Geometria Analítica e Sistemas Lineares

Cristiane de Andrade Mendes
Digitação: Philipe Ribeiro Fernandes - bolsista de Treinamento Profissional

Setembro de 2020

Índice

Capítulo 1

Matrizes e Sistemas Lineares

1.1 Matrizes

Definição 1. *uma* <u>*matriz*</u> *A $m \times n$ é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas.*

Notação:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A = (a_{ij})_{m\times n}$$

i-ésima linha de A: $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ $\quad i = 1, \cdots, m.$

j-ésima coluna de A: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $\quad j = 1, \cdots, n.$

a_{ij} ou $[A]_{ij}$: elemento de A localizado na linha i e coluna j.

Exemplo 1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ *matriz* 2×2 $\qquad$ *elemento* a_{12} *da matriz* $A = (a_{ij})$*:* $a_{12} = 2$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{3}{5} \\ 88 & 9 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ *matriz* 2×3 *elemento* b_{23} *da matriz* $B = (b_{ij})$: $b_{23} = \sqrt{3}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *matriz* 1×4 *elemento* c_{11} *da matriz* $C = (c_{ij})$: $c_{11} = 1$

$D = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ *matriz* 3×1 *elemento* d_{21} *da matriz* $D = (d_{ij})$: $d_{21} = \frac{3}{7}$

$E = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & \pi \\ 7 & 3 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$ *matriz* 3×3 *elemento* e_{23} *da matriz* $E = (e_{ij})$: $e_{23} = \pi$

Tipos de matrizes

- Matriz quadrada: Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz. Se $m = n$, vamos dizer que A é quadrada de ordem n. Sua diagonal principal é formada pelos elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$.

  As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \pi \\ 3 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & -10 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes quadradas.

  Os elementos $2, 0$ formam a diagonal principal de A e os elementos $-1, 8, -10$ formam a diagonal principal da matriz B.

- Matriz diagonal: Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz (quadrada). A é uma matriz diagonal se

  $$a_{ij} = 0 \text{ quando } i \neq j \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

  . (Ou seja: todos os elementos fora da diagonal principal são nulos).

  As matrizes $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes diagonais.

- Matriz identidade: consideremos uma matriz $n \times n$, denotada por I_n, onde:

  $$[I_n]_{ij} = 0, \text{se } i \neq j \quad \text{e}$$

  $$[I_n]_{ij} = 1, \text{se } i = j$$

$i, j = 1, ..., n$.

A matriz I_n é uma matriz diagonal e todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. I_n é chamada matriz identidade de ordem n.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz linha: Seja A uma matriz $m \times n$. A é uma matriz linha se $m = 1$, ou seja, se A possui uma única linha.

  As matrizes $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes linha.

- Matriz coluna: Seja A uma matriz $m \times n$. A é uma matriz coluna se $n = 1$, ou seja, A possui uma única coluna.

  As matrizes $H = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes coluna.

- Matriz nula: Uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é nula se $a_{ij} = 0$ para todo $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

  A matriz nula $m \times n$ é denotada por $\overline{0}_{m \times n}$ ou $\overline{0}$ quando não há necessidade de explicitar seu tamanho.

  $\overline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: matriz nula 2×3 $\qquad$ $\overline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$: matriz nula 3×1

  $\overline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: matriz nula 3×3

- Matriz triangular superior: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é triangular superior se

  $$a_{ij} = 0 \text{ quando } i > j \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

  Por exemplo, as matrizes

  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são triangulares superiores.

- Matriz triangular inferior: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é triangular inferior se

$$a_{ij} = 0 \text{ quando } i < j \qquad i, j = 1, \cdots, n.$$

  Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ são triangulares inferiores.}$$

- Matrizes iguais: Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ duas matrizes.

  A e B são iguais se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

  Escrevemos $A = B$

Operações com matrizes

Definição 2. *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ duas matrizes.*

A soma das matrizes A e B(de mesmo tamanho) é uma matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ de tamanho $m \times n$, cujos elementos são:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1, \cdots, m \text{ e } j = 1, \cdots, n.$$

Vamos denotar:

$$C = A + B$$

$$[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{onde } [A + B]_{ij} \text{ é elemento } ij \text{ da matriz } A + B$$

Exemplo 2. *1.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 + (-1) & 4 + 1 \\ -1 + 5 & 0 + 3 \\ \frac{3}{5} + (-1) & 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

2.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C + D = \begin{bmatrix} -1+1 & \sqrt{2}+3 & 0+(-1) \\ 5+2 & 2+(-2) & -4+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}+3 & -1 \\ 7 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Definição 3. *Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz. O produto da matriz A por um escalar α é a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ de tamanho $m \times n$, cujos elementos são dados por:*

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$$

$i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$.

Vamos denotar: $\begin{cases} B = \alpha A \\ [\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij} \end{cases}$

Exemplo 3. $A = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -4A = \begin{bmatrix} -4(-7) & -4(-1) \\ -4\cdot 3 & -4\cdot 2 \\ -4\cdot 0 & -4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 4 \\ -12 & -8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

$i = 1, ..., m \;\; j = 1, ..., n.$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 7 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot(-3) & \frac{1}{2}\cdot 2 \\ \frac{1}{2}\cdot 5 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & \frac{1}{2}\cdot 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 0 & \frac{1}{2}\cdot 7 & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Definição 4. *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ duas matrizes, onde o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. O produto de A com B (notação: AB) é uma matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ de tamanho $m \times n$, cujos elementos são dados por*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

$i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$.

Vamos denotar:

$$C = AB$$

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

.

Exemplo 4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1.(-1) + 0.7 + 1.0 & 1.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 1.3 \\ 3.(-1) + (-2).7 + (-1).0 & 3.\frac{1}{3} + (-2)\frac{1}{3} + (-1).3 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -1+0+0 & \frac{1}{3} + 0 + 3 \\ -3-14+0 & 1 - \frac{2}{3} - 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{10}{3} \\ -17 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1.1 + \frac{1}{3}.3 & -1.0 + \frac{1}{3}.(-2) & -1.1 + \frac{1}{3}.(-1) \\ 7.1 + \frac{1}{3}.3 & 7.0 + \frac{1}{3}.(-2) & 7.1 + \frac{1}{3}.(-1) \\ 0.1 + 3.3 & 0.0 + 3.(-2) & 0.1 + 3.(-1) \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -1+1 & 0 - \frac{2}{3} & -1 - \frac{1}{3} \\ 7+1 & 0 - \frac{2}{3} & 7 - \frac{1}{3} \\ 0+9 & 0-6 & 0-3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 8 & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} \\ 9 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$BC = \begin{bmatrix} -1.1 + \frac{1}{3}.(-1) & (-1).0 + \frac{1}{3}.2 \\ 7.1 + \frac{1}{3}.(-1) & 7.0 + \frac{1}{3}.2 \\ 0.1 + 3.(-1) & 0.0 + 3.2 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -1 - \frac{1}{3} & 0 + \frac{2}{3} \\ 7 - \frac{1}{3} & 0 + \frac{2}{3} \\ 0-3 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{20}{3} & \frac{2}{3} \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$CB \rightsquigarrow$ não é possível, pois o número de colunas de C é diferente do número de linhas de B.

Observação 1. *Sejam k um número inteiro positivo e A uma matriz quadrada $n \times n$. Vamos denotar:*

$A^\circ = I_n$

$A^k = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$ *(k fatores)*

Definição 5. *Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz. A <u>transposta</u> de A é uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times m}$ tal que seus elementos são da forma*

$$b_{ij} = a_{ji}$$

$i = 1, \cdots, n$ *e* $j = 1, \cdots, m$.

Vamos denotar A^t a matriz transposta de A.

Exemplo 5. *1.* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

2. Se for possível, calcule $(C^t + 3D)^t$, onde C e D são as matrizes:

$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Temos que:

$C^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad 3D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

$$C^t + 3D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$$

Então:

$(C^t + 3D)^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

Propriedades das operações com matrizes

As demonstrações das propriedades abaixo podem ser vistas no capítulo 1 do livro texto.

a) Comutatividade

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes.

Então: $A + B = B + A$

b) Associatividade

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$e $C = (c_{ij})_{m\times n}$ matrizes. Então $A + (B + C) = (A + B) + C$.

c) Existência do elemento neutro

Existe e é única a matriz $\overline{0}_{m\times n}$ tal que $\overline{0}_{m\times n} + A = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m\times n}$. Essa matriz $\overline{0}$ é tal que $\left[\overline{0}\right]_{ij} = 0$, para todo $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$ (matriz nula).

d) Elemento simétrico

Para cada matriz $A_{m\times n}$, existe uma única matriz $-A$ de tamanho $m \times n$, tal que

$$A + (-A) = \overline{0}$$

$-A$ é tal que $[-A]_{ij} = -a_{ij}$, para todo $i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Observação 2. *Temos que:* $-A = (-1)A$*, qualquer que seja a matriz* A*.*

e) Associatividade

Se α e β são escalares e $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz, então:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

f) Distributividade

Se α é um escalar, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são matrizes, então

$$\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

g) Distributividade

Se α e β são escalares e $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz, então:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

h) Associatividade

Se $A = (a_{ij})_{m\times p}$, $B = (b_{ij})_{p\times q}$ e $C = (c_{ij})_{q\times n}$, então

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

.

Ilustração da demonstração acima para matrizes 2×2

Sejam $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ e $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ matrizes. Temos:

$$BC = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{12}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{12}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}) + a_{22}(b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22}) + a_{22}(b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \end{bmatrix}$$

Por outro lado:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{bmatrix}$$

Observando os elementos das matrizes $A(BC)$ e $(AB)C$, temos que:

$$[A(BC)]_{11} = a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} = [(AB)C]_{11}$$

$$[A(BC)]_{12} = a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} = [(AB)C]_{12}$$

$$[A(BC)]_{21} = a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} = [(AB)C]_{21}$$

$$[A(BC)]_{22} = a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} = [(AB)C]_{22}$$

Logo:

$$(AB)C = A(BC)$$

i) Existência do elemento neutro da multiplicação

Se p é um inteiro positivo, vamos denotar por I_p a matriz identidade $p \times p$, cujos elementos são:

$$[I_p]_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$i, j = 1, \cdots, p.$

Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz, então vale:

$$AI_n = A \quad \text{e} \quad I_m A = A$$

j) Distributividade

Se $A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{p\times n}$ e $C = (c_{ij})_{p\times n}$, então:

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

Se $A = (a_{ij})_{p\times n}, B = (b_{ij})_{m\times p}$ e $C = (c_{ij})_{m\times p}$, então:

$$(B + C)\,A = BA + CA$$

k) Se α é um escalar, $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ são matrizes, então:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

l) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz, então $(A^t)^t = A$

m) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são matrizes, então: $(A + B)^t = A^t + B^t$.

n) Se α é um escalar e $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz, então $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

o) Se $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ são matrizes, então $(AB)^t = B^t A^t$

Observação 3. *O produto de matrizes não é comutativo em geral.*

Por exemplo, se A e B são as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA.$$

Diferença entre matrizes

Sejam $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{m \times p}$ matrizes. Vamos definir:

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo 6. *Dadas as matrizes A e B abaixo, encontre a matriz $A - B$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ 7 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -7 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & -5+(-3) & 0+\sqrt{2} \\ 3+(-7) & 2+(-\frac{1}{2}) & -2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -8 & \sqrt{2} \\ -4 & \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Matrizes simétricas e anti-simétricas

Definição 6. *Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é dita* <u>*simétrica*</u> *se $A^t = A$. Ela é dita* <u>*anti-simétrica*</u> *quando $A^t = -A$.*

Exemplo 7. *Considere as matrizes A, B e C abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A é uma matriz simétrica, pois $A^t = A$.

B é matriz anti-simétrica, pois $B^t = -B$.

C não é simétrica, pois $C^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^t \neq C$

C também não é anti-simétrica, pois

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad -C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -5 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C^t \neq -C$$

Exercícios:

1) Se A e B são matrizes $n \times n$ simétricas, mostre que $C = A + B$ também é simétrica.

Resolução: Vamos mostrar que $C^t = C$. Como A e B são matrizes simétricas, temos que $A^t = A$ e $B^t = B$. Assim:

$C^t = (A + B)^t = A^t + B^t = A + B = C$

Logo, C é simétrica.

2) Se A e B são matrizes $n \times n$ anti-simétricas, é verdade que $C = A + B$ também é anti-simétrica?

Resolução: sendo A e B matrizes anti-simétricas, temos que $A^t = -A$ e $B^t = -B$. Assim:

$C^t = (A+B)^t = A^t + B^t = -A + (-B) = -(A+B) = -C$

Logo, C também é anti-simétrica.

3) Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é idempotente se $A^2 = A$. Sabendo que a matriz A abaixo é idempotente, calcule os valores de a e b.

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & b & -4 \end{bmatrix}$$

Resolução: como A é idempotente, temos:

$$A^2 = A \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & b & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & b & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & b & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a^2-2 & -a+b-4 & a-1 \\ -3a+3 & -3b+19 & -3 \\ -5a-3b+20 & 5 & -3b+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & b & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a^2 - 2 = a \\ -a+b-4 = -1 \\ a-1 = 1 \ (*) \\ -3a+3 = -3 \\ -3b+19 = 4 \\ -3 = -3 \\ -5a-3b+20 = -5 \\ 5 = b \ (**) \\ -3b+11 = -4 \end{cases} \qquad \text{De } (*) \text{ e } (**) \text{, vemos que } a = 2 \text{ e } b = 5.$$

4) Dada a matriz M abaixo, calcule a matriz M^tM.

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Temos que M^t é dada por: $M^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M^tM = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

5) Se A é a matriz a seguir, mostre que $A^2 - 6A + 5I_2 = \overline{O}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução: Temos:

$$A^2 - 6A + 5I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4+3 & 6+12 \\ 2+4 & 3+16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -18 \\ -6 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-12+5 & 18-18+0 \\ 6-6+0 & 19-24+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \overline{O}$$

6) Dadas as matrizes A, B e C abaixo, encontre a matriz X tal que:

$$\frac{1}{2}(X + A) = 3BC + A$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução: usando propriedades de operações de matrizes, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}(X + A) = 3BC + A$$

$$\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}A = 3BC + A$$

$$\frac{1}{2}X = 3BC + A - \frac{1}{2}A$$

$$\frac{1}{2}X = 3BC + \frac{1}{2}A$$

$$X = 6BC + A$$

Assim:

$X = 6\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} =$

$= 6\begin{bmatrix} 0+0+1 & 1+0+1 \\ 0+3+2 & 0+3+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 30 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 26 & 28 \end{bmatrix}$

$Resp. : X = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 26 & 28 \end{bmatrix}$

1.2 Sistemas de Equações Lineares

Definição 7. *Uma equação linear em n variáveis $x_1, \cdots, x_n$ é uma equação da forma*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, \cdots, a_n, b$ são constantes reais.

Exemplo 8. *São exemplos de equações lineares:*

- $3x + 5y - 7z = 2$
- $3x_1 - \frac{5}{2}x_2 - 7x_3 + x_4 = 0$
- $\sqrt{2}x + 7y + 5z - w = 8$

Definição 8. *Um sistema de equações lineares (ou sistema linear) é um conjunto de equações lineares:*

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as incógnitas ou variáveis do sistema e a_{ij}, os coeficientes, $i = 1, \cdots, m; \quad j = 1, \cdots, n$. O sistema acima possui m equações e n variáveis.

Podemos reescrever o sistema $(*)$ na forma matricial.

$$(**) \qquad AX = B$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Uma solução para o sistema linear $(*)$ é uma n-upla $s_1, s_2, \cdots, s_n$ tal que todas as equações de $(*)$ são satisfeitas quando fazemos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$.

Na forma matricial, uma solução para o sistema $(**)$ é uma matriz:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad \text{tal que } AS = B$$

.

O $\underline{\text{conjunto solução}}$ ou $\underline{\text{solução geral}}$ de um sistema é o conjunto de todas as soluções do sistema.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ em $(*)$ (de forma equivalente, se $B = \overline{O}$ em $(**)$), o sistema é chamado de $\underline{\text{sistema homogêneo}}$. Um sistema homogêneo sempre admite solução (pelo menos, a solução $s_1 = s_2 = ... = s_n = 0$).

$$\text{Matriz aumentada do sistema: } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Exemplo 9.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 5x + 6y - 6z = -14 \\ y + 4z = 6 \\ 5x + 8y + 2z = -2 \end{cases}$$

é um sistema linear com 4 equações e 3 variáveis x, y, z. O sistema acima pode ser reescrito da forma:

$$AX = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -14 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A 3-upla $(-10, 6, 0)$ é uma solução para o sistema acima, pois:

$-10 + 2.6 + 2.0 = 2$
$5.(-10) + 6.6 - 6.0 = -14$
$6 + 4.0 = 6$
$5.(-10) + 8.6 + 2.0 = -2$

Ou seja, todas as equções do sistema acima são satisfeitas para $x = -10$, $y = 6$ e $z = 0$.

A matriz aumentada do sistema fica da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 5 & 6 & -6 & | & -14 \\ 0 & 1 & 4 & | & 6 \\ 5 & 8 & 2 & | & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 10. *O sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

é um sistema homogêneo com 2 equações e 4 variáveis.

O objetivo agora pe estudar um método que nos permita "resolver um sistema", ou seja, encontrar sua solução geral.

Operações elementares:

Definição 9. *Uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz é uma das seguintes operações:*
a)Troca da posição de 2 linhas da matriz.
b)Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero.
c)Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Exemplo 11. *a)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -7 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -7 & \sqrt{2} \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Troca da posição das linhas 1 e 3.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Multiplicação da linha 2 pelo escalar $-\frac{1}{5}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \underline{L_2 + 3L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 & -7 \\ -1 & 2 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Substituição linha 2 por ela, somada à linha 1 multiplicada por 3.

Observação 4. *(Sobre operações elementares)*

Se, ao fazermos uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz A, obtivermos uma matriz B, é possível (usando operações elementares) obtermos A a partir de B.

a)

$$A \ \underline{L_i \leftrightarrow L_j} \ B$$

(Troca de posições das linhas i e j).

$$B \ \underline{L_i \leftrightarrow L_j} \ A$$

b)

$$A \ \underline{\alpha L_i \to L_i} \ B \qquad (\alpha \neq 0).$$

(Multiplicação da linha i por α).

$$B \ \underline{\frac{1}{\alpha} L_i \to L_i} \ A \qquad (\alpha \neq 0).$$

(Multiplicação da linha i por $\frac{1}{\alpha}$).

c)

$$A \ \underline{L_i + \alpha L_j \to L_i} \ B$$

(Substituição da linha i por ela somada à linha j, multiplicada por α).

$$B \ \underline{L_i - \alpha L_j \to L_i} \ A$$

(Substituição da linha i por ela somada à linha j, multiplicada por $-\alpha$).

Ilustração:

a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \underline{L_2 \leftrightarrow L_3} \;\; B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{L_2 \leftrightarrow L_3} \;\; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

b) $\alpha \neq 0$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \underline{\alpha L_1 \rightarrow L_1} \;\; B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \underline{\tfrac{1}{\alpha} L_1 \rightarrow L_1} \;\; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \underline{L_1 + \alpha L_3 \rightarrow L_1} \;\; B = \begin{bmatrix} a_{11} + \alpha a_{31} & a_{12} + \alpha a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \underline{L_1 - \alpha L_3 \rightarrow L_1}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

Definição 10. *Dois sistemas lineares são* *<u>equivalentes</u>* *quando possuem o mesmo conjunto solução.*

O seguinte resultado nos garante que, após operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada de um sistema, vamos obter um novo sistema equivalente ao primeiro.

Teorema 1. *Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$ são tais que a matriz aumentada do segundo sistema $[C \vdots D]$ é obtida de $[A \vdots B]$ (matriz aumentada do primeiro sistema) aplicando-se uma operação elementar, então os 2 sistemas possuem exatamente as mesmas soluções (ou seja, são equivalentes).*

Vamos fazer abaixo uma ilustração da demonstração do teorema para um sistema de 3 equações e 2 variáveis.

a) Fazendo uma operação do tipo (a) em um sistema, a solução não se altera.

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \vdots & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & \vdots & b_1 \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & b_3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

(x_1^o, x_2^o) é solução de (1) $\Rightarrow$ (x_1^o, x_2^o) é solução de (2).

(x_1^o, x_2^o) é solução de (2) $\Rightarrow$ (x_1^o, x_2^o) é solução de (1).

Logo, os sistemas (1) e (2) têm as mesmas soluções.

b) Fazendo uma operação do tipo (b) em um sistema, a solução não se altera.

Ilustração:

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

$k \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{kL_3 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \vdots & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & \vdots & b_1 \\ ka_{31} & ka_{32} & \vdots & kb_3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ ka_{31}x_1 + ka_{32}x_2 = kb_3 \end{cases}$$

$$(x_1^o, x_2^o) \text{ é solução de } (1) \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o = b_1 \\ a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o = b_2 \\ a_{31}x_1^o + a_{32}x_2^o = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^{\underline{a}} \text{ e } 2^{\underline{a}} \text{ equações do sistema} \\ (2) \text{ são satisfeitas} \\ ka_{31}x_1^o + ka_{32}x_2^o = k(a_{31}x_1^o + a_{32}x_2^o) = kb_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (x_1^o, x_2^o) é solução de (2).

Analogamente:

$$(x_1^o, x_2^o) \text{ solução de } (2) \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o = b_1 \\ a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o = b_2 \\ ka_{31}x_1^o + ka_{32}x_2^o = kb_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1^{\underline{a}} \text{ e } 2^{\underline{a}} \text{ equações do sistema} \\ (1) \text{ são satisfeitas} \\ a_{31}x_1^o + a_{32}x_2^o = \frac{1}{k}(ka_{31}x_1^o + ka_{32}x_2^o) = \frac{1}{k}kb_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow (x_1^o, x_2^o) \text{ é solução de } (1)$$

Logo os sistemas (1) e (2) têm as mesmas soluções.

c) Fazendo uma operação do tipo (c) em um sistema, a solução não se altera.

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + kL_2 \to L_1} \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \vdots & b_1 + kb_2 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & b_3 \end{bmatrix}$$

Obtemos então o seguinte sistema:

$$(2) \begin{cases} (a_{11} + ka_{21})x_1 + (a_{12} + ka_{22})x_2 = b_1 + kb_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

$$(x_1^o, x_2^o) \text{ é solução de } (1) \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o = b_1 \\ a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o = b_2 \\ a_{31}x_1^o + a_{32}x_2^o = b_3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2^{\underline{a}} \text{ e } 3^{\underline{a}} \text{ equações do sistema (2) são satisfeitas} \\ (a_{11} + ka_{21})x_1^o + (a_{12} + ka_{22})x_2^o = a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o + ka_{21}x_1^o + ka_{22}x_2^o = b_1 + k(a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o) = b_1 + kb_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow (x_1^o, x_2^o)$ é solução de (2)

Analogamente:

$$(x_1^o, x_2^o) \text{ é solução de (2)} \Longrightarrow \begin{cases} (a_{11} + ka_{21})x_1^o + (a_{12} + ka_{22})x_2^o = b_1 + kb_2 \\ a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o = b_2 \\ a_{31}x_1^o + a_{32}x_2^o = b_3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2^{\underline{a}} \text{ e } 3^{\underline{a}} \text{ equações do sistema (1) são satisfeitas} \\ a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o = (a_{11} + ka_{21} - ka_{21})x_1^o + (a_{12} + ka_{22} - ka_{22})x_2^o = \\ (a_{11} + ka_{21})x_1^o + (a_{12} + ka_{22})x_2^o - ka_{21}x_1^o - ka_{22}x_2^o = b_1 + kb_2 - k(a_{21}x_1^o + a_{22}x_2^o) = b_1 + kb_2 - kb_2 = b_1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow (x_1^o, x_2^o)$ é solução de (1)

Logo, os sistemas (1) e (2) têm a mesma solução

Matriz escalonada reduzida

Definição 11. *Uma matriz está na* <u>*forma escalonada reduzida*</u> *quando satisfaz as condições abaixo:*

(1) Todas as linhas nulas da matriz (se existirem) ocorrem abaixo das linhas não nulas.

(2) O pivô (ou seja, o 1º elemento não nulo) de cada linha não nula é igual a 1.

(3) O pivô de uma linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.

(4) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos dessa coluna são nulos.

Observação 5. *Se uma matriz satisfaz as condições* (1) *e* (3) *acima, dizemos que ela está na forma escalonada.*

Exemplo 12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes C, D e F estão na forma escalonada reduzida.

As matrizes A, B, C, D, F e G estão na forma escalonada.

A matriz A não satisfaz as condições 2 e 4.

A matriz B também não satisfaz a condição 4.

A matriz G não satisfaz as condições 2 e 4.

A matriz E não satisfaz a condição 1.

Definição 12. *Uma matriz A $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz B $m \times n$ se B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre as suas linhas.*

Exemplo 13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é equivalente por linhas à matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *pois*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{\tfrac{1}{3}L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_1 + L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

ou seja, B foi obtida de A aplicando-se operações elementares.

Observação 6. *Ser equivalente por linha satisfaz as seguintes propriedades:*

a) Toda matriz A é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade).

b) Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A (Simetria).

c) Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C (Transitividade).

O teorema abaixo nos garante que, dada uma matriz A $m \times n$, é sempre possível obtermos uma (única) matriz R $m \times n$ na forma escalonada reduzida fazendo-se operações elementares:

Teorema 2. *Toda matriz A $m \times n$ é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida R $m \times n$.*

O Método de Gauss-Jordan

Para resolvermos um sistema linear, devemos aplicar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada do sistema linear até obtermos a matriz na forma escalonada reduzida correspondente. Transformamos essa última matriz em um sistema linear e o resolvemos. O conjunto solução obtido é o conjunto solução do sistema inicial.

O que foi dito acima é consequência de tudo o que estudamos anteriormente: dado um sistema linear:

$$AX = B$$

de m equações e n variáveis, escrevemos sua matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & B \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

Fazendo operações elementares sobre as linhas de $\begin{bmatrix} A & \vdots & B \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$, obtemos uma nova matriz $\begin{bmatrix} C & \vdots & D \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$ na forma escalonada reduzida, onde $C = (c_{ij})_{m \times n}$ e D é uma matriz $m \times 1$.

Isto é possível pelo último teorema que estudamos: como só fizemos operações elementares para irmos de $\begin{bmatrix} A & \vdots & B \end{bmatrix}$ até $\begin{bmatrix} C & \vdots & D \end{bmatrix}$, então os sistemas

$$AX = B \text{ e } CX = D$$

são equivalentes, ou seja, têm as mesmas soluções.

Vamos agora resolver os sistemas abaixo usando o método de Gauss-Jordan.

Exemplo 14. *Resolva os sistemas abaixo usando o método de Gauss-Jordan:*

a)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 5x + 6y - 6z = -14 \\ -y - 4z = -6 \\ 5x + 8y + 2z = -2 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz aumentada do sistema e fazendo o escalonamento, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & -6 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 5 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -5L_1 + L_2 \to L_2 \\ -5L_1 + L_4 \to L_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -16 & -24 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -8 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}L_2 \to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -8 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2L_2 + L_1 \to L_1 \\ L_2 + L_3 \to L_3 \\ 2L_2 + L_4 \to L_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A última matriz está na forma escalonada reduzida.

Transformando a matriz em um sistema linear, obtemos:

$$\begin{cases} x + 0y - 6z = -10 \\ 0x + y + 4z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \text{; ou seja} \quad \begin{cases} x - 6z = -10 \\ y + 4z = 6 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

As 3ª e 4ª equações são sempre verdadeiras. Usando as 1ª e 2ª equações, podemos escrever:

$$\begin{cases} x = -10 + 6z \\ y = 6 - 4z \end{cases} \text{, com } z \in \mathbb{R}$$

Solução do sistema: $(-10 + 6z, 6 - 4z, z)$, *onde* $z \in \mathbb{R}$. *O sistema possui infinitas soluções.*

b)

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x - y - 2z + w = 0 \\ 4x - 3y - 9z + w = -1 \\ 3x - 2y + z - 11w = 3 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz aumentada do sistema e fazendo o escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 4 & -3 & -9 & 1 & \vdots & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -11 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -2L_1 + L_2 \to L_2 \\ -4L_1 + L_3 \to L_3 \\ -3L_1 + L_4 \to L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & -3 & -17 & 1 & \vdots & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -11 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \underline{-L_2 \to L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -17 & 1 & \vdots & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -11 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3L_2 + L_3 \to L_3 \\ 2L_2 + L_4 \to L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -13 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -2L_3 + L_1 \to L_1 \\ -6L_3 + L_2 \to L_2 \\ -7L_3 + L_4 \to L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -4L_4 + L_1 \to L_1 \\ -11L_4 + L_2 \to L_2 \\ 2L_4 + L_3 \to L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

A última matriz acima está na forma escalonada reduzida.

Transformando a matriz em um sistema linear, obtemos:

$$\begin{cases} x + 0y + 0z + 0w = 11 \\ 0x + y + 0z + 0w = 29 \\ 0x + 0y + z + 0w = -5 \\ 0x + 0y + 0z + w = -3 \end{cases} \quad \textit{ou seja:} \quad \begin{cases} x = 11 \\ y = 29 \\ z = -5 \\ w = -3 \end{cases}$$

Solução do sistema: $(11, 29, -5, -3)$. *O sistema possui solução única.*

c)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 5x + 6y - 6z = -14 \\ 3x + 2y - 10z = 0 \end{cases}$$

Escrevendo a matriz aumentada do sistema e fazendo escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 5 & 6 & -6 & \vdots & -14 \\ 3 & 2 & -10 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -5L_1 + L_2 \to L2 \\ -3L_1 + L_3 \to L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & -4 & -16 & \vdots & -24 \\ 0 & -4 & -16 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3}\begin{bmatrix}1&2&2&\vdots&2\\0&-4&-16&\vdots&-24\\0&0&0&\vdots&18\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}L_2\to L_2}\begin{bmatrix}1&2&2&\vdots&2\\0&1&4&\vdots&6\\0&0&0&\vdots&18\end{bmatrix}\xrightarrow{-2L_2+L_1\to L_1}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-6&\vdots&-10\\0&1&4&\vdots&6\\0&0&0&\vdots&18\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{18}L_3\to L_3}\begin{bmatrix}1&0&-6&\vdots&-10\\0&1&4&\vdots&6\\0&0&0&\vdots&1\end{bmatrix}\xrightarrow{10L_3+L_1\to L_1\ e\ -6L_3+L_2\to L_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-6&\vdots&0\\0&1&4&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&1\end{bmatrix}$$

A matriz está na forma escalonada reduzida. Transformando em um sistema linear, obtemos:

$$\begin{cases}x+0y-6z=0\\0x+y+4z=0\\0x+0y+0z=1\end{cases};\qquad \textit{ou seja:}\begin{cases}x-6z=0\\y+4z=0\\0=1\end{cases}$$

Observemos que a última equação não é satisfeita para qualquer que seja o valor de x, y e z.

