi$.

ii. $A \in \chi \Rightarrow \quad A^c = X \setminus A \in \chi$.

iii. *Se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos em* χ *então*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \chi.$$

Observação 1. *É imediato que dado um conjunto* X*, o conjunto de suas partes* $\mathbb{P}(X)$*, assim como o conjunto* $\{\emptyset, X\}$ *são* $\sigma - algebras$ *de* X*, sendo respectivamente a maior e a menor das* $\sigma - algebras$ *de* X.

Observação 2. *Utilizando as relações de De Morgan, obtemos que*

i. $\left(\bigcup_{\alpha\in L} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in L} A_\alpha^c$

ii. $\left(\bigcap_{\alpha\in L} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in L} A_\alpha^c$

Assim, dada uma sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em uma* $\sigma - algebra \quad \chi$ *de um conjunto* X*, a interseção* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c$ *também é um elemento de* χ

Exemplo 1. *Sejam* χ_1 *e* χ_2 $\sigma - algebras$ *de um conjunto* X*. Então* $\chi_3 = \chi_1 \cap \chi_2$ *também é uma* $\sigma - algebra$*. Com efeito, vamos verificar cada uma das condições.*

i. *Como* χ_1 *é* $\sigma - algebra$ *temos que* $\emptyset, X \in \chi_1$*. Analogamente temos que* $\emptyset, X \in \chi_2$*. Logo, temos que* $\emptyset, X \in \chi_3$.

ii. *Seja* $A \in \chi_3$*. Temos então que* $A \in \chi_1$ *e como* χ_1 *é* $\sigma - algebra$ *temos que* $A^c \in \chi_1$*. Analogamente obtemos que* $A^c \in \chi_2$ *e portanto* $A^c \in \chi_3$.

iii. *Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos em* χ_3*. Temos que* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \chi_1$ *e como este é* $\sigma - algebra$ *segue que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \chi_1$*. Analogamente temos que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \chi_2$ *e consequentemente* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \chi_3$.

Mostramos portando que χ_3 *é uma* $\sigma - algebra$.

Observação 3. *Fizemos a demontração do Exemplo 1 utilizando a interseção de dois conjuntos para exibir a ideia chave. Obviamente o resultado continua sendo válido para uma coleção qualquer de* $\sigma - algebras$, *isto é, se* $(\chi_\alpha)_{\alpha \in L}$ *são* $\sigma - algebras$ *de um conjunto* X *então* $\bigcap_{\alpha \in L} \chi_\alpha$ *é uma* $\sigma - algebra$ *do conjunto* X.

Exemplo 2. *Dada uma colecão não vazia* A *de subconjuntos de um conjunto* X, *existe a menor* $\sigma - algebra$ *de* X *que contém* A, *denotada por* $\chi(A)$ *e chamada de* $\sigma - algebra$ *gerada por* A, *no seguinte sentido:*

- *Se* χ *é alguma* $\sigma - algebra$ *que contém* A, *então* $\chi(A) \subset \chi$.

Com efeito, defina

$$\chi(A) = \bigcap_{\alpha \in L} \chi_\alpha$$

onde $(\chi_\alpha)_{\alpha \in L}$ *são todas as* $\sigma - algebras$ *de* X *que contém* A. *Observe que como* $\mathbb{P}(X)$ *é uma* $\sigma - algebra$ *de* X *que contém* A *então* $\chi(A)$ *está bem definida e além disso, utilizando a Observação 3 concluímos que* $\chi(A)$ *é uma* $\sigma - algebra$. *Segue da definição de* $\chi(A)$ *que se* χ *é alguma* $\sigma - algebra$ *que contém* A *então* $\chi(A) \subset \chi$.

Exemplo 3. *Considere que* $X = \mathbb{R}$. *A* $\sigma - algebra$ *de Borel* $\mathbb{B}$ *é a* $\sigma - algebra$ *de* $\mathbb{R}$ *gerada pelos intervalos abertos. Neste caso, um elemento* $A \in \mathbb{B}$ *é chamado de conjunto de Borel ou boreliano.*

Observação 4. *Note que a* $\sigma - algebra$ *de Borel* $\mathbb{B}$ *também pode ser definida como sendo a* $\sigma - algebra$ *gerada pelos intervalos fechados de* $\mathbb{R}$.

Definição 2. *Um espaço mensurável é um par* (X, χ) *onde* X *é um conjunto qualquer e* χ *é uma* $\sigma - algebra$ *de* X. *Além disso, os elementos de* χ *serão chamados de conjuntos* $\chi-$*mensuráveis, ou, quando a* $\sigma - algebra$ *estiver implícita, serão chamados apenas de mensuráveis.*

1.2 Funções Mensuráveis

No que segue, $X = (X,\chi)$ denota um espaço mensurável.

Definição 3. *Uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é* $\chi-$ *mensurável se, para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$*, o conjunto*

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\}$$

está em χ*, ou seja , é mensurável.*

Observação 5. *Quando não houver risco de confusão a função será chamada apenas de mensurável.*

Observação 6. *Se* $A = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \chi$ *então* $B = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in \chi$ *pois* χ *é* $\sigma - algebra$*. Além disso, segue imediatamente das propriedades de* $\sigma - algebra$ *que* $C = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \chi$ *e* $D = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \chi$*. Por outro lado, se supomos que* $C = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \chi$*, concluímos que* A,B,$D \in \chi$*. Portanto, na definição de função mensurável poderíamos utilizar qualquer um dos conjuntos* A,B,C *e* D*.*

Exemplo 4. *Toda função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *constante é mensurável. Com efeito,*

se $f(x) = c \ \forall x \in X$ *temos que*

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \begin{cases} X & se \ \ \alpha < c; \\ \emptyset & se \ \ \alpha \geq c; \end{cases} \tag{1.1}$$

sendo que estes sempre são conjuntos de qualquer $\sigma - algebra$ *de* X*.*

Exemplo 5. *Seja* $E \in \chi$ *um conjunto mensurável. A função característica*

$\chi_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & se \ \ x \in E \\ 0 & se \ \ x \notin E \end{cases}$$

é mensurável.

Com efeito, temos que

- $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \emptyset$ *se* $\alpha \geq 1$ *e* $\emptyset \in \chi$.
- $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = E$ *se* $0 \leq \alpha < 1$ *e* $E \in \chi$.
- $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = X$ *se* $\alpha < 0$ *e* $X \in \chi$.

Segue que χ_E *é mensurável.*

É possível mostrar que o conjunto $M(X, \chi)$ das funções reais $\chi-$ mensuráveis formam um espaço vetorial com as operações usuais de soma e produto por escalar. Na verdade é possível mostrar ainda mais, que é o que o próximo lema nos diz.

Lema 1. *Sejam* $f,g \in M(X,\chi)$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Então as funções*

i. cf

ii. $f + g$

iii. fg

iv. $|f|$

são mensuráveis.

Para demonstração veja [1] página 9.

Exemplo 6. *Seja* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função. Defina as funções*

- $f^+ : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f^+(x) = \max(f(x),0)$.
- $f^- : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f^-(x) = \max(-f(x),0)$.

As funções acima são chamadas respectivamente de parte positiva e parte negativa de f *e valem as seguintes igualdades:*

i. $f = f^+ - f^-$

ii. $|f| = f^+ + f^-$

Além disso, f é mensurável se e somente se f^+ e f^- são mensuráveis. Mais ainda: f é mensurável se e somente se $|f|$ é mensurável. Com efeito, se f^+ e f^- são mensuráveis o resultado segue utilizando o Lema 1. Por outro lado, se f é mensurável então os conjuntos $E^+ = \{x \in X; f(x) > 0\}$ e $E^- = \{x \in X; f(x) < 0\}$ são mensuráveis e além disso, $f^+(x) = f(x)\chi_{E^+}(x)$ e $f^-(x) = f(x)\chi_{E^-}(x)$. Logo, f^+ e f^- são mensuráveis. A última afirmação é imediata.

O próximo lema trata da convergência pontual de funções mensuráveis.

Lema 2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $M(X,\chi)$ e defina as funções*

i. $f(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

ii. $F(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

iii. $f^*(x) = \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

iv. $F^*(x) = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

Então as funções definidas acima são mensuráveis e se $f^* = F^*$ então $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ é uma função mensurável.

Para demonstração veja [1] página 12.

Nós já vimos que se uma sequência de funções mensuráveis converge pontualmente para uma função f, então f é mensurável. O próximo lema nos garante que dada uma função mensurável não negativa $f \in M(X,\chi)$, é possível obter uma sequência monótona de funções mensuráveis não negativas e com imagem finita φ_n tais que $f(x) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$. É a partir destas funções que definiremos a Integral de Lebesgue.

Lema 3. *Se f é uma função não negativa em $M(X,\chi)$, então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $M(X,\chi)$ tal que* *i.* $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)\ \forall x \in X\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii. $f(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x)$ *para cada* $x \in X$.

iii. Cada φ_n *tem um número finito de elementos na sua imagem.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. A ideia da demonstração é dividir a imagem da função f em $n2^n$ conjuntos e a partir de suas pré-imagens definir a função φ_n.

Com efeito, se $k = 0, 1, ..., k2^n - 1$ defina o conjunto

$$E_{kn} = \{x \in X; k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\},$$

e se $k = n2^n$ defina $E_{kn} = \{x \in X; f(x) \geq n\}$.

É imediato que os conjuntos E_{kn} são disjuntos e $\bigcup_{k=0}^{n2^n} E_{kn} = X$. Sendo assim, defina a função φ_n da seguinte maneira:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n}\chi_{E_{kn}}. \tag{1.2}$$

Segue diretamente de sua definição que $\varphi_n(x) \geq 0\ \ \forall x \in X$ e, pelo Lema 1, temos que a função φ_n é mensurável.

Vamos mostrar agora que a sequência de funções $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as propriedades enunciadas:

i. Claramente temos que $\varphi_n(x) \geq 0\ \ \forall x \in X$. Seja então $x \in X$ arbitrário. Temos que $x \in E_{k_1 n}$ para algum k_1 e $x \in E_{k_2(n+1)}$ para algum k_2 com $2k_1 \leq k_2$.

