

LISTA DE EXERCÍCIOS - PLANOS E RETAS

1). Encontre equação geral do plano que passa pelo ponto $A = (1, 2, 5)$, sabendo que $N = (-3, 2, -1)$ é um vetor normal ao plano.

Resp: $3x - 2y + z - 4 = 0$.

2). Encontre equações paramétricas e equação geral do plano que passa pelos pontos $A = (1, 2, 5)$, $B = (-3, 2, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.

$$\text{Resp: } 5x + 8y - 4z - 1 = 0, \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 2h \\ z = 5 - 5t - 4h \end{cases}, t, h \in R.$$

3). Encontre equações paramétricas e equação geral do plano que contém o ponto $A = (1, 2, 5)$ e também a reta $(x, y, z) = (1, 1, 3) + t(1, -1, 2) \quad t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Resp: } 4x + 2y - z - 3 = 0, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t - h \\ z = 5 + 2t - 2h \end{cases}, t, h \in R.$$

4). Encontre equações paramétricas e equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, -2)$ e $B = (2, 1, -1)$ e é perpendicular ao plano π de equação geral $-2x + y - 1 = 0$.

$$\text{Resp: } x + 2y - z - 5 = 0, \begin{cases} x = 1 - 2t + h \\ y = 1 + t \\ z = -2 + h \end{cases}, t, h \in R.$$

5). Encontre a equação geral do plano que é paralelo à reta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ e que passa pelos pontos $A = (2, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 4)$.

Resp: $6x - 5y + 3z - 7 = 0$.

6). Sejam π_1 e π_2 os planos de equações:

$$\pi_1 : 2x + y - 2z + 6 = 0 \quad \pi_2 : Ax + By + Cz + D = 0 \quad A, B, C, D \in R$$

Sabendo que os planos são paralelos e que a distância entre eles é 2, são valores possíveis para A, B, C, D :

- a) $A = 2, B = 1, C = -2, D = 8$.
- b) $A = -2, B = -1, C = 2, D = 4$.
- c). $A = 2, B = 1, C = -2, D = 0$.
- d). $A = 6, B = 3, C = -6, D = 18$.
- e). $A = 2, B = 1, C = -2, D = 3$.

Resp: (c)

7). Qual é o ângulo $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ entre os planos $x + 2y + z + 1 = 0$ e $x = 0$?

Resp: $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

8). Calcule o ângulo entre os planos $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$ e $x + y + 3 = 0$.

Resp: $\frac{\pi}{4}$.

9). Qual é a posição relativa entre os planos: $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$ e $2x + 2y + 2\sqrt{2}z - 4 = 0$?

Resp: paralelos.

10). Qual é distância entre os planos do exercício anterior?

Resp: 1.

11). Qual é a distância do plano $2x + 3y - z + 1 = 0$ até a origem $(0, 0, 0)$?

Resp: $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

12). Sejam π_1 e π_2 os planos de equações:

$$\pi_1 : 3x - 6y + 12 = 0 \quad \pi_2 : 2x + By + Cz + D = 0 \quad B, C, D \in R$$

Sabendo que os planos são paralelos e que a distância entre eles é $3\sqrt{5}$, são valores possíveis para B, C, D :

a) $B = -5, C = 0, D = 38$.

b) $B = -4, C = 0, D = 12 - 3\sqrt{5}$.

c) $B = -6, C = 0, D = 12 + 3\sqrt{5}$.

d) $B = -4, C = 0, D = -33$.

e) $B = -4, C = 0, D = -22$.

Resp: (e).

20pt

13). Encontre equações paramétricas e geral para o plano π_1 que passa pelos pontos $P = (2, 2, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ e é perpendicular ao plano $\pi : y = z$.

$$\text{Resp: } x - y - z = 0, \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 2t + h \\ z = t - h \end{cases}, t, h \in R$$

14). Encontre equações paramétricas para a reta que passa por $A = (1, -2, 3)$ e tem a direção do vetor $V = (-1, 4, 5)$.

$$\text{Resp: } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 5t \end{cases}, t \in R$$

15). Encontre equações paramétricas e simétricas (se possível) da reta que passa

pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $(2, 4, -4)$.

$$\text{Resp: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 7t \end{cases}, t \in R$$

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-7}$$

16). Determine a posição relativa entre as retas $(x, y, z) = t(1, 0, 2)$ $t \in R$ e

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 \end{cases}, t \in R$$

Resp: reversas.