Logo o sistema não possui solução.

d)

$$\begin{cases}2x-y+4z=0\\2x+2y-4z=0\\3x-y-z=0\end{cases}$$

Escrevendo a matriz aumentada do sistema acima, obtemos:

$$\begin{bmatrix}2&-1&4&|&0\\2&2&-4&|&0\\3&-1&-1&|&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}L_1\to L_1}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&2&|&0\\2&2&-4&|&0\\3&-1&-1&|&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-3L_1+L_3\to L_3]{-2L_1+L_2\to L_2}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&2&|&0\\0&3&-8&|&0\\0&\frac{1}{2}&-7&|&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}L_2\to L_2}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&2&|&0\\0&1&-\frac{8}{3}&|&0\\0&\frac{1}{2}&-7&|&0\end{bmatrix}\xrightarrow{L_1+L_3\to L_1}\begin{bmatrix}1&0&-5&|&0\\0&1&-\frac{8}{3}&|&0\\0&\frac{1}{2}&-7&|&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3}\begin{bmatrix}1&0&-5&|&0\\0&1&-\frac{8}{3}&|&0\\0&0&-\frac{17}{3}&|&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{17}L_3\to L_3}\begin{bmatrix}1&0&-5&|&0\\0&1&-\frac{8}{3}&|&0\\0&0&1&|&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{8}{3}L_3+L_2\to L_2]{5L_3+L_1\to L_1}\begin{bmatrix}1&0&0&|&0\\0&1&0&|&0\\0&0&1&|&0\end{bmatrix}$$

Transformando no sistema correspondente:

$$\begin{cases} x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = z = 0$$

Ou seja, o sistema possui somente a solução trivial.

Observação 7. *No caso dos sistemas homogêneos, para se fazer as operações elementares, podemos suprimir a escrita da última coluna (nula) da matriz aumentada. Durante o processo, essa coluna não sofre alteração. O próximo exemplo será resolvido sem a última coluna da matriz aumentada.*

Exemplo 15. *Resolva o sistema.* $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - 5y + z - w = 0 \\ 2x - y + 2z + w = 0 \end{cases}$

Escrevendo a "matriz aumentada sem a última coluna"(ou seja, escrevendo a matriz dos coeficientes), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_1 \to L_3]{L_2 - L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_3 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema correspondente, temos:

$$\begin{cases} x + 0y + z + \frac{2}{3}w = 0 \\ 0x + y + 0z + \frac{1}{3}w = 0 \\ 0x + 0y + 0z + 0w = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + z + \frac{2}{3}w = 0 \\ y + \frac{1}{3}w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -z - \frac{2}{3}w \\ y = -\frac{1}{3}w \end{cases}$$

O sistema possui infinitas soluções: $\left(-z - \dfrac{2}{3}w, -\dfrac{1}{3}w, z, w\right) \quad z, w \in \mathbb{R}.$

Observação 8. *Ao resolvermos os sistemas acima, fizemos operações elementares sobre as linhas das matrizes envolvidas até chegarmos na forma escalonada reduzida. Isto porque, no enunciado do exercício, pedimos que fosse utilizado o método de Gauss-Jordan. Se isso não for dito, podemos fazer o escalonamento até chegarmos em uma matriz que nos forneça um sistema mais fácil de ser resolvido, sem se chegar, necessariamente, a forma escalonada reduzida.*

Proposição 1. *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $m \times 1$. Se o sistema linear $AX = B$ possui duas soluções distintas X_o e X_1, então o sistema possui infinitas soluções.*

Demonstração: para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, escrevamos: $X_\lambda = (1-\lambda)X_o + \lambda X_1$. Usando que X_o e X_1 são soluções do sistema, podemos escrever:

$AX_\lambda = A\left[(1-\lambda)X_o + \lambda X_1\right] = (1-\lambda)AX_o + \lambda AX_1 = (1-\lambda)B + \lambda B = B$

Ou seja, X_λ também é solução do sistema, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, o sistema possui infinitas soluções.

Observação 9. *Usando o resultado da proposição acima, temos que um sistema linear possui solução única ou possui infinitas soluções ou não possui solução. No caso do sistema trabalhado ser homogêneo, temos solução única ou infinitas soluções.*

Exemplo 16. *Seja A uma matriz $m \times n$. Mostre que:*

a). Se X_1 e X_2 são soluções do sistema homogêneo $AX = \overline{0}$, então $X_o = X_1 + X_2$ também é uma solução do sistema.

b). Se X_1 é solução do sistema $AX = \overline{0}$, então $X_o = \alpha X_1$ também é uma solução do sistema.

De fato, temos:

a). Sendo X_1 e X_2 soluções para o sistema, temos que $AX_1 = \overline{0}$ e $AX_2 = \overline{0}$. Assim:

$$AX_o = A\left(X_1 + X_2\right) = AX_1 + AX_2 = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$$

.

Logo, X_o é solução do sistema.

b). Sendo X_1 solução so sistema, temos que $AX_1 = \overline{0}$. Assim:

$$AX_o = A\left(\alpha X_1\right) = \alpha AX_1 = \alpha\overline{0} = \overline{0}$$

.

Logo, X_o é solução do sistema.

Exemplo 17. *Dado o sistema linear abaixo, para quais valores (reais) de a o sistema:*

1) Possui solução única;

2) Possui infinitas soluções;

3) Não possui solução.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-5y+2z=11 \\ 2x+(a^2-7)z=9-a \end{cases}$$

Vamos escrever a matriz aumentada do sistema e fazer o escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & -5 & 2 & \vdots & 11 \\ 2 & 0 & a^2-7 & \vdots & 9-a \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_1+L_2\to L_2 \quad e \quad -2L_1+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & 0 & \vdots & 7 \\ 0 & -2 & a^2-9 & \vdots & 5-a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{7}L_2\to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & -2 & a^2-9 & \vdots & 5-a \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_1\to L_1 \ e \ 2L_2+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & \vdots & 3-a \end{bmatrix}$$

(*)

Com o intuito de prosseguir no escalonamento, devemos examinar as possibilidades para o valor a^2-9.

Se $a^2-9\neq 0$, *ou seja, se* $a\neq 3$ *e* $a\neq -3$, *podemos continuar o escalonamento, multiplicando a 3ª linha por* $\frac{1}{a^2-9}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & \vdots & 3-a \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a^2-9}L_3\to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{-1}{a+3} \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_3+L_1\to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3+\frac{1}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{-1}{a+3} \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema correspondente:

$$\begin{cases} x = 3+\frac{1}{a+3} = \frac{3a+10}{a+3} \\ y=-1 \\ z=\frac{-1}{a+3} \end{cases}$$

Neste caso ($a^2 - 9 \neq 0$)*, temos que o sistema possui solução única:* $\left(\dfrac{3a+10}{a+3}, -1, \dfrac{-1}{a+3}\right)$

Agora, se $a^2 - 9 = 0$*, teremos duas possibilidades para o valor de* a*:* $a = 3$ *ou* $a = -3$

Se $a = 3$*, voltando a* $(*)$*, temos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & \vdots & 3-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema correspondente:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Neste caso ($a = 3$)*, o sistema possui infinitas soluções:* $(3 - z, -1, z)$, $z \in \mathbb{R}$

Se $a = -3$*, voltando a* $(*)$*, temos:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & \vdots & 3-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema correspondente:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ y = -1 \\ 0 = 6 \end{cases}$$

A última equação não é satisfeita, qualquer que seja o valor de x, y *e* z*. Logo, o sistema não possui solução neste caso* ($a = -3$)*.*

Resposta:

1) $a \neq 3$ *e* $a \neq -3$

2) $a = 3$

3) $a = -3$

Capítulo 2

Inversão de Matrizes e Determinantes

2.1 Matriz Inversa

Definição 13. *Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é* *invertível* *ou* *não singular* *quando existe uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que*

$$AB = I_n = BA$$

Se não existir B tal que $AB = I_n = BA$, diremos que A *não é invertível* *ou* *singular*.

Exemplo 18. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Fazendo as contas:

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Logo, A é uma matriz invertível

Teorema 3. *Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, então existe uma única matriz B $n \times n$ tal que $AB = I_n = BA$*

Demonstração: Sejam B e C matrizes $n \times n$ tais que:

$$AB = I_n = BA \text{ e } AC = I_n = CA$$

Então:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Ou seja: $B = C$

Logo, existe única B $n \times n$ tal que $AB = In = BA$.

Observação 10. *A matriz B $n \times n$ da definição de matriz invertível (tal que $AB = In = BA$) é chamada <u>a matriz inversa de A</u> e será denotada por A^{-1}.*

Propriedades:

1) Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, então a matriz A^{-1} também é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Demonstração: Temos que: $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Então, A^{-1} é invertível.

Como a inversa de uma matriz é única, segue que $(A^{-1})^{-1} = A$ (ou seja, a inversa de A^{-1} é A).

2) Se A e B são matrizes $n \times n$ invertíveis, então a matriz AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração: Temos que:

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

e

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.

Assim, AB é invertível (pois existe $C = B^{-1}A^{-1}$ tal que $(AB)C = I_n = C(AB)$). Pela unicidade da matriz inversa, segue que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, então sua transposta A^t também é invertível, e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demonstração: Temos que:

$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = (I_n)^t = I_n$.

$(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = (I_n)^t = I_n$.

Logo, A^t é invertível (pois existe uma matriz $C = (A^{-1})^t$ tal que $A^tC = I_n = CA^t$). Pela unicidade da inversa, segue que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

A demonstração do Teorema seguinte será omitida. Ele nos diz que, se verificarmos que $AB = I_n$, não haverá necessidade de verificarmos também que $BA = I_n$.

Teorema 4. *Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se $AB = I_n$, então $BA = I_n$.*

Exemplo 19. *Consideremos as matrizes A e B abaixo. Sabendo que $A^{-1} = B$, calcule os possíveis valores para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & a & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & c \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ b & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

Temos que $AB = I_4$. Assim:

$$I_4 = AB = \begin{bmatrix} -2 & a & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 2 & c \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ b & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+ab+2 & 2+2a & 2a+2 & -4+2d \\ 3+b-2 & -3+2+2 & 2-2 & 6-2-2d \\ -4-b+c & 4-2-2 & -2+c & -8+2+cd \\ 3+b-2 & -3+2+1 & 2-2 & 6-1-2d \end{bmatrix}$$

Então

$2 + 2a = (I_4)_{12} = 0 \Rightarrow a = -1$

$-4 + 2d = (I_4)_{14} = 0 \Rightarrow d = 2$

$3 + b - 2 = (I_4)_{21} = 0 \Rightarrow b = -1$

$-2 + c = (I_4)_{33} = 1 \Rightarrow c = 3$

Exemplo 20. *Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz tal que $A^3 = \overline{O}$, mostre que a inversa de $(I_n - A)$ é a matriz $I_n + A + A^2$.*

Devemos mostrar que:

$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n$.

Assim:

$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_nI_n + I_nA + I_nA^2 - AI_n - AA - AA^2 = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n - A^3 = I_n - O = I_n$.

Logo: $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$

Exemplo 21. *Sejam A e B matrizes $n\times n$ invertíveis. Consideremos as matrizes $C = AB^tA^{-1}$ e $D = A(AB^{-1})^{-1}$. Sabendo que $B^{-1} = B^t$, mostre que $C^{-1} = D$*

Devemos mostrar que: $CD = I_n$. *Assim:*

$CD = AB^tA^{-1}A(AB^{-1})^{-1} = AB^tI_n(AB^{-1})^{-1} = AB^t(AB^{-1})^{-1} = AB^t(B^{-1})^{-1}A^{-1} = AB^tBA^{-1} = AB^{-1}BA^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$

Logo: $C^{-1} = D$.

Alguns resultados sobre inversão de matrizes

Vamos listar, nesta parte, alguns resultados importantes sobre inversão de matrizes. As demonstrações podem ser vistas no livro texto.

O primeiro resultado é o seguinte:

Teorema 5. *Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) Existe uma matriz B $n \times n$ tal que $BA = I_n$

b) A matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n.

c) A é invertível.

Observemos que o Teorema acima nos oferece uma nova maneira para decidirmos se A é invertível ou não. Se A for equivalente por linha a I_n, A será invertível. Caso contrário, ela não é invertível.

Por exemplo, a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é equivalente por linhas à matriz I_3, pois:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_1 - 2L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_1 + 8L_3 \to L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_2 - 4L_3 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Pelo Teorema anterior, a matriz A é invertível.

Por outro lado, se C é a matriz: $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

C não é equivalente por linhas à matriz I_3. Observemos o escalonamento a seguir:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underline{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underline{L_3 + L_1 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \underline{L_1 - 2L_2 \rightarrow L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \underline{L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

D está na forma escalonada reduzida, mas não é a matriz identidade. Logo, C não é equivalente por linhas a I_3 e, assim, C não é invertível.

Precisamos agora de um método para inversão de matrizes.

Seja A uma matriz $n \times n$ invertível. Pelo Teorema anterior, A é equivalente por linhas à matriz identidade I_n. Vamos chamar as operações elementares para ir de A até I_n de $op_1, op_2, \cdots, op_k$. Dessa forma:

$$A \underset{\longrightarrow}{op_1} A_1 \underset{\longrightarrow}{op_2} A_2 \longrightarrow \cdots \underset{\longrightarrow}{op_k} I_n$$

.

Para obtermos a matriz A^{-1}, é possível mostrarmos que devemos aplicar a mesma sequência de operações elementares acima partindo agora de I_n:

$$I_n \underset{\longrightarrow}{op_1} C_1 \underset{\longrightarrow}{op_2} C_2 \longrightarrow \cdots \underset{\longrightarrow}{op_k} A^{-1}$$

.

Exemplo 22. *Calcule a matriz A^{-1} (se possível), sabendo que a matriz A é dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De fato, já mostramos que a matriz acima é equivalente por linhas à matriz identidade I_3.

Assim, A é invertível e é possível encontrarmos A^{-1} . Usando as mesmas operações elementares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_1 - 2L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{L_1 + 8L_3 \to L_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L_2 - 4L_3 \to L_2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 11. *Dada uma matriz A $n \times n$, podemos fazer o seguinte para encontrarmos sua inversa (se ela for invertível):*

$$\left[A \vdots I_n\right] \underline{\text{operações elementares}} \left[I_n \vdots A^{-1}\right]$$

O exemplo a seguir irá ilustrar esta observação:

Exemplo 23. *Dada a matriz B abaixo, encontre sua inversa, se possível:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \to L_2 \text{ e } L_3 - 3L_1 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 - 2L_2 \to L_1 \text{ e } L_3 - L_2 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \vdots & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + 2L_3 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, B é invertível (pois é linha equivalente à matriz I_3) e temos:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 24. *Dada a matriz C abaixo, encontre sua inversa, se possível:*

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1 \to L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2 \to L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \vdots & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5L_2 + L_1 \to L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & -1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \vdots & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *já está na forma escalonada reduzida. Então, C não é invertível, pois não é equivalente por linhas à matriz I_3. A matriz "à direita" obtida após o escalonamento não tem significado.*

O Teorema abaixo nos dá uma relação entre matrizes invertíveis e solução de sistemas.

Teorema 6. *Seja A uma matriz $n \times n$ (quadrada). O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso, a solução é $X = A^{-1}B$*

Em particular, podemos escrever que **o sistema homogêneo** $AX = \overline{O}$ **tem solução única** ($X = \overline{O}$) **se, e somente se,** A **é invertível**. Neste caso, se estivermos trabalhando com uma matriz não invertível A, o sistema homogêneo $AX = \overline{O}$ terá infinitas soluções.

Observação 12. *No Teorema, no caso de A ser invertível, o sistema $AX = B$ pode ser resolvido da seguinte forma:*

$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow I_nX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$ é a solução do sistema.

De forma análoga, se A é invertível, podemos escrever:

$AX = \overline{O} \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\overline{O} \Longrightarrow X = \overline{O}$

Então, $X = \overline{O}$ é a solução (única) do sistema.

Exemplo 25. *Resolver o sistema:*

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

A matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ *dos coeficientes do sistema é uma matriz invertível e sua inversa A^{-1} é dada por:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo então o sistema $AX = B$, *onde* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, *obtemos:*

$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow I_nX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-7 \\ -7 \\ 1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Solução do sistema:

$$X = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad ou \qquad x_1 = -8,\ x_2 = -7,\ x_3 = -6$$

Exemplo 26. *Sejam* A *e* B *matrizes invertíveis tais que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *e* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, *resolva o sistema:* $BA^{-1}X = C$

Temos:

$BA^{-1}X = C \Longrightarrow B^{-1}BA^{-1}X = B^{-1}C \Longrightarrow I_3A^{-1}X = B^{-1}C \Longrightarrow A^{-1}X = B^{-1}C \Longrightarrow$
$AA^{-1}X = AB^{-1}C \Longrightarrow I_3X = AB^{-1}C \Longrightarrow X = AB^{-1}C$

Assim:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & 2-6 & -6 \\ -2 & -1+2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3-12 \\ 2+4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Solução: $X = \begin{bmatrix} -15 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

2.2 Determinantes

Definição 14. *Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ uma matriz $n \times n$ (quadrada). O determinante de A (que indicamos por $detA$) é calculado da seguinte forma:*

- $n = 2$:

  sendo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, *temos* $detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- $n > 2$

  Vamos definir: $\widetilde{a_{ij}} = (-1)^{i+j} det\widetilde{A_{ij}}$ *onde* $\widetilde{A_{ij}}$ *é a matriz* $(n-1) \times (n-1)$ *obtida retirando-se a i-ésima linha de A e j-ésima coluna de A,* $\quad i, j = 1, \cdots, n.$

  $\widetilde{a_{ij}}$ *é o cofator do elemento* a_{ij}.

  Escolhendo uma linha da matriz A, digamos, a linha i, temos:

  $$detA = a_{i1}\widetilde{a_{i1}} + a_{i2}\widetilde{a_{i2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{in}}$$

  Ou podemos escolher uma coluna de A para o cálculo do determinante. Escolhendo a coluna j, temos:

  $$detA = a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}}$$

Exemplo 27. *Calcule o determinante das seguintes matrizes:*

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad detA = (-1)5 - 3 \cdot 2 = -5 - 6 = -11$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ *Podemos escolher qualquer linha ou qualquer coluna para o cálculo do determinante. Por exemplo, escolhendo a linha 1 e usando que* $B = (b_{ij})_{3\times 3}$*, temos:*

$det B = b_{11}\widetilde{b_{11}} + b_{12}\widetilde{b_{12}} + b_{13}\widetilde{b_{13}} = -1\widetilde{b_{11}} + 3\widetilde{b_{12}} + 0\widetilde{b_{13}} = -\widetilde{b_{11}} + 3\widetilde{b_{12}}$

Vamos calcular os cofatores $\widetilde{b_{11}}$ *e* $\widetilde{b_{12}}$.

$$\widetilde{b_{11}} = (-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (-1)\cdot(2) - 1\cdot 2 = -4$$

$$\widetilde{b_{12}} = (-1)^{1+2} det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^3 \cdot [2\cdot 2 - 1\cdot 5] = 1$$

Voltando ao cálculo do determinante:

$$det B = -\widetilde{b_{11}} + 3\widetilde{b_{12}} = 4 + 3\cdot 1 = 7$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Vamos escolher a $4^{\underline{a}}$ *coluna para o cálculo do determinante de* C*. Indicando por* $C = (c_{ij})_{4\times 4}$*, temos:*

$$\begin{aligned} det C &= c_{14}\widetilde{c_{14}} + c_{24}\widetilde{c_{24}} + c_{34}\widetilde{c_{34}} + c_{44}\widetilde{c_{44}} = \\ &= -1\widetilde{c_{14}} + 0\widetilde{c_{24}} + 0\widetilde{c_{34}} + 3\widetilde{c_{44}} = \\ &= -\widetilde{c_{14}} + 3\widetilde{c_{44}} \end{aligned}$$

Vamos calcular os cofatores $\widetilde{c_{14}}$ *e* $\widetilde{c_{44}}$

$$\widetilde{c_{14}} = (-1)^{1+4} det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (-1) det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos chamar a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *de* $D = (d_{ij})_{3\times 3}$.

Calculando o determinante de D *usando a* $2^{\underline{a}}$ *linha, temos:*

$$\begin{aligned} detD &= d_{21}\widetilde{d_{21}} + d_{22}\widetilde{d_{22}} + d_{23}\widetilde{d_{23}} = \\ &= 0\widetilde{d_{21}} + 5\widetilde{d_{22}} + 2\widetilde{d_{23}} = 5\widetilde{d_{22}} + 2\widetilde{d_{23}} = \\ &= 5(-1)^{2+2}\, det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + 2(-1)^{2+3}\, det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 5(-1-4) + 2(-1)(1-4) = 5(-5) - 2(-3) = -25 + 6 \\ &= -19 \qquad \Rightarrow detD = -19 \end{aligned}$$

Então:

$$\widetilde{c_{14}} = (-1)^{1+4}\, detD = (-1)(-19) = 19$$

$$\widetilde{c_{44}} = (-1)^{4+4}\, det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \; det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos chamar a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ *de* $E = (e_{ij})_{3\times 3}$. *Calculemos o valor de* $detE$ *usando a* $1^{\underline{a}}$ *coluna:*

$$\begin{aligned} detE &= e_{11}\widetilde{e_{11}} + e_{21}\widetilde{e_{21}} + e_{31}\widetilde{e_{31}} = \\ &= 1\widetilde{e_{11}} + (-1)\widetilde{e_{21}} + 0\widetilde{e_{31}} = \widetilde{e_{11}} - \widetilde{e_{21}} = \\ &= (-1)^{1+1}\, det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - (-1)^{2+1}\, det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= (1\cdot 2 - 1\cdot 5) - 1(-1)(4-0) = -3 + 4 = 1 \end{aligned}$$

Assim: $\widetilde{c_{44}} = detE = 1$.

Voltando ao cálculo do determinante de C:

$$detC = -\widetilde{c_{14}} + 3\widetilde{c_{44}} = -19 + 3\cdot 1 = -16.$$

Exemplo 28. *Considere a matriz:* $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & \alpha \\ 2 & 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. *Sabendo que* $detA = 0$, *calcule o valor de* α.

Escolhendo a $2^{\underline{a}}$ *linha da matriz* $A = (a_{ij})$ *para o cálculo do determinante, temos:*

$$detA = a_{21}\widetilde{a_{21}} + a_{22}\widetilde{a_{22}} + a_{23}\widetilde{a_{23}} + a_{22}\widetilde{a_{24}} =$$
$$= 0\widetilde{a_{21}} + 0\widetilde{a_{22}} + 2\widetilde{a_{23}} + 1\widetilde{a_{24}} = 2\widetilde{a_{23}} + \widetilde{a_{24}}$$

Calculando os cofatores $\widetilde{a_{23}}$ *e* $\widetilde{a_{24}}$*:*

$$\widetilde{a_{23}} = (-1)^{2+3}\, det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} = (-1)\, det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Chamando $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ *e escolhendo a* $2^{\underline{a}}$ *coluna para o cálculo de* $detB$, *temos:*

$$detB = b_{12}\widetilde{b_{12}} + b_{22}\widetilde{b_{22}} + b_{32}\widetilde{b_{32}} = 1\widetilde{b_{12}} + 0\widetilde{b_{22}} + 6\widetilde{b_{32}} = \widetilde{b_{12}} + 6\widetilde{b_{32}} =$$
$$= (-1)^{1+2}\, det \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 6(-1)^{3+2}\, det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} = -1(-4-2\alpha) + 6(-1)(-\alpha+4) =$$
$$= 4 + 2\alpha - 6(-\alpha+4) = 4 + 2\alpha + 6\alpha - 24 = 8\alpha - 20.$$

Assim: $\widetilde{a_{23}} = (-1)\, detB = 20 - 8\alpha$

Cálculo de $\widetilde{a_{24}}$*:*

$$\widetilde{a_{24}} = (-1)^{2+4}\, det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Chamando $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, *e escolhendo a* $2^{\underline{a}}$ *linha para o cálculo de* $detC$, *temos:*

$$detC = c_{21}\widetilde{c_{21}} + c_{22}\widetilde{c_{22}} + c_{23}\widetilde{c_{23}} = 2\widetilde{c_{21}} + 0\widetilde{c_{22}} - 1\widetilde{c_{23}} = 2\widetilde{c_{21}} - \widetilde{c_{23}} =$$

$$= 2(-1)^{2+1}\ det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} - (-1)^{2+3} det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = -2(0-18) + (-6-2) = 36 - 8 = 28$$

$\widetilde{a_{24}} = detC = 28.$

Voltando ao cálculo de A:

$detA = 2(20 - 8\alpha) + 28 = 40 - 16\alpha + 28 = 68 - 16\alpha$

$0 = detA = 68 - 16\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{68}{16} \Rightarrow \alpha = \dfrac{17}{4}$

Propriedades e exemplos:

(1) Se α, $\beta \in \mathbb{R}$

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{k1} + \beta c_{k1} & \alpha b_{k2} + \beta c_{k2} & \cdots & \alpha b_{kn} + \beta c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \beta det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 29. *Calcule o determinante da matriz A usando a propriedade acima:*

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ 2\cos t - 3 \operatorname{sen} t & 2 \operatorname{sen} t + 3\cos t \end{bmatrix}$$

$$detA = 2det \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + 3det \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} =$$

$$= 2(\cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos t) + 3(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$$

(2) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha de A por

$\alpha \neq 0$, então $detB = \alpha detA$.

Ilustração:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \underline{\alpha L_k \to L_k} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = B$$

Usando a propriedade 1:

$$detB = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \alpha det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \alpha detA$$

(3) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se B é obtida de A trocando-se a posição de 2 linhas de A, então $detB = -detA$.

(4) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Se B é obtida de A substituindo a linha l (de A) por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha k (de A), com $k \neq l$, então $detB = detA$.

Exemplo 30. *Seja A uma matriz 3×3. A partir de A, fizemos as seguintes operações elementares, obtendo as matrizes B, C e D:*

$$A \quad \underline{L_1 \leftrightarrow L_3} \quad B \quad \underline{5L_2 \to L_2} \quad C \quad \underline{-7L_1 + L_2 \to L_2} \quad D$$

Sabendo que $detA = -2$, calcule o determinante de D.

Usando as propriedades 2, 3 e 4, podemos escrever:

$detB = -detA$ *(Propriedade 3)*

$detC = 5detB$ *(Propriedade 2)*

$detD = detC$ (Propriedade 4)

Assim:

$detB = -detA = -(-2) = 2.$

$detC = 5detB = 5 \cdot 2 = 10.$

$detD = detC = 10.$

Logo: $detD = 10$

Exemplo 31. *Mostre que se A é uma matriz $n \times n$ que possui 2 linhas iguais, então $detA = 0$.*

De fato, suponhamos que as linhas k e l de A sejam iguais. Vamos fazer uma operação elementar em A:

$$A \underline{\, L_k \leftrightarrow L_l \,} B$$

Pela propriedade 3, temos que $detB = -detA$. Mas $B = A$, já que as linhas k e l são iguais. Logo, $detA = -detA$, o que nos diz que $detA = 0$.

(5) Se A é uma matriz $n \times n$, então $detA^t = detA$.

Ilustração:

Vamos mostrar o resultado para $n = 2$ e $n = 3$.

- $n = 2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$detA^t = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = detA$$

- $n = 3$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

  Usando a 1ª coluna de A^t para o cálculo de seu determinante e o que foi provado para matrizes 2×2, temos:

  $detA^t = a_{11}(-1)^{1+1}\, det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12}(-1)^{2+1}\, det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}(-1)^{3+1}\, det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} =$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\ det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\ det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\ det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$
$$= detA$$

Exemplo 32. *Se A é uma matriz que possui duas colunas iguais, então o seu determinante vale 0. De fato, a matriz A^t possui duas linhas iguais. Então, $det\ A^t = 0$. Como $det\ A = det\ A^t$, segue que $det\ A = 0$.*

(6) Se A e B são matrizes $n \times n$, então $det(AB) = detA \cdot detB$

Observação 13. *A propriedade (6) vale para um número finito de matrizes; se $A_1, A_2, \cdots, A_k$ são matrizes $n \times n$, então:*

$$det(A_1 A_2 \cdots A_k) = detA_1 \cdot detA_2 \cdots detA_k$$

(7) Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz triangular superior (ou inferior), então $detA = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ (produto dos elementos da diagonal principal).

Ilustração:

Vamos mostrar o resultado para $n = 2, 3$ e 4.

- $n = 2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$

  $detA = a_{11}a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11}a_{22}$

- $n = 3$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

  Escolhendo a 1ª coluna para o cálculo do $detA$, temos:

  $detA = a_{11}(-1)^{1+1}\ det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

- $n = 4$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$

Escolhendo a 1ª coluna para o cálculo do determinante de A, temos:

$$detA = a_{11}(-1)^{1+1}\, det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

(8) Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz diagonal, então $detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

A propriedade (8) é consequência da propriedade (7). Em particular, temos:

$$detI_n = 1 \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

(9) Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz invertível, então $detA \neq 0$ e vale

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA}$$

Demonstração

$A \cdot A^{-1} = I_n \Longrightarrow det(A \cdot A^{-1}) = det(I_n) \Longrightarrow detA \cdot detA^{-1} = det(I_n)$

$\Longrightarrow detA \cdot detA^{-1} = 1$

Temos então que $detA \neq 0$. E ainda: $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$

Exemplo 33. *Seja A uma matriz $n \times n$ invertível tal que $A^{-1} = A^2$. Mostre que $detA = 1$.*

Temos que:

$$A^{-1} = A^2$$

$$detA^{-1} = detA^2$$

$$\frac{1}{detA} = det(A \cdot A)$$

$$\frac{1}{detA} = detA \cdot detA$$

$$1 = detA \cdot detA \cdot detA$$

$$(detA)^3 = 1 \Longrightarrow detA = 1$$

(10) Se A é uma matriz $n \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $det(\alpha A) = \alpha^n detA$.

Ilustração: vamos demonstrar a propriedade para $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \ \underline{\alpha L_1 \to L_1} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A_1 \ \underline{\alpha L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A_2$$

$$\underline{\alpha L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{bmatrix} = \alpha A$$

$detA_1 = \alpha \ detA$

$detA_2 = \alpha \ detA_1 = \alpha \ (\alpha \ detA) = \alpha^2 \ detA$

$det(\alpha A) = \alpha \ detA_2 = \alpha(\alpha^2 \ detA) = \alpha^3 \ detA$

Ou seja:

$$det(\alpha A) = \alpha^3 \ detA$$

Exemplo 34. *Se A é uma matriz 3×3 invertível e $detA = 2$, calcule o determinante de B, onde $B = 4A^2A^tA^{-1}$*

Temos:

$detB = det(4A^2A^tA^{-1}) = 4^3 \ \ detA^2 \ \ detA^t \ \ detA^{-1} =$

$= 64 \ \ detA \ \ detA \ \ detA \ \ \dfrac{1}{detA} = 64(detA)^2 = 64 \cdot 4 = 256$

Observação 14. *Ainda podemos mostrar como propriedade de determinantes: se uma matriz A possui uma linha múltipla de outra linha, então seu determinante vale 0. O resultado vale também para colunas.*

Teorema 7. *Seja A uma matriz $n \times n$. A é uma matriz invertível se, e somente se, $det A \neq 0$. Neste caso:* $det A^{-1} = \dfrac{1}{det A}$.