   Temos assim que

   $$\varphi_n(x) = k_1 2^{-n} \leq \frac{k_2}{2} 2^{-n} = k_2 2^{-(n+1)} = \varphi_{n+1}(x),$$

   isto é, $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$.

ii. Seja $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \epsilon$. Como

$$\varphi_{n0}(x) = k2^{-n_0} \leq f(x) < (k+1)2^{-n_0}$$

para algum k, segue que $|f(x) - \varphi_{n0}(x)| \leq 2^{-n_0} < \epsilon$.

iii. Segue imediatamente da definição de φ_n.

O lema está, portanto, demonstrado. □

1.3 Medida

Nós já introduzimos a noção de espaço mensurável (X, χ), que consiste em um conjunto X e uma $\sigma - algebra\ \ \chi$. Vamos agora considerar funções, chamadas de medidas, definidas em χ e tomando valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} = \bar{\mathbb{R}}$. Estas funções podem ser intuitivamente interpretadas como a área, comprimento e massa. Portanto, é natural que o seu valor seja nulo no conjunto $\emptyset$ e que esta seja aditiva para a união de conjuntos disjuntos.

Definição 4 (Medida). *Uma medida é uma função μ definida em uma $\sigma - algebra\ \ \chi$ de um conjunto X e tomando valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} = \bar{\mathbb{R}}$ tal que :*

i. $\mu(\emptyset) = 0$.

ii. $\mu(E) \geq 0 \quad \forall E \in \chi$.

iii. Se $(E_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \chi$ é uma sequência de conjuntos disjuntos entre si, então

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i) \tag{1.3}$$

Observação 7. *Como nós permitimos que uma medida assuma o valor $+\infty$, é possível que o lado direito da equação (1.3) seja uma série divergente. Por outro lado, se*

$\mu(E) \neq +\infty$ $\forall E \in \chi$ dizemos que μ é finita.

Mais geralmente, se existe uma sequência $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \chi$ tal que $\mu(E_i) \neq +\infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$ e $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, dizemos que a medida μ é $\sigma - finita$.

Exemplo 7. *Seja $X = \mathbb{R}$ e $\chi = B$ a $\sigma -$ algebra de Borel. É possível mostrar que existe uma única medida λ, chamada de medida de Lebesgue, definida em B tal que se $E = (a,b) \in B$ então $\lambda(E) = b - a$. Esta medida não é finita mas é $\sigma - finita$.*

Vamos agora enunciar e provar alguns resultados que serão utilizados futuramente.

Lema 4. *Seja μ uma medida definida em uma $\sigma-$algebra χ. Se E e F pertencem a χ e $E \subset F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Além disso, se $\mu(E) < +\infty$ então $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.*

Demonstração. Basta notar que $F = E \cup (F \setminus E)$. Assim, $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$ pois E e $F \setminus E$ são disjuntos. □

Lema 5. *Seja μ uma medida definida em uma $\sigma -$ algebra χ.*

a. Se $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de χ, isto é, se $E_i \subset E_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ então

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i). \tag{1.4}$$

b. Se $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de χ, isto é, se $F_{i+1} \subset F_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$ e $\mu(F_1) \neq +\infty$ então

$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(F_i). \tag{1.5}$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração de cada item.

a. Se $\mu(E_i) = +\infty$ para algum $i \in \mathbb{N}$ então ambos os lados da equação (1.4) são infinitos. Podemos, portanto, assumir que $\mu(E_i) \neq \infty$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Defina a sequência $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos onde $A_1 = E_1$ e $A_{i+1} = E_{i+1} \setminus E_i$. Temos que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se

$i \neq j$ e $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$. Logo,

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{m=1}^{i} \mu(A_m) \tag{1.6}$$

ou seja,

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{i} A_m\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i) \tag{1.7}$$

b. Defina $B_i = F_1 \setminus F_i$. Temos que a sequência $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é crescente e $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Aplicando a parte (a) do lema, obtemos

$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i). \tag{1.8}$$

Como $\mu(B_i) \neq \infty\ \forall i \in \mathbb{N}$, segue pelo Lema 4 que $\mu(B_i) = \mu(F_1) - \mu(F_i)$. Assim, temos que

$$\lim_{i\to\infty} \mu(F_i) = \mu(F_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right). \tag{1.9}$$

Como $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = F_1 \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$, segue que

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i\right), \tag{1.10}$$

ou seja,

$$\lim_{i\to\infty} \mu(F_i) = \mu(F_1) - \left(\mu(F_1) - \lim_{i\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i\right)\right) = \lim_{i\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) \tag{1.11}$$

$\square$

Definição 5 (Espaço de Medida)**.** *Um espaço de media é uma tripla* (X,χ,μ) *consistindo de um conjunto* X*, uma* $\sigma - algebra$ χ *e uma medida* μ *definida em* χ*.*

Exemplo 8. *Considere o espaço de medida* $X = (\mathbb{R},B,\lambda)$ *onde* B *é a* $\sigma - algebra$ *de Borel e* λ *é a medida de Lebesgue.*

1. *Se* $a \in \mathbb{R}$*, temos que o conjunto* $\{a\} \in B$ *pois*

$$\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \tag{1.12}$$

e, pelo mesmo motivo,

$$\lambda(\{a\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0. \tag{1.13}$$

2. *Concluímos a partir do ítem* (1) *que se* $E \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto enumerável, então* $E \in B$ *e* $\lambda(E) = 0$*. Em particular, o conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais é mensurável e tem medida nula.*

3. *Temos claramente que*

$$[a,b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, b\right)\ ,\ (a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a, b + \frac{1}{n}\right)\ \text{e}\ [a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right). \tag{1.14}$$

Logo, $\lambda\left((a,b)\right) = \lambda\left([a,b)\right) = \lambda\left((a,b]\right) = \lambda\left([a,b]\right)$*.*

4. *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *é um conjunto aberto, então* $\lambda(A) = 0$ *se, e somente se,* $A = \emptyset$*. Com efeito, se* $x \in A$ *e* A *é aberto, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $(a - \delta, a + \delta) \subset A$ *e consequentemente* $\lambda(A) \geq 2\delta$ *pelo Lema 4. Por outro lado, se* $A = \emptyset$ *temos por definição de medida que* $\lambda(A) = 0$*.*

Para finalizar esta seção, vamos introduzir uma terminologia muito útil e que será utilizada posteriormente. Dizemos que determinada proposição é válida $\mu - q.t.p.$ (quase todo ponto) se existe um conjunto de medida nula $N \in \chi$ tal que a proposição em questão é válida em $X \setminus N$. Quando a medida μ estiver subentendida diremos apenas que a proposição é válida *q.t.p.*

1.4 A Integral

Nesta seção nós vamos definir o conceito de integral primeiramente para funções mensuráveis simples não negativas e, posteriormente, para funções reais mensuráveis arbitrárias. O resultado principal é o Teorema da Convergência Monótona que é uma ferramenta básica para o desenvolvimento posterior da teoria. Sendo assim, no que segue $X = (X,\chi,\mu)$ como espaço de medida fixo e vamos denotar o conjunto de todas as funções $\chi-$mensuráveis por $M = M(X,\chi)$ e o conjunto de todas as funções $\chi-$mensuráveis não negativas por $M^+ = M^+(X,\chi)$.

Definição 6. *Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é simples quando seu conjunto imagem é finito.*

Temos que uma função simples φ pode ser representada da seguinte forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}, \tag{1.15}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $E_i \in \chi$, para todo $i \in \{1,2,...,n\}$. Mais ainda: se exigimos que os a_i sejam distintos entre si, e que os E_i sejam disjuntos entre si, esta representação é única e chamada de Representação Padrão da função simples φ.

Definição 7 (Integral de uma função simples)**.** *Seja $\varphi \in M^+$ uma função simples com representação padrão dada por*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}. \tag{1.16}$$

Então a integral de φ com respeito a medida μ é definida como

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i). \tag{1.17}$$

Observação 8. *Na definição acima e no que segue estamos convencionando que $0 \cdot \infty = 0$.*

Exemplo 9. *Considerando $X = (\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda)$, temos que a integral da função identicamente nula é igual a zero, enquanto que a integral de qualquer outra função constante não negativa é $+\infty$.*

Enunciamos a seguir algumas propriedades elementares da integral.

Lema 6. *i. Se φ e ψ são funções simples em M^+ e $c \geq 0$, então:*

a.

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu \tag{1.18}$$

b.

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu \tag{1.19}$$

ii. Se λ é definida em χ como sendo

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu \tag{1.20}$$

então λ é uma medida sobre χ.

Para demonstração veja [1] página 29.

Definição 8 (Integral de uma função mensurável não negativa). *Seja $f \in M^+$ e Φ o conjunto de todas as funções simples de M^+ tais que $\varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in X$.*

i. Definimos a integral de f com respeito a medida μ como sendo

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi \in \Phi} \int \varphi d\mu \tag{1.21}$$

ii. Se $f \in M^+$ e $E \in \chi$ então $f\chi_E \in M^+$ e a integral de f sobre E é definida como sendo

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu. \tag{1.22}$$

O lema a seguir é consequência imediata da definição acima e nos garante que a integral é monótona com respeito ao integrando e com respeito ao conjunto sobre o qual se está integrando.

Lema 7. *1. Se f e g pertencem a M^+ e $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X$, então*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu. \tag{1.23}$$

2. Se $f \in M^+$ e $E, F \in \chi$ com $E \subset F$ então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu \tag{1.24}$$

Agora estamos preparados para enunciar e provar o resultado mais importante desta seção . O Teorema da Convergência Monótona, devido a B. Levi nos dá a ferramenta chave para as obter propriedades fundamentais de convergência da Integral de Lebesgue.

Teorema 1 (Convergência Monótona)**.** *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M^+$ é uma sequência monótona crescente, isto é, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para uma função f, então $f \in M^+$ e vale que*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.25}$$

Demonstração. Pelo Lema 2 temos que a função f é mensurável.

Como $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$, segue, pelo Lema 7 que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

Portanto, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \tag{1.27}$$

Para mostrar a desigualdade oposta, seja $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha < 1$, φ uma função simples em M^+ satisfazendo $\varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in X$ e defina para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$A_n = \{x \in X; f_n(x) > \alpha\varphi(x)\}. \tag{1.28}$$

Afirmação 1. *Temos que $A_n \in \chi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Com efeito, se $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}$ é a representação padrão da função φ, temos que*

$$A_n = (\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha a_1\} \cap E_1) \cup ... \cup (\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha a_m\} \cap E_m) \tag{1.29}$$

e portanto $A_n \in \chi$.