17). Determine a posição relativa entre a reta $(x, y, z) = (-1, 0, 2) + t(-2, 3, 1)$ $t \in R$ e o plano $3x + 2y - 1 = 0$.

Resp: paralelos.

18). Considere a reta r de equação $(x, y, z) = (8, 4, 0) + t(-1, 3, 1)$, $t \in R$, concorrente ao plano π de equação $2x - y + z = 0$. Seja I o ponto de interseção da reta r com o plano π . A reta s passa pelo ponto I e é perpendicular ao plano π . Encontre equações paramétricas e simétricas (se possível) para a reta s .

$$\text{Resp: } \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 13 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in R$$

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-13}{-2} = \frac{z-3}{2}.$$

19). Considere a reta r e os planos π_1 e π_2 abaixo:

$$r : (2, 2, -3) + t(0, 2, 1) \quad t \in R$$

$$\pi_1 : 2x + y - 2z = 0 \quad 4x - y + 2z + 8 = 0$$

Marque as afirmações verdadeiras. Justifique sua resposta.

- I) Os dois planos são concorrentes.
- II) A reta r intercepta o plano π_2 .
- III) A reta de interseção entre os dois planos é paralela à reta r .

Resp: I e III.

20). Sejam $P = (2, 2, 0)$ e $Q = (1, 0, 1)$ pontos e $\pi : 3x - 2y + z + 12 = 0$ um plano. Qual é a posição relativa entre o plano π e a reta que passa pelos pontos P e Q ?

Resp: concorrentes.

21). Um plano π é perpendicular à reta de equação $(x, y, z) = (2, -1, 3) + t(1, 2, 5)$, $t \in \mathbb{R}$ e passa pelo ponto $A = (2, 0, -1)$. Encontre a equação geral do plano π .

Resp: $x + 2y + 5z + 3 = 0$.

22). O que podemos afirmar sobre as retas $r : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ $t \in \mathbb{R}$ e $(4, -3, -4) + t(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ (posição relativa e ângulo)?

Resp: reversas; $\frac{\pi}{3}$.

23). Determine o ângulo entre os planos $\pi_1 : x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$ e $\pi_2 : x + y + 3 = 0$.

Resp: $\frac{\pi}{4}$.

24). Considere a reta r e os planos π_1 e π_2 abaixo:

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, 3, 1) \quad t \in R$$

$$\pi_1 : 3x - 4y + 2z + 5 = 0 \quad 4x + 3y + 6 = 0$$

Marque as afirmações verdadeiras. Justifique sua resposta.

- (I) Os planos π_1 e π_2 são perpendiculares.
- (II) A reta r está contida no plano π_1 .
- (III) Os dois planos se interceptam segundo uma reta que tem a direção do vetor $U = (6, -8, -25)$.

Resp: (I) e (II).

25). Sejam as retas r e s abaixo:

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \quad t \in R \quad r : (x, y, z) = (-2, -1, 0) + t(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad t \in R$$

Marque as afirmações verdadeiras. Justifique sua resposta.

- (I) As retas r e s são concorrentes.
- (II) As retas formam um ângulo de 60° entre si.
- (III) Existe um plano que contém as retas r e s simultaneamente.

Resp: Todas são verdadeiras.

26). Sabendo que a reta $(x, y, z) = (7, 1, 1) + t(2, 0, 3) \quad t \in R$ é perpendicular ao plano $3x - 5cz + 4 = 0$, calcule o valor de c .

Resp: $c = -\frac{9}{10}$.

27). Determine o ângulo entre a reta $r_1 : (x, y, z) = (1, 3, -1) + t(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 0)$ $t \in R$ e uma reta r_2 que possui um vetor diretor como sendo $(0, 2, 0)$.

Resp: $\frac{\pi}{4}$.

28). Considere as retas r_1 e r_2 as retas:

$$\begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 1 + 6t \\ z = at \end{cases} \quad t \in R \quad \begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = 1 - 4t \\ z = b + 2t \end{cases} \quad t \in R$$

Sabendo que as retas são paralelas, $a, b \in R$, $b < 0$ e a distância entre elas é $\frac{18\sqrt{2}}{3}$, calcule os valores de a e b .

Resp: $a = -3$, $b = -9$.

29). Considere as retas

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3, 0, -4) \quad t \in R$$

$$r_2 : (x, y, z) = (2, 2, 4) + t(0, 0, 1) \quad t \in R$$

Determine a posição relativa entre elas.

Resp: concorrentes.

30). Calcule o ângulo entre as retas do exercício anterior.

Resp: $\arccos \frac{4}{5}$.