2.3 Matriz adjunta e inversão

Definição 15. *Seja A uma matriz $n \times n$. A matriz adjunta de A ($adj A$) é a transposta da matriz dos cofatores dos elementos de A. Isto é:*

$$Adj A = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n1} & \widetilde{a}_{n2} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \cdots & \widetilde{a}_{n1} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{a}_{2n} & \cdots & \widetilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

onde $\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\ det\widetilde{A}_{ij}$, *e* $\widetilde{A}_{ij}$ *é a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A, retirando-se sua linha i e sua coluna j, com $i, j = 1, \cdots, n$.*

Exemplo 35. *a)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Indicando por $A = (a_{ij})_{3\times 3}$, temos:

$$\widetilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\ det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -6$$

$$\widetilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\ det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\widetilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\ det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\widetilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\ det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = (-1)(-4) = 4$$

$$\widetilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\ det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2$$

$$\widetilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\ det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\widetilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\ det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$\widetilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\ det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$\widetilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\ det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

Assim:

$$adjA = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Indicando por $B = (b_{ij})_{3\times 3}$, *temos:*

$$\widetilde{b}_{11} = (-1)^{1+1}\ det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$\widetilde{b}_{12} = (-1)^{1+2}\ det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

$$\widetilde{b}_{13} = (-1)^{1+3}\ det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2$$

$$\widetilde{b}_{21} = (-1)^{2+1}\ det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)(-2) = 2$$

$$\widetilde{b}_{22} = (-1)^{2+2}\ det \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1 - 5 = -4$$

$$\widetilde{b}_{23} = (-1)^{2+3}\ det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (-1)(-2) = 2$$

$\widetilde{b}_{31} = (-1)^{3+1}\ det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 10 = -8$

$\widetilde{b}_{32} = (-1)^{3+2}\ det \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)(-1) = 1$

$\widetilde{b}_{33} = (-1)^{3+3}\ det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -2$

Assim:

$adjB = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -8 & 1 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Teorema 8. *Seja A uma matriz $n \times n$. Então:*

$$A \cdot adjA = (adjA)A = detA \cdot I_n$$

Aplicações do Teorema

1) Se A é uma matriz $n \times n$ não invertível, então $adjA$ também é não invertível.

Vamos estudar dois casos:

1º caso) $A = \overline{O}$

Se $A = \overline{O}$, temos que $adjA = \overline{O}$. Assim, $adjA$ é não invertível.

2º caso) $A \neq \overline{O}$

Pelo Teorema, sabemos que:

$(adjA)A = detA \cdot I_n$

Como A é não invertível, temos que $detA = 0$. Assim:

$(adjA)A = \overline{O}$

Se $adjA$ fosse uma matriz invertível, teríamos:

$(adjA)^{-1}adjA \cdot A = (adjA)^{-1} \cdot \overline{O}$

$I_n \cdot A = \overline{O}$

$$A = \overline{O}$$

Uma contradição. Logo, $adjA$ não é invertível.

2) Seja A uma matriz $n \times n$. Se $detA \neq 0$, então: $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} \cdot adjA$

De fato (usando o teorema anterior):

$$\left(\frac{1}{detA} \cdot adjA\right) A = \frac{1}{detA}(adjA \cdot A) = \frac{1}{detA}(detA \cdot I_n) = I_n$$

Logo:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA$$

Exemplo 36. *Encontre a inversa das seguintes matrizes, se possível:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Temos que $detA = 1 \cdot 3(-2) = -6$ *(A é triangular superior).*

Podemos então usar a aplicação 2 para encontrarmos A^{-1}. *Já vimos que:*

$$adjA = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adjA = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Temos que:

$detB = 2 + 2 - 10 = -6$

Sendo $adjB = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$*, podemos escrever:*

$$B^{-1} = \frac{1}{detB} \cdot adjB = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Exercícios:

1) Dadas as matrizes A, B e C abaixo, encontre a matriz X tal que

$$A^{-1}XB^{-1} = (adjA)CB^t$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos:

$A^{-1}XB^{-1} = (adjA)CB^t \Longrightarrow AA^{-1}XB^{-1} = A(adjA)CB^t \Longrightarrow I_3XB^{-1} = (detA)I_3CB^t \Longrightarrow$

$XB^{-1} = (detA)CB^t \Longrightarrow XB^{-1}B = (detA)CB^tB \Longrightarrow XI_2 = (detA)CB^tB \Longrightarrow X = (detA)CB^tB$

$detA = 3 \cdot 1(-2) = -6$

$B^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Fazendo as contas:

$$X = -6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -6 \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \\ -10 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 & -18 \\ -18 & -6 \\ 60 & 18 \end{bmatrix}$$

2) Seja D uma matriz 3×3 tal que $detD = -2$. A matriz adjunta de D é dada por:

$$adjD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 2 \end{bmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine a matriz D.

Temos que:

$D^{-1} = \dfrac{1}{detD} \cdot adjD$

$D^{-1} = -\dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{b}{2} & -\frac{c}{2} & -1 \end{bmatrix}$

Como $(D^{-1})^{-1} = D$, vamos encontrar então a inversa de D^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{b}{2} & -\frac{c}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-aL_1 + L_2 \to L_2 \text{ e } -bL_1 + L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{2} & -1 & -b & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{2} & -1 & -b & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{2} & -1 & -b & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{c}{2}L_2 + L_3 \to L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{ac}{2} - b & -\frac{c}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-ac}{2} & \frac{c}{2} & -1 \end{array}\right]$$

Logo: $D = (D^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ \frac{2b-ac}{2} & \frac{c}{2} & -1 \end{bmatrix}$

Regra de Cramer:

Se o sistema linear $AX = B$ é tal que A é uma matriz quadrada $n \times n$ e invertível, podemos usar determinantes para resolver o sitema.

Indicando por $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, temos que a solução (única) do sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA}, \quad x_2 = \frac{detA_2}{detA}, \quad \cdots \quad x_n = \frac{detA_n}{detA}$$

onde A_j denota a matriz $n \times n$ obtida substituindo-se a j-ésima coluna de A pelos elementos de B.

Vamos mostrar a Regra de Cramer para um sistema com duas equações e duas variáveis (no exercício a seguir).

Exercício:

Considere o sistema $AX = B$, onde

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$

Se $ad - bc \neq 0$, mostre que a solução do sistema é dada por: $x_1 = \dfrac{detA_1}{detA}, x_2 = \dfrac{detA_2}{detA}$ onde $A_1 = \begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix}$.

Sendo $detA = ad - bc \neq 0$, temos que A é invertível e a solução do sistema (solução única) é dada por :

$AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Sabemos ainda que:

$A^{-1} = \dfrac{1}{detA} \cdot adjA$

Então:

$$X = \frac{1}{detA} \cdot adjAB = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} dg - bh \\ -cg + ah \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dg-bh}{ad-bc} \\ \frac{ah-cg}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Observemos que:

$$dg - bh = det \begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix} = detA_1$$

onde A_1 é obtida de A substituindo-se sua $1^{\underline{a}}$ coluna pelos elementos de B.

$ah - cg = det \begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix} = detA_2$

onde A_2 é obtida de A substituindo-se sua $2^{\underline{a}}$ coluna pelos elementos de B.

Logo:

$x_1 = \dfrac{dg - bh}{ad - bc} = \dfrac{detA_1}{detA}$

$x_2 = \dfrac{ah - cg}{ad - bc} = \dfrac{detA_2}{detA}$

Exemplo 37. *Resolva o sistema linear abaixo usando a Regra de Cramer, se possível:*

$$f(x) = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 4z = -2 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Temos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad detA = -5 \neq 0.$

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad detA_1 = -3.$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad detA_2 = -8.$

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad detA_3 = 6.$

Usando a Regra de Cramer:

$x = \dfrac{detA_1}{detA} = \dfrac{-3}{-5} = \dfrac{3}{5}$

$y = \dfrac{detA_2}{detA} = \dfrac{-8}{-5} = \dfrac{8}{5}$

$z = \dfrac{detA_3}{detA} = \dfrac{6}{-5} = -\dfrac{6}{5}$

Solução: $x_1 = \dfrac{3}{5}, x_2 = \dfrac{8}{5}, x_3 = -\dfrac{6}{5}$

Capítulo 3

Vetores

As grandezas vetoriais são aquelas que, para estarem bem definidas, precisam da magnitude, direção e sentido. Grandezas, como velocidade e força, são exemplos de grandezas vetoriais.

Um vetor é representado geometricamente por um segmento orientado.

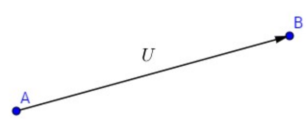

Figura 3.1:

A: origem do segmento orientado

B: extremidade do segmento orientado

Um segmento orientado é caracterizado pela sua direção, seu sentido e comprimento. Segmentos orientados com as mesmas características representam um mesmo vetor.

A direção, o sentido e o comprimento de um vetor são, respectivamente, a direção, o sentido e o comprimento de qualquer segmento orientado que o representa.

Vamos usar letras maiúsculas para dar nome aos vetores. Quando soubermos a localização da origem (A) e da extremidade (B) de um segmento orientado que representa o vetor, podemos chamá-lo de $\overrightarrow{AB}$

Dois vetores são iguais quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Soma de vetores: consideremos os vetores U e V representados abaixo:

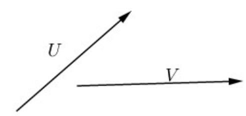

Figura 3.2:

O vetor soma de U com V $(U+V)$ pode ser representado da forma

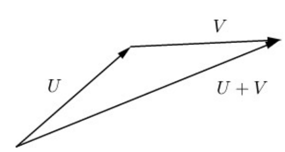

Figura 3.3:

Propriedades

$U+V=V+U$, para todo vetor U e V (comutatividade)

$U+(V+W)=(U+V)+W$, para todo vetor U, V e W (associatividade)

Existe um (único) vetor que vamos indicar por $\overline{O}$, tal que $U+\overline{O}=U$, para todo vetor U. ($\overline{O}$ é chamado de vetor nulo). Tal vetor tem comprimento zero.

Dado um vetor U, existe um (único) vetor, denotado por $-U$, tal que $U+(-U)=\overline{O}$. $-U$ é chamado de vetor simétrico a U, tem o mesmo comprimento de U, mesma direção de U e sentido oposto ao de U.

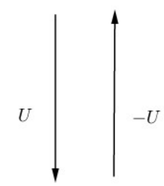

Figura 3.4:

Diferença de vetores: dados os vetores U e V, vamos definir:

$$U - V = U + (-V)$$

Geometricamente temos:

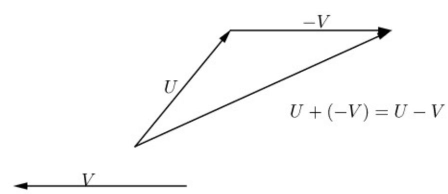

Figura 3.5:

Multiplicação de um vetor por um escalar: consideremos um vetor U e um escalar α. A multiplicação de U por α resulta em um vetor, que vamos denotar por αU, e que possui as seguintes características:

Caso 1) Se $\alpha = 0$ ou $U = \overline{O}$, então $\alpha U = \overline{O}$.

Caso 2) Se $\alpha \neq 0$ e $U \neq \overline{O}$.

- indicando por $\| \alpha U \|$ e $\| U \|$ os comprimentos dos vetores αU e U respectivamente, temos:

$$\| \alpha U \| = |\alpha| \, \| U \|$$

- αU e U têm a mesma direção.

- Se $\alpha > 0, \alpha U$ e U têm o mesmo sentido.

  Se $\alpha < 0, \alpha U$ e U têm sentidos opostos.

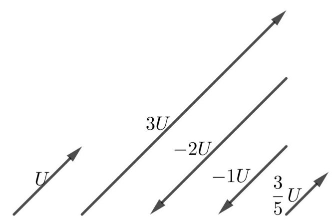

Figura 3.6:

Observação 15. *Dois vetores que têm a mesma direção são chamados de vetores* <u>*paralelos*</u> *ou* <u>*colineares*</u>*. Podemos mostrar que:*

Dois vetores não nulos U e V são paralelos se, e somente se, um é múltiplo escalar do outro, isto é, se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $U = \alpha V$.

De fato, se U e V são vetores paralelos, então ocorre: $V = \dfrac{\| V \|}{\| U \|}U$ ou $V = -\dfrac{\| V \|}{\| U \|}U$.

Ou seja, um é múltiplo escalar do outro.

Por outro lado, se um é múltiplo escalar do outro, digamos, $U = \alpha V$, então U e V têm a mesma direção pela definição de multiplicação por escalar.

Observação 16. *Um vetor U é dito* <u>*unitário*</u> *se $\| U \| = 1$.*

Exemplo 38. *Dado um vetor $U \neq \overline{0}$, encontre um vetor V de comprimento 3 e que tem a mesma direção e sentido de U.*

Indicando por $\| U \|$ o comprimento do vetor U, temos que:

$$W = \frac{1}{\| U \|}U$$

é um vetor unitário de mesma direção e sentido de U. O vetor V procurado é:

$$V = 3W = \frac{3}{\parallel U \parallel}U$$

.

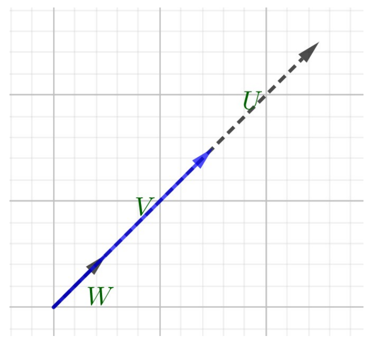

Figura 3.7:

Exemplo 39. *Dado um vetor $U \neq \overline{0}$, encontre um vetor T de comprimento 5 e que tem a mesma direção e sentido oposto ao de U.*

Indicando por $\parallel U \parallel$ o comprimento do vetor U, temos que:

$$W = \frac{1}{\parallel U \parallel}U$$

é um vetor unitário de mesma direção e sentido de U. O vetor T procurado é:

$$V = -5W = -\frac{5}{\parallel U \parallel}U$$

.

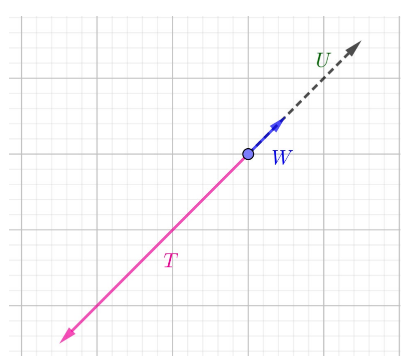

Figura 3.8:

3.1 Vetores no plano

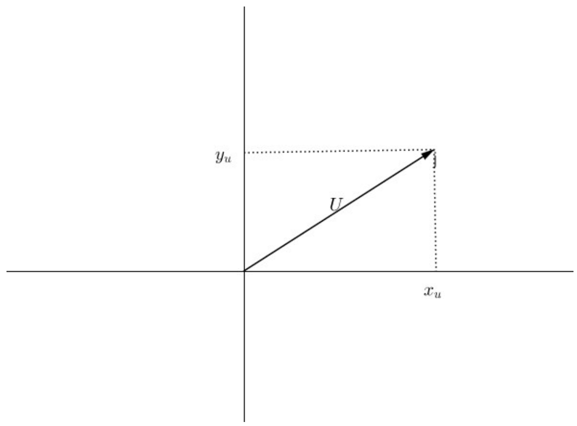

Figura 3.9:

Para obtermos as componentes de um vetor U do plano, traçamos um segmento orientado que o representa de forma que sua origem seja a origem do sistema de coordenadas retangulares (ou cartesianas). As coordenadas do ponto que é a extremidade desse segmento são as componentes de U.

$U = (x_u, y_u) \rightarrow$ componentes de U ou expressão analítica de U.

O vetor nulo do plano tem componentes $\overline{0} = (0, 0)$.

Soma de vetores:

Dados $V = (x_v, y_v)$ e $W = (x_w, y_w)$ vetores no plano, temos: $V + W = (x_v + x_w, y_v + y_w)$.

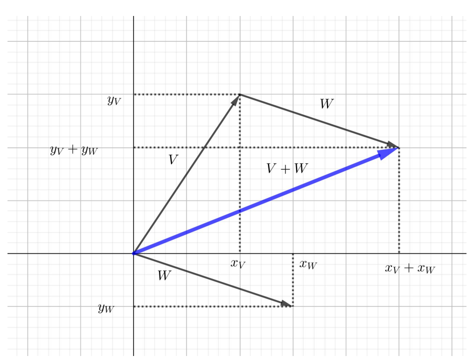

Figura 3.10:

Exemplo 40. $V = (-1, 2), \qquad W = (3, -\frac{1}{2})$

$V + W = (-1+3, 2-\frac{1}{2}) = (2, \frac{3}{2})$

Multiplicação de um vetor por um escalar:

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $V = (x_v, y_v)$, temos: $\alpha V = (\alpha x_v, \alpha y_v)$.

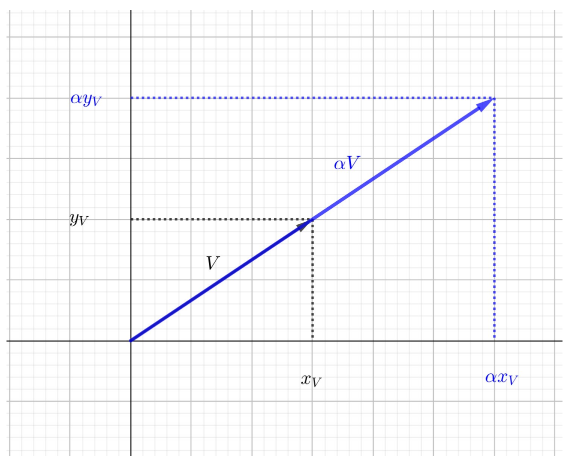

Figura 3.11:

Exemplo 41. $\alpha = -3$, $V = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$.

$\alpha V = \left(-3 \cdot \dfrac{1}{3}, -3 \cdot 2\right) = (-1, -6)$

3.2 Sistema de Coordenadas Retangulares no Espaço

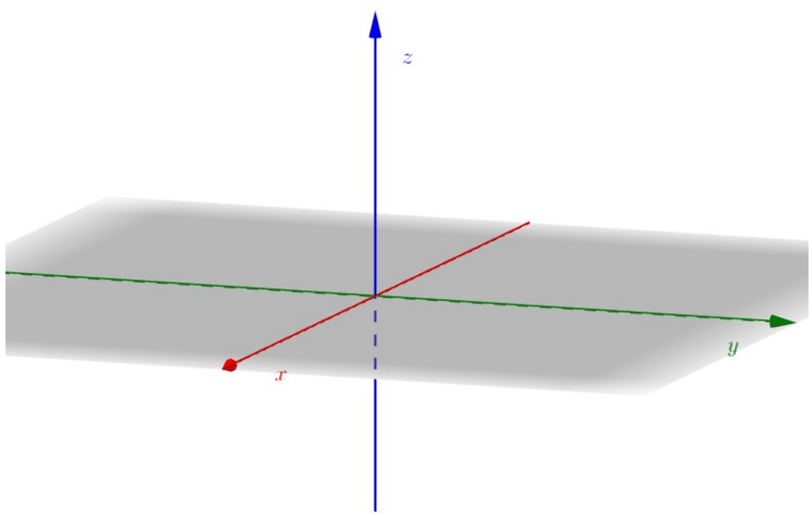

Figura 3.12:

O sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas no espaço é formado por três retas orientadas xx', yy' e zz', usualmente chamadas de eixo-x, eixo-y e eixo-z, respectivamente.

As retas são 2 a 2 perpendiculares e se interceptam em um único ponto O, que é a origem do sistema.

Os eixos coordenados dividem o espaço em 8 regiões, denominadas octantes. A cada ponto A no espaço, temos em correspondência uma abscissa x, uma ordenada y e uma cota z. Assim, dizemos que o ponto A tem coordenadas retangulares ou cartesianas (x, y, z). Os eixos x e y determinam o plano coordenado xy. Os eixos y e z determinam o plano coordenado yz. Os eixos x e z determinam o plano coordenado xz.

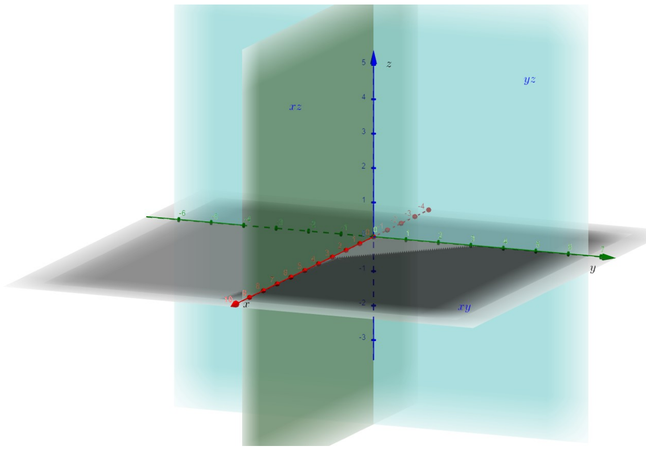

Figura 3.13:

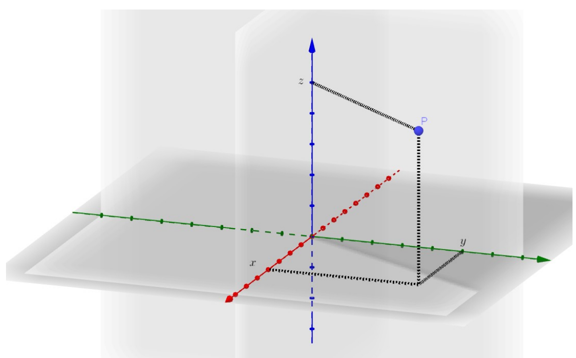

Figura 3.14:

Exemplo 42. *Vamos representar os seguintes pontos:*

$$A = (4, 7, 5), \quad B = (3, -6, 3), \quad C = (-7, 3, -4).$$

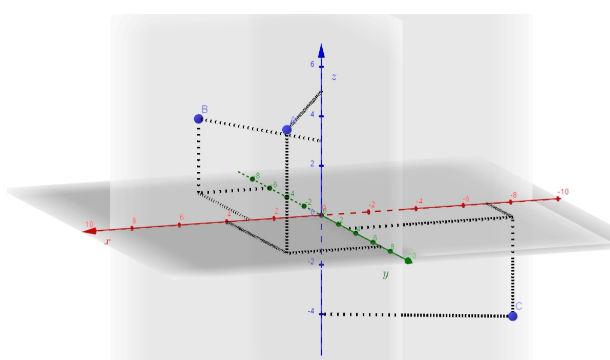

Figura 3.15:

3.3 Vetores no espaço

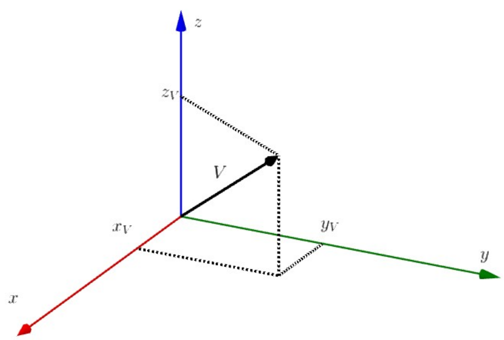

Figura 3.16:

Para obtermos as componentes de um vetor V do espaço, traçamos um segmento orientado que o representa de forma que sua origem seja a origem do sistema de coordenadas retangulares (ou cartesianas). As coordenadas do ponto que é a extremidade desse segmento são as componentes de V.

$V = (x_v, y_v, z_v) \rightarrow$ componentes ou expressão analíitica de V.

O vetor nulo tem componentes $\overline{0} = (0, 0, 0)$.

Soma de Vetores:

Dados $V = (x_v, y_v, z_v)$ e $W = (x_w, y_w, z_w)$ vetores no espaço, temos:

$V + W = (x_v + x_w, y_v + y_w, z_v + z_w)$

Exemplo 43. $V = (-1, 0, -3) \qquad W = (\frac{5}{2}, 2, \sqrt{2})$

$V + W = \left(-1 + \frac{5}{2}, 0 + 2, -3 + \sqrt{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2, \sqrt{2} - 3\right)$

Multiplicação de um vetor por um escalar:

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $V = (x_v, y_v, z_v)$, temos: $\alpha V = (\alpha x_v, \alpha y_v, \alpha z_v)$

Exemplo 44. $\alpha = -\frac{1}{2} \qquad V = (-1, 2, 0)$

$\alpha V = \left(-\frac{1}{2}(-1), -\frac{1}{2} \cdot 2, -\frac{1}{2} \cdot 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$.

Propriedades:

Sejam U, V e W vetores (no plano ou no espaço) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $U + V = V + U$

2) $(U + V) + W = U + (V + W)$

3) $U + \overline{O} = U$

4) $U + (-U) = \overline{O}$

5) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$

6) $\alpha\,(U + V) = \alpha U + \alpha V$

7) $(\alpha + \beta)\,U = \alpha U + \beta U$

8) $1 \cdot U = U$

Observação 17. *Se $U = (x_v, y_v)$, temos que $-U = (-x_v, -y_v)$. Situação análoga ocorre para vetores no espaço. Lembremos ainda que: $U - V = U + (-V) = (x_U - x_V, y_U - y_V)$.*

3.4 Componentes de um vetor definido por 2 pontos

Dados os pontos $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$ que são a origem e extremidade de um segmento orientado que representa um vetor no plano, vamos encontrar as componentes do referido vetor.

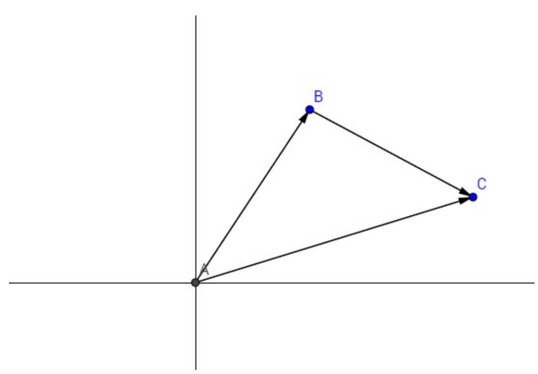

Figura 3.17:

Podemos escrever:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overline{0}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

Como os segmentos orientados que representam os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ têm origem no ponto $A=O=(0,0)$, podemos escrever:

$\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)$

$\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

No espaço, a situação é análoga: se $B=(x_1,y_1,z_1)$ e $C=(x_2,y_2,z_2)$ são a origem e extremidade de um segmento orientado que representa um vetor no espaço, podemos escrever:

$$\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)$$

$$\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

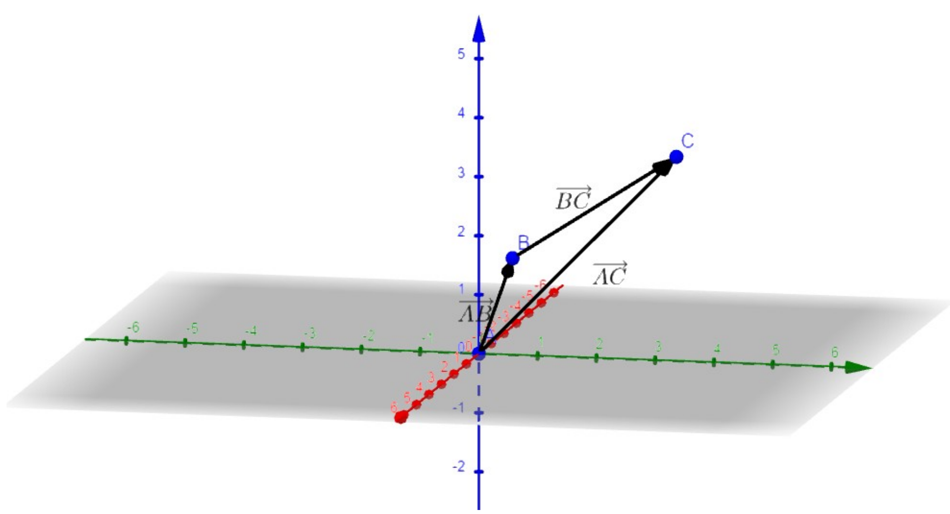

Figura 3.18:

Exemplo 45. *Dados os pontos* $C = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ *e* $D = (5, -3)$*, encontre as componentes do vetor* $\overrightarrow{DC}$*:*

$$\overrightarrow{DC} = \left(-1 - 5, \frac{1}{2} - (-3)\right) = \left(-6, \frac{7}{2}\right).$$

Exemplo 46. *Dados os pontos* $A = (-1, 2, 0)$ *e* $B = (2, -1, 8)$*, encontre as componentes do vetor* $\overrightarrow{AB}$*:*

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), -1 - 2, 8 - 0) = (3, -3, 8).$$

3.5 Produto de vetores

Norma de um vetor

A norma de um vetor U, denotada por $\| U \|$, é o comprimento do vetor U.

Cálculo de $\| U \|$:

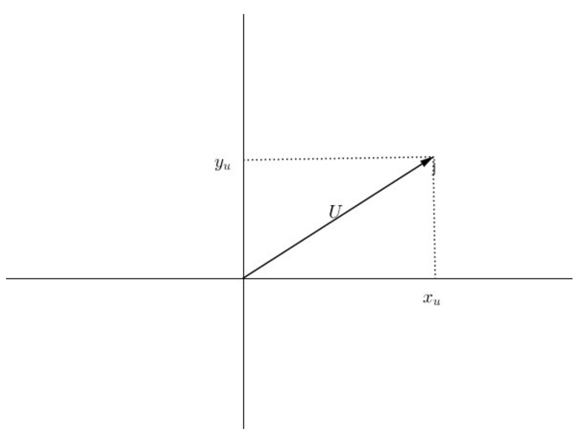

Figura 3.19:

No plano, observando a figura acima, podemos escrever:

$$\| U \|^2 = x_U^2 + y_U^2 \Rightarrow \| U \| = \sqrt{x_U^2 + y_U^2}$$

onde $U = (x_U, y_U)$.

Temos uma situação análoga no espaço: se $U = (x_U, y_U, z_U)$ é um vetor no espaço, então:

$$\| U \|^2 = x_U^2 + y_U^2 + z_U^2 \Rightarrow \| U \| = \sqrt{x_U^2 + y_U^2 + z_U^2}.$$

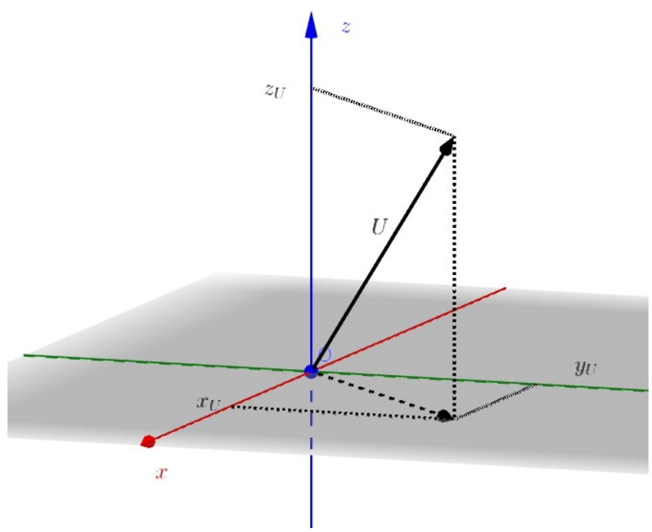

Figura 3.20:

Exemplo 47. *Dados os vetores U e V abaixo, calcule suas normas:*

$U = (-1, 2) \Longrightarrow \| U \| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$V = (3, \sqrt{2}, -1) \Longrightarrow \| V \| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+2+1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Distância entre dois pontos

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos no plano. A distância entre A e B, indicada por $dist(A, B)$, pode ser calculada da forma:

$$dist(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

.