Afirmação 2. *Temos que $A_n \subset A_{n+1}$ pois se $x \in A_n$, temos que $f_{n+1} \geq f_n(x) > \alpha\varphi(x)$.*

Afirmação 3. *Temos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Com efeito, se $x \in X$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x) \leq f_{n_0}(x) \leq f(x)$ pois $f(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ e, consequentemente, $x \in A_{n_0}$.*

Aplicando o Lema 7 obtemos que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu = \int f_n d\mu. \tag{1.30}$$

Afirmação 4. *Temos que*

$$\int \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu. \tag{1.31}$$

Com efeito, pelo Lema 6 temos que a função λ definida em χ por

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu \tag{1.32}$$

é uma medida e, utilizando o Lema 5 obtemos que

$$\int \varphi d\mu = \lambda(X) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\mu. \tag{1.33}$$

Sendo assim, passando o limite em (1.30) obtemos que

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.34}$$

Como a desigualdade acima vale para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ com $0 < \alpha < 1$, temos que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu, \tag{1.35}$$

e como φ é uma função simples arbitrária em M^+ com $\varphi(x) \leq f(x)$ $\forall x \in X$, segue que

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi\in\Phi} \int \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu, \tag{1.36}$$

onde Φ é o conjunto de todas as funções simples φ em M^+ com $\varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in X$.

Utilizando as desigualdades (1.27) e (1.36) concluímos que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.37}$$

□

Observação 9. *Note que não estamos assumindo que ambos os lados da equação (1.51) são finitos. Com efeito, a sequência* $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona crescente de números reais estendidos tendo um limite em* $\bar{\mathbb{R}}$ *mas talvez não em* $\mathbb{R}$.

Vamos agora expor alguns resultados imediatos do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 1. *i. Se* $f \in M^+$ *e* $c \geq 0$*, então* $cf \in M^+$ *e*

$$\int cf d\mu = c \int f d\mu. \tag{1.38}$$

ii. Se $f,g \in M^+$*, então* $f+g \in M^+$ *e*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \tag{1.39}$$

Demonstração. Vamos provar cada um dos ítens.

i. Se $c = 0$ o resultado é imediato. Se $c > 0$, seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente de funções simples convergindo para a função cf (vide Lema 3). Aplicando o Lema 6 e o Teorema da Convergência Monótona obtemos que

$$\int cf d\mu = \lim_{n\to\infty} \int c\varphi_n d\mu = c \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu = c \int f d\mu. \tag{1.40}$$

ii. Demonstração análoga a feita no item anterior.

□

O próximo resultado também é uma consequência do Teorema da Convergência Monótona. Ele é muito importante uma vez que nos permite lidar com sequências de funções que não sejam monótonas.

Corolário 2 (Lema de Fatou)**.** *Se* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M^+$ *então*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.41}$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina $g_m(x) = inf\{f_m(x), f_{m+1}(x), ...\}, \quad \forall x \in X$. Assim, temos que se $m \leq n$, então $g_m(x) \leq f_n(x)$ $\forall x \in X$ e, consequentemente,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \tag{1.42}$$

ou seja,

$$\int g_m d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.43}$$

Como a sequência $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente, isto é, $g_m(x) \leq g_{m+1}(x), \ \forall x \in X$ e o seu limite é $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$, segue, pelo Teorema da Convergência Monótona, que

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.44}$$

□

Corolário 3. *Se* $f \in M^+$ *e* λ *é definida em* χ *por*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \ \ \forall E \in \chi, \tag{1.45}$$

então λ *é uma medida.*

Demonstração imediata a partir do Teorema da Convergência Monótona. Para maiores detalhes veja [1] *página* 34.

Corolário 4. *Suponha que* $f \in M^+$. *Então* $f(x) = 0 \ \ \mu - q.t.p.$ *se, e somente se,*

$$\int f d\mu = 0 \tag{1.46}$$

Demonstração. Se a equação (1.46) é valida, defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$E_n = \left\{ x \in X; f(x) > \frac{1}{n} \right\}. \tag{1.47}$$

Temos assim que $f(x) \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}(x), \quad \forall x \in X$ e então

$$0 = \int f d\mu \geq \int \frac{1}{n}\chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0, \tag{1.48}$$

ou seja, $\mu(E_n) = 0$. Se $N = \{x \in X; f(x) > 0\}$ temos então que

$$N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \tag{1.49}$$

e como $E_n \subset E_{n+1}$ segue, pelo Lema 7, que $\mu(N) = 0$, ou seja, que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in X \subset N$$

com $\mu(N) = 0$.

Reciprocamente, se $f(x) = 0$ $\mu - q.t.p.$ e $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$, então $\mu(E) = 0$ e definindo para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n\chi_E$, obtemos que $f \geq \liminf_{n \to \infty} f_n$ e, pelo Lema de Fatou, segue que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n d\mu = 0. \tag{1.50}$$

$\square$

Abaixo, apresentamos uma versão do Teorema da Convergência Monótona substituindo a convergência pontual em X pela convergência $\mu - q.t.p.$.

Corolário 5 (Teorema da Convergência Monótona com convergência $\mu - q.t.p.$)**.** *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M^+$ é uma sequência monótona crescente, isto é, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in X$*

e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mu - q.t.p.$ para uma função f, então $f \in M^+$ e vale que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.51}$$

Demonstração. Seja N o conjunto de medida nula tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ \forall x \in M = X \setminus N.$$

Temos que $f_n\chi_M$ converge pontualmente para $f\chi_M$ em X e pelo Teorema da Convergência Monótona segue que

$$\int f\chi_M d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_M d\mu. \tag{1.52}$$

Como $\mu(N) = 0$, segue que $f\chi_N = f_n\chi_N = 0\ \mu - q.t.p$ e pelo Corolário 4 obtemos que

$$\int f\chi_N d\mu = \int f_n\chi_N d\mu = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.53}$$

Como $f = f\chi_M + f\chi_N$ e $f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N$ o resultado segue.

□

Corolário 6. *Suponha que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência em M^+. Então*

$$\int \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n\right) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int g_n d\mu\right). \tag{1.54}$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema da Convergência Monótona à sequência

$f_n = g_1 + g_2 + g_3 + ... + g_n$. □

1.5 Funções Integráveis

Na seção anterior nós definimos a Integral de Lebesgue de uma função arbitrária

$f \in M^+$. Nesta seção vamos estender este conceito para funções em M, isto é, funções mensuráveis podendo tomar valores positivos ou negativos. Para isto, chamamos a atenção ao fato de que se $f \in M$, então sua parte positiva f^+ e sua parte negativa f são elementos de M^+, estando, portanto, bem definidos os números (em $\bar{\mathbb{R}}$)

$$\int f^+ d\mu \ \text{ e } \ \int f^- d\mu. \tag{1.55}$$

Definição 9. *A conjunto $L = L(X,\chi,\mu)$ das funções integráveis a Lebesgue com respeito a medida μ consiste no conjunto de todas as funções mensuráveis $f \in M$, tais que a suas partes positiva e negativa possuem integral finita, ou seja,*

$$L = L(X,\chi,\mu) = \left\{ f \in M(X,\chi); \int f^+ d\mu < +\infty \text{ e } \int f^- d\mu < +\infty \right\}. \tag{1.56}$$

Neste caso, se $f \in L$ então sua integral com respeito a medida μ é definida por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu, \tag{1.57}$$

e, se $E \in \chi$, definimos a integral de f sobre E com respeito a medida μ por

$$\int_E f d\mu = \int f\chi_E d\mu = \int f^+\chi_E d\mu - \int f^-\chi_E d\mu. \tag{1.58}$$

O objetivo principal desta seção é o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que segundo o próprio Lebesgue, é o o teorema mais importante de sua teoria. Para isto, vamos enunciar e provar alguns resultados.

O resultado a seguir é comumente chamado de "propriedade da integrabilidade absoluta"da integral de Lebesgue.

Lema 8. *Seja $f \in M$. Então $f \in L$, ou seja, f é integrável se, e somente se, $|f|$ é* *integrável. Nesse caso, temos que*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu. \tag{1.59}$$

Demonstração. Por definição temos que $f \in L$ se, e somente se, f^+ e f^- pertencem a M^+ e têm integral finita. Como $|f| = f^+ + f^-$, segue que f é integrável se, e somente se, |f| é integrável. Além disso, temos que

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right| = \int |f| d\mu. \tag{1.60}$$

□

Corolário 7. *Se $f \in M$, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integrável e*

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu. \tag{1.61}$$

Demonstração. Basta aplicar o lema anterior para concluir que $|f|$ é integrável e, consequentemente, f é integrável. Utilizando o Lema 7 obtém se a desigualdade desejada. □

É possível mostrar que o conjunto $L = L(X, \chi, \mu)$, munido com as operações usuais de soma e produto por escalar utilizadas para funções, é um espaço vetorial. A demonstração é canônica e pode ser encontrada em [1], página 43. Sendo assim, vamos apenas enunciar o resultado.

Lema 9. *Se $f,g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f + g \in L$ assim como $\alpha f \in L$ e além disso vale que*

i.

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \tag{1.62}$$

ii.

$$\int (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int f d\mu, \tag{1.63}$$

ou seja, L é um espaço vetorial real quando munido com as operações usuais de soma e produto por escalar das funções.

Vamos agora mostrar o resultado principal desta seção.

Teorema 2 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L$ uma sequência de funções integráveis que converge $\mu - q.t.p.$ para uma função mensurável f. Suponha que existe uma função integrável $g \in L$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x), \forall x \in X$ $, \forall n \in \mathbb{N}$. Então f é integrável e vale que*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.64}$$

Demonstração. Seja N o conjunto de medida nula tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ \forall x \in M = X \setminus N. \tag{1.65}$$

Redefinindo as funções f_n e f em N como sendo identicamente nulas, obtemos que a convergência pontual se dá em todo o conjunto X e isso não altera o valor das integrais pois o conjunto N tem medida nula. Assim, como $|f| \leq g$ em X, segue pelo Lema 8 e Corolário 7 que f é integrável.

Vamos mostrar agora que

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.66}$$

Com efeito, como $g + f_n \geq 0$, podemos aplicar o Lema de Fatou e concluir que

$$
\begin{aligned}
\int g d\mu + \int f d\mu = \int (g+f)\, d\mu \qquad &\leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int (g+f_n)\, d\mu \\
&= \liminf_{n\in\mathbb{N}} \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\
&= \int g d\mu + \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu,
\end{aligned} \tag{1.67}
$$

ou seja,

$$
\int f d\mu \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu. \tag{1.68}
$$

Por outro lado, temos também que $g - f_n \geq 0$ e, de maneira análoga, concluímos que

$$
\int g d\mu - \int f d\mu \leq \int g d\mu - \limsup_{n\in\mathbb{N}} \int (f_n) d\mu, \tag{1.69}
$$

ou seja,

$$
\limsup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \tag{1.70}
$$

Combinando as duas desigualdades concluímos que

$$
\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{1.71}
$$

e o teorema está demonstrado. $\square$

Capítulo 2

Espaços L^p

No capítulo anterior nós definimos a Integral de Lebesgue de uma função mensurável arbitrária. Como vimos no Lema 9, o conjunto $L = L(X, \chi, \mu)$ de todas as funções integráveis se torna um espaço vetorial real com as operações usuais de soma e produto escalar definidas para as funções. Neste capítulo nós iremos colocar uma estrutura de espaço de Banach no conjunto das funções integráveis e veremos que para fazer isto, é necessário identificar duas funções que são iguais $\mu - q.t.p.$ O conjunto formado por essas classe de equivalências são os chamados espaços de Lebesgue L^p. O resultado principal deste capítulo é o Teorema de Riez-Fischer, segundo o qual, se $1 \leq p < \infty$ então o espaço L^p é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p} = \sqrt[p]{\int |u|^p d\mu}.$$

Definição 10. *Se V é um espaço vetorial real, então uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é chamada de norma se satisfaz as seguintes condições:*

i. $\|u\| \geq 0, \;\; \forall u \in V$.

ii. $\|u\| = 0$ *se, e somente se* $u = 0$.

iii. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}; \ \forall u \in V.$

iv. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \ \forall u,v \in V.$

Exemplo 10. *A função módulo* $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *define uma norma em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 11. *Se* $V = \mathbb{R}^n$, *então as funções a seguir definem uma norma no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$*:*

1. $\|u\|_s = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n|, \ \ \forall u = (u_1,u_2,...,u_n) \in \mathbb{R}^n.$

2. $\|u\|_m = \max\{|u_1|,|u_2|,...,|u_n|\}, \ \ \forall u = (u_1,u_2,...,u_n) \in \mathbb{R}^n.$

3. $\|u\| = \sqrt[n]{|u_1|^2 + |u_2|^2 + ... + |u_n|^2}, \ \ \forall u = (u_1,u_2,...,u_n) \in \mathbb{R}^n.$

Exemplo 12. *O espaço* l_1 *das sequências reais* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cujas séries são absolutamente convergentes, isto é, tais que* $S(x) = \sum |x_n| < \infty$, *é um espaço vetorial normado com a norma definida por* S.

Exemplo 13. *Se consideramos em* $V = C^1[a,b]$ *a função definida por*

$$N(u) = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \ \ ;\forall u \in C^1[a,b] \tag{2.1}$$

temos que N *não define uma norma em* $C^1[a,b]$. *Com efeito, temos que a função* N *satisfaz as condições i, iii, e iv da Definição 10, porém qualquer função constante* c *satisfaz* $N(c) = 0$. *Logo a condição ii não é satisfeita e consequentemente* N *não define uma norma em* $C^1[a,b]$.

Observação 10. *Quando uma função definida em um espaço vetorial* V *satisfaz as condições i, iii, e iv da Definição 10, dizemos que esta função é uma semi-norma.*

Definição 11. *Seja* $X = (X,\chi,\mu)$ *espaço de medida. Se* $f \in L = L(X,\chi,\mu)$ *então definimos a função* $N_\mu : L \to \mathbb{R}$ *como sendo*

$$N_\mu(f) = \int |f|^p d\mu \ \ \forall f \in L. \tag{2.2}$$

O lema a seguir nos diz que a função definida acima é uma semi-norma no espaço L.

Lema 10. *O espaço $L = L(X, \chi, \mu)$ é um espaço vetorial e a função*

$$N_\mu(f) = \int |f|^p d\mu \ \ \forall f \in L$$

define uma semi-norma em L. Além disso, se $N_\mu(f) = 0$, então $f = 0$ $\mu - q.t.p.$

Demonstração. Pelo Lema 9 temos que L é um espaço vetorial. Vamos mostrar que a função N_μ satisfaz cada uma das condições da Definição 10. Com efeito, é imediato que $N_\mu(f) \geq 0$ e que $N_\mu(\alpha f) = |\alpha| N_\mu(f)$, para toda $f \in L$. Além disso, temos que se $f, g \in L$, então $|f + g| \in L$ e vale que $|f + g| \leq |f| + |g|$. Logo, pelo Lema 7, temos que

$$\int |f + g| d\mu \leq \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu. \tag{2.3}$$

Isso mostra que a função N_μ define uma semi-norma em L e, pelo Corolário 4, temos que $N_\mu(f) = 0$ se, e somente se, $f = 0$ $\mu - q.t.p.$ □

A fim de tornarmos o espaço L em um espaço vetorial normado, introduzimos em $X = (X, \chi, \mu)$ a seguinte relação:

Definição 12. *Sejam $f, g \in X$. Dizemos que $f \sim g$ se $f = g$ $\mu - q.t.p.$*

Claramente a relação acima define uma relação de equivalência em X. Note que ao passarmos o quociente pela relação 12 no espaço L, estamos identificando duas funções que são iguais $\mu - q.t.p.$ Assim, se $f, g \in L$ e $f \sim g$, então

$$\int f d\mu = \int g d\mu. \tag{2.4}$$

Em particular, se $f \in L$ é tal que $f = 0$ $\mu - q.t.p$, então $|f| = 0$ $\mu - q.t.p$, e assim,

$$\int |f| d\mu = 0. \tag{2.5}$$

Desta forma, o conjunto $L_1 = L_1(X, \chi, \mu)$ de todas as classes de equivalência de $[f]$ com $f \in L$ se torna um espaço normado com a norma

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu.$$

Com efeito, L_1 claramente se torna um espaço vetorial com as operações de soma e produto por escalar usuais: $[f+g] = [f] + [g]$ e $\alpha[f] = [\alpha f]$ para quaisquer $[f],[g] \in L_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que a norma $\|\cdot\|_1$ está bem definida, pois se $[f],[g] \in L_1$ com $[f] = [g]$, então $|f| = |g|$ $\mu - q.t.p.$ e

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu = \int |g| d\mu = \|[g]\|_1. \tag{2.6}$$

As condições $(i), (iii)$ e (iv) da definição de norma claramente são satisfeitas. Finalmente, se $\|[f]\|_1 = 0$, então

$$\int |f| d\mu = 0, \tag{2.7}$$

ou seja, $f = 0$ $\mu - q.t.p.$ e portanto $[f] = [0]$.

Observação 11. *Note que os elementos do conjunto L_1 são classes de equivalências de funções. Porém, é costumeiro tratá-los como funções uma vez que seu comportamento algébrico é o mesmo. Sendo assim, no que segue, denotaremos as classes de equivalência $[f] \in L_1$ apenas por f e escreveremos $\|f\|_1$ ao invés de $\|[f]\|_1$.*

2.1 Os espaços $\mathbf{L}_p$

Nesta seção vamos estudar uma família de espaços normados formados por classes de equivalências de funções mensuráveis.

Definição 13. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $L_p = L_p(X, \chi, \mu)$ consiste em todas as classes de equivalência das funções mensuráveis $f \in M(X,\chi)$ tais que*

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty. \tag{2.8}$$

Já vimos que se $p = 1$, então o espaço L_1 se torna um espaço normado com a norma $\displaystyle\int |u| d\mu \quad \forall u \in L_p$. A proposição a seguir generaliza este resultado para o caso de $1 < p < \infty$.

Proposicão 1. *Seja $1 < p < \infty$. O espaço L_p é um espaço vetorial real. Além disso, a seguinte função define uma norma em L_p:*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_X |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.9}$$

Para provar a proposição acima, vamos enunciar e provar algumas desigualdades importantes válidas para os espaços L_p.

Lema 11 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $A,B \in \mathbb{R}$ posititivos. Se $p,q \in [1,\infty)$ são tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^p}{q}. \tag{2.10}$$

Demonstração. Temos que se $0 < \alpha < 1$ a função f definida em $(0, \infty)$ por $f(t) = \alpha t - t^\alpha$ é derivável e $f'(t) = \alpha(1 - \frac{1}{t^\beta})$, onde $\beta = 1 - \alpha$. Logo, temos que $f'(t) < 0$ se $0 < t < 1$ e $f'(t) > 0$ se $t > 1$. Sendo assim, temos que $f(1) \leq f(t), \forall t \in (0,\infty)$, ou seja,

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha), \quad \forall t \in (0,\infty). \tag{2.11}$$

Tomando $t = \frac{a}{b}$ na inequação acima, onde $a,b \in (0,\infty)$, e multiplicando por b obtemos que

$$a^{\alpha} b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b, \tag{2.12}$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $a = b$.

Tomando $\alpha = \frac{1}{p}$, $A = a^p$ e $B = b^p$, concluímos que

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^p}{q}, \ \ \forall A,B, \in (a,\infty), \tag{2.13}$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $A = B$.

□

Lema 12 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L_p$ e $g \in L_q$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L_1$ e vale que*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{2.14}$$

Demonstração. Se $f = 0$ ou $g = 0$ o resultado é imediato. Sendo assim, suponha que $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$. Temos que o produto fg é mensurável e utilizando a desigualdade de Young com $A = \dfrac{f}{\|f\|_p}$ e $B = \dfrac{g}{\|g\|_q}$ obtemos que

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\|f\|_p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q}, \tag{2.15}$$

e integrando obtemos

$$\frac{\int |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q \leq 1}, \tag{2.16}$$

ou seja,

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.17}$$

□

Lema 13 (Desigualdade de Minkowsky)**.** *Seja* $1 < p < \infty$ *e* $f,g \in L_p$*. Então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.18}$$

Demonstração. Temos que

$$|f + g|^p \leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right), \tag{2.19}$$

pois a função $t \to t^p$ é convexa para $t > 0$. Isto nos mostra que $f + g \in L_p$. Observe agora que

$$|f + g|^p = |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}. \tag{2.20}$$

Note agora que como $f + g \in L_p$, segue que $|f + g|^p \in L_1$. Além disso, se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então $p = (p-1)q$ e segue que

$$\int \left(|f + g|^{p-1}\right)^q d\mu = \int |f + g|^p d\mu, \tag{2.21}$$

ou seja, $|f + g|^{p-1} \in L_q$.