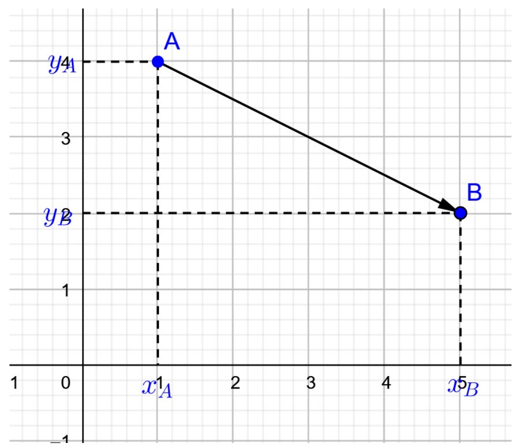

Figura 3.21:

Analogamente, sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ pontos no espaço. A distância entre A e B, indicada por $dist(A, B)$, pode ser calculada da forma:

$$dist(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

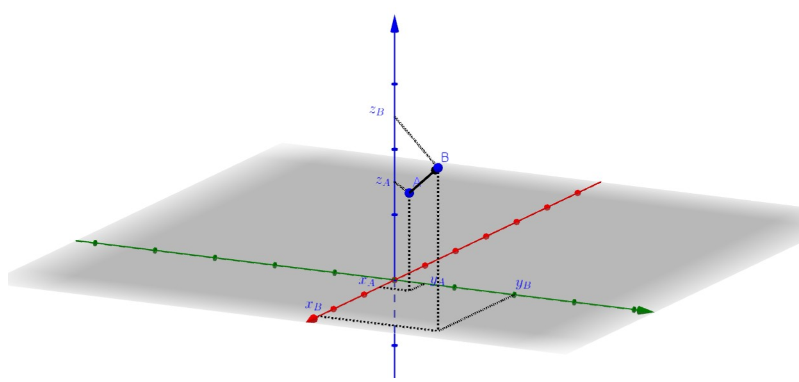

Figura 3.22:

Exemplo 48. *Calcule a distância entre os pontos* $A = (2, 0)$ *e* $B = (-1, 3)$.

$dist(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Calcule a distância entre os pontos $P = (-1, 0, 2)$ *e* $Q = (2, 1, 3)$

$dist(P, Q) = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

Observação 18. *Se α é um escalar e V é um vetor, então:*

$$\| \alpha V \| = |\alpha| \, \| V \|$$

.

De fato, se $V = (x_v, y_v)$ é um vetor no plano, então:

$\| \alpha V \| = \| \alpha(x_v, y_v) \| = \| (\alpha x_v, \alpha y_v) \| = \sqrt{(\alpha x_v)^2 + (\alpha y_v)^2} = \sqrt{\alpha^2 x_v^2 + \alpha^2 y_v^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_v^2 + y_v^2)} =$

$= |\alpha| \sqrt{x_v^2 + y_v^2} = |\alpha| \, \| V \|.$

Se V é um vetor no espaço, podemos fazer as contas acima de forma análoga.

Exemplo 49. *a) Se $V = (1, 2, 0)$, encontre o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de V.*

$$U = \frac{1}{\| V \|} V = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} (1, 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

b) Se $V = (0, 3, -4)$, encontre o vetor W que tenha mesma direção de V, sentido oposto ao de V e norma 10.

$$U = \frac{1}{\| V \|} V = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2}} (0, 3, -4) = \frac{1}{\sqrt{25}} (0, 3, -4) = \frac{1}{5} (0, 3, -4) = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right)$$

U é um vetor unitário de mesmo sentido e direção de V. Então:

$$W = -10U = -10 \left(0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) = (0, -6, 8)$$

Ângulo entre dois vetores:

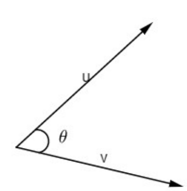

Figura 3.23:

$\theta =$ ângulo entre os vetores U e V acima, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

Dados dois vetores U e V, se o ângulo entre eles é de $90°$ ou um deles é nulo, vamos dizer que U e V são perpendiculares ou ortogonais.

3.5.1 Produto escalar

Definição 16. *O produto escalar de dois vetores V e W (indicado por $V \cdot W$) é definido por:*

$$V \cdot W = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ V = \overline{0} \ \ ou \ \ W = \overline{0} \\ \| V \| \, \| W \| \ \cos\theta \ \ \ se \ \ V \neq \overline{0} \ \ e \ \ W \neq \overline{0} \end{cases}$$

Na definição, θ denota o ângulo entre V e W

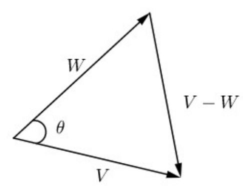

Figura 3.24:

Observando a figura acima e usando a lei dos cossenos, podemos escrever:

$\| V - W \|^2 = \| V \|^2 + \| W \|^2 - 2 \| V \| \| W \| \cos\theta$

Usando que: $V \cdot W = \| V \| \| W \| \cos\theta$, podemos escrever:

$\| V - W \|^2 = \| V \|^2 + \| W \|^2 - 2V \cdot W$

$2V \cdot W = - \| V - W \|^2 + \| V \|^2 + \| W \|^2$

$V \cdot W = \dfrac{1}{2}(- \| V - W \|^2 + \| V \|^2 + \| W \|^2)$

Se $V = (x_1, y_1)$ e $W = (x_2, y_2)$ são vetores no plano, então:

$V \cdot W = \dfrac{1}{2}[-(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 + x_1^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + y_2^2]$

$V \cdot W = \dfrac{1}{2}(-x_1^2 + 2x_1x_2 - {x_2}^2 - {y_1}^2 + 2y_1y_2 - y_2^2 + x_1^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + y_2^2)$

$V \cdot W = \dfrac{1}{2}(2x_1x_2 + 2y_1y_2)$

$$V \cdot W = x_1x_2 + y_1y_2$$

Analogamente, se $V = (x_1, y_1, z_1)$ e $W = (x_2, y_2, z_2)$, então:

$$V \cdot W = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Exemplo 50. *a) Dados os vetores $U = (-1, 2)$ e $V = (3, -\frac{1}{2})$, calcule o produto escalar de U com V.*

$U \cdot V = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 - 1 = -4.$

b) Dados os vetores $U = (a, -1, 2)$ e $V = (-3, 1, -1)$, sabendo que o produto escalar entre eles vale 0, calcule o valor de a.

$0 = U \cdot V = a(-3) + (-1) \cdot 1 + 2(-1) = -3a - 1 - 2$

$-3a - 3 = 0 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$

Ângulo entre dois vetores:

Pela definição, se V e W são vetores, então:

$$V \cdot W = \| V \| \| W \| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo formado por V e W.

Assim, se $V \neq \overline{0}$ e $W \neq \overline{0}$, podemos escrever:

$$\cos\theta = \frac{V \cdot W}{\| V \| \| W \|}$$

Observação 19. *a)* $V \cdot W > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$

b) $V \cdot W = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

c)$V \cdot W < 0 \Leftrightarrow \cos\theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$

Pelo item (b), temos:

$$V \text{ e } W \text{ são ortogonais} \Leftrightarrow V \cdot W = 0$$

Propriedades do produto escalar:

Sejam U, V e W vetores e α um escalar.

a) $U \cdot V = V \cdot U$

b) $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$

c) $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$

d) $V \cdot V \geq 0$

e) $V \cdot V = 0 \Leftrightarrow V = \overline{0}$

f) $\| V \| = \sqrt{V \cdot V}$

Exemplo 51. *1) Dados os vetores $U = (1, 1, 4)$ e $V = (-1, 2, 2)$, calcule o ângulo entre eles.*

Temos:

$$\cos\theta = \frac{U \cdot V}{\| U \| \| V \|} = \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{\sqrt{1+1+16}\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então:

$\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} rad.$

2) Calcule o valor de a para que os vetores $U = (-1, a, 3a)$ e $W = (5, 2 -1)$ sejam ortogonais.

Temos: $U \cdot W = 0 \Rightarrow -1 \cdot 5 + a \cdot 2 + 3a(-1) = 0 \Rightarrow -5 + 2a - 3a = 0 \Rightarrow -5 - a = 0 \Rightarrow a = -5$

3) Considere os vetores V e W tais que $\| V \| = 2\sqrt{3}$ e $\| W \| = 2$. O ângulo formado entre V e W é 150°. Se X é um vetor tal que $X = \alpha V + \beta W$, encontre os valores de α e β, sabendo que $X \cdot V = 24$ e $X \cdot W = -18$.

Usando que $X = \alpha V + \beta W$, temos:

$X \cdot V = 24$

$(\alpha V + \beta W) \cdot V = 24$

$\alpha V \cdot V + \beta W \cdot V = 24$

$\alpha \| V \|^2 + \beta \| W \| \| V \| \cos 150° = 24$

$$\alpha(2\sqrt{3})^2 + \beta \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24$$

$12\alpha - 6\beta = 24$

$2\alpha - \beta = 4 \qquad (1)$

$X \cdot W = -18$

$(\alpha V + \beta W) \cdot W = -18$

$\alpha V \cdot W + \beta W \cdot W = -18$

$\alpha \parallel V \parallel\parallel W \parallel \cos 150^o + \beta \parallel W \parallel^2 = -18$

$\alpha \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\beta = -18$

$-6\alpha + 4\beta = -18$

$-3\alpha + 2\beta = -9 \qquad$ *(2)*

Assim (usando (1) e (2)):

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 4 \\ -3\alpha + 2\beta = -9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 8 \\ -3\alpha + 2\beta = -9 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1$$

Se $\alpha = -1 :\ -3\alpha + 2\beta = -9 \Rightarrow 3 + 2\beta = -9 \Rightarrow 2\beta = -12 \Rightarrow \beta = -6$

Projeção ortogonal:

Consideremos os vetores V e W não nulos:

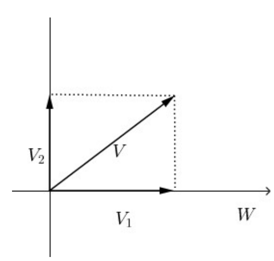

Figura 3.25:

Observando a figura, temos que:

$V = V_1 + V_2$.

$V_1 = \alpha W$ para algum escalar α.

Temos que V_2 é ortogonal a W. Assim:

$V_2 \cdot W = 0 \Rightarrow (V - V_1) \cdot W = 0 \Rightarrow V \cdot W - V_1 \cdot W = 0$

$\Rightarrow V \cdot W - V_1 \cdot W = 0 \Rightarrow V \cdot W - (\alpha W) \cdot W = 0$

$\alpha W \cdot W = V \cdot W \Rightarrow \alpha \parallel W \parallel^2 = V \cdot W$

Como $W \neq \overline{O}$: $\qquad \alpha = \dfrac{V \cdot W}{\parallel W \parallel^2}$

Assim:

$$V_1 = \alpha W = \left(\frac{V \cdot W}{\parallel W \parallel^2} \right) W$$

O vetor V_1 é a projeção ortogonal de V sobre W e será denotado da forma $proj_W V$.

Dessa forma:

$$proj_W V = \left(\frac{V \cdot W}{\parallel W \parallel^2} \right) W$$

Exemplo 52. *1) Dados os vetores $U = (-2, 4, 0)$ e $V = (0, -1, 2)$, encontre o vetor projeção ortogonal de U sobre V.*

Temos:

$proj_V U = \left(\dfrac{U \cdot V}{\parallel V \parallel^2} \right) V = \left[\dfrac{-2 \cdot 0 + 4(-1) + 0 \cdot 2}{0^2 + (-1)^2 + 2^2} \right] V = \dfrac{-4}{5}(0, -1, 2) = \left(0, \dfrac{4}{5}, \dfrac{-8}{5} \right).$

2) Sejam dados os pontos $A = (-1, -1, 2)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (m, -5, 3)$

a) Para qual valor de m o triângulo ABC é retângulo em A ?

b) Determine o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

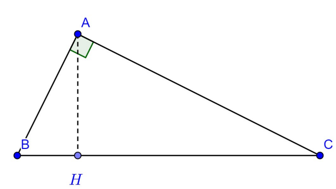

Figura 3.26:

a) Para que o triângulo ABC seja retângulo em A, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ devem ser ortogonais. Ou seja:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow (2-(-1), 1-(-1), 1-2) \cdot (m-(-1), -5-(-1), 3-2) = 0$

$\Longrightarrow (3, 2, -1) \cdot (m+1, -4, 1) = 0 \Longrightarrow 3(m+1) + 2(-4) + (-1) \cdot 1 = 0$

$\Longrightarrow 3m + 3 - 8 - 1 = 0 \Longrightarrow 3m = 6 \Longrightarrow m = 2$

b) Podemos escrever:

$$\overrightarrow{BH} = proj_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\| \overrightarrow{BC} \|^2}\right)\overrightarrow{BC} = = \left[\frac{(-3,-2,1) \cdot (0,-6,2)}{0^2 + (-6)^2 + 2^2}\right](0,-6,2) =$$

$$= (-3) \cdot 0 + (-2) \cdot (-6) + 1 \cdot 236 + 4(0,-6,2) = \frac{14}{40}(0,-6,2) = \frac{7}{20}(0,-6,2) = \left(0, -\frac{42}{20}, \frac{14}{20}\right) = \left(0, -\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

Chamando $A = (a, b, c)$ *e sabendo que* $\overrightarrow{BA} = \left(0, -\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right)$, *temos:*

$$(a-2, b-1, c-1) = \left(0, -\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right) \Rightarrow a-2 = 0, \quad b-1 = -\frac{21}{10}, \quad c-1 = \frac{7}{10}$$

Ou seja: $a = 2$, $b = -\frac{11}{10}$ *e* $c = \frac{17}{10}$.

Assim: $H = \left(2, -\frac{11}{10}, \frac{17}{10}\right)$

3.5.2 Produto vetorial

Sejam V e W vetores do espaço. O produto vetorial de V com W, indicado por $V \times W$, é um vetor que possui as seguintes características:

a) $\| V \times W \| = \| V \| \| W \| \operatorname{sen}\theta$ onde θ é o ângulo formado entre V e W.

b) $V \times W$ tem direção perpendicular à direção de V e de W.

c) O sentido de $V \times W$ é dado pela "regra da mão direita".

Área de um paralelogramo

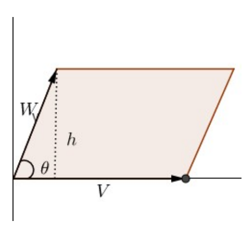

Figura 3.27:

Consideremos V e W vetores não nulos no espaço. Indicando por A a área do paralelogramo, podemos escrever:

$A = \| V \| \, h \qquad (1)$

Ainda: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{\| W \|} \Longrightarrow h = \| W \| \quad sen\theta \qquad (2)$

Usando (1) e (2):

$A = \| V \| \| W \| \, \operatorname{sen}\theta \Longrightarrow A = \| V \times W \|$

Propriedades do produto vetorial:

Sejam U, V e W vetores do espaço e α um escalar. As seguintes propriedades são válidas:

a) $V \times W = -W \times V$

b) $V \times W = \overline{0} \Leftrightarrow V = \alpha W$ para algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Em particular: $V \times V = \overline{0}$

c) $(V \times W) \cdot V = 0$ e $(V \times W) \cdot W = 0$

d) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$

e) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$

$(W + U) \times V = W \times V + U \times V$

Observação 20. *Em geral,* $U \times V \neq V \times U$.

Exemplo 53. *Sejam* U *e* V *vetores no espaço tais que* $V \times U = (\sqrt{2}, 1, -1)$. *Calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores* $T_1 = U - 2V$ *e* $T_2 = -3V$.

Indicando por A *a área do paralelogramo determinado por* T_1 *e* T_2*, temos:*

$A = \| T_1 \times T_2 \|$

$T_1 \times T_2 = (U - 2V) \times (-3V) = U \times (-3V) + (-2V) \times (-3V) = -3U \times V + (-2)(-3)V \times V =$

$= -3U \times V + 6V \times V = -3U \times V + 6\overline{0} = -3U \times V = 3V \times U = 3(\sqrt{2}, 1, -1) = (3\sqrt{2}, 3, -3)$

$A = \| (3\sqrt{2}, 3, -3) \| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18 + 9 + 9} = \sqrt{36} = 6.$

Vetores canônicos:

Consideremos os vetores $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$. Para cada $\overrightarrow{V} = (x, y, z)$ vetor no espaço, podemos escrever:

$\overrightarrow{V} = (x, y, z) = (x, 0, 0)+(0, y, 0)+(0, 0, z) = x(1, 0, 0)+y(0, 1, 0)+z(0, 0, 1) = x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$.

Temos ainda que:

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overline{O} \qquad \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overline{O} \qquad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overline{O}$

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \qquad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$

$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \qquad \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$

Teorema 9. *Sejam* $\overrightarrow{V} = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $\overrightarrow{W} = (x_2, y_2, z_2)$ *vetores no espaço. Então, o vetor* $V \times W$ *é dado por:*

$$V \times W = \left(det \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

Demonstração:

Podemos escrever: $V = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}$ e $W = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}$

Usando as propriedades, temos:

$$V \times W = (x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}) \times (x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}) =$$

$$= x_1x_2\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + x_1y_2\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + x_1z_2\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} + y_1x_2\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} + y_1y_2\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} + y_1z_2\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}$$

$$+z_1x_2\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} + z_1y_2\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} + z_1z_2\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} =$$

$$= x_1y_2\overrightarrow{k} + x_1z_2(-\overrightarrow{j}) + y_1x_2(-\overrightarrow{k}) + y_1z_2\overrightarrow{i} + z_1x_2\overrightarrow{j} + z_1y_2(-\overrightarrow{i}) =$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\overrightarrow{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\overrightarrow{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\overrightarrow{k} =$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\overrightarrow{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\overrightarrow{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\overrightarrow{k}$$

Observando que:

$$(y_1z_2 - z_1y_2) = det \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix} \qquad (x_1z_2 - z_1x_2) = det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} \qquad (x_1y_2 - y_1x_2) = det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$V \times W = det \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix} \overrightarrow{i} - det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix} \overrightarrow{j} + det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \overrightarrow{k} =$$

$$= \left(det \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right)$$

Exemplo 54. *1) Calcule o produto vetorial entre os vetores* $V = (-1, 2, 0)$ *e* $W = (3, -1, 1)$

$V \times W = \left(det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right) = (2-0, -(-1-0), 1-6) = (2, 1, -5)$

2) Considere os vetores do espaço $U_1 = (-2, 4, 0)$ *e* $U_2 = (a, -3, 1)$, *onde* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Se* $W = (8, 4, -4)$, *calcule o valor de a para que se tenha* $2\, U_1 \times U_2 = W$.

Temos: $2U_1 = (-4, 8, 0)$

Fazendo o produto $2\, U_1 \times U_2$, *temos:*

$2\ U_1 \times U_2 = \left(det \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ a & -3 \end{bmatrix} \right) = (8, -(-4), 12 - 8a) = (8, 4, 12 - 8a)$

$W = 2\, U_1 \times U_2 \Rightarrow (8, 4, -4) = (8, 4, 12 - 8a) \Rightarrow 12 - 8a = -4 \Rightarrow 16 = 8a \Rightarrow a = 2$

3) Considere os vetores $V = (1, 0, 3)$ *e* $W = (0, -1, 2)$. *Encontre um vetor* T *do espaço que seja simultaneamente ortogonal a* V *e* W *e que tenha norma 5.*

Seja $U = V \times W$. *Temos que* U *é ortogonal a* V *e a* W *simultaneamente.*

$U = V \times W = \left(det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = (3, -2, -1)$

O vetor $R = \dfrac{1}{\parallel U \parallel} U$ *é unitário e é simultaneamente ortogonal a* V *e* W.

$$R = \frac{1}{\parallel U \parallel} U = \frac{1}{\sqrt{9+4+1}} (3, -2, -1) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}} \right)$$

O vetor T *procurado pode ser:*

$T = 5R$ *ou* $T = -5R$

Ou seja:

$T = \left(\dfrac{15}{\sqrt{14}}, \dfrac{-10}{\sqrt{14}}, -\dfrac{5}{\sqrt{14}} \right) \quad ou \quad T = \left(\dfrac{-15}{\sqrt{14}}, \dfrac{10}{\sqrt{14}}, \dfrac{5}{\sqrt{14}} \right)$

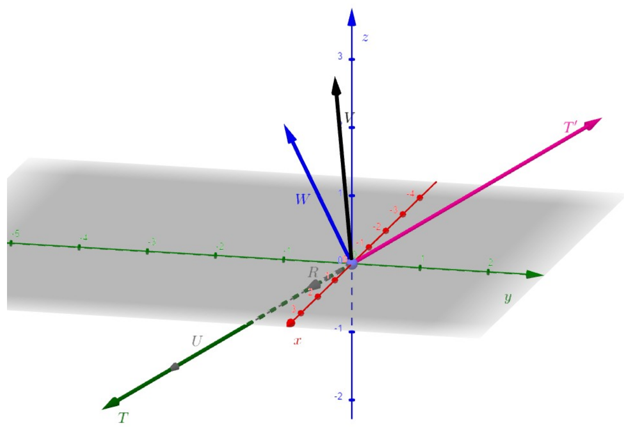

Figura 3.28:

3.5.3 Produto Misto

Dados os vetores U, V e W do espaço, o produto misto de U, V e W é dado por:

$$U \cdot (V \times W)$$

Observação 21. *Alguns livros denotam o produto misto de U, V e W da forma:*

$$(U, V, W) = U \cdot (V \times W)$$

Exemplo 55. *Calcule o produto misto de $U = (-1, 2, 0)$, $V = (3, 1, 0)$ e $W = (0, -1, 1)$ (nesta ordem).*

Temos:

$U \cdot (V \times W)$ é o produto misto de U, V e W. Calculando $V \times W$:

$$V \times W = \left(det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = (1, -3, -3)$$

$U \cdot (V \times W) = (-1, 2, 0) \cdot (1, -3, -3) = -1 - 6 + 0 = -7.$

Teorema 10. *Sejam* $U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $W = (w_1, w_2, w_3)$ *vetores do espaço. Então, o produto misto de* U, V *e* W *pode ser calculado da forma:*

$$U \cdot (V \times W) = det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Demonstração:

Temos:

$$U \cdot (V \times W) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= u_1 \cdot det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} - u_2 \cdot det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + u_3 \cdot det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} =$$

$$= u_1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} + u_2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + u_3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} =$$

$$= det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 56. *Calcule o produto misto de* $U = (2, -1, 3)$, $V = (-1, 5, 1)$ *e* $W = (5, 1, -2)$

Temos:

$$U \cdot (V \times W) = det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 - 5 - 20 - 2 - 75 + 2 = -103$$

Volume de um paralelepípedo:

Teorema 11. *Dados os vetores não nulos* U, V *e* W *do espaço, o número real*

$$| \, U \cdot (V \times W) \, |$$

é numericamente igual ao volume do paralelepípedo determinado por U, V *e* W*.*

Demonstração:

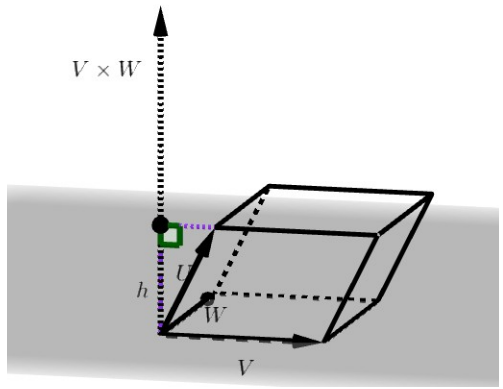

Figura 3.29:

Seja θ o ângulo entre os vetores U e $V \times W$. Podemos escrever:

$$\cos\theta = \frac{h}{\| U \|} \Longrightarrow h = \| U \| \cos\theta \Longrightarrow h = \| U \| | \cos\theta |$$

(pois $\cos\theta > 0$ nesse caso).

O volume do paralelepípedo é dado por:

$Vol = \| V \times W \| \ \ h = \| V \times W \| \ \ \| U \| \ \ | \cos\theta | = | \ \| U \| \ \ \| V \times W \| \ \ \cos\theta | = | U \cdot (V \times W) |$

Uma outra situação que pode ocorrer é a seguinte:

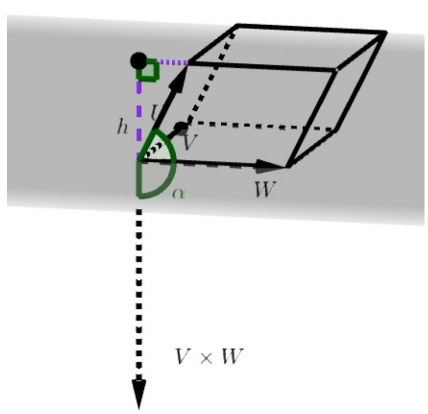

Figura 3.30:

Temos:

$\theta + \alpha = \pi \ \ rad \Longrightarrow \alpha = \pi - \theta$

$\cos\alpha = \cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$

Então:

$$Vol = \| V \times W \| \| U \| \cos\alpha = \| V \times W \| \| U \| (-\cos\theta) = \| V \times W \| \| U \| | \cos\theta |$$

(pois $\cos\theta < 0$ nesse caso).

Assim:

$Vol = \| V \times W \| \| U \| | \cos\theta | = | \; \| V \times W \| \; \| U \| \; \cos\theta | = | \; U \cdot (V \times W) |$

Exemplo 57. *Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $U = (2, -1, 3)$, $V = (-1, 5, 1)$ e $W = (5, 1, -2)$.*

Como já foi feito, temos que: $U \cdot (V \times W) = det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -3-5-20-2-75+2 = -103$

Assim: $Vol = | U \cdot (V \times W) | = | -103 | = 103$ *(unidades de volume)*

Consequência do teorema acima: Sejam U, V e W vetores no espaço. Então:

U, V e W são coplanares se, e somente se, $U \cdot (V \times W) = 0$.

Exemplo 58. *dados os vetores $T_1 = (-3, 1, 0)$, $T_2 = (2, 0, -1)$ e $T_3 = (-4, 2, -1)$, verifique se eles são coplanares.*

Temos que:

$$T_1 \cdot (T_2 \times T_3) = \det \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 4 + 2 - 6 = 0$$

.

Logo, T_1, T_2 e T_3 são coplanares.

Capítulo 4

Retas e Planos

4.1 Equações do plano

4.1.1 Equação geral

Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto no plano π e $N = (a, b, c)$ um vetor normal ao plano, ou seja, um vetor ortogonal a todo vetor que pode ser representado no plano π.

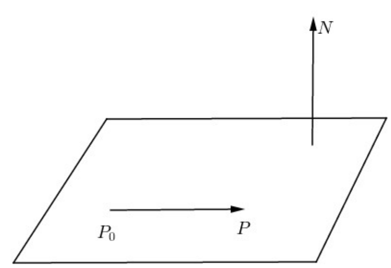

Figura 4.1:

Então, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π, quando os vetores $\overrightarrow{P_0P}$ e N são ortogonais. Isto é:

$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \iff (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff$

$\iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$

Chamando $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, podemos reescrever a última expressão:

$$ax + by + cz + d = 0$$

(Equação geral do plano)

Exemplo 59. *Encontre a equação geral dos seguintes planos:*

a) Plano que passa por $A = (1, 2, 0)$ *e tem* $N = (-1, 2, 3)$ *como um vetor normal.*

Resolução: $ax + by + cz + d = 0$

$$-1x + 2y + 3z + d = 0$$

Usando que A *pertence ao plano, temos:*

$$-1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + d = 0$$

$$-1 + 4 + d = 0$$

$$d = -3$$

Assim: $-x + 2y + 3z - 3 = 0$ *é a equação geral do plano pedido.*

b) Plano que passa pelos pontos $A = (-1, 0, 2)$*,* $B = (0, 0, 1)$ *e* $C(-1, 3, 1)$

Resolução: *Os vetores* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *são vetores que podem ser representados no plano em questão. Um vetor* N *normal ao plano deve ser simultaneamente ortogonal a* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$*. Vamos fazer* $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *para encontrarmos um vetor simultaneamente ortogonal a* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$*:*

$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 3, -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = (3, 1, 3)$$

Assim: 3x + y + 3z = 0 é a equação geral do plano. Usando que $B = (0, 0, 1)$ *pertence ao plano, temos:*

$$3 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot 1 + d = 0$$

$$d = -3$$

Logo: $3x + y + 3z - 3 = 0$ *é a equação procurada.*

4.1.2 Equação Vetorial e Equações Paramétricas

Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto do plano π e considere $V_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vetores paralelos ao plano π e não paralelos entre si.

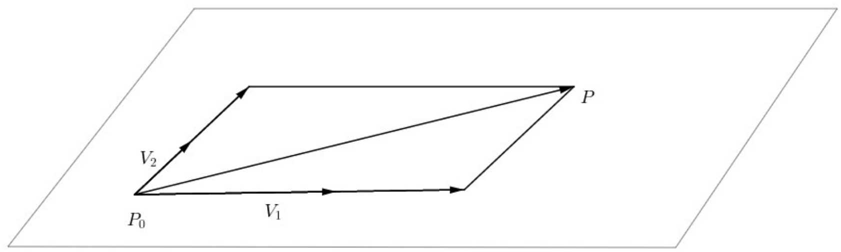

Figura 4.2:

$P = (x, y, z)$ pertence ao plano π quando $\overrightarrow{P_0P} = tV_1 + hV_2$, onde t e h são escalares.

Ou seja:

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(x_1, y_1, z_1) + h(x_2, y_2, z_2)$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1) + h(x_2, y_2, z_2) \quad t, h \in \mathbb{R}$

(Equação vetorial do plano)

Da equação vetorial, podemos escrever:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1t + x_2h \\ y = y_0 + y_1t + y_2h \qquad t, h \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + z_1t + z_2h \end{cases}$$

(Equações paramétricas do plano)

Observação 22. *Os vetores V_1 e V_2 são chamados de <u>vetores diretores do plano</u>.*

Exemplo 60. *a) Encontre equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $A = (-1, 2, 1)$ e é paralelo aos vetores $V = (0, 2, 5)$ e $W = (1, -3, 2)$.*

Resolução:

$$\begin{cases} x = -1 + 0t + 1h \\ y = 2 + 2t - 3h \qquad t, h \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 5t + 2h \end{cases}$$

b) Dada a equação geral $2x - y + 4z - 12 = 0$ do plano π, encontre equações paramétricas para esse plano.

Resolução:

usando a equação geral do plano π, vamos encontrar 3 pontos do plano. Fazendo:

$x = 0, y = 0: \quad 4z - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 3 \quad A = (0, 0, 3)$

$x = 0, z = 0: \quad -y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -12 \quad B = (0, -12, 0)$

$y = 0, z = 0: \quad 2x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad C = (6, 0, 0)$

obtemos os pontos A, B e C do plano. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores paralelos ao plano π (podem ser representados sobre ele) e não são paralelos entre si.

$\overrightarrow{AB} = (0, -12, -3)$

$\overrightarrow{AC} = (6, 0, -3)$

Assim, usando o ponto $A = (0, 0, 3)$ do plano e os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, obtemos equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 + 0t + 6h \\ y = 0 - 12t + 0h \\ z = 3 - 3t - 3h \end{cases} \implies \begin{cases} x = 6h \\ y = -12t \\ z = 3 - 3t - 3h \end{cases} \qquad t, h \in \mathbb{R}$$

4.2 Equações da reta

Seja r a reta paralela a um vetor $V = (a, b, c)$ não nulo e que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

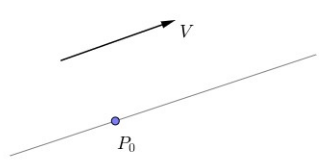

Figura 4.3:

Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta r quando o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ for paralelo ao vetor V. Isto é:

$$\overrightarrow{P_0P} = tV \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ainda: $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c), \qquad t \in \mathbb{R}$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc), \qquad t \in \mathbb{R}$

Equações paramétricas de r ficam então da forma:

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Observação 23. *a) Um vetor V que fornece a direção da reta r é chamado de um <u>vetor</u> <u>diretor</u> de r.*

b) Uma equação: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), t \in \mathbb{R}$ é uma <u>equação</u> <u>vetorial</u> da reta r.