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\int |f||f + g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \||f + g|\|_p^{\frac{p}{q}}, \tag{2.22}$$

e que

$$\int |g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \||f + g|\|_p^{\frac{p}{q}}, \tag{2.23}$$

Integrando em (2.20) e utilizando as desigualdades acima obtemos que

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f + g\|^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f + g\|^{\frac{p}{q}} \leq \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right). \tag{2.24}$$

Se $\|f+g\|_p = 0$ o resultado é imediato. Caso contrário, dividimos (2.24) por $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$ e utilizando o fato de que $p - \frac{p}{q} = 1$ obtemos que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.25}$$

Note que a demonstração da Proposição 1 é imediata a partir da desigualdade de Minkowsky. Com efeito, se $f,g \in L_p$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha f + \beta g \in L_p$ pois

$$\left(\int |\alpha f + \beta g| d\mu\right) \frac{1}{p} = \|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha| \|f\|_p + |\beta| \|g\|_p. \tag{2.26}$$

Além disso, a função definida em (2.9) óbviamente define uma norma em L_p.

Sendo assim, resta saber se o espaço L_p é completo nesta norma, o que é verdade e será provado no próximo resultado.

Teorema 3 (Riesz-Fischer)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$. Então o espaço L_p munido com a norma*

$$\|u\|_p = \left(\int |u|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in L_p, \tag{2.27}$$

é completo, isto é, L_p é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L_p$ uma sequência de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que se $n,m > n_0$ então

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon, \tag{2.28}$$

ou seja

$$\int |f_n - f_m|_p^p d\mu < \epsilon^p. \tag{2.29}$$

Fixe $n_1 > n$. É possível obter $n_2 > n_1$ tal que $\|f_{n_2} - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2}$, pois a sequência é de

Cauchy. Prosseguindo desta maneira obtemos uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}. \tag{2.30}$$

Para não carregar a notação denotemos $g_k = f_{n_k}$. Seja então

$$g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k\in\mathbb{N}} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \tag{2.31}$$

Temos que g é mensurável e não negativa. Sendo assim, aplicando o Lema de Fatou concluímos que

$$\int |g|^p d\mu \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int \left[|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right]^p d\mu, \tag{2.32}$$

ou seja,

$$\left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \left[\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p\right] \leq \|g_1\|_p + 1. \tag{2.33}$$

Defina $E = \{x \in X; g(x) < \infty\}$. Temos que $E \in \chi$ e $\mu(X \setminus E) = 0$. Logo, a série definida em (2.31) é absolutamente convergente $\mu - q.t.p.$ Desta forma, defina f em X da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(x) - g_k(x)) & \text{se } x \in E; \\ 0 & \text{se } x \neq E. \end{cases} \tag{2.34}$$

Temos que $g_k \to f \quad \mu - q.t.p.$ e $|g_k| < g, \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema da Convergência Dominada concluímos que

$$\int |f|^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \left[|g_1 + \sum_{k=1}^{n}(g_{k+1} - g_k)|\right]^p d\mu \leq 2^p \|g\|_p^p < \infty \tag{2.35}$$

e portanto $f \in L_p$. Como $|f - g_k|^p \leq 2^p g^p$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$0 = \lim_{k\to} \|f - g_k\|_p, \tag{2.36}$$

e portanto $g_k \to f$ em L_p.

Resta mostrar que $f_n \to f$ em L_p. Para isto, note que tomando $m > n_0$ e $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande temos que

$$\int |f_m - g_k|^p d\mu < \epsilon^p. \tag{2.37}$$

Aplicando o Lema de Fatou, obtemos que

$$\int |f_m - f|^p \leq \liminf_{k\to\infty} \int |f_m - g_k|^p d\mu \leq \epsilon^p, \tag{2.38}$$

sempre que $m > n_0$. Isto prova que $f_m \to f$ em L_p. $\square$

Capítulo 3

Aplicação: Um problema de contorno linear

Neste capítulo, faremos um exemplo de aplicação da teoria da integração de Lebesgue no estudo de equações diferenciais. Como veremos a seguir, os métodos variacionais são uma das principais ferramentas utilizadas para resolver problemas na teoria das equações diferenciais. A idéia central é a formulação de um problema variacional equivalente, em um certo sentido, que consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional associado ao problema diferencial. O termo funcional é usado para designar uma função real cujo domínio é um espaço vetorial.

3.1 Um Problema de Contorno Linear

Considere o seguinte problema de contorno

$$Lu = f, \quad \text{em } [a,b], \;\; u(a) = u(b) = 0, \tag{3.1}$$

onde

$$Lu = -\left(p(t)u'\right)' + q(t)u \tag{3.2}$$

é um operador diferencial atuando em funções $C^2[a,b]$ e as funções p,q e f, definidas no intervalo $[a,b]$ satisfazem as seguintes hipóteses:

i. $p \in C^1[a,b]$ e $p(t) > 0, \ \forall t \in [a,b]$.

ii. $q \in C[a,b]$ e $q(t) \geq 0, \ \forall t \in [a,b]$.

iii. $f \in C[a,b]$.

Definição 14 (Solução Clássica)**.** *Uma solução clássica do problema* (3.1) *é uma função* $u \in C^2[a,b]$ *que satisfaz a equação* (3.1) *e se anula nos extremos do intervalo* $[a,b]$*, ou seja,* $u(a) = u(b) = 0$.

A definição acima nos motiva a questionarmos o seguinte:

Para responder a pergunta acima, vamos buscar algumas condições necessárias. Para isto, seja $v \in C^1[a,b]$ com $v(a) = v(b) = 0$ e suponha que $u_0 \in C^2[a,b]$ seja uma solução clássica de (3.1). Multiplicando a equação (3.1) por v e integrando obtemos

$$-\int_a^b \left[\left(p(t)u'(t)\right)' v(t) + q(t)u(t)v(t)\right] dt = \int_a^b f(t)v(t)dt \tag{3.3}$$

Utilizando integração por partes obtemos que

$$\int_a^b p(t)u'(t)v'(t)dt = -\int_a^b \left(p(t)u'\right)' v(t)dt \tag{3.4}$$

e, substituindo (3.4) em (3.3), obtemos que

$$\int_a^b p(t)u'(t)v'(t)dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt. \tag{3.5}$$

Concluímos então que toda solução clássica $u \in C^2[a,b]$ do problema (3.1), se existir, deve satisfazer a equação (3.5) para qualquer $v \in C^1[a,b]$ com $v(a) = v(b) = 0$. Por outro lado, não é óbvio que a recíproca seja verdadeira. Na verdade, a função u não precisa nem ser de classe C^2, bastando por exemplo que $u \in C_0^1[a,b]$. Isto nos motiva à seguinte definição.

Definição 15. *Uma função $u \in C_0^1$ é uma solução fraca de (3.1) se satisfaz a equação (3.5) para todo $v \in C_0^1[a,b]$, isto é, se*

$$\int_a^b p(t)u'(t)v'(t)dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt, \quad \forall v \in C_0^1[a,b] \tag{3.6}$$

Observação 12. *Para não deixar a notação excessivamente carregada, iremos suprimir o intervalo e a variável de integração uma vez que estes são os mesmo sempre. Sendo assim, utilizaremos a notação $\int f dt$ para designar $\int_a^b f(t)dt$.*

Veremos agora que é mais fácil procurar por soluções fracas. Para isto, considere o funcional $\Phi : C_0^1[a,b] \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int pv'^2 dt + \frac{1}{2}\int qv^2 dt - \int fv dt, \quad \forall v \in C_0^1[a,b]. \tag{3.7}$$

Sejam $u_0, v \in C_0^1[a,b]$ e $h \neq 0 \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\frac{\Phi(u_0 + hv) - \Phi(u_0)}{h} = \int pu_0'v'dt + \int qu_0 v dt - \int fv dt + \frac{h}{2}\int pv'^2 + qv^2 dt, \tag{3.8}$$

e consequentemente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(u_0 + hv) - \Phi(u_0)}{h} = \int pu_0'v'dt + \int qu_0 v dt - \int fv dt. \tag{3.9}$$

Observação 13. *O limite acima é chamado no Cálculo das Variações como Primeira Variação do funcional Φ e será denotado por $\Phi'(u_0) \cdot v$.*

Temos então que se $u_0 \in C_0^1$ for um mínimo do funcional Φ, então

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + tv), \quad \forall v \in C_0^1[a,b], \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

e assim, $\Phi'(u_0) \cdot v = 0, \quad \forall v \in C_0^1$. Com efeito, basta considerar a função $\varphi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_v(t) = \Phi(u_0 + tv), \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Temos que $t = 0$ é um ponto de mínimo de φ_v; $\forall v \in C_0^1$ e assim $\Phi'(u_0) \cdot v = \varphi_v'(0) = 0$. Sendo assim, concluímos que se u_0 é um ponto de mínimo do funcional Φ, então u_0 é uma solução fraca do problema (3.1), ou seja, a existência de uma solução fraca para o problema (3.1) pode ser estabelecida se provarmos que o funcional Φ tem um mínimo.

Seguindo nesta direção, mostraremos inicialmente que Φ é limitado inferiormente. Para isto, note que se $0 < \check{p} = \min_{t \in [a,b]} p(t)$ e, utilizando que $q(t) \geq 0, \forall t \in [a,b]$, juntamente com a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos que

$$\Phi(u) \geq \check{p} \int u'^2 dt - \left(\int f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int v^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

Para prosseguir, vamos utilizar a seguinte desigualdade:

Proposicão 2 (Desigualdade de Wirtinger)**.** *Existe $c \in \mathbb{R}$ positivo e independente de u tal que*

$$\int_a^b u(t)^2 dt \leq c^2 \int_a^b u'^2(t) dt, \quad \forall u \in C_0^1[a,b]. \tag{3.12}$$

Demonstração. Seja $u \in C_0^1[a,b]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$u(t) = \int_a^t u'(s) ds. \tag{3.13}$$

Note agora que, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$|u(t)|^2 = |u(t)| \left| \int_a^t u'(s)ds \right| \leq \int_a^t |u(t)||u'(s)|ds \leq |u(t)|(t-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^t u'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.14}$$

ou seja,

$$|u(t)| \leq (t-a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^t u'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$u(t)^2 = |u(t)|^2 \leq (t-a) \int_a^t u'^2(s)ds, \tag{3.16}$$

ou ainda,

$$u(t)^2 = |u(t)|^2 \leq (t-a) \int_a^b u'^2(s)ds. \tag{3.17}$$

Tomando $c^2 = \dfrac{(b-a)^2}{2}$ e integrando ambos os lados da inequação (3.17), obtemos

$$\int_a^b u(t)^2 dt \leq c^2 \int_a^b u'^2(t)dt \tag{3.18}$$

□

Observação 14. *A melhor constante c da desigualdade acima pode ser obtida utilizando séries de Fourier. Além disso, existe uma versão multidimencional da proposição acima conhecida como Desigualdade de Poincaré. Para maiores detalhes veja [3] página 31 e [2] página 290.*

Utilizando a desigualdade de Wirtinger em (3.11), obtemos

$$\Phi(u) \geq \check{p} \int u'^2 dt - c \left(\int f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int v'^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

Fazendo $X = \int u'^2 dt$ concluímos que

$$\Phi(u) \geq \check{p}X^2 - c\left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} X, \tag{3.20}$$

que é um polinômio do segundo grau, cujo valor mínimo é $-\dfrac{c^2}{4\check{p}}\displaystyle\int f^2 dt$. Segue portanto que

$$\Phi(u) \geq -\frac{c^2}{4\check{p}}\int f^2 dt, \ \ \forall u \in C_0^1[a,b]. \tag{3.21}$$

Concluímos assim que o funcional Φ é limitado inferiormente. Resta então nos questionar se seu ínfimo é assumido, isto é, se o funcional Φ possui um mínimo em $C_0^1[a,b]$.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass da Análise afirma que toda função real definida em um intervalo fechado e limitado da reta assume seu ínfimo neste intervalo. O essencial deste resultado são fatos topológicos a respeito da função e de seu domínio e, de fato, é possível generalizar este resultado da seguinte maneira.

Teorema 4. *Seja X um espaço topológico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferiormente. Então o seu ínfimo é assumido, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \leq f(x), \ \forall x \in X$.*

Demonstração. Para uma demonstração veja o Apêndice A, Teorema 8. □

Para tentar aplicar o Teorema 4 precisamos introduzir alguma topologia no conjunto $C_0^1[a,b]$. Sendo assim, note primeiramente que este é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais quando múnido com as operações usuais de soma e produto. Além disso, ele se torna um espaço normado se o munirmos da norma

$$\|u\| = \left(\int u'^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall u \in C_0^1. \tag{3.22}$$

Designemos, então, por X o espaço normado $C_0^1[a,b]$ munido com a norma definida em (3.22).

Proposicão 3. *O funcional Φ é contínuo em X.*

Demonstração. Com efeito, se $u_n \to u$ em X, temos que

$$\left| \int p({v'_n}^2 - v'^2)dt \right| \leq \hat{p} \int \left| {v'_n}^2 - v'^2 \right| dt \to 0. \tag{3.23}$$

De maneira inteiramente análoga e, utilizando a Desigualdade de Wirtinger, obtemos

$$\left| \int q(v_n^2 - v^2)dt \right| \leq c^2 \hat{q} \int \left| {v'_n}^2 - v'^2 \right| dt \to 0. \tag{3.24}$$

Utilizando agora a Desigualdade de Cauchy-Schwartz e a Desigualdade de Wirtinger obtemos

$$\left| \int f(v_n - v)dt \right| \leq c \left(\int f^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |v'_n - v'|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \to 0. \tag{3.25}$$

As desigualdades acima nos mostram que $\Phi(v) = \lim_{n\to\infty} \Phi(v_n)$, ou seja, que Φ é contínuo em X. □

Antes de prosseguir, relembremos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definida em um espaço topológico X é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(I)$ de qualquer intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ for um subconjunto aberto de X. Por outro lado, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definida em um espaço topológico X é semicontínua inferiormente se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(a, +\infty)$ é um aberto. Logo, toda função contínua é semicontínua inferiormente.

Sendo assim, temos que o funcional Φ é contínuo e consequentemente semicontínuo inferiormente. Para utilizarmos o Teorema 4 precisamos provar que X é compacto. Ocorre que isto é falso. Com efeito, o conjunto X não é completo como nos mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 14. *Consideremos no espaço $C_0^1[-1,1]$ a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por*

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ nx & se\ x \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{n}] \\ 1 & se\ x \in [-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}-\frac{1}{n}] \\ -nx & se\ x \in [\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 0 & se\ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}. \quad (3.26)$$

Temos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C_0^1[-1,1]$ com a norma (3.22), porém não existe $f \in C_0^1[-1,1]$ tal que $\|f_n - f\| \to 0$.

Para contornar este obstáculo considere o espaço de Lebesgue $L^2 = L^2[a,b]$. Vamos introduzir em L^2 o conceito de derivada fraca.

Definição 16. *Seja $u \in L^2$. Dizemos que u tem derivada fraca em L^2 se existir $v \in L^2$ tal que*

$$\int u\varphi' dt = -\int v\varphi dt, \ \ \forall \varphi \in C_c^1[a,b]. \quad (3.27)$$

Observação 15. *A ideia da definição acima surge da integração por partes. Com efeito, se $u \in C_0^1[a,b]$ e $\varphi \in C_c^1[a,b]$ temos, utilizando integração por partes, que*

$$\int u\varphi' dt = u\varphi|_a^b - \int u'\varphi = -\int u'\varphi. \quad (3.28)$$

Em particular, se $u \in L^2$ tem derivada no sentido usual $u' \in L^2$, então ela também possui derivada fraca em L^2 e estas coincidem. Sendo assim, também denotaremos a derivada fraca de u por u'.

Observação 16. *Sabemos que se uma função é derivável no sentido usual, então ela é contínua. Isto também vale para a derivada fraca, ou seja, se $f \in L^2$ admite derivada fraca em L^2 então f admite um representante contínuo, isto é, existe $\bar{f} \in C[a,b]$ tal que $f = \bar{f}\ \mu - q.t.p.$ Para demonstração veja [2] página 284.*

Considere agora o subconjunto $H_0^1[a,b] \subset L^2$ das funções $u \in L^2$ que possuem derivada fraca em L^2 e que se anulam nos extremos do intervalo $[a,b]$, isto é, $u(a) = u(b) = 0$. Temos que este é um subespaço vetorial de L^2. Na verdade, é possível mostrar que ele se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|u\| = \left(\int u'^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H_0^1[a,b]. \tag{3.29}$$

É possível mostrar(veja [2] página 204) que se considerarmos a imersão $C_0^1[a,b] \subset H_0^1[a,b]$, isto é, se identificarmos cada função de $C_0^1[a,b]$ com a sua classe de equivalência em $H_0^1[a,b]$, então $C_0^1[a,b]$ fica denso em $H_0^1[a,b]$.

O espaço $H_0^1[a,b]$ é um exemplo de espaço de Sobolev. Veremos a seguir que ele resolve parcialmente o nosso problema. Com efeito, o funcional Φ definido em (3.7) pode ser definido em $H_0^1[a,b]$ e como $C_0^1[a,b]$ é denso em $H_0^1[a,b]$ segue que o funcional Φ é contínuo em $H_0^1[a,b]$. Além disso, continua sendo verdade que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(u_0 + hv) - \Phi(u_0)}{h} = \int p u_0' v' dt + \int q u_0 v dt - \int f v dt. \tag{3.30}$$

A única diferença é que as derivadas são no sentido fraco. Desta forma, conseguimos contornar a não completude do espaço $C_0^1[a,b]$.

Se tentarmos utilizar novamente o Teorema 4, vamos continuar esbarrando na não compacidade. Com efeito, o espaço $H_0^1[a,b]$ não é compacto uma vez que é ilimitado. Na verdade, nem as bolas fechadas de $H_0^1[a,b]$ são compactas, uma vez que o espaço $H_0^1[a,b]$ tem dimensão infinita e um famoso resultado de Análise Funcional conhecido como Teorema de Riez, nos diz que as bolas fechadas de um espaço vetorial normado são compactas (na topologia da norma) se, e somente se, a dimensão do espaço é finita. Para contornar este obstáculo vamos introduzir o conceito de topologia fraca.

Primeiramente, relembremos que dado um conjunto X, uma topologia de X é uma coleção de subconjuntos τ de suas partes $\mathbb{P}(X)$ tais que:

i. $\emptyset, X \in \tau$.

ii. Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de subconjuntos de τ, então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.

iii. Se $A_1,A_2,...,A_n \in \tau$ então $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Quando munimos X de uma topologia, este se torna um espaço topológico.

A topologia fraca de um espaço de Banach X é definida como sendo a menor topologia de X que faz os funcionais lineares definidos em X serem contínuos. Esta definição é bastante abstrata, mas no nosso caso particular, isto é, no espaço $H_0^1[a,b]$, ela fica bem intuitiva uma vez que este é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$< u; v >_H = \int u'v'dt, \quad \forall u,v \in H_0^1[a,b]. \tag{3.31}$$

Por este motivo, o espaço dual de $H_0^1[a,b]$ pode ser identificado com si próprio, e utilizando o Teorema da Representação de Riez concluímos que se u_n converge fracamente, isto é, na topologia fraca, para $u \in H_0^1[a,b]$, então

$$< v; u_n > \to < f; u > , \ \forall v \in H_0^1[a,b]. \tag{3.32}$$

O motivo de introduzirmos a topologia fraca em $H_0^1[a,b]$ é que as bolas fechadas são fracamente compactas em espaços de Hilbert (veja Apêndice D, Teorema 16). Desta forma podemos tentar utilizar o Teorema 4 para concluir que o funcional assume seu ínfimo em alguma bola fechada $B[0,R]$. O único detalhe é que não há garantias de que o funcional Φ seja contínuo na topologia fraca. Para isto, utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema 5. *Seja E um espaço de Banach e Φ um funcional semicontínuo inferiormente e convexo definido em E. Então Φ é semicontínuo inferiormente na topologia fraca de E.*

Demonstração. Para demonstração veja [3] página 34. □

Para utilizar o teorema acima precisamos mostrar que o funcional Φ é convexo. Isto é feito no lema a seguir.