Vamos supor agora que um vetor diretor $V = (a, b, c)$ da reta r seja tal que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. A partir das paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

obtemos: $\qquad t = \dfrac{x - x_0}{a}, \dfrac{y - y_0}{b}, \dfrac{z - z_0}{c}$.

As <u>equações simétricas</u> da reta r ficam da forma:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Observação 24.

a) Encontre equações paramétricas para as seguintes retas:

- *reta r: reta que passa por $A = (-1, 0, 1)$ e é paralela ao vetor $V = (1, 2, 3)$.*
- *reta s: reta que passa pelos pontos $A = (-1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -3)$.*

- *reta u: reta que é a interseção dos planos:* $\begin{cases} 2x + y - 2z - 4 = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Resolução:

reta r : $V = (1, 2, 3)$ *é um vetor diretor da reta* r*. Assim, paramétricas para* r *ficam da forma:*

$$\begin{cases} x = -1 + 1t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

reta s: o vetor $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -4)$ *é um vetor diretor para* s*. Assim, paramétricas para* s *ficam da forma:*

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 0 + 1t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

reta u:

$u : \begin{cases} 2x + y - 2z - 4 = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Fazendo $x = t$ *nas duas equações, obtemos :*

$\begin{cases} 2t + y - 2z - 4 = 0 \quad \textit{(1)} \\ t + y + 2z = 0 \quad \textit{(2)} \end{cases}$

Somando as duas equações:

$3t + 2y - 4 = 0 \Rightarrow 2y = 4 - 3t \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}t \quad \textit{(3)}$

Usando as expressões (2) e (3):

$t + y + 2z = 0 \Rightarrow$

$t + 2 - \frac{3}{2}t + 2z = 0 \Rightarrow$

$2 - \frac{1}{2}t + 2z = 0 \Rightarrow$

$2z = -2 + \frac{1}{2}t$

$z = -1 + \frac{1}{4}t$

Assim, equações paramétricas para u ficam da forma: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - \frac{3}{2}t \\ z = -1 + \frac{1}{4}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

b) Encontre equações simétricas para as retas r e s do exemplo anterior.

Resolução:

reta r: usando paramétricas de r, obtemos:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ t = \frac{y}{2} \\ t = \frac{z-1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow x + 1 = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

reta s: usando paramétricas de s obtemos:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ t = y \\ t = \frac{z-1}{-4} \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{x+1}{3} = y = \frac{z-1}{-4}$$

4.3 Ângulos

Antes de iniciarmos o estudo de ângulos entre retas, vamos conhecer as posições relativas entre duas retas.

4.3.1 Posições relativas entre retas

Sejam r_1 e r_2 retas com vetores diretores V_1 e V_2 respectivamente.

1) Se V_1 e V_2 são vetores paralelos, então as retas r_1 e r_2 são paralelas ou coincidentes.

Sejam P_1 e P_2 pontos das retas r_1 e r_2 respectivamente. Então:

$$r_1 \text{ e } r_2 \text{ coincidentes} \Longleftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \text{ é paralelo a } V_1 \text{ (e a } V_2)$$

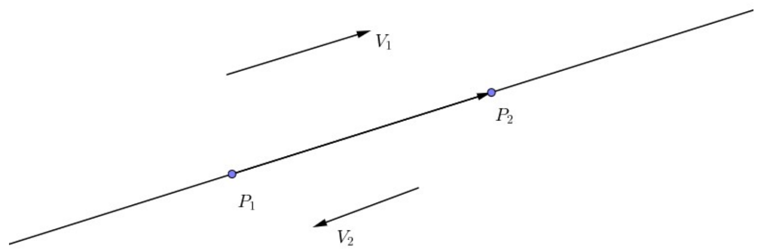

Figura 4.4:

Consequentemente,

$$r_1 \text{ e } r_2 \text{ paralelas} \iff \overrightarrow{P_1P_2} \text{ não é paralelo a } V_1 \text{ (nem a } V_2)$$

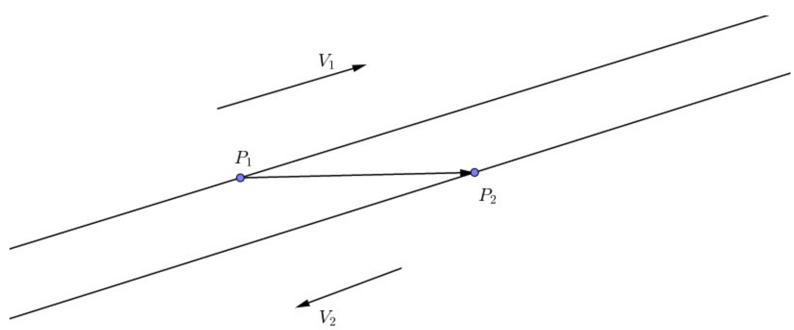

Figura 4.5:

2) Se V_1 e V_2 não são paralelos, então as retas r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas.

Sejam P_1 e P_2 pontos das retas r_1 e r_2 respectivamente. Então:

$$V_1,\ V_2 \text{ e } \overrightarrow{P_1P_2} \text{ coplanares} \iff r_1 \text{ e } r_2 \text{ concorrentes.}$$

Consequentemente:

$$V_1,\ V_2,\ \overrightarrow{P_1P_2} \text{ não coplanares} \iff r_1 \text{ e } r_2 \text{ reversas.}$$

Exemplo 61. *a) As retas:*

$$r: \quad (x, y, z) = (-1, 0, 2) + t(1, 2, -1) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 8 - 4t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

têm vetores diretores $V_r = (1, 2, -1)$ e $V_s = (-2, -4, 2)$, respectivamente. Notamos que V_r e V_s são paralelos. Logo, r e s são paralelas ou coincidentes. Tomando um ponto em cada reta, digamos, $A = (-1, 0, 2)$ e $B = (1, 8, 2)$ pertencentes à r e s respectivamente, obtemos o vetor $\overrightarrow{AB} = (2, 8, 0)$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ não é paralelo à V_r (nem a V_s). Logo, as retas são paralelas.

b) As retas:

$$r: \quad (x, y, z) = (-1, 0, 2) + t(1, 2, -1) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}$$

têm vetores diretores $V_r = (1, 2, -1)$ e $V_u = (0, 2, -1)$ não paralelos. Logo, r e u são concorrentes ou reversas . Tomando os pontos $A = (-1, 0, 2)$ e $B = (1, 0, 2)$ das retas r e u, respectivamente, obtemos o vetor $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$. Fazendo o produto misto de V_r, V_u e $\overrightarrow{AB}$, temos:

$$(V_r \times V_u) \cdot \overrightarrow{AB} = det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -4 + 4 = 0$$

Logo, V_r, V_u e $\overrightarrow{AB}$ são coplanares e temos que r e u são concorrentes.

4.3.2 Ângulos entre retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas.

a) Se r_1 e r_2 são paraleleas ou coincidentes, então o ângulo entre elas é 0.

b) Se r_1 e r_2 são concorrentes, então o ângulo entre r_1 e r_2 é o menor ângulo α formado entre elas ($0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$).

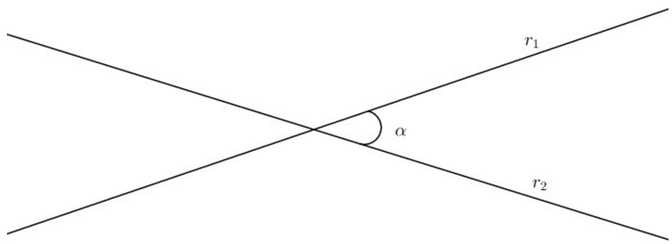

Figura 4.6:

c) Se r_1 e r_2 são reversas: escolhemos um ponto P_1 na reta r_1 e traçamos uma reta r_3 paralela à reta r_2 passando pelo ponto P_1. As retas r_1 e r_3 são concorrentes. O ângulo entre r_1 e r_3 é o ângulo formado por r_1 e r_2.

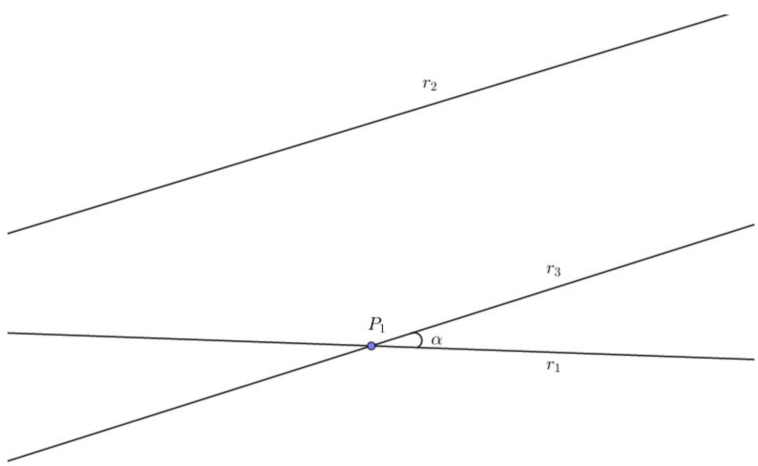

Figura 4.7:

Nos casos b e c, se α é o ângulo entre as retas r_1 e r_2 e se V_1 e V_2 são vetores diretores de r_1 e r_2 respectivamente, então:

$$\cos\alpha = |\cos\theta|$$

onde θ é o ângulo formado entre os vetores V_1 e V_2.

De fato, observemos as situações que podem ocorrer:

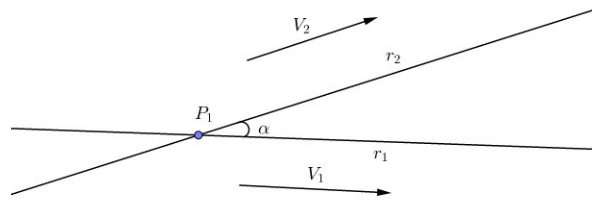

Figura 4.8:

Neste caso: $\alpha = \theta$ e $\cos\alpha = \cos\theta = \mid \cos\theta \mid$ (pois $\cos\theta \geqslant 0$).

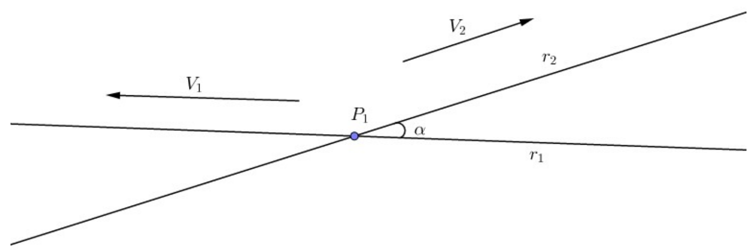

Figura 4.9:

Neste caso: $\alpha + \theta = \pi$ rad

$\cos\alpha = \cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$

Assim: $\cos\alpha = -\cos\theta = \mid \cos\theta \mid, \quad$ pois $\cos\theta < 0$.

Observação 25. *Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, as retas são ditas perpendiculares ou ortogonais.*

Em resumo, se α é o ângulo entre as retas r_1 e r_2 com vetores diretores V_1 e V_2 respectivamente, então:

$$\cos\alpha = \frac{\mid V_1 \cdot V_2 \mid}{\parallel V_1 \parallel \parallel V_2 \parallel}$$

Exemplo 62. *a) Considere as retas r e s de equações:*

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 6t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 3t \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 1 \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 8t \end{cases}$$

Calcule o ângulo formado pelas retas r e s.

Resolução:

$V_r = (0, 6, -3)$ e $V_s = (-4, 0, 8)$ são vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Se α é o ângulo entre r e s, temos:

$$\cos\alpha = \frac{|\ V_r \cdot V_s\ |}{\|\ V_r\ \|\|\ V_s\ \|} = \frac{|\ 0 \cdot (-4) + 6 \cdot 0 + (-3) \cdot 8\ |}{\sqrt{0^2 + 6^2 + (-3)^2}\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 8^2}} = \frac{|\ -24\ |}{\sqrt{45}\sqrt{80}} = \frac{24}{3\sqrt{5}\ \ 4\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

Então:

$\alpha = \arccos\frac{2}{5}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

b) Dadas as retas r e s abaixo, calcule o ângulo entre elas:

$r : (x, y, z) = (0, 5, -2) + t(1, 1, 2) \qquad t \in \mathbb{R}$

$s : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{3}$

Resolução:

$V_r = (1, 1, 2)$ e $V_s = (4, 5, 3)$ são vetores diretores das retas r e s, respectivamente. Se α é o ângulo entre r e s, temos:

$$\cos\alpha = \frac{|\ V_r \cdot V_s\ |}{\|\ V_r\ \|\|\ V_s\ \|} = \frac{|\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3\ |}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{|\ 15\ |}{\sqrt{6}\sqrt{50}} = \frac{15}{\sqrt{6}\ \ 5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \quad rad$$

4.3.3 Posições relativas entre dois planos

Sejam π_1 e π_2 planos com vetores normais N_1 e N_2 respectivamente:

a) Se os vetores normais N_1 e N_2 são paralelos, então os planos π_1 e π_2 são paralelos ou coincidentes.

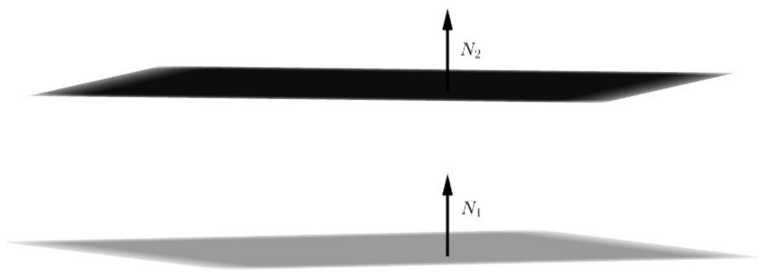

Figura 4.10:

b) Se os vetores normais N_1 e N_2 não são paralelos, então os planos π_1 e π_2 são concorrentes.

Figura 4.11:

Exemplo 63. *a) Os planos:*

$$\pi_1 : \quad 3x - 2y + z - 5 = 0 \qquad\qquad \pi_2 : \quad 6x - 4y + 2z + 1 = 0$$

são planos paralelos. De fato, $N_1 = (3, -2, 1)$ *e* $N_2 = (6, -4, 2)$ *são vetores normais aos planos* π_1 *e* π_2 *respectivamente e* $N_2 = 2N_1$*, ou seja,* N_1 *e* N_2 *são paralelos. Notemos que o ponto*

$A = (0,0,5)$ *pertence ao plano* π_1*, mas não está no plano* π_2*, pois* $6 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 1 = 11 \neq 0$ *(ou seja, A não satisfaz a equação do plano* π_2*). Logo,* π_1 *e* π_2 *não podem ser coincidentes e são, então, paralelos.*

b) Os planos:

$$\pi_1 : \ \ 3x - 2y + z - 5 = 0 \qquad \pi_3 : \ \ 2x + y - 1 = 0$$

são concorrentes: seus vetores normais $N_1 = (3, -2, 1)$ *e* $N_3 = (2, 1, 0)$ *não são paralelos.*

4.3.4 Ângulos entre planos

Sejam π_1 e π_2 planos. O ângulo α entre π_1 e π_2 é o menor ângulo possível formado entre vetores normais aos planos π_1 e π_2.

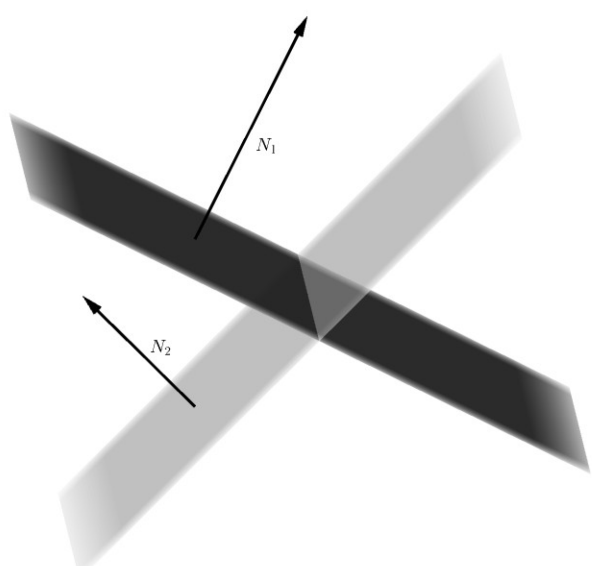

Figura 4.12:

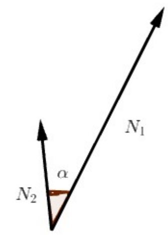

Figura 4.13:

Temos:

$$\cos\alpha = \mid \cos\theta \mid = \frac{\mid N_1 \cdot N_2 \mid}{\| N_1 \| \| N_2 \|}$$

onde θ é o ângulo formado por vetores normais aos planos π_1 e π_2.

Observação 26. *Se os planos π_1 e π_2 são paralelos, então o ângulo entre eles é 0. Se o ângulo entre os planos é $\frac{\pi}{2}$rad, então os planos são ditos perpendiculares.*

Exemplo 64. *Dados os planos π_1 e π_2 abaixo, para quais valores reais de a os planos formam um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rad?*

$$\pi_1: \ ax + 11y - 2 = 0 \qquad\qquad \pi_2: \ 3x + 4z + 1 = 0$$

Resolução: *sendo $N_1 = (a, 11, 0)$ e $N_2 = (3, 0, 4)$ vetores normais aos planos π_1 e π_2 respectivamente, temos:*

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\mid N_1 \cdot N_2 \mid}{\| N_1 \| \| N_2 \|} = \frac{\mid 3 \cdot a + 0 \cdot 11 + 4 \cdot 0 \mid}{\sqrt{a^2 + 11^2 + 0^2}\ \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{\mid 3a \mid}{\sqrt{a^2 + 121}\ \sqrt{9 + 16}} =$$

$$= \frac{3 \mid a \mid}{5\sqrt{a^2 + 121}} \Rightarrow 6 \mid a \mid = 5\sqrt{a^2 + 121} \Rightarrow 36a^2 = 25(a^2 + 121) \Rightarrow 11a^2 = 25 \cdot 121 \Rightarrow$$

$a^2 = 25 \cdot 11 \Rightarrow a = \pm 5\sqrt{11}$

Resp: $a = 5\sqrt{11}$ *ou* $a = -5\sqrt{11}$

4.4 Distâncias

4.4.1 Distância de um ponto a um plano

Considere um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e um plano π de equação geral $ax + by + cz + d = 0$

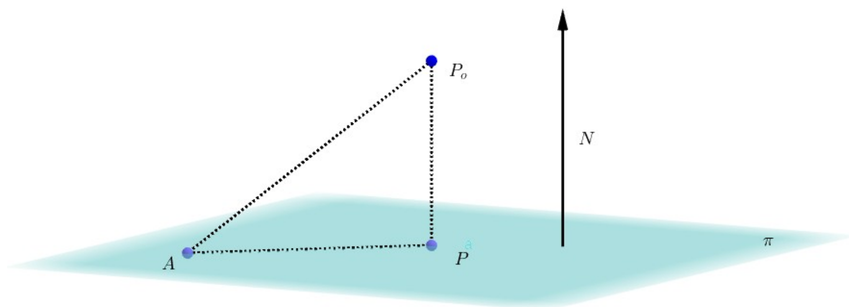

Figura 4.14:

Seja $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto do plano π. Indicando a distância do ponto P_0 ao plano π por $dist(P_0, \pi)$, temos:

$$\operatorname{dist}(P_0,\pi) = dist(P_0, P) = \| \overrightarrow{PP_0} \| = \| proj_N \overrightarrow{AP_0} \| = \frac{| \overrightarrow{AP_0} \cdot N |}{| N \cdot N |} \| N \| = \frac{| \overrightarrow{AP_0} \cdot N | \ \| N \|}{\| N \|^2} =$$

$$\frac{| \overrightarrow{AP_0} \cdot N |}{\| N \|} = \frac{| (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (a, b, c) |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{| (ax_0 - ax_1 + by_0 - by_1 + cz_0 - cz_1) |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{| (ax_0 + by_0 + cz_0 - ax_1 - by_1 - cz_1) |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{| (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

pois $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$ (A é um ponto do plano π).

Assim: $$dist(P_0, \pi) = \frac{| ax_0 + by_0 + cz_0 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplo 65. *a) Calcule a distância do ponto* $P = (1, 2, 0)$ *ao plano de equação* $\pi : x - 2y + 2z - 5 = 0.$

Resolução: *Temos:*

$$dist(P, \pi) = \frac{1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 5}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{| -8 |}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}.$$

b) Obtenha equações gerais para os planos que distam $\frac{3}{5}$ *do ponto* $A = (0, 1, 1)$, *sabendo que o vetor* $V = (\sqrt{5}, -4, 2)$ *é ortogonal a esses planos.*

Resolução: *equações gerais para os planos procurados têm a forma:*

$$\sqrt{5}x - 4y + 2z + d = 0$$

.

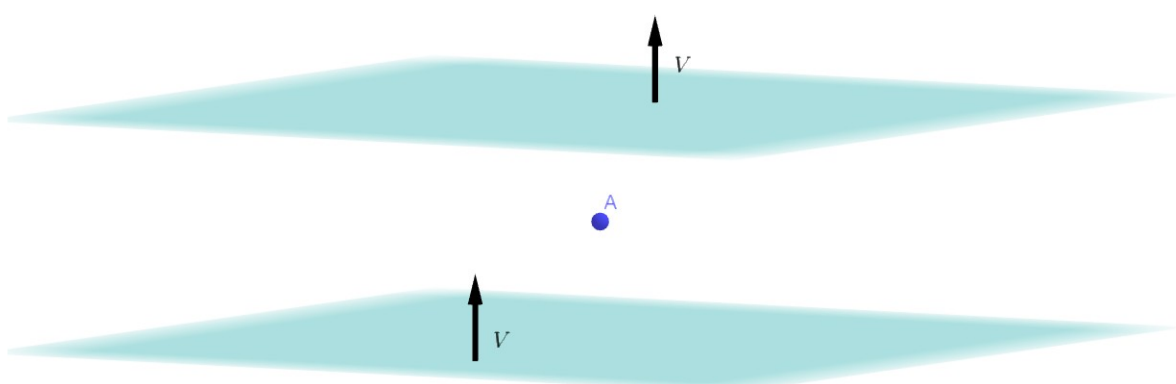

Figura 4.15:

Como a distância do ponto $A = (0, 1, 1)$ *a esses planos vale* $\frac{3}{5}$, *temos:*

$$\frac{3}{5} = dist(A, \pi) = \frac{| \sqrt{5} \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + d |}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{| d - 2 |}{\sqrt{25}} = \frac{d - 2}{5} \Rightarrow | d - 2 | = 3$$

$\Rightarrow d - 2 = 3$ *ou* $d - 2 = -3 \Rightarrow d = 5$ *ou* $d = -1.$

Resp: $\sqrt{5}x - 4y + 2z + 5 = 0$ $\qquad$ $\sqrt{5}x - 4y + 2z - 1 = 0$

4.4.2 Distância de um ponto a uma reta

Considere um ponto P_o no espaço e uma reta r, com vetor diretor V.

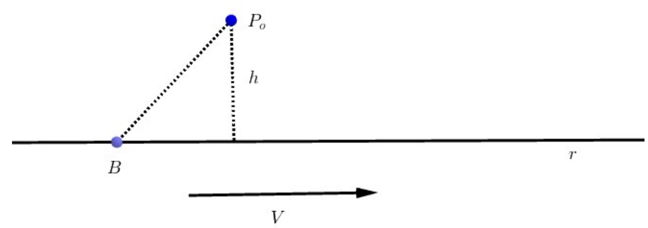

Figura 4.16:

Seja B um ponto da reta r. Observemos que a distância de P_0 à reta r é a altura h do paralelogramo determinado por V e $\overrightarrow{BP_o}$.

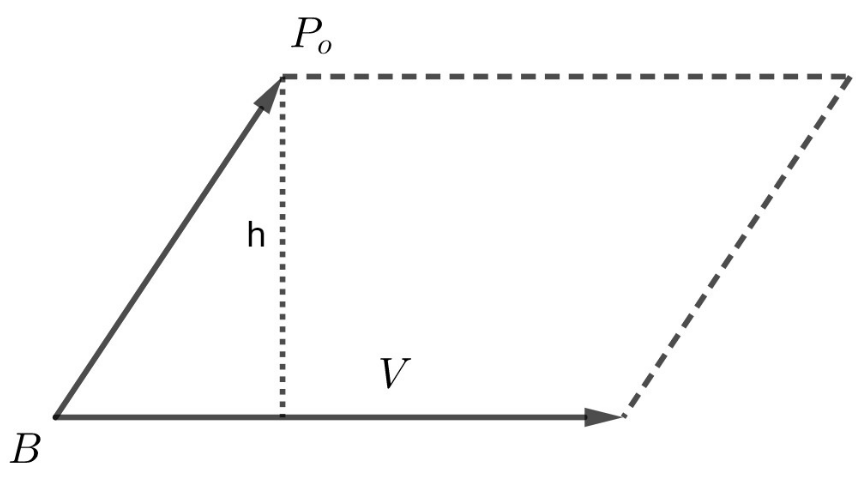

Figura 4.17:

Indicando por A a área do paralelogramo, temos:

$$A = \| V \times \overrightarrow{BP_0} \| \qquad \text{e} \qquad A = \| V \| \cdot h$$

Assim:

$$\| V \| \cdot h = \| V \times \overrightarrow{BP_0} \|$$

$$h = \frac{\| V \times \overrightarrow{BP_0} \|}{\| V \|}$$

Ou seja:

$$dist(P_0, r) = \frac{\| V \times \overrightarrow{BP_0} \|}{\| V \|}$$

Exemplo 66. *Calcule a distância do ponto* $P = (-1, 0, 3)$ *à reta* $r : (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(2, -2, 1), \ \ t \in \mathbb{R}$

Resolução: *o ponto* $B = (2, 1, 0)$ *pertence à reta* r*. Sendo* $V = (2, -2, 1)$ *um vetor diretor de* r*, temos:*

$$dist(P, r) = \frac{\| V \times \overrightarrow{BP} \|}{\| V \|}$$

com $\overrightarrow{BP} = (-3, -1, -3)$.

Vamos calcular $V \times \overrightarrow{BP}$.

$$V \times \overrightarrow{BP} = \left(\det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \right) = (-5, -9, -8).$$

Assim:

$$dist(P, r) = \frac{\| (-5, -9, -8) \|}{\| (2, -2, 1) \|} = \frac{\sqrt{25 + 81 + 64}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{170}}{3}$$

.

4.4.3 Distância entre dois planos

Sejam π_1 e π_2 planos e N_1 e N_2 vetores normais a esses dois planos, respectivamente.

a) Se N_1 e N_2 não são paralelos, então os planos π_1 e π_2 são concorrentes e $dist(\pi_1, \pi_2) = 0$.

b) Se N_1 e N_2 são paralelos, então a distância entre os dois planos é a distância de um ponto de um dos planos ao outro plano. Por exemplo, seja P_1 um ponto do plano π_1. Então:

$$\text{dist } (\pi_1, \pi_2) = \text{ dist } (P_1, \pi_2)$$

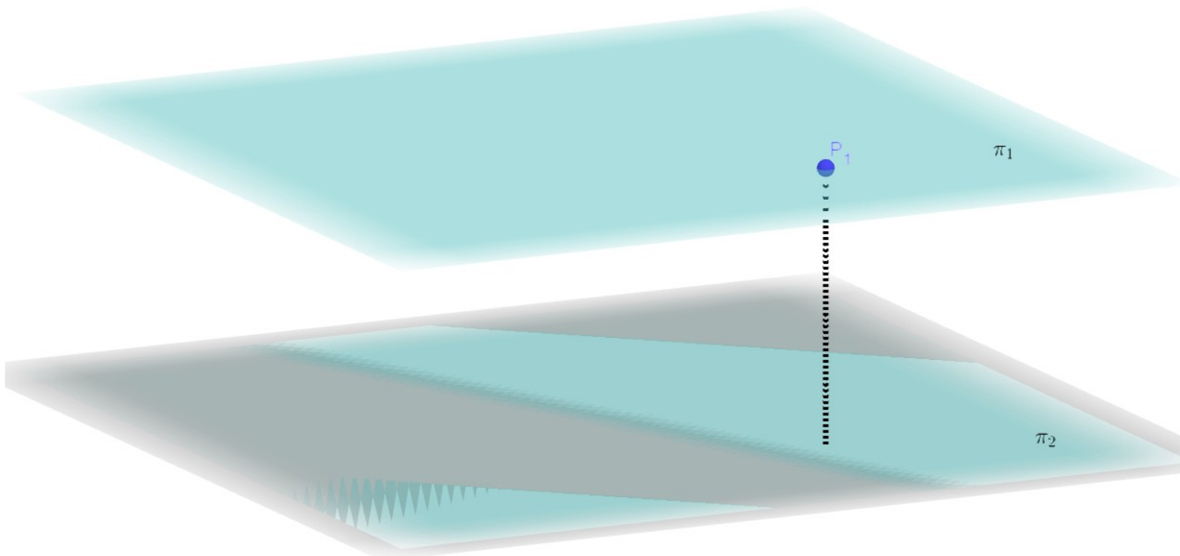

Figura 4.18:

Observação 27. *Pode-se tomar, da mesma forma, um ponto P_2 de π_2 e se calcular a* dist (π_1, π_2) *como:* dist $(\pi_1, \pi_2) =$ dist (P_2, π_1).

Exemplo 67. *a) Os planos:*

$$\pi_1 : 3x - 2y + 5z + 2 = 0 \qquad \pi_2 : x + y - z + 1 = 0$$

têm vetores normais $N_1 = (3, -2, 5)$ e $N_2 = (1, 1, -1)$ respectivamente. Como N_1 e N_2 não são paralelos, os planos são concorrentes e dist $(\pi_1, \pi_2) = 0$.

b) Considere os planos:

$$\pi_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0 \qquad \pi_2 : 4x - 2y + 6z + 10 = 0$$

$N_1 = (2, -1, 3)$ e $N_2 = (4, -2, 6)$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente e N_1 e N_2 são paralelos. Escolhamos um ponto P_1 do plano π_1, digamos, $P_1 = (0, -1, 0)$.Temos :

$$\text{dist } (\pi_1, \pi_2) = \text{ dist } (P_1, \pi_2) = \frac{|\ 4 \cdot 0 - 2(-1) + 6 \cdot 0 + 10\ |}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{|\ 2 + 10\ |}{\sqrt{56}} = \frac{12}{2\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

4.4.4 Distância entre duas retas

Considere r_1 e r_2 retas com vetores diretores V_1 e V_2, respectivamente.

a) Se V_1 e V_2 são vetores paralelos, então a distância entre as retas r_1 e r_2 é a distância de um ponto de uma das retas à outra reta. Por exemplo, seja P_1 um ponto da reta r_1. Então:

$$\text{dist}\,(r_1, r_2) = \text{dist}\,(P_1, r_2)\,.$$

Figura 4.19:

b) Se V_1 e V_2 são vetores não paralelos, então as retas r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas. Vamos construir os planos π_1 e π_2 da seguinte maneira:

Plano π_1 : contém a reta r_1 e é paralelo ao vetor V_2.

Plano π_2 : contém a reta r_2 e é paralelo ao vetor V_1.

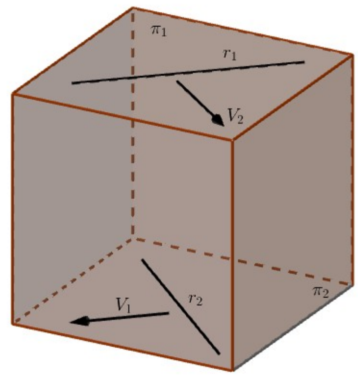

Figura 4.20:

O vetor $N = V_1 \times V_2$ é normal aos planos π_1 e π_2. Assim:

$$\text{dist}\,(r_1, r_2) = \text{dist}\,(\pi_1, \pi_2)$$

Se P_2 é um ponto da reta r_2, consequentemente, P_2 é um ponto de π_2, e lembrando que os planos π_1 e π_2 são paralelos, então:

$$dist(r_1, r_2) = dist(\pi_1, \pi_2) = dist(P_2, \pi_1) =$$

$$= \frac{|\ \overrightarrow{P_1P_2} \cdot N\ |}{\|\ N\ \|} = \frac{|\ \overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2)\ |}{\|\ V_1 \times V_2\ \|}$$

onde P_1 é um ponto da reta r_1 (consequentemente, um ponto do plano π_1)

Notemos que, se r_1 e r_2 forem retas concorrentes, então $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$ e teremos $\text{dist}\,(r_1, r_2) = 0$.

Exemplo 68. *a) As retas:*

$r : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(-1, 2, 3) \quad t \in \mathbb{R}$ *e*

$$s : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 4t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 - 6t \end{cases}$$

têm vetores diretores $V_r = (-1, 2, 3)$ *e* $V_s = (2, -4, -6)$ *respectivamente, e esses são paralelos. Sendo* $P = (-1, 0, 1)$ *um ponto da reta* r*, temos que:*

$$\text{dist}\,(r, s) = \text{dist}\,(P, s) = \frac{\parallel V_s \times \overrightarrow{QP} \parallel}{\parallel V_s \parallel}$$

onde Q *é um ponto da reta* s*. Usando* $Q = (2, -1, 0)$*, temos* $\overrightarrow{QP} = (-3, 1, 1)$*.*

$$V_s \times \overrightarrow{QP} = \left(\det \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right) = (2, 16, -10)$$

Assim:

$$\text{dist}\,(r, s) = \frac{\parallel (2, 16, -10) \parallel}{\parallel (2, -4, -6) \parallel} = \frac{\sqrt{4 + 256 + 100}}{\sqrt{4 + 16 + 36}} = \frac{\sqrt{360}}{\sqrt{56}} = \frac{3\sqrt{35}}{7}.$$

b) As retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$s : \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 1}{-1}$$

têm vetores diretores $V_r = (2, -1, 0)$ *e* $V_s = (2, 2, -1)$ *respectivamente. Esses vetores não são paralelos. Usando* $P_r = (1, 0, -1)$ *e* $P_s = (0, 1, -1)$ *pontos pertencentes às retas* r *e* s *respectivamente, temos:*

$$dist(r, s) = \frac{\mid \overrightarrow{P_r P_s} \cdot (V_r \times V_s) \mid}{\parallel V_r \times V_s \parallel}$$

Fazendo os cálculos:

$$V_r \times V_s = \left(det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, -det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = (1, 2, 6)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 1, 0)$$

$$\text{dist}\,(r, s) = \frac{\mid (-1, 1, 0) \cdot (1, 2, 6) \mid}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{\mid (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 \mid}{\sqrt{41}} = \frac{1}{\sqrt{41}} \times \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}}{41}$$

Observação 28. *As retas do exemplo (b) são reversas, pois seus vetores diretores não são paralelos e a distância entre elas não é zero.*

4.5 Posições relativas

4.5.1 De reta e plano

Considere a reta r e V, um vetor diretor dessa reta. Seja π um plano com vetor normal N.

a) Se N e V não são ortogonais ($N \cdot V \neq 0$), então a reta r é concorrente ao plano.

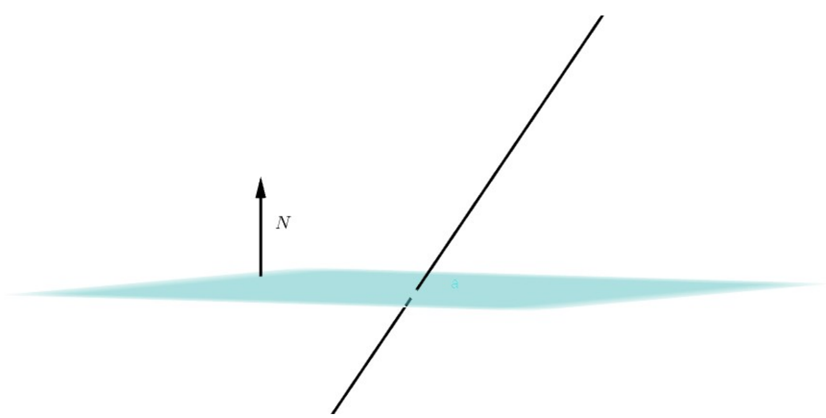

Figura 4.21:

b) Se N e V são ortogonais ($N \cdot V = 0$), pode ocorrer da reta r ser paralela ao plano π ou estar contida no plano π. O segundo caso irá ocorrer quando, além de verificarmos que N e V são ortogonais, ainda tivermos um ponto de r (todos, na realidade) contido em π.

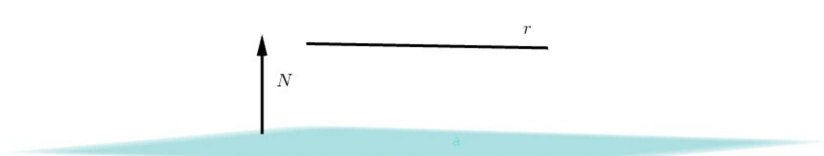

Figura 4.22:

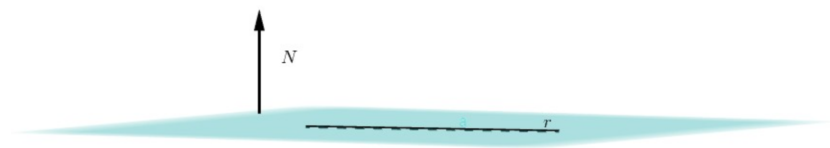

Figura 4.23:

Exemplo 69. *a) Considere o plano π e a reta r abaixo:*

$\pi: \quad 2y + az = 0$

$r: \quad (x, y, z) = (1, 1, 9) + t(0, -1, 1) \quad t \in \mathbb{R}$

Para quais valores de a a reta r será concorrente ao plano π ?

Para que r seja concorrente a π, devemos ter $N \cdot V \neq 0$, onde $N = (0, 2, a)$ e $V = (0, -1, 1)$ são, respectivamente, um vetor normal ao plano π e um vetor diretor da reta r.

$$N \cdot V = 0 \Longleftrightarrow -2 + a = 0 \Longleftrightarrow a = 2$$

Para termos $N \cdot V \neq 0$, devemos ter $a \neq 2$.

b) Considere a reta r e o plano π abaixo:

$r: \quad x = \dfrac{y}{2} = z - 2$

$\pi: \quad y - 2z + 4 = 0$

$V = (1, 2, 1)$ e $N = (0, 1, -2)$ são, respectivamente, um vetor diretor de r e um vetor normal a π. Observemos que:

$$V \cdot N = 2 - 2 = 0$$

Assim, a reta r é paralela ao plano π ou ela está contida no plano π.

Seja $A = (0, 0, 2)$ um ponto da reta r. Notemos que A pertence ao plano π, pois: $0 - 2 \cdot 2 + 4 = 0$ (o ponto A satisfaz a equação do plano π).

Dessa forma, a reta r está contida no plano π.

4.5.2 De três planos

Considere três planos π_1, π_2 e π_3 de equações gerais como abaixo:

$$\pi_1 : \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\pi_3 : \quad a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

Vamos indicar por $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $N_3 = (a_3, b_3, c_3)$ vetores normais aos planos π_1, π_2 e π_3 respectivamente. Vamos dividir a análise em alguns casos.

a). $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $N_3 = (a_3, b_3, c_3)$ são vetores não coplanares.

Neste caso, mostra-se que os planos se interceptam 2 a 2 segundo retas e os 3 se insterceptam em um único ponto.

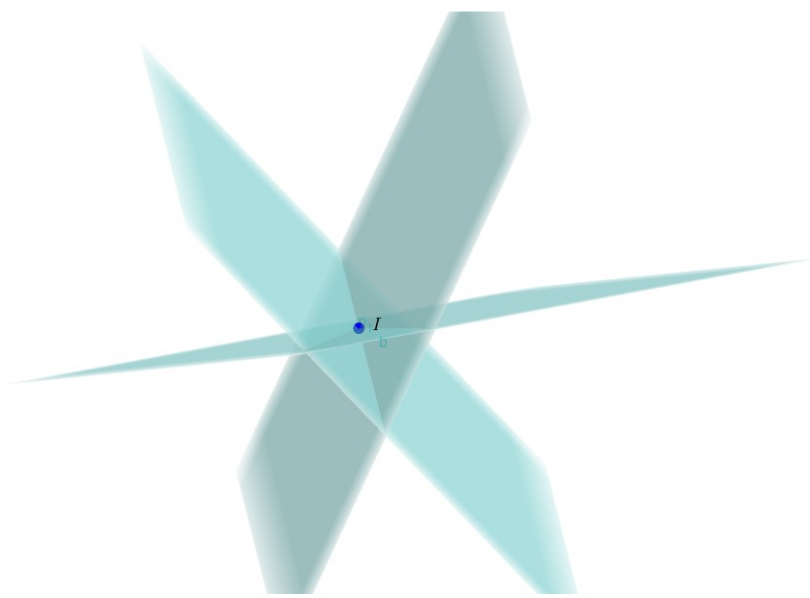

Figura 4.24:

Neste caso, o sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3 \end{cases}$$

possui solução única (o ponto de interseção entre os 3 planos!)

Por exemplo, considere os planos abaixo:

$\pi_1: \quad x + 2y - z + 2 = 0$

$\pi_2: \quad x - 3z + 3 = 0$

$\pi_3: \quad x + 2y + 2z - 4 = 0$

Vetores normais para os planos acima são, respectivamente: $N_1 = (1, 2, -1)$, $N_2 = (1, 0, -3)$ e $N_3 = (1, 2, 2)$. Esses vetores não são coplanares, pois:

$$(N_1 \times N_2) \cdot N_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -2 - 6 - 4 + 6 = -6 \neq 0$$

Esses três planos exemplificam o caso que estamos estudando. Além disso, resolvendo o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x - 3z = -3 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

obtemos como solução o ponto $I = \left(3, -\frac{3}{2}, 2\right)$, que é o ponto de interseção entre os 3 planos.

b). $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $N_3 = (a_3, b_3, c_3)$ são vetores coplanares.

b1). $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $N_3 = (a_3, b_3, c_3)$ são vetores paralelos.

Neste caso, os planos são paralelos/coincidentes (os 3 planos podem ser paralelos ou pode haver coincidência entre 2 deles ou pode haver coincidência entre os 3).

Por exemplo, considere os planos abaixo:

$\pi_1: \quad x + 2y - z - 4 = 0$

$\pi_2: \quad 2x + 4y - 2z - 8 = 0$

$\pi_3: \quad 3x + 6y - 3z = 0$

Vetores normais para os planos acima são, respectivamente: $N_1 = (1, 2, -1)$, $N_2 = (2, 4, -2)$ e $N_3 = (3, 6, -3)$. Esses vetores são paralelos. Os planos π_1 e π_2 são coincidentes e são paralelos ao plano π_3.

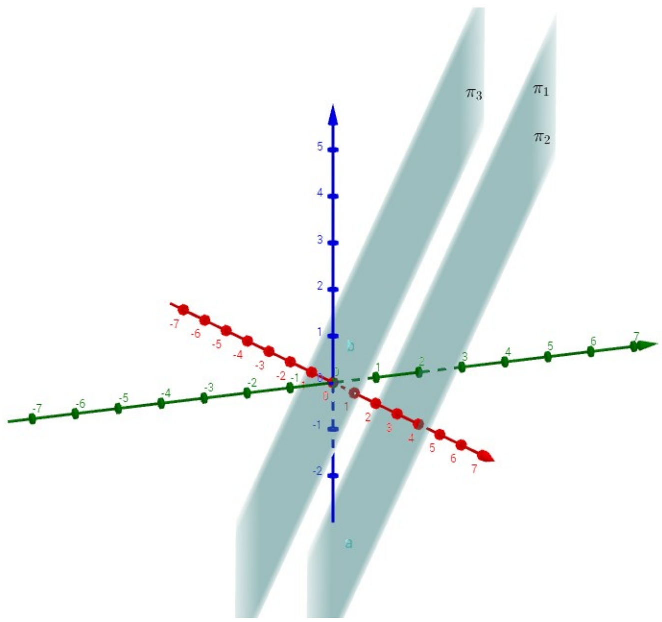

Figura 4.25:

Além disso, o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \end{cases}$$

não possui solução (já que não há interseção entre os 3 planos).

Agora, considere os planos abaixo:

$\pi_1 : \quad x + 2y - z - 4 = 0$

$\pi_2 : \quad 2x + 4y - 2z - 8 = 0$

$\pi_4 : \quad 3x + 6y - 3z - 12 = 0$

Vetores normais para os planos acima são, respectivamente: $N_1 = (1, 2, -1)$, $N_2 = (2, 4, -2)$ e $N_4 = (3, 6, -3)$. Esses vetores são paralelos e, neste caso, os 3 planos são coincidentes.

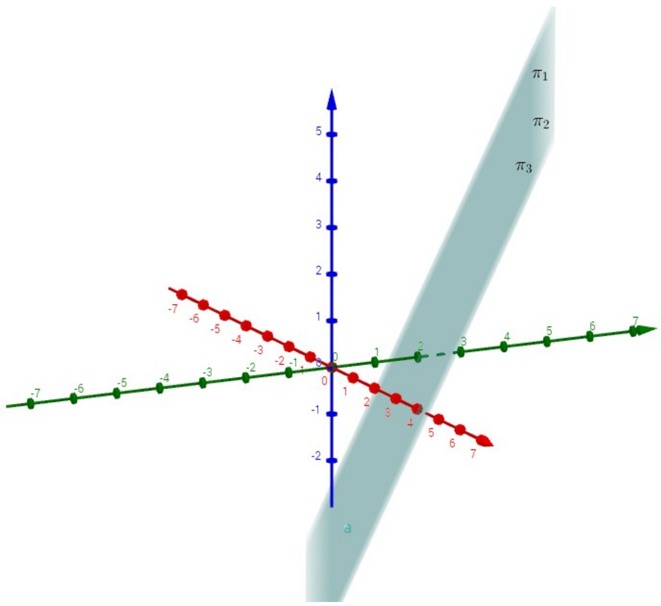

Figura 4.26:

Além disso, o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \end{cases}$$

possui infinitas soluções (todos os pontos dos planos - que são um só na realidade).

Mais um exemplo: considere os planos abaixo:

$\pi_1: \quad x + 2y - z - 4 = 0$

$\pi_5: \quad x + 2y - z = 0$

$\pi_6: \quad 3x + 6y - 3z - 6 = 0$

Vetores normais para os planos acima são, respectivamente: $N_1 = (1, 2, -1)$, $N_5 = (1, 2, -1)$ e $N_6 = (3, 6, -3)$. Esses vetores são paralelos.

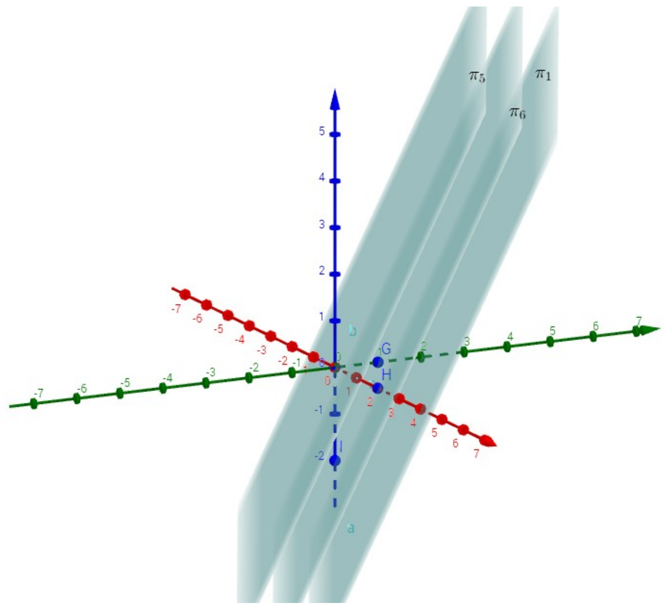

Figura 4.27:

Neste caso, o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 6 \end{cases}$$

não possui solução. Não há ponto comum entre os 3 planos.

b2). Exatamente dois vetores normais são paralelos.

Neste caso, podem ocorrer duas situações:

b21). 2 planos paralelos e um concorrente a eles.

Por exemplo, os planos:

$\pi_1: \quad x + 2y - z - 4 = 0$

$\pi_5: \quad 2x + 4y - 2z = 0$

$\pi_7: \quad 2x + y - z - 2 = 0$

exemplificam este caso. Os vetores normais (aos planos π_1 e π_5) $N_1 = (1, 2, -1)$ e $N_5 = (2, 4, -2)$ são paralelos, mas $N_7 = (2, 1, -1)$ (vetor normal a π_7) não é paralelo a eles.

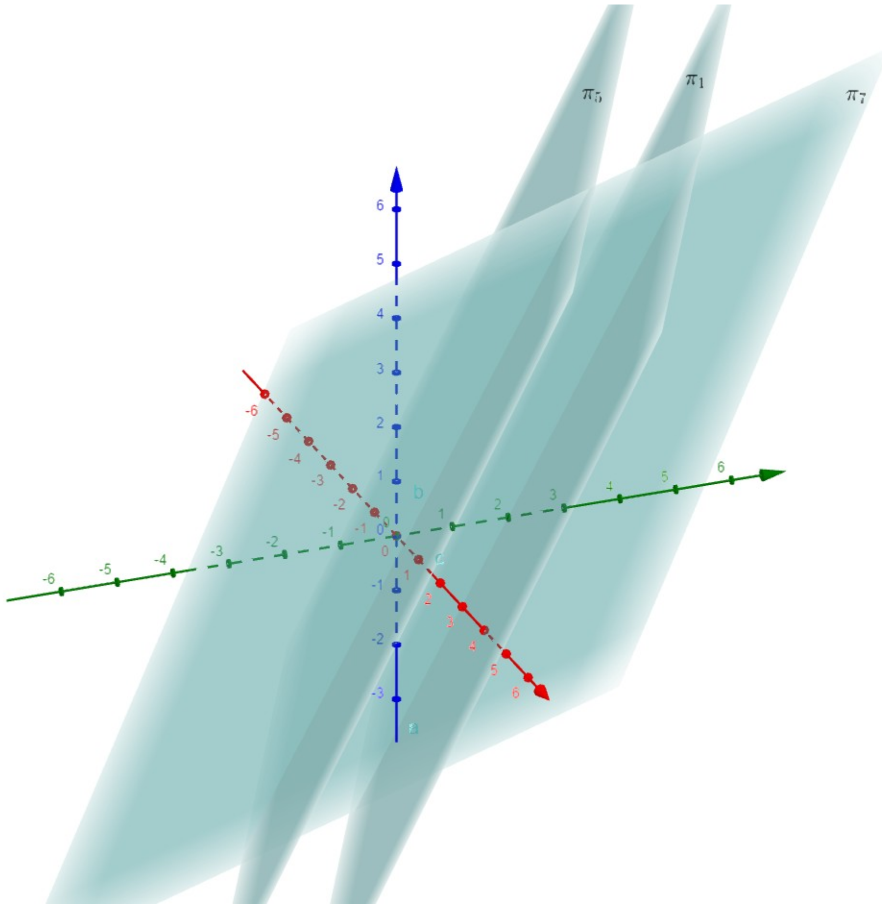

Figura 4.28:

b22). 2 planos coincidentes e um concorrente a eles.

Por exemplo, os planos:

$\pi_1: \quad x + 2y - z - 4 = 0$

$\pi_2: \quad 2x + 4y - 2z - 8 = 0$

$\pi_7: \quad 2x + y - z - 2 = 0$

exemplificam este caso. Os vetores normais (aos planos π_1 e π_2) $N_1 = (1, 2, -1)$ e $N_2 = (2, 4, -2)$ são paralelos e os planos π_1 e π_2 descrevem os mesmos pontos (são coincidentes), mas $N_7 = (2, 1, -1)$ (vetor normal a π_7) não é paralelo a eles.

Figura 4.29:

Resolvendo os sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$$

obtemos como solução:

$$\begin{cases} x = \frac{z}{3} \\ y = \frac{z}{3} + 2, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Geometricamente, temos uma reta como interseção do planos.

b3). Quaisquer dois vetores normais não são paralelos.

b31). Os planos se interceptam 2 a 2 segundo retas que são paralelas.

Neste caso, o sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3 \end{cases}$$

não possui solução, já que os 3 planos não se interceptam.

Por exemplo, os planos

$\pi_8 : \quad x - 2y + 3z - 12 = 0$

$\pi_9: \quad 3x + y - 2z + 6 = 0$

$\pi_{10}: \quad 4x - y + z = 0$

têm vetores normais $N_8 = (1, -2, 3)$, $N_9 = (3, 1, -2)$ e $N_{10} = (4, -1, 1)$, que não são vetores 2 a 2 paralelos, mas são coplanares:

$$(N_8 \times N_9) \cdot N_{10} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 9 + 16 - 12 + 6 - 2 = 0$$

Figura 4.30:

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 12 \\ 3x + y - 2z = -6 \\ 4x - y + z = 0 \end{cases},$$

vemos que esse sistema não possui solução.

b32). Os planos se interceptam segundo uma reta.

Neste caso, o sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3 \end{cases}$$

possui infinitas soluções, já que a interseção entre os 3 planos é uma reta.

Por exemplo, consideremos os planos

$\pi_8: \quad x - 2y + 3z - 6 = 0$

$\pi_9: \quad 3x + y - 2z + 6 = 0$

$\pi_{10}: \quad 4x - y + z = 0.$

Os vetores normais aos planos: $N_8 = (1, -2, 3)$, $N_9 = (3, 1, -2)$ e $N_{10} = (4, -1, 1)$ não são 2 a 2 paralelos, mas são coplanares, pois:

$$(N_8 \times N_9) \cdot N_{10} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 9 + 16 - 12 + 6 - 2 = 0$$

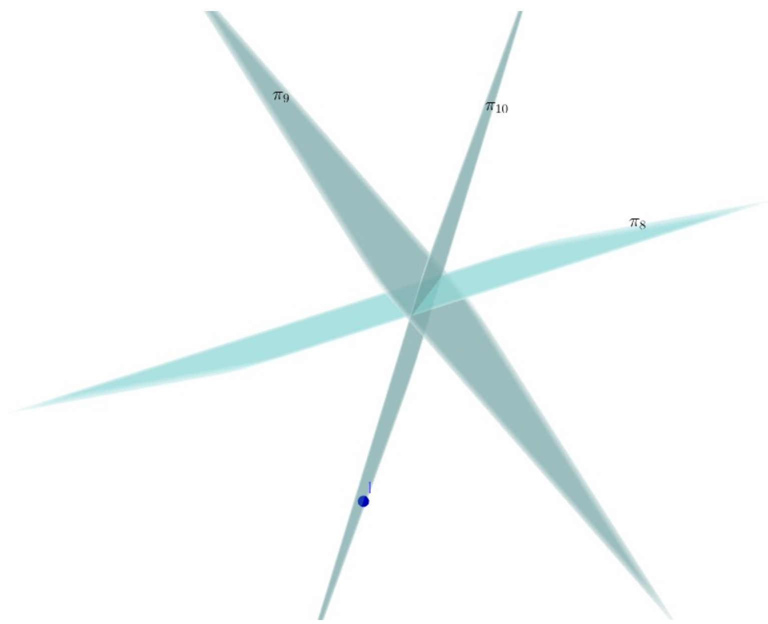

Figura 4.31:

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 3x + y - 2z = -6 \\ 4x - y + z = 0 \end{cases},$$

obtemos como solução:

$$\begin{cases} x = -\frac{6}{7} + \frac{1}{7}z \\ y = -\frac{24}{7} + \frac{11}{7}z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

que são equações reduzidas da reta de interseção dos planos.

Capítulo 5

Cônicas e Coordenadas Polares

5.1 Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano

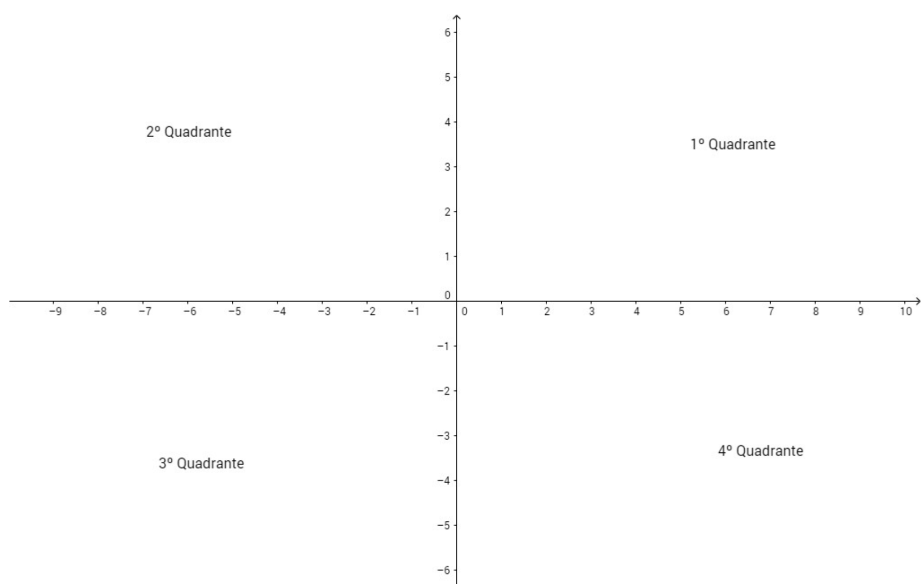

Figura 5.1:

O sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas é formado por duas retas orientadas xx' (usualmente chamada de eixo-x) e yy' (usualmente chamado de eixo-y). As retas são perpendiculares e seu ponto de intersecção O é chamado de origem do sistema.

Os eixos coordenados dividem o plano em 4 regiões, denominadas quadrantes.

A cada ponto A do plano, temos em correspondência uma abscissa x e uma ordenada y. Assim, dizemos que o ponto P tem coordenadas retangulares ou cartesianas (x, y). À direita de O, as abscissas são positivas e à esquerda de O, são negativas. Em ambos os casos a abscissa cresce à medida que caminhamos para a direita, seguindo a orientação do eixo-x. Analogamente, as ordenadas são positivas acima de O e negativas abaixo de O. As ordenadas crescem à medida que caminhamos para cima, seguindo a orientação do eixo-y.

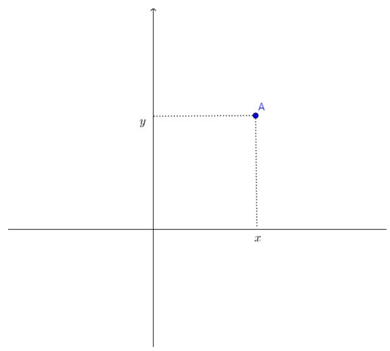

Figura 5.2:

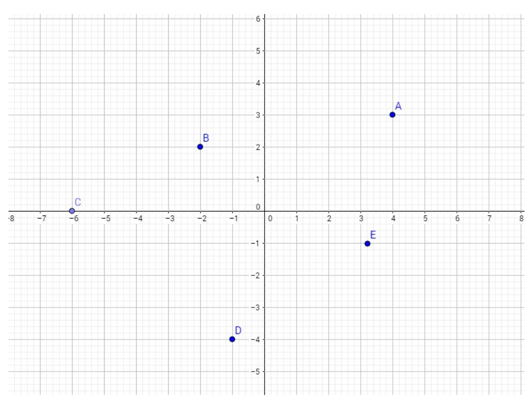

Figura 5.3:

Exemplo 70. *Na figura acima, temos:*

$$A = (4, 3) \quad B = (-2, 2) \quad C = (-6, 0) \quad D = (-1, -4) \quad E = (3, 2; -1)$$

.

Vamos aproveitar a oportunidade e recordar como se faz o cálculo da distância entre dois pontos no plano. Isso será muito importante neste capítulo.

Distância entre dois pontos no plano: sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos no plano.

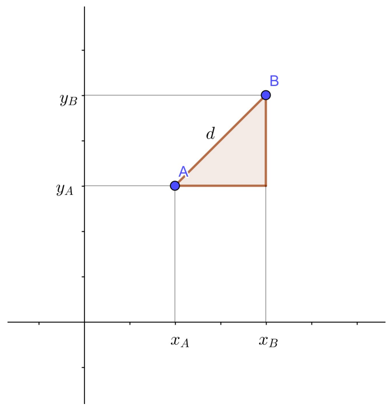

Figura 5.4:

Observando a figura acima, podemos escrever que a distância entre A e B , denotada por dist (A, B) é dada por:

$$\operatorname{dist}(A, B) = d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemplo 71. *Calcule a distância entre os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (7, -1)$.*

Temos que: $\operatorname{dist}(A, B) = \sqrt{(7-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$

Uma **circunferência** é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de modo que está sempre a uma distância constante de um ponto fixo no plano. O ponto fixo é chamado de **centro** da circunferência e a distância constante é denominada **raio** da circunferência.

Seja $P = (x, y)$ um ponto da circunferência. Se $C = (h, k)$ é o centro da circunferência e $r > 0$ é seu raio, então podemos escrever:

$$r = \operatorname{dist}\ (P, C) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} \Longrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Temos então que $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ é a equação cartesiana da circunferência estudada.

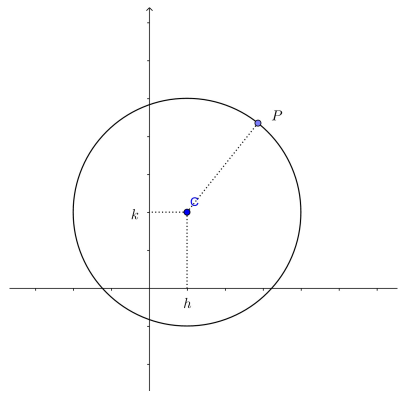

Figura 5.5:

Por exemplo, a equação $x^2 + y^2 = 4$ representa a circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 2. A equação $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 6$ representa a circunferência de centro em $(-1,3)$ e raio $\sqrt{6}$.

5.2 Translação dos eixos coordenados

No plano, consideremos um sistema de coordenadas cartesianas xOy.