Lema 14. *Considere o funcional Φ definido em $H_0^1[a,b]$ como*

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int pv'^2 dt + \frac{1}{2}\int qv^2 dt - \int fv dt. \tag{3.33}$$

Então Φ é convexo, isto é, se $t \in [0,1]$, então

$$\Phi(tu + (1-t)v) \leq t\Phi(u) + (1-t)\Phi(v), \ \forall u,v \in H_0^1[a,b]. \tag{3.34}$$

Demonstração. Temos que a função real dada por $x \to x^2$ é convexa, ou seja, $(tx + (1-t)y)^2 \leq tx^2 + (1-t)y^2$. Sendo assim, temos que

$$\frac{1}{2}\int p(tu' + (1-t)v')^2 dt \leq \frac{t}{2}\int pu'^2 dt + \frac{(1-t)}{2}\int pv'^2 dt; \tag{3.35}$$

$$\frac{1}{2}\int q(tu + (1-t)v)^2 dt \leq \frac{t}{2}\int qu^2 dt + \frac{(1-t)}{2}\int qv^2 dt. \tag{3.36}$$

Logo, concluímos que

$$\Phi(tu + (1-t)v) \leq t\Phi(u) + (1-t)\Phi(v). \tag{3.37}$$

□

Utilizando o teorema acima concluímos que o funcional assume, de fato, o seu ínfimo em algum ponto $u_0 \in H_0^1[a,b]$.

Observe agora que o funcional Φ é Gateaux diferenciável(veja Apêndice C) em $H_0^1[a,b]$ e suas derivadas de Gateaux são contínuas. Com efeito, se $v_n \to v$ em $H_0^1[a,b]$

e utilizando as desigualdades de Wirtinger e Cauchy-Schwartz, obtemos que

$$\Phi'(u)(v_n - v) = \int pu^{v_n' - v'} dt + \int qu(v_n - v)dt = \int f(v_n - v) \to 0. \tag{3.38}$$

Segue então que o funcional Φ é diferenciável a Fréchet e como u_0 é um ponto de mínimo, segue que $\Phi'(u_0) = 0$ e consequentemente

$$< \nabla(u_0); v >= \Phi'(u_0)v = 0, \forall v \in H_0^1[a,b], \tag{3.39}$$

isto é,

$$\int pu_0'v'dt + \int qu_0 vdt = \int fvdt, \ \ \forall v \in H_0^1[a,b]. \tag{3.40}$$

Observação 17. *A expressão acima é o que, de fato, chamamos de solução fraca para o problema* (3.1). *É, essencialmente, a mesma definição dada em* (15). *A única diferença é que a derivada é tomada no sentido fraco.*

Antes de passarmos a parte de regularização da solução, vamos provar a unicidade da solução fraca. Com efeito, sejam $u_1, u_2 \in H_0^1[a,b]$ soluções fracas do problema (3.1). Temos assim que

$$\int pv'(u_1' - u_2')dt + \int qv(u_1 - u_2) = 0, \ \ \forall v \in H_0^1[a,b]. \tag{3.41}$$

Em particular, tomando $v = u_1 - u_2$ obtemos que

$$\int p(u_1' - u_2')^2 dt + \int q(u_1 - u_2)^2 dt = 0, \tag{3.42}$$

o que implica em

$$\int p(u_1' - u_2')^2 dt = 0. \tag{3.43}$$

Como $p(t) > 0, \forall t \in [a,b]$ segue que $u_1' = u_2'$. Isto por sua vez implica que $u_1 - u_2 = 0$, pois $u_1(a) = u_1(b) = u_2(a) = u_2(b) = 0$. Segue portanto que a solução fraca é única.

Vamos agora mostrar que a solução fraca u_0 encontrada é de fato uma solução clássica. Para ver isto, note que

$$\int p u_0' v' dt = -\int [q u_0 - f] v dt, \quad \forall v \in H_0^1[a,b]. \tag{3.44}$$

Isto nos mostra que pu_0' possui derivada fraca em L^2 e esta vale $(pu_0')' = qu_0 - f$. Temos assim que pu_0' é contínua e, consequentemente, u_0' existe no sentido usual e esta é contínua (veja Apêndice B, Observação 24). Utilizando a regra do produto para derivadas em pu_0' concluímos que

$$p u_0'' = -p' u_0' + q u_0 - f \tag{3.45}$$

e consequentemente $u_0 \in C_0^2[a,b]$ e o problema 3.1 possui única solução clássica.

Apêndice A

Elementos de Análise Funcional

A.1 Espaços Normados

Definição 17. *Seja E um espaço vetorial real. Suponha que esteja definida em E uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ tal que*

1. $\|u\| \geq 0, \ \ \forall u \in E$ *e* $\|u\| = 0$ *se, e somente se* $u = 0$.

2. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \quad \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u,v \in E$.

Nestas condições a função $\|\cdot\|$ é chamada de norma e vamos dizer que $(E,\|\cdot\|)$ é um espaço normado.

Em espaços normados é possível definir o conceito de limite.

Definição 18. *Seja E um espaço normado e $(u_n) \in E$ uma sequência. Diremos que (u_n) converge fortemente a $u \in E$ quando para cada $\epsilon > 0$ for possível obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então $\|u_n - u\| < \epsilon$.*

Há também para espaços normados a noção de sequência de Cauchy.

Definição 19. *Seja E um espaço normado e $(u_n) \in E$ uma sequência. Vamos dizer que a sequência (u_n) é uma sequência de Cauchy quando para cada $\epsilon > 0$ for possível obter N_0 tal que se $m, n \in \mathbb{N}$ com $n, m > N_0$ então $\|u_m - u_n\| < \epsilon$.*

Observação 18. *É imediato que toda sequência que converge fortemente é uma sequência de Cauchy. A recíproca, porém, não é verdadeira. Basta considerar o espaço $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ onde $|x| = max(x, -x)$. Os espaços normados onde vale a recíproca são chamados de Espaços de Banach.*

A.2 Espaços com Produto Interno

Definição 20. *Seja E um espaço vetorial real. Dizemos que uma função $< \cdot;\cdot >$: $E \times E \to \mathbb{R}$ define um produto interno em E se*

1. *$< \cdot;\cdot >$ é bilinear.*

2. *$< \cdot;\cdot >$ é simétrica.*

3. *$< u; u > \ \geq 0, \quad \forall u \in E$ e $< u; u >= 0$ se, e somente se, $u = 0$. Neste caso dizemos que $(E, < \cdot;\cdot >)$ é um espaço com produto interno.*

Observação 19. *Se $(E, < \cdot;\cdot >)$ é um espaço com produto interno, então é possível mostrar a seguinte desigualdade, conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwartz*

$$| < u; v > |^2 \leq \ < u; u > \ \ < v; v > .$$

A partir disto, é imediato ver que a função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = (< u; u >)^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em E. Logo, em todo espaço com produto interno é possível definir uma norma induzida pelo produto interno. Consequentemente surge em espaços com produto interno a noção de limite. Finalmente, se num espaço com produto interno *toda sequência de Cauchy for fortemente convergente a algum elemento deste espaço com a norma induzida, então este espaço será chamado de Espaço de Hilbert.*

A.3 Espaços Topológicos

Definição 21. *Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia em X é uma coleção χ de subconjuntos de X tal que*

1. $\emptyset, X \in \chi$.
2. *Se* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \in \chi$ *então* $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \chi$.
3. *Se* $A_1, A_2, ..., A_n \in \chi$ *então* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \chi$.

Os elementos de χ são chamados de abertos e dizemos que (X, χ) é um espaço topológico. Quando a topologia estiver subentendida vamos denotar apenas por X para não carregar a notação.

Em espaços topológicos é possível introduzir o conceito de limite.

Definição 22. *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência no espaço topológico X e $u \in X$. Dizemos que $\lim u_n = u$ se para todo aberto A de X que contém u, for possível obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então $u_n \in A$.*

Observação 20. *Se E é um espaço normado, é possível induzir em E uma topologia através de sua norma (a saber, a topologia gerada pelas bolas abertas). Neste caso, as definições de limite que introduzimos para espaços normados e espaços topológicos são equivalentes. Por outro lado, nem toda topologia provém de uma norma. Ver [5] .*

Definição 23. *Seja X um conjunto não vazio. Uma métrica (ou distância) em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que*

1. $d(u,v) \geq 0, \ \forall\, u,v \in X$ *e* $d(u,v) = 0$ *se, e somente se,* $u = v$.

2. $d(u,v) = d(v,u), \;\; \forall\, u,v \in X$.

3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v), \;\; \forall\, u,v,w, \in X$.

Neste caso dizemos que (X,d) *é um espaço métrico.*

Em espaços métricos é possível introduzir o conceito de limite.

Definição 24. *Seja* (X,d) *um espaço métrico,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ *e* $u \in X$. *Dizemos que* $\lim u_n = u$ *se para cada* $\epsilon > 0$, *for possível obter* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $n > N_0$ *então* $d(u_n,u) < \epsilon$.

Observação 21. *Se* $(X,\| \;\|)$ *é um espaço normado a função* $d(u,v) = \|u - v\|$ *define uma métrica em* X, *ou seja, em todo espaço normado é possível induzir uma métrica. Neste caso as definições de limite são equivalentes. Por outro lado, é possível mostrar que nem toda métrica provém de uma norma.*

Observação 22. *Em espaços métricos é possível induzir uma topologia associada à métrica (a saber a topologia gerada pelas bolas abertas). Neste caso, as definições de limite que introduzimos são equivalentes. Por outro lado, é possível mostrar que nem toda topologia provém de uma métrica. Os espaços topológicos em que a topologia provém de uma métrica são chamados de espaços metrizáveis. Veja [5].*

A.4 Compacidade

Nesta seção nos dedicamos aos conjuntos compactos. Tais conjuntos tem importância fundamental no nosso estudo uma vez que estão intimamente ligados à convergências de sequências.

Definição 25. *Seja* X *um espaço topológico e* $Y \subset X$. *Dizemos que a família de abertos* $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$ *é uma cobertura aberta de* Y *se* $Y \subset \bigcup_{\lambda\in L} U_\lambda$. *Se o conjunto* L *é finito, dizemos que a cobertura é finita.*

Definição 26. *Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Dada uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ do conjunto Y, dizemos que a família $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L'}$ onde $L' \subset L$ é uma subcobertura de Y se $Y \subset \bigcup_{\lambda \in L'} U_\lambda$.*

Podemos agora definir conjuntos compactos.