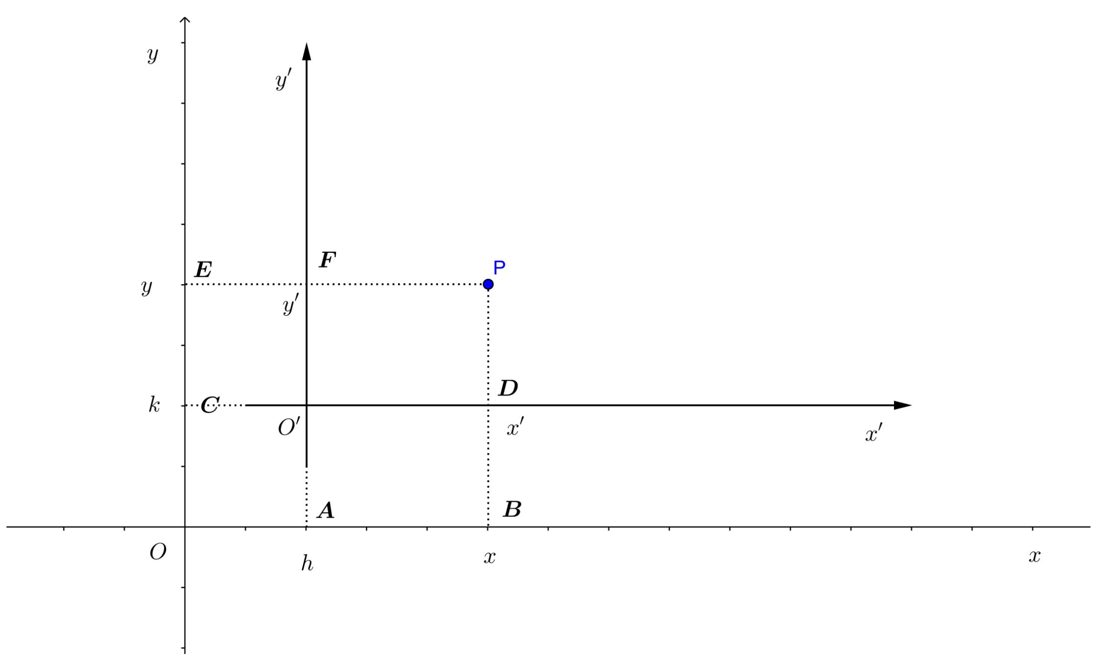

Figura 5.6:

Agora, vamos mover os eixos coordenados de forma a obtermos um novo sistema de coordenadas cartesianas $x'O'y'$, onde: eixo-x' paralelo ao eixo-x e ambos têm mesma orientação; eixo-y' paralelo ao eixo-y e ambos com mesma orientação.

Sejam (h, k) as coordenadas do ponto O' em relação ao sistema xOy. Se um ponto P do plano tem coordenadas (x, y) e (x', y') em relação aos sistemas xOy e $x'O'y'$ respectivamente, podemos escrever:

$$x = \mid \overline{OB} \mid = \mid \overline{OA} \mid + \mid \overline{AB} \mid = \mid \overline{OA} \mid + \mid \overline{O'D} \mid = h + x'$$

$$y = \mid \overline{OE} \mid = \mid \overline{OC} \mid + \mid \overline{CE} \mid = \mid \overline{OC} \mid + \mid \overline{O'F} \mid = k + y'$$

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Essas são as equações de transformação das coordenadas do sistema xOy para o sistema $x'O'y'$.

Exemplo 72. *a) Encontre as coordenadas do ponto* $A = (3, -1)$ *com relação ao novo sistema de coordenadas* $x'O'y'$*, onde* $O' = (1, 2)$

Usando as equações de transformação, temos:

$x = x' + h \quad \Rightarrow \quad 3 = x' + 1 \quad \Rightarrow \quad x' = 2$

$y = y' + k \quad \Rightarrow \quad -1 = y' + 2 \quad \Rightarrow \quad y' = -3$

Assim, $A = (2, -3)$ *são as coordenadas do ponto* A *com relação ao sistema* $x'O'y'$

b) Por uma translação de eixos a partir do sistema xOy*, obtemos o sistema* $x'O'y'$*, onde* $O' = (-2, 1)$*. Transforme a equação* $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$ *para a equação com relação ao novo sistema* $x'O'y'$*.*

Temos:

$$\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

Substituindo na equação dada, obtemos:

$3(x' - 2)^2 + 2(y' + 1)^2 + 12(x' - 2) - 4(y' + 1) + 8 = 0$

$3[(x')^2 - 4x' + 4] + 2[(y')^2 + 2y' + 1] + 12x' - 24 - 4y' - 4 + 8 = 0$

$3(x')^2 - 12x' + 12 + 2(y')^2 + 4y' + 2 + 12x' - 24 - 4y' - 4 + 8 = 0$

$3(x')^2 + 2(y')^2 - 6 = 0$

c) Por uma translação de eixos, transformar a equação da curva $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ em outra desprovida de termos de 1° grau.

Se $O' = (h, k)$ é a origem do novo sistema $x'O'y'$ de coordenadas cartesianas, podemos escrever:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Substituindo na equação dada, temos:

$(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 8(y' + k) + 1 = 0$

$(x')^2 + 2hx' + h^2 - 4[(y')^2 + 2y'k + k^2] + 6x' + 6h + 8y' + 8k + 1 = 0$

$(x')^2 + 2hx' + h^2 - 4(y')^2 - 8ky' - 4k^2 + 6x' + 6h + 8y' + 8k + 1 = 0$

$(x')^2 - 4(y')^2 + (2h + 6)x' + (8 - 8k)y' + h^2 - 4k^2 + 6h + 8k + 1 = 0$ ***(1)***

Para que não tenhamos termos de 1° grau, devemos ter:

$2h + 6 = 0 \qquad e \qquad 8 - 8k = 0$

Ou seja: $h = -3$ e $k = 1$.

Assim, a equação (1) pode ser reescrita (usando $h = -3$ e $k = 1$):

$(x')^2 - 4(y')^2 + (-3)^2 - 4 \cdot 1^2 + 6(-3) + 8 \cdot 1 + 1 = 0$

$(x')^2 - 4(y')^2 + 9 - 4 - 18 + 8 + 1 = 0$

$(x')^2 - 4(y')^2 - 4 = 0.$

A equação da curva fica da forma:

$$(x')^2 - 4(y')^2 - 4 = 0$$

considerando o novo sistema com origem no ponto $O' = (-3, 1)$.

5.3 Cônicas

Uma cônica é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ no plano que satisfazem uma equação da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ e A, B, C não são simultaneamente nulos.

Vamos estudar as chamadas cônicas não degeneradas: elipse, hipérbole e parábola.

5.3.1 Elipse

Elipse é o conjunto de pontos P no plano tais que a soma das distâncias de P a 2 pontos fixos F_1 e F_2 é constante. Essa constante é maior do que a distância entre os pontos F_1 e F_2.

Ou seja: chamando $dist(F_1, F_2) = 2c$ e tomando $a > 0$ tal que $2a > 2c$, um ponto P pertence à elipse em questão quando:

$$dist(P, F_2) + dist(P, F_2) = 2a$$

Equação da Elipse:

Vamos considerar $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

1) Equação da elipse de focos em $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração:

$P = (x, y)$ pertence à elipse $\iff dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 2a$

Assim:

$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0^2)} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2$

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, obtemos:

$\left[a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2 = (a^2 - cx)^2$

$a^2\left[(x-c)^2 + y^2\right] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 = a^4 + c^2x^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Usando que $b^2 = a^2 - c^2$, podemos escrever:

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2, temos:

$\dfrac{b^2x^2}{a^2b^2} + \dfrac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1.$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

O esboço dessa curva fica da forma:

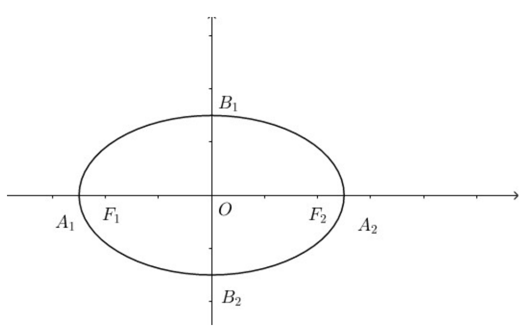

Figura 5.7:

Essa elipse é simétrica em relação:

- ao eixo-x: substituindo y por $-y$ na equação da elipse, a equação não se modifica.

- ao eixo-y: substituindo x por $-x$ na equação da elipse, a equação não se modifica.
- à origem: substituindo x por $-x$ e y por $-y$ na equação da elipse, a equação não se modifica.

Fazendo $y = 0$ na equação da elipse, obtemos $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$, ou seja, $x = \pm a$. Assim, os pontos A_1 e A_2 do desenho têm coordenadas $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ e são vértices da elipse. Os pontos B_1 e B_2 são também vértices da elipse e têm coordenadas $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$ (fazendo $x = 0$ na equação).

2) Equação da elipse de focos em $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

A demonstração é feita de forma análoga àquela feita em (1).

O esboço dessa elipse fica da seguinta forma:

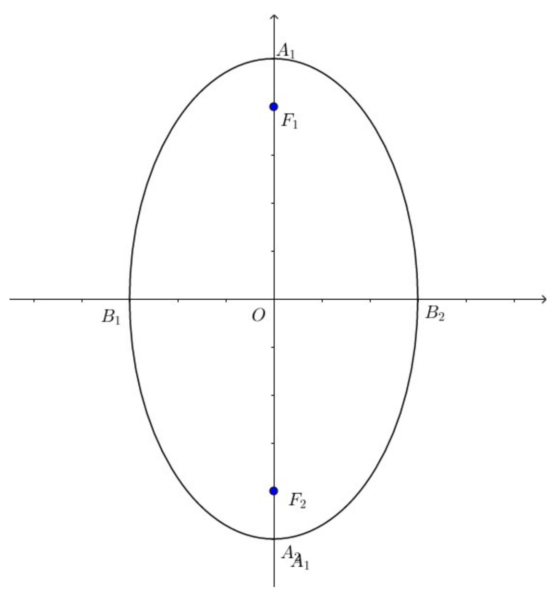

Figura 5.8:

As mesmas observações sobre simetria podem ser feitas aqui: a elipse em questão é simétrica com relação ao eixo-x, ao eixo-y e à origem.

Fazendo $y = 0$ na equação da elipse, obtemos $\dfrac{x^2}{b^2} = 1$, ou seja, $x = \pm b$. Assim, os pontos B_1 e B_2 têm coordenadas $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$ e são vértices da elipse. Os pontos A_1 e

A_2 de coordenadas $A_1 = (0, a)$ e $A_2 = (0, -a)$ também são vértices da elipse (fazendo $x = 0$ na equação).

Antes de trabalharmos com mais um caso de elipse, vamos fazer algumas observações acerca dos elementos da elipse. Vamos usar as mesmas notações dos casos (1) e (2).

Elementos da elipse

F_1 e $F_2 \rightarrow$ Focos da elipse

$2c = dist(F_1, F_2) \rightarrow$ Distância focal

A_1, A_2, B_1 e $B_2 \rightarrow$ Vértices da elipse

$\overline{A_1A_2} \rightarrow$ Eixo maior de comprimento $2a$.

$\overline{B_1B_2} \rightarrow$ Eixo menor de comprimento $2b$.

$C \rightarrow$ Centro da elipse (é o ponto médio do segmento F_1F_2)

$e = \dfrac{c}{a} \rightarrow$ excentricidade $(0 < e < 1)$

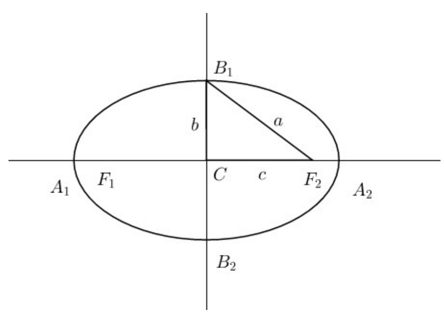

Figura 5.9:

Temos ainda: $a^2 = b^2 + c^2$ (segue do fato de que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$).

Observação 29.
- *Na equação de uma elipse, sempre ocorre $a > b$ e $a > c$.*
- *Nas elipses estudadas em (1) e (2), o centro C é a origem (centro de simetria da figura).*

Exemplo 73. *a) A elipse de equação $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ tem centro em $C = (0, 0)$. Notemos que $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$ (já que $a > b$). Assim, a equação acima é do tipo $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (1° caso estudado).*

Temos:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

- *Vértices:* $A_1 = (-3, 0), A_2 = (3, 0), B_1 = (0, 2), B_2 = (0, -2)$
- *Focos:* $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

  $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ *e* $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$.
- *Distância focal:* $2c = 2\sqrt{5}$
- *Medida do eixo maior:* $\overline{A_1A_2}$*:* $2a = 6$
- *Medida do eixo menor:* $\overline{B_1B_2}$*:* $2b = 4$
- *Excentricidade:* $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

O esboço da elipse fica então da forma:

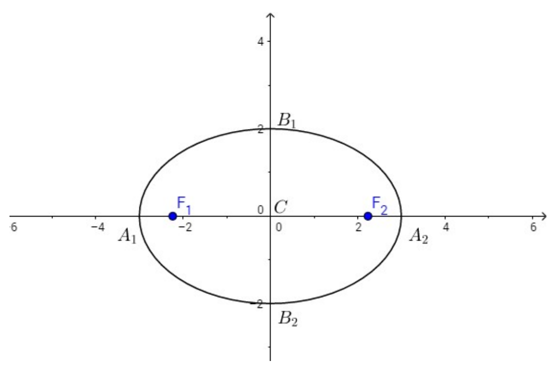

Figura 5.10:

b) A elipse de equação $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ *tem centro em* $C = (0, 0)$*. Temos nesse caso,* $a^2 = 25$ *e* $b^2 = 9$ *(já que* $a > b$*) e, assim, a equação acima é do tipo* $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ *(*2° *caso estudado).*

Temos:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 49 \Rightarrow b = 3$

- *Vértices:* $A_1 = (0,5), A_2 = (0,-5), B_1 = (-3,0), B_2 = (3,0)$
- *Focos:* $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

  $F_1 = (0,4)$ *e* $F_2 = (0,-4)$.
- *Distância focal:* $2c = 8$
- *Medida do eixo maior:* $\overline{A_1A_2}$: $2a = 10$
- *Medida do eixo menor:* $\overline{B_1B_2}$: $2b = 6$
- *Excentricidade:* $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

O esboço da elipse fica então da forma:

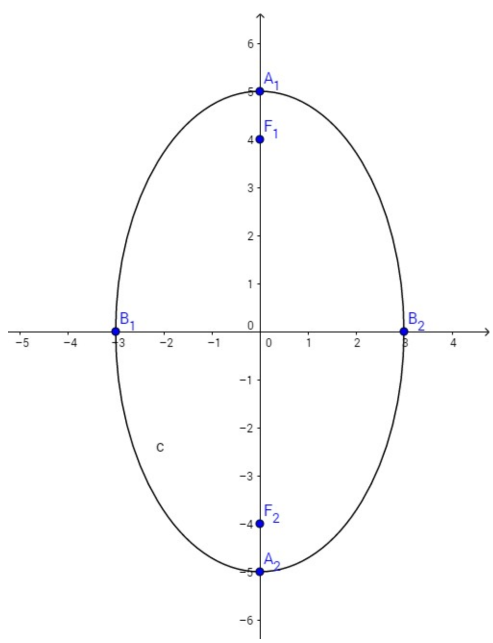

Figura 5.11:

Vamos agora estudar outros casos de elipses.

3) Elipse de centro $C = (h,k)$ e eixo maior paralelo ao eixo das abscissas (eixo-x).

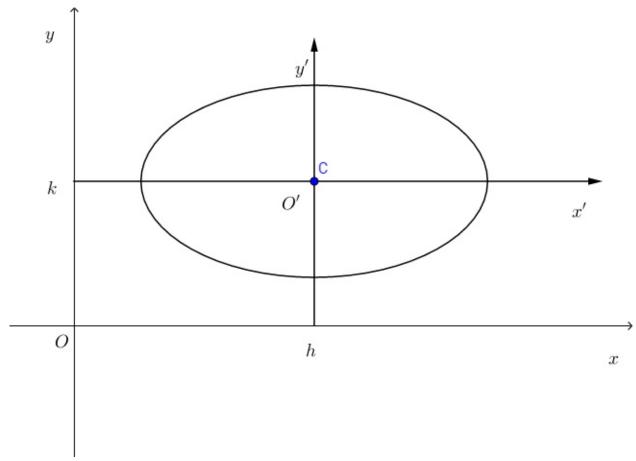

Figura 5.12:

Vamos fazer uma translação no sistema xOy, obtendo o sistema $x'O'y'$, onde $O' = (h, k)$. Com relação ao novo sistema $x'O'y'$, a elipse tem centro na origem O', seu eixo maior está sobre o eixo-x' (eixo das abscissas) e seu eixo menor, sobre o eixo-y' (eixo das ordenadas). Temos então uma elipse como no caso (1), cuja equação é:

$$(1) \qquad \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

com relação ao sistema $x'O'y'$.

Usando as equações de transformação entre os sistemas xOy e $x'O'y'$:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

e substituindo em (1), obtemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

4) Elipse de centro $C = (h, k)$ e eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas (eixo-y).

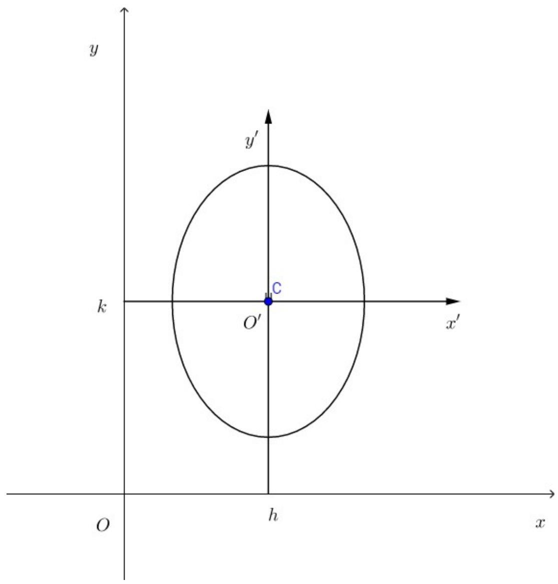

Figura 5.13:

Fazendo, como no caso 3, uma translação de eixos, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

Observação 30. *As equações que obtivermos nos casos 1, 2, 3 e 4 são usualmente chamadas de "equações reduzidas".*

Exemplo 74. *1) Dada a equação da elipse* $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$, *encontre as coordenadas de seus vértices, focos e centro. Calcule ainda a medida de seus eixos, e sua excentricidade. Faça também um esboço.*

Vamos trabalhar a equação $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$ *até obtermos sua forma reduzida.*

$$16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$$

$$16(x^2 + 4x) + y^2 - 4y + 52 = 0$$

$$16(x^2 + 4x + 4 - 4) + y^2 - 4y + 4 - 4 + 52 = 0$$

$$16[(x+2)^2-4]+(y-2)^2-4+52=0$$

$$16(x+2)^2-64+(y-2)^2+48=0$$

$$16(x+2)^2+(y-2)^2-16=0$$

$$16(x+2)^2+(y-2)^2=16$$

$$(x+2)^2+\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

Observando a equação reduzida acima, vemos que: $a^2=16$ *e* $b^2=1$*, já que* $a>b$*. Assim,* $a=4$ *e* $b=1$*. A equação está na forma:* $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ *(caso 4)*

Centro: $C=(-2,2)$

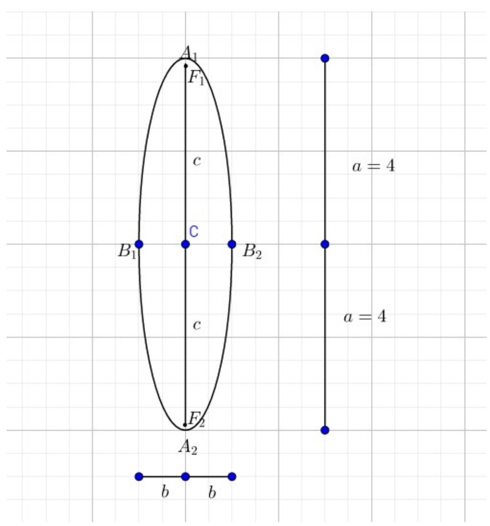

Figura 5.14:

Observando o esboço da elipse, podemos encontrar agora:

Vértices: $A_1=(-2,2+4)=(-2,6)$, $A_2=(-2,2-4)=(-2,-2)$

$B_1=(-2-1,2)=(-3,2)$, $B_2=(-2+1,2)=(-1,2)$

Focos: $a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad 16 = 1 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 15 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{15}$

Assim: $F_1 = (-2, 2 + \sqrt{15}) \quad , \quad F_2 = (-2, 2 - \sqrt{15})$

Medida do eixo-maior: $2a = 8$

Medida do eixo menor: $2b = 2$

Distância focal: $2c = 2\sqrt{15}$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

O esboço da elipse fica então da forma:

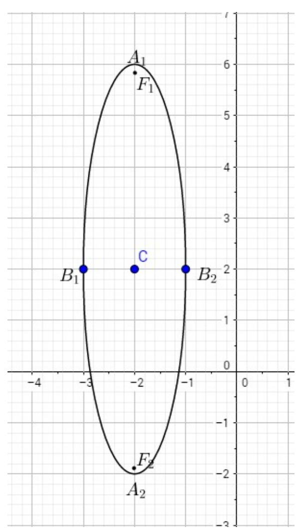

Figura 5.15:

2) Os focos de uma elipse são os pontos $F_1 = (-1, -1)$ *e* $F_2 = (-1, 3)$*. Sabendo que sua excentricidade vale* $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$*, determine a equação cartesiana dessa curva.*

Temos:

Centro da elipse = ponto médio de $\overline{F_1F_2}$

$C = (\dfrac{-1-1}{2}, \dfrac{-1+3}{2}) = (-1, 1).$

O segmento F_1F_2 *é paralelo ao eixo-y. Isso nos diz que o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo-y e, então, sua equação fica da forma:*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Usando as coordenadas do centro:

$$\frac{(x+1)^2}{b^2} + \frac{(y-1)^2}{a^2} = 1$$

Sabendo que: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = e = \dfrac{c}{a}$ *e que* $2c = dist(F_1, F_2) = 4$*, obtemos:*

$c = 2 \quad e \quad \dfrac{2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sqrt{3}a = 6 \Rightarrow a = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$

Sendo $a^2 = b^2 + c^2$*, temos que:*

$b^2 = a^2 - c^2 = \left(\dfrac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2^2 = \dfrac{36}{3} - 4 = 12 - 4 = 8$

Assim:

$$\frac{(x+1)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

é a equação da elipse procurada.

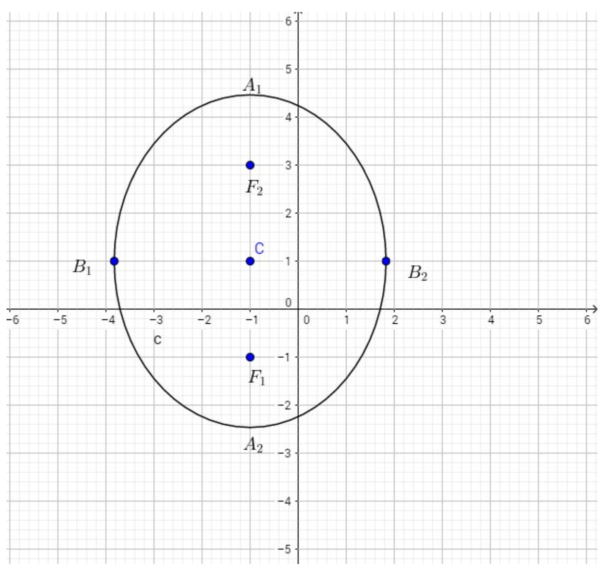

Figura 5.16:

3) Determine a equação cartesiana da elipse que passa pelo ponto $P = (1, -2)$ *e que tem como focos os pontos* $F_1 = (-3, 1)$ *e* $F_2 = (5, 1)$*.*

O segmento $\overline{F_1F_2}$ *é paralelo ao eixo-x. Assim, o eixo maior da elipse é também paralelo ao eixo-x e, então, a elipse tem equação da forma:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Temos ainda:

Centro (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$*):* $C = \left(\dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{1+1}{2} =\right) = (1,1).$

$2c = dist(F_1F_2) = 8 \Rightarrow c = 4.$

Assim temos a equação:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

Usando que $P = (1,-2)$ *pertence à elipse, temos:*

$$\frac{(1-1)^2}{a^2} + \frac{(-2-1)^2}{b^2} = 1$$

$\dfrac{(-3)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow 9 = b^2 \Rightarrow b = 3$

Assim: $a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 25.$

Portanto a equação fica da forma:

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

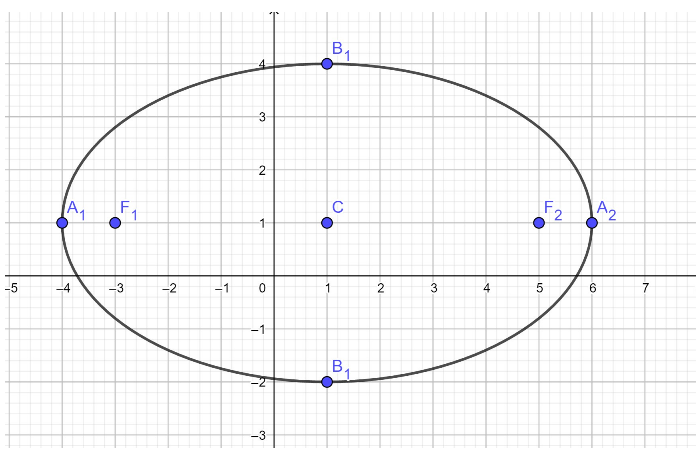

Figura 5.17:

5.3.2 Hipérbole

Hipérbole é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ no plano tais que a diferença entre as distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, em módulo, é constante.

Chamando $2c = dist(F_1F_2)$ e escolhendo $a > 0$ tal que $2a < 2c$, podemos dizer que um ponto P pertence à hipérbole quando:

$$| \, dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \, |= 2a$$

Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole.

Equações da hipérbole

Consideraremos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ no que vamos estudar sobre a hipérbole.

1) Equação da hipérbole cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demonstração:

Um ponto $P = (x, y)$ pertence à hipérbole quando $| \, dist(P, F_1) - dist(P, F_2) \, |= 2a$

Trabalhando a equação, temos:

$| \, dist(P, F_1) - dist(P, F_2 = 2a \, |$

$dist(P, F_1) - dist(P, F_2 = \pm 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$\left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right]^2$

$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$(cx - a^2)^2 = [\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}]^2$

$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2 \left[(x-c)^2 + y^2\right]$

$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2 \left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right)$

$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Usando que $b^2 = c^2 - a^2$:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$\dfrac{b^2x^2}{a^2b^2} - \dfrac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

O esboço de uma hipérbole desse tipo fica da forma:

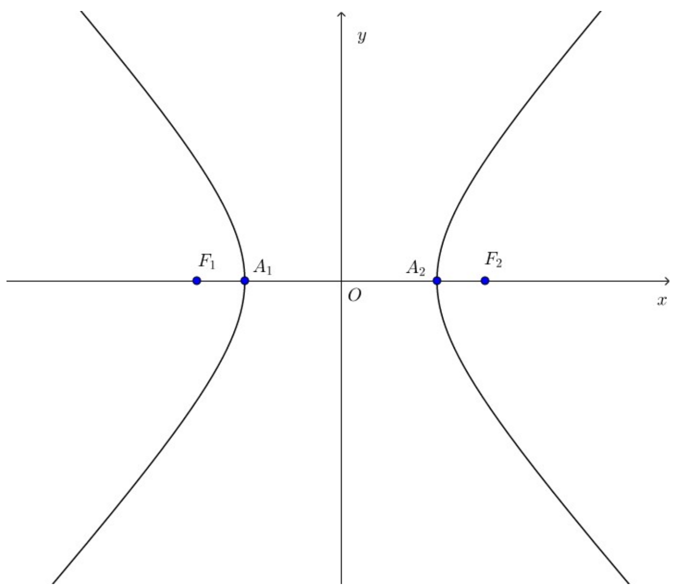

Figura 5.18:

Essa hipérbole é simétrica em relação:

- ao eixo-y: se substituírmos x por (-x) na equação da hipérbole, ela não se altera.
- ao eixo-x: se substituírmos y por (-y) na equação da hipérbole, ela não se altera.
- à origem: se substituírmos x por (-x) e y por (-y) na equação, ela não se altera.

Além disso, fazendo $y = 0$ na equação, obtemos: $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$. A hipérbole intercepta o eixo-x nos pontos $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$, os quais serão chamados de vértices da hipérbole. O ponto $C = (0, 0)$ é o centro da hipérbole.

2) Equação da hipérbole cujos focos são $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

A demonstração é análoga àquela feita no caso 1. O esboço de uma hipérbole desse tipo fica da forma:

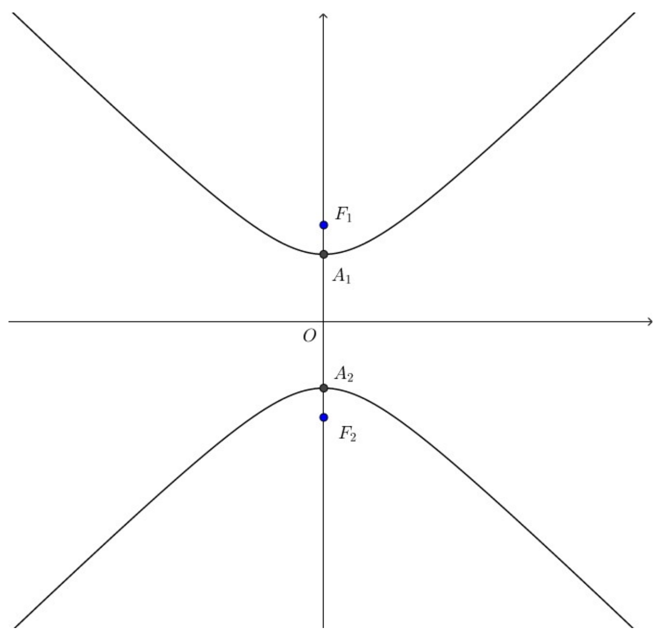

Figura 5.19:

A hipérbole é simétrica com relação ao eixo-x, ao eixo-y e à origem. Fazendo $x = 0$ na equação, obtemos: $\frac{y^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm a$. A hipérbole intercepta o eixo-y nos pontos $A_1 = (0, a)$ e $A_2 = (0, -a)$, que são os vértices da hipérbole. O ponto $C = (0, 0)$ é o centro da hipérbole.

Elementos da hipérbole

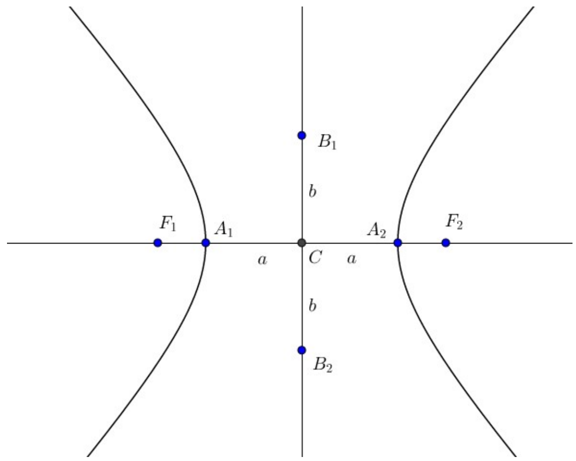

Figura 5.20:

C: Centro (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$)

A_1, A_2: vértices

$\overline{A_1A_2}$: eixo real(ou transverso)

medida do eixo real: $2a$

$\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário (ou conjugado)

medida do eixo imaginário: $2b$

(o centro da hipérbole é o ponto médio do segmento $\overline{B_1B_2}$)

F_1, F_2: focos

$2c$: distância focal

$e = \dfrac{c}{a}$: excentricidade ($e > 1$)

Sobre as assíntotas de uma hipérbole

Consideremos inicialmente o caso 1 estudado: a hipérbole de equação: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Trabalhando a equação acima:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$\Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Rightarrow y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Quando x cresce muito ($x \to \infty$) (ou analogamente, x decresce, x $\to -\infty$), o valor $\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$ se aproxima de 1. Assim, a equação acima tende à forma: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

No curso de cáculo 1, você irá trabalhar com assíntotas (veja a apostila de cálculo 1, página 142, obs. 48, assíntota inclinada). Vamos explicitar parte das contas.