Definição 27. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $K \subset X$ é compacto quando toda cobertura aberta de K possuir alguma subcobertura finita.*

A.5 Funções Contínuas

Definição 28. *Uma função $f : X \to Y$ entre dois espaços topológicos X e Y é contínua se a imagem inversa $f^{-1}(A_y)$ de um aberto A_y de Y sempre for um aberto de X.*

Observação 23. *Em espaços métricos a continuidade de uma função se dá através da métrica. Com efeito, uma função $f : M_1 \to M_2$ entre dois espaços métricos M_1 e M_2 é contínua se dado $x \in M_1$ e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_1$ com $d_1(x_n,x) \to 0$, tem-se $d_2(f(x_n),f(x)) \to 0$.*

Vamos considerar agora funções reais $f : X \to \mathbb{R}$ definidas em um espaço topológico X. Para este tipo de funções existe uma noção menor de continuidade chamada de semicontinuidade.

Definição 29. *Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente se a imagem inversa $f^{-1}(a,\infty)$ for um aberto de X. Analogamente, dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente se a imagem inversa $f^{-1}(-\infty,a)$ for um aberto de X.*

Os teoremas a seguir têm importância fundamental no estudo da análise.

Teorema 6. *Weierstrass Seja $f : X \to Y$ uma função contínua entre espaços topológicos. Se $K \subset X$ for um compacto, então $f(K)$ é um compacto de Y.*

Demonstração. Seja $(B_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Pela continuidade de f segue que $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma cobertura aberta de K, onde $A_\lambda = f^{-1}(B_\lambda)$. Como K é compacto, temos que existem uma quantidade finita $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_n \in L$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e , consequentemente, $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, ou seja, $f(K)$ é compacto. □

Teorema 7. *Borel-Lebesgue Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Para demonstração veja [5]

Utilizando os teoremas de Weierstrass e de Borel-Lebesgue, concluímos que se $f : X \to \mathbb{R}$ for uma função contínua definida em um espaço topológico compacto$X$, então $f(X)$ é fechado e limitado e, consequentemente, f assume seus máximos e mínimos em X. É possível concluir algo parecido para funções reais semicontínuas.

Teorema 8. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente definida em um espaço topológico compacto X assume seu mínimo em X. Analogamente, uma função f:$X \to \mathbb{R}$ semicontínua superiormente definida em um espaço topológico compacto X assume seu máximo em X.*

Demonstração. Suponha que f seja semicontínua inferiormente. Observe primeiramente que $f(X)$ é limitada inferiormente .Com efeito, $\{(n,\infty)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ são abertos de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,\infty)$. Desta forma $X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{-1}(n,\infty)$ e pela compacidade de X existe uma quantidade finita $n_1,...,n_k \in \mathbb{Z}$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(n_i,\infty)$, ou seja, $f(X)$ é limitado inferiormente.

Seja então $c_0 = \inf f(X)$ e suponha por absurdo que $c_0 \notin f(X)$. Pela definição de ínfimo, temos que existe uma sequência estritamente decrescente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(X)$ tais que $y_n \to c_0$. Desta forma, temos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n,\infty)$ e pela compacidade de X segue que $X = f^{-1}(y_{k_0},)$ para algum k_0, o que é absurdo pois se $n > k_0$, temos que $y_n \in f(X)$ mas $y_n \notin (y_n,\infty)$ pois $y_n < y_{k_0}$. Concluímos assim que $c_0 \in f(X)$ e portanto f assume seu mínimo em X. A demonstração é análoga para o caso de f ser semicontínua superiormente. $\square$

Apêndice B

Espaços de Sobolev

Neste capítulo vamos definir os espaços de Sobolev.

B.1 Espaços de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo possivelmente ilimitado e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq +\infty$.

Definição 30. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$ é definido como*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \ \ tal \ \ que \int_{\mathbb{R}} u\varphi' dx = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(I)\}. \tag{B.1}$$

Se $u \in W^{1,p}(I)$ então existe $g \in L^p(I)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi' dx = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(I). \tag{B.2}$$

Neste caso, denotamos $u' = g$ e dizemos que u' é a derivada fraca de u.

Teorema 9. *O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|u\|_{W_{1,p}} = \|u\|_p + \|u'\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \tag{B.3}$$

onde $\|u\|_{L_p} = [\int_I |u|^p]^{\frac{1}{p}}$*. Além disso,* $W^{1,p}(I)$ *é reflexivo se* $1 < p < +\infty$ *e separável se* $1 \leq p < +\infty$*.*

Para demonstração veja [2].

B.2 Propriedades

Teorema 10. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$*. Existe uma função* $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ *tal que*

$$u(x) = \tilde{u}(x) \quad q.t.p. em \quad I \quad e \tag{B.4}$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt. \tag{B.5}$$

Observação 24. *Em outras palavras, o teorema acima nos diz que toda função* $u \in W^{1,p}(I)$ *possui um representante contínuo. Além disso, se a derivada fraca de u for contínua, isto é, tiver um representante contínuo, então , na notação do teorema,* $\tilde{u} \in C^1(I)$ *e, consequentemente, possui derivada no sentido usual.*

Teorema 11. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$ *Então existe uma sequência* (u_n) *em* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $(u_n)_I \to u$ *em* $W^{1,p}(I)$*.*

Para demonstrações veja [2].

B.3 O espaço $\mathbf{H}_0^1[a,b]$

Quando $p = 2$, nós denotamos o espaço de Sobolev $W^{1,2}(I)$ por $H^1(I)$. Neste espaço nós introduzimos o seguinte produto interno:

$$< f; g >= \int fgd\mu + \int f'g'd\mu. \tag{B.6}$$

O espaço $H^1(I)$ com o produto interno definido acima se torna um espaço de Hilbert.

Note agora que a norma induzida em $H^1(I)$ é dada por

$$\|u\|_H = \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\right). \tag{B.7}$$

Considere agora a imersão $C_0^1(I) \subset H^1(I)$ e suponha que I é limitado. Definimos o espaço $H_0^1(I)$ como sendo o fecho de $C_0^1(I)$ em $H^1(I)$.

Vamos agora enunciar algumas propriedades básicas deste espaço. Para isto, suponha que $I = [a,b]$.

Teorema 12. *Seja $u \in H^1[a,b]$. Então $u \in H_0^1[a,b]$ se, e somente se, $u(a) = u(b) = 0$.*

Para demonstração veja [2] página 217.

Teorema 13 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Existe uma constante positiva $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_H \leq C\|u'\|_2, \quad \forall u \in H_0^1[a,b]. \tag{B.8}$$

Para demonstração veja [2] página 218.

Observação 25. *O teorema acima nos diz que a norma dada por $\|u\| = \|u'\|_2$ em $H_0^1[a,b]$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_H$, pois, obviamente, temos que $\|u'\|_2 \leq \|u\|_H$.*

Apêndice C

Funcionais Diferenciáveis

C.1 Definições Básicas

Neste capítulo $\|\cdot\|$ indicará a norma do espaço de Banach em questão.

Definição 31. *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$ onde U é um aberto de um espaço de Banach X. O funcional é Gateaux diferenciável em $u \in U$ se existir $f \in X^*$ tal que para todo $v \in X$*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+tv) - \varphi(u) - t < f; v >] = 0.$$

Neste caso, o funcional f é único e será chamado de derivada de Gateaux em u e será denotado por $\varphi'(u)$ dada por

$$< \varphi'(u); v >= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi(u+tv) - \varphi(u)).$$

Observação 26. *$< \varphi'(u), v >$ é a derivada direcional de φ em u na direção v.*

Definição 32. *O funcional φ tem derivada a Fréchet $f \in X^*$ em $u \in U$ se*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u+th) - \varphi(u) - < f; h >] = 0.$$

Neste caso, f é a derivada a Fréchet de φ em u e será denotada por $\varphi'(u)$.

Observação 27. *O fucional φ é diferenciável a Fréchet (ou a Gateaux) se for diferenciável em todos os pontos de U.*

Observação 28. *Se φ é diferenciável a Fréchet, então φ é diferenciável a Gateaux*

Observação 29. *O funcional $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R})$ se possuir derivada de Fréchet em todos os pontos de U e a função $u \mapsto \varphi'(u)$ for contínua em U.*

Teorema 14. *Se φ tem derivada de Gateaux contínua em U então $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R})$, ou seja, φ é diferenciável a Fréchet.*

Para maiores detalhes veja [4].

Apêndice D

Propriedades da Topologia Fraca

No que segue, faremos uma exposição básica sobre as propriedades básicas da topologia fraca. Para uma visão mais detalhada veja ([2]).

Definição 33. *Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ é a topologia menos fina que torna todos os funcionais $\varphi \in X^*$ contínuos.*

Observação 30. *Quando colocamos em X a topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ induzimos uma nova noção de convergência chamada de convergência fraca. Neste caso, diremos que (u_n) converge fracamente a $u \in X$ e denotaremos por $u_n \rightharpoonup u$.*

D.1 Propriedades básicas da convergência fraca

Teorema 15. *Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência. Então*

1. $[x_n \rightharpoonup x] \Leftrightarrow [< f, x_n > \to < f, x >, \ \ \forall f \in X^*]$.

2. *Se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$.*

3. *Se $x_n \rightharpoonup x$ então $(\|x_n\|)$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

4. *Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$ em X^* então $< f_n, x_n > \to < f, x >$.*

Teorema 16 (Kakutani)**.** *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se, e somente se, a bola*

$$B[0,1] = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.

Observação 31. *O teorema acima tem importância fundamental neste trabalho e no estudo das equações diferenciais de uma maneira geral.*

Observação 32. *O espaço $H_0^1[a,b]$ é reflexivo. Logo suas bolas fechadas são fracamente compactas .*

Referências Bibliográficas

[1] R.G. Bartle. *The Elements of Integration.* John Wiley Sons, 1966.

[2] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer-Verlag New York Inc, 2010.

[3] D.G. de Figueiredo. Métodos variacionais em equações diferenciais. *Matemática Universitária*, 7:21–47, 1988.

[4] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introdutory real analysis.* Dover, 1975.

[5] E.L. Lima. *Espaços Métricos.* IMPA, 1993.