1^o quadrante: $x \to +\infty$

$$y = \frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \text{ é a parte da hipérbole trabalhada.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}-\frac{b}{a}x = \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}x\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}x\frac{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}-1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}+1}\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}+1\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\,x\,\frac{1-\dfrac{a^2}{x^2}-1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}\;+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{b}{a}\,x\,\left(\dfrac{-a^2}{x^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}\;+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-ab}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}\;+1} = 0$$

Podemos fazer o mesmo estudo (as contas são parecidas !) nos demais quadrantes:

2° quadrante: $x \to -\infty$

$$y = -\frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \text{ é a parte da hipérbole trabalhada.}$$

$$y = -\frac{b}{a}\,x \text{ é assíntota.}$$

3° quadrante: $x \to -\infty$

$$y = \frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \text{ é a parte da hipérbole trabalhada.}$$

$$y = \frac{b}{a}\,x \text{ é assíntota.}$$

2° quadrante: $x \to +\infty$

$$y = -\frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \text{ é a parte da hipérbole trabalhada.}$$

$$y = -\frac{b}{a}\,x \text{ é assíntota.}$$

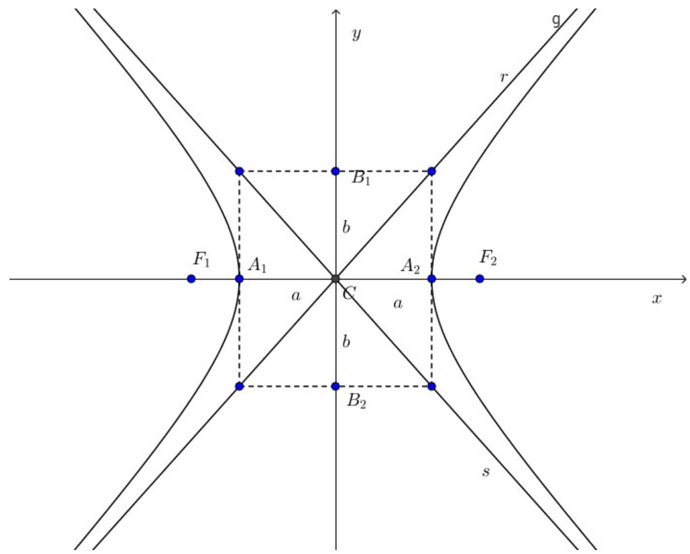

Figura 5.21:

Equação da assíntota r: $y = \dfrac{b}{a}x$

Equação da assíntota s: $y = -\dfrac{b}{a}x$.

Consideremos agora o caso 2 estudado, a hipérbole tem equação $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$. De forma análoga, as retas $y = \dfrac{a}{b}\, x$ e $y = -\dfrac{a}{b}\, x$ são assíntotas da hipérbole em questão.

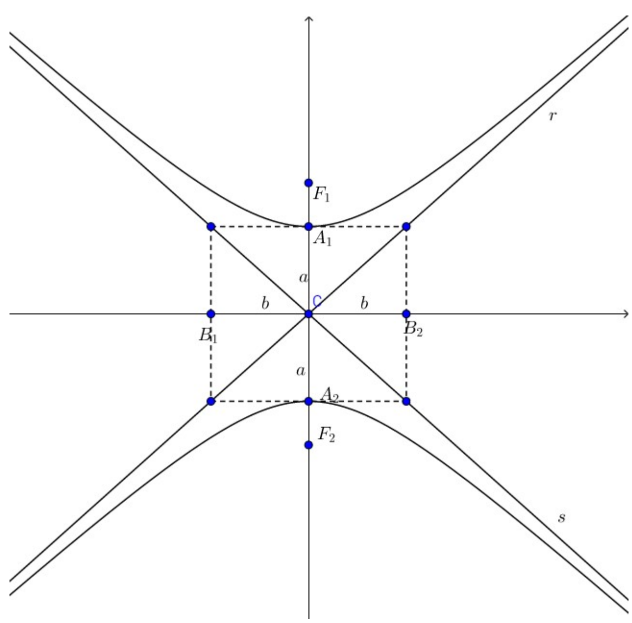

Figura 5.22:

Exemplo 75. *1) A equação* $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ *representa uma hipérbole do caso 1: seu centro tem coordenadas* $C = (0,0), a^2 = 4$ *e* $b^2 = 9$.

Usando que $a = 2$, *temos que* $A_1 = (-2,0)$ *e* $A_2 = (2,0)$ *são seus vértices. Sendo* $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13(c = \sqrt{13})$, *temos que* $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$ *e* $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$ *são seus focos. Ainda:*

medida do eixo real (transverso): $2a = 4$

medida do eixo imaginário (conjugado): $2b = 6$.

distância focal: $2c = 2\sqrt{13}$

excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

assíntotas: $y = \dfrac{b}{a}\,x$ *e* $y = -\dfrac{b}{a}\,x$, *ou seja:*

$$y = \frac{3}{2}\,x \text{ e } y = -\frac{3}{2}\,x$$

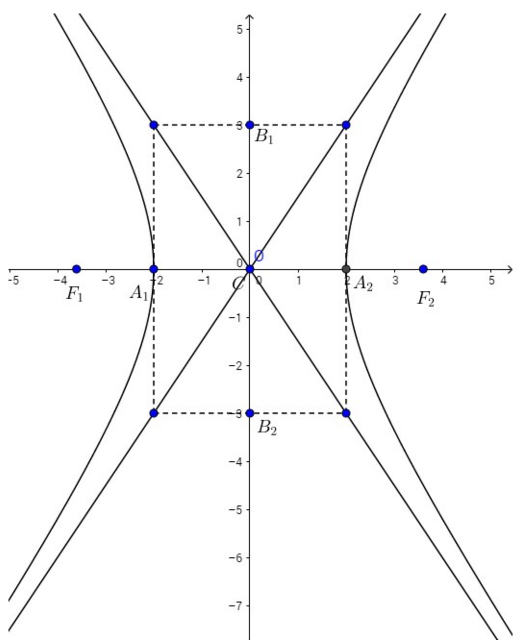

Figura 5.23:

2) A equação $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{8} = 1$ *representa uma hipérbole do caso 2: seu centro é* $C = (0,0), a^2 = 8$ *e* $b^2 = 8$. *Como* $a = 2\sqrt{2}$, *temos que* $A_1 = (0, 2\sqrt{2})$ *e* $A_2 = (0, -2\sqrt{2})$ *são seus vértices. Sendo* $c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 8 = 16(c = 4)$, *temos que* $F_1 = (0,4)$ *e* $F_2 = (0,-4)$ *são seus focos. Ainda:*

medida do eixo real (transverso): $2a = 4\sqrt{2}$

medida do eixo imaginário (conjugado): $2b = 4\sqrt{2}$.

distância focal: $2c = 8$

excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

assíntotas: $y = \dfrac{a}{b}\, x$ *e* $y = -\dfrac{a}{b}\, x$, *ou seja:*

$$y = x \ \text{ e } \ y = -x$$

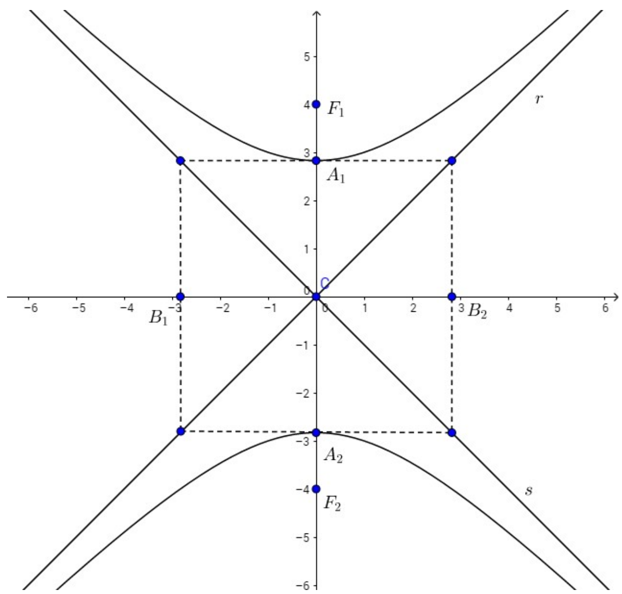

Figura 5.24:

Observação 31. *Uma hipérbole é* <u>*equilátera*</u> *quando seus eixos real e imaginário têm o mesmo comprimento. Isto significa que* $a = b$*. A hipérbole do exemplo anterior é equilátera.*

Exemplo 76. *O centro de uma hipérbole está na origem, seu eixo real se encontra ao longo do eixo-*x *e uma de suas assíntotas tem equação* $2x - 5y = 0$*. Sabendo que a hipérbole passa pelo ponto* $P = (6, 2)$*, determine sua equação.*

Uma hipérbole com essas características tem equação da forma: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$*. As assíntotas desse tipo de hipérbole tem a forma:* $y = \dfrac{b}{a}\, x, y = -\dfrac{b}{a}\, x$*. Neste caso, temos* $y = \dfrac{2}{5}\, x$*, o que* *nos diz que* $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{5}$. *Usando que* $b = \dfrac{2}{5}a$ *na equação da hipérbole, obtemos:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2}{5}a\right)^2} = 1$$

Usando que $P = (6,2)$ *pertence à hipérbole, temos:*

$$\frac{36}{a^2} - \frac{4}{\frac{4}{25}a^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{25}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{11}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 11.$$

$$b = \frac{2}{5}\,a \Rightarrow b^2 = \frac{4}{25}\,a^2 \Rightarrow b^2 = \frac{4\cdot 11}{25} \Rightarrow b^2 = \frac{44}{25}.$$

Assim: $\dfrac{x^2}{11} - \dfrac{y^2}{\frac{44}{25}} = 1$ *é a hipérbole procurada.*

Vamos agora estudar mais dois casos de hipérboles.

3) Equação da hipérbole de centro $C = (h,k)$ e eixo real paralelo ao eixo-x.

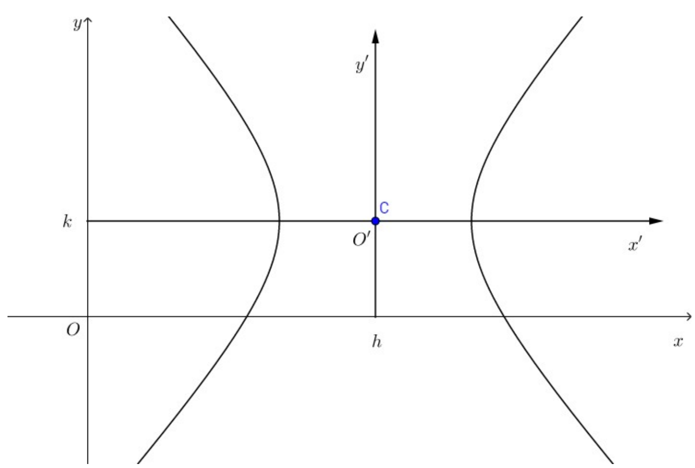

Figura 5.25:

Fazendo uma translação no sistema xOy, obtemos o sistema $x'O'y'$, onde $O' = (h,k)$. Com relação a esse último sistema, a hipérbole tem centro na origem e eixo real sobre o eixo das abscissas (eixo-x'). Estamos trabalhando, então, com o 1° caso de hipérbole estudado. Então, em relação ao sistema $x'O'y'$, a equação da hipérbole fica da forma: $\dfrac{(x')^2}{a^2} - \dfrac{(y')^2}{b^2} = 1$.

Usando as fórmulas de transformação entre os sistemas:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

obtemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Observação 32. *A equação acima é chamada equação reduzida da hipérbole. As assíntotas dessa hipérbole são as retas de equações:*

$$y - k = \frac{b}{a}(x-h) \quad e \quad y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

(retas que passam pelo centro da hipérbole e que têm como coeficiente angular $\frac{b}{a}$ *e* $-\frac{b}{a}$ *respectivamente).*

4) Equação da hipérbole de centro $C = (h, k)$ e eixo real paralelo ao eixo-y.

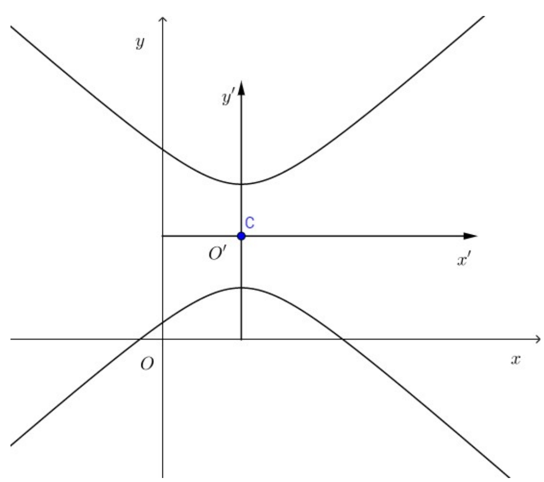

Figura 5.26:

Fazendo o mesmo processo do caso anterior, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

.

Observação 33. *A equação acima é chamada de equação reduzida da hipérbole. As assíntotas são as retas que têm como equações :*

$$y - k = \frac{a}{b}(x - h) \text{ e } y - k = -\frac{a}{b}(x - h).$$

(retas que passam pelo centro da hipérbole e que têm como coeficiente angular $\frac{a}{b}$ *e* $-\frac{a}{b}$ *respectivamente).*

Exemplo 77. *1) Determine a equação cartesiana da hipérbole de centro em* $C = (0, 2)$*, excentricidade* $e = \sqrt{2}$ *e que passa pelo ponto* $P = (0, 2 + \sqrt{8})$*, sabendo ainda que seus focos estão sobre o eixo das ordenadas (eixo-y).*

Como os focos estão sobre o eixo-y, a equação dessa hipérbole tem a forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Usando as coordenadas do centro, fica da forma:

$$\frac{(y-2)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Usando que $\frac{c}{a} = e = \sqrt{2}$*, temos que* $c = \sqrt{2}a$*. Assim:*
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = a^2$

Voltando à equação:

$$\frac{(y-2)^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Como $P = (0, 2 + \sqrt{8})$ *é um ponto da hipérbole, esse ponto satisfaz sua equação:*
$\frac{(2+\sqrt{8}-2)^2}{a^2} - \frac{0^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{8}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 8.$
Sendo $b^2 = a^2$*, segue que* $b^2 = 8$*. Assim, a equação da hipérbole fica da forma:*

$$\frac{(y-2)^2}{8} - \frac{x^2}{8} = 1.$$

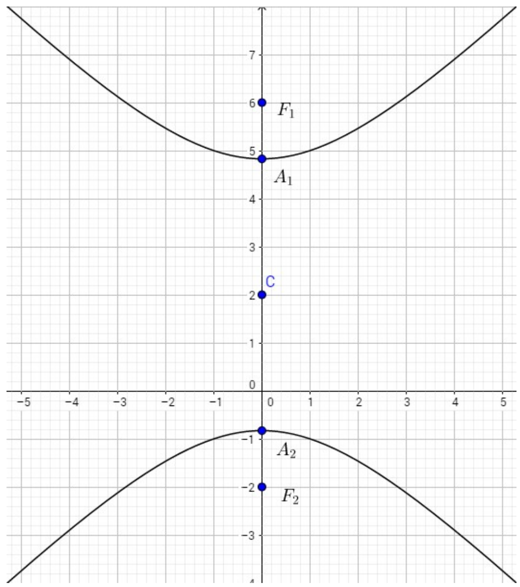

Figura 5.27:

2) Determine a equação cartesiana da hipérbole com as seguintes características: tem centro no ponto $C = (h, h)$, possui uma assíntota de equação $y = 3x - 4$, passa pelo ponto $P = (-2, 2)$ e seus focos estão sobre uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo-x).

Como os focos estão sobre uma reta paralela ao eixo-x, a equação da hipérbole tem a forma: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$

Neste caso, como $k = h$, podemos reescrevê-la na forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1.$$

As assíntotas de hipérboles nessa forma têm coeficiente angular $\dfrac{b}{a}$ e $-\dfrac{b}{a}$. Observando a equação $y = 3x - 4$, temos que $\dfrac{b}{a} = 3$, ou seja, $b = 3a$.

A assíntota passa pelo centro $C = (h, h)$. Assim, esse ponto satisfaz a equação $y = 3x - 4$. Ou seja:

$h = 3h - 4 \Rightarrow 4 = 2h \Rightarrow h = 2$

Podemos reescrever a equação da hipérbole:

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{(3a^2)} = 1.$$

Aqui, usamos também que $b = 3a$. Sendo $P = (-2, 2)$ um ponto dessa hipérbole, temos que ele satisfaz a equação da hipérbole. Ou seja:

$$\frac{(-2-2)^2}{a^2} - \frac{(2-2)^2}{9a^2} = 1 \Rightarrow \frac{(-4)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

.

Assim: $b = 3a = 12$. A equação fica então da forma:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{144} = 1.$$

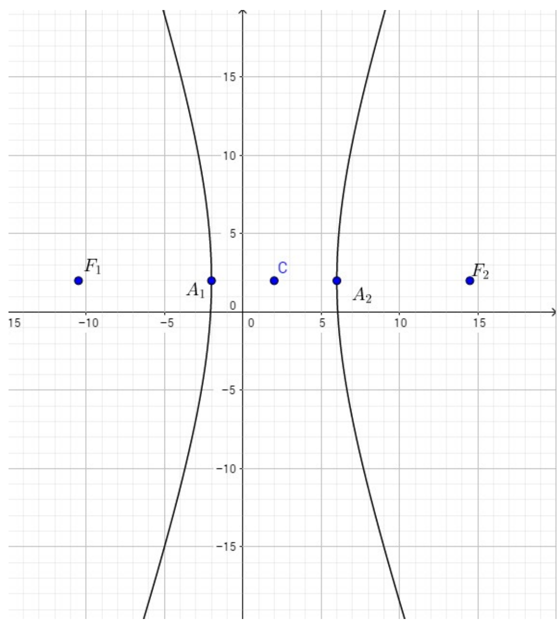

Figura 5.28:

3) Dada a equação $x^2 - 4y^2 - 6x + 24y - 31 = 0$, encontre a equação reduzida correspondente. Identifique a curva trabalhada e encontre as coordenadas de seus focos, vértices e centro. Calcule sua excentricidade e, se for o caso, encontre as equações de suas assíntotas. Faça um esboço da curva, indicando seus elementos.

Vamos trabalhar a equação até obtermos a equação reduzida correspondente.

$x^2 - 4y^2 - 6x + 24y - 31 = 0$

$x^2 - 6x + 9 - 9 - 4(y^2 - 6y) - 31 = 0$

$(x-3)^2 - 9 - 4(y^2 - 6y + 9 - 9) - 31 = 0$

$(x-3)^2 - 9 - 4[(y-3)^2 - 9] - 31 = 0$

$(x-3)^2 - 4(y-3)^2 - 9 + 36 - 31 = 0$

$(x-3)^2 - 4(y-3)^2 - 4 = 0$

$(x-3)^2 - 4(y-3)^2 = 4$

$\dfrac{(x-3)^2}{4} - (y-3)^2 = 1$

Nome da curva: hipérbole (com eixo real paralelo ao eixo-x)

Centro: $C = (3,3)$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Focos: $F_1 = (3-\sqrt{5}, 3),\ F_2 = (3+\sqrt{5}, 3)$

Vértices: $A_1 = (3-2, 3) = (1,3),\ A_2 = (3+2, 3) = (5,3)$

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Assíntotas: as duas assíntotas passam pelo ponto $C = (3,3)$ *e têm coeficientes angulares* $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$ *e* $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{2}$. *Assim, as equações são as seguintes:*

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x-3) \quad e \quad y - 3 = -\frac{1}{2}(x-3)$$

Ou ainda:

$$y = 3 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

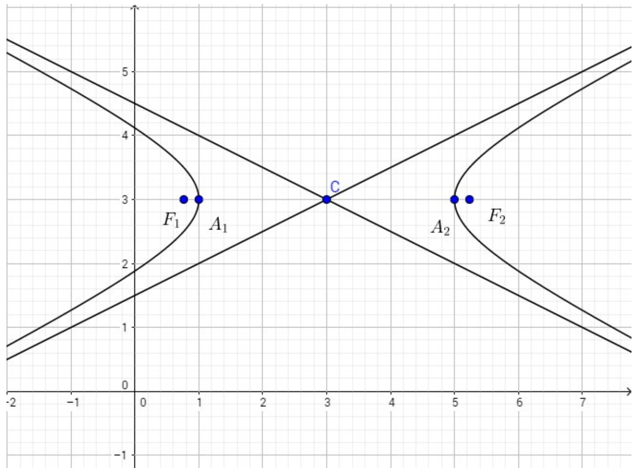

Figura 5.29:

5.3.3 Parábola

Parábola é o conjunto de todos os pontos P de um plano equidistantes de uma reta r (chamada de diretriz) e um ponto fixo F (chamado de foco) não pertencente à reta r. Ou seja, a parábola é oconjunto dos pontos P de um plano tais que:

$$\text{dist}\,(P, F) = \text{dist}\,(P, r)$$

.

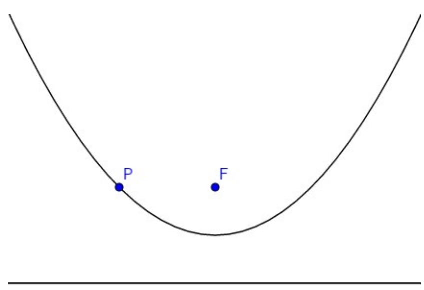

Figura 5.30:

Equações da Parábola

1). Parábola de foco em $F = (p, 0)$ e reta diretriz $x = -p$

$$y^2 = 4px$$

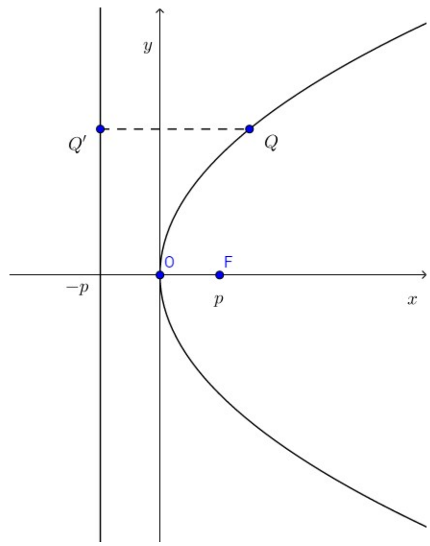

Figura 5.31: $p > 0$

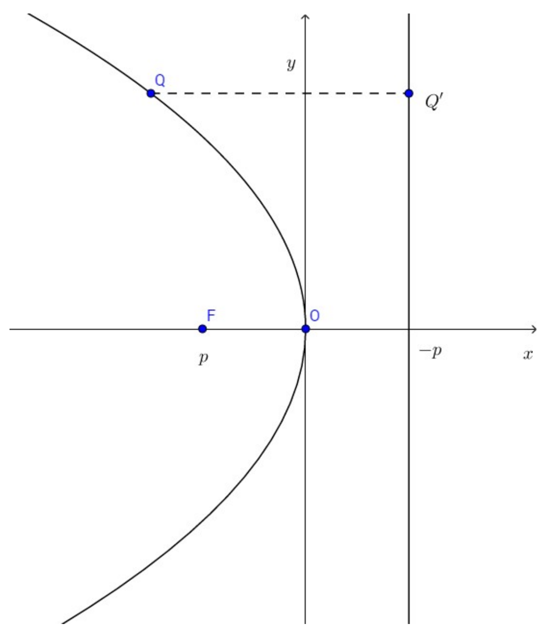

Figura 5.32: $p < 0$

A demonstração abaixo serve para os casos em que $p > 0$ ou $p < 0$.

$Q = (x, y)$ pertence à parábola $\iff$ dist $(Q, F) =$ dist $(Q, r) \iff$ dist $(Q, F) =$ dist (Q, Q')

Como $Q' = (-p, y)$, podemos escrever:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$
$$(x-p)^2+y^2 = (x+p)^2$$
$$x^2-2px+p^2+y^2 = x^2+2px+p^2$$
$$y^2 = 4px$$

2). Parábola de foco em $F = (0, p)$ e reta diretriz $y = -p$

$$x^2 = 4py$$

A demonstração é feita de forma análoga àquela do primeiro caso.

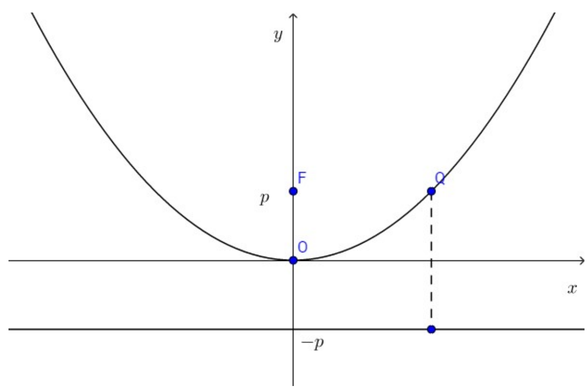

Figura 5.33: $p > 0$

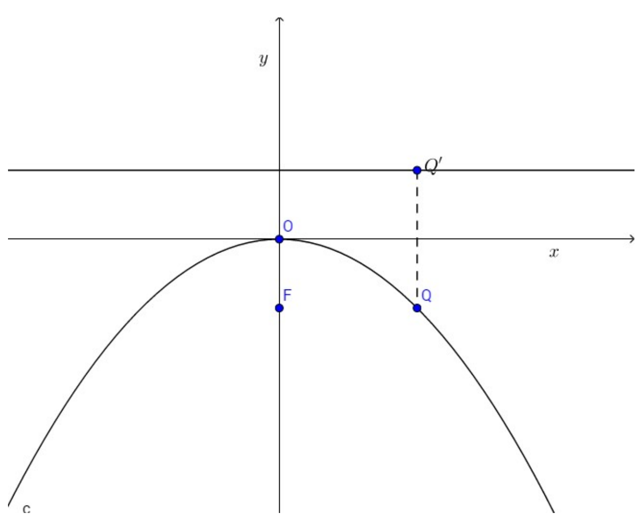

Figura 5.34: $p < 0$

Elementos da parábola

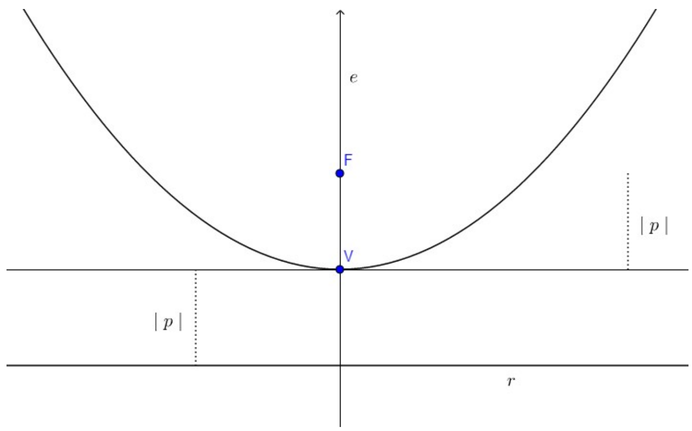

Figura 5.35:

V: vértice
F: foco
r: (reta) diretriz
e: eixo (de simetria)

Exemplo 78. *1). Identifique os elementos da párábola de equação $y^2+x=0$. Faça um esboço dessa parábola.*

A parábola $y^2 = -x$ é uma parábola cuja equação está na forma $y^2 = 4px$ (Caso 1). Comparando as equações, temos que:

$4p = -1 \Longrightarrow p = -\dfrac{1}{4}$

Vértice: $V = (0,0)$.
Foco: $F = (p,0) = \left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$.
Reta diretriz (equação): $x = -p$, *ou seja,* $x = \dfrac{1}{4}$.
Eixo (equação): $y = 0$ *(eixo-x)*

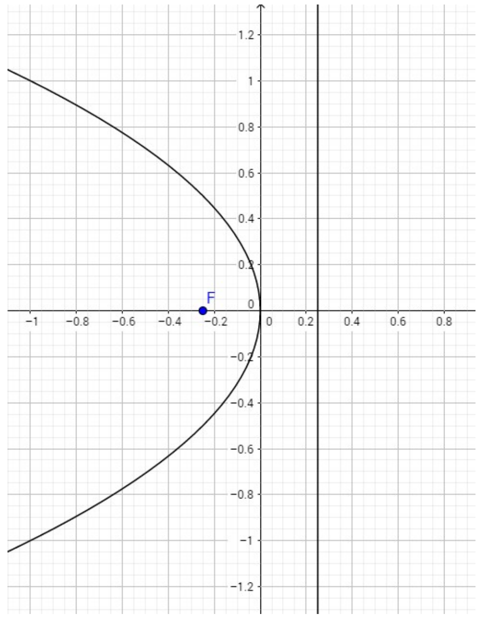

Figura 5.36:

2). Uma parábola tem vértice na origem e passa pelo ponto $A = (-4, 4)$. Sabendo que a diretriz dessa parábola é uma reta paralela ao eixo-x, encontre a equação dessa parábola.

Como $V = (0, 0)$ e a reta diretriz é paralela ao eixo-x, a equação dessa parábola é da forma: $x^2 = 4py$ (Caso 2). Sendo A um ponto da parábola, ele deve satisfazer sua equação:

$$(-4)^2 = 4.p.4 \Longrightarrow 16p = 16 \Longrightarrow p = 1$$

Assim, a equação da parábola fica da forma: $x^2 = 4y$.

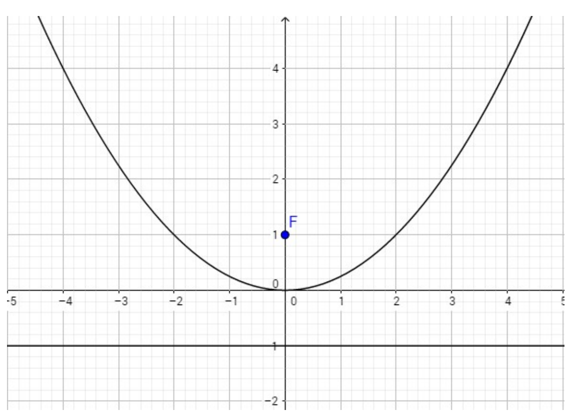

Figura 5.37:

Vamos apresentar agora mais 2 casos de parábola.

3). Parábola com vértice em $V = (h, k)$ e eixo paralelo ao eixo-x

A equação dessa parábola é da forma: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

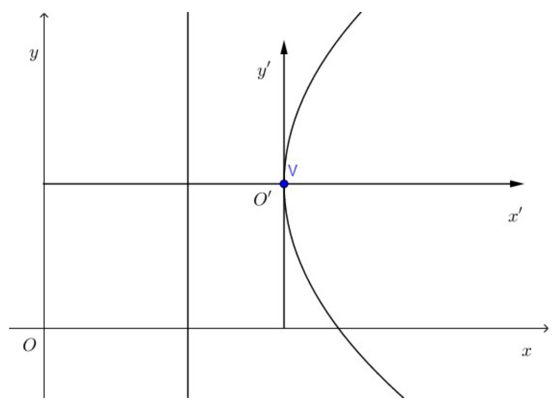

Figura 5.38:

Fazendo uma translação no sistema xOy, obtemos o sistema $x'O'y'$, onde $O' = (h, k)$. Com relação a esse último sistema, a parábola tem vértice na origem e eixo sobre o eixo das abscissas (eixo-x'). Estamos trabalhando, então, com o 1° caso de parábola estudado. Então, em relação ao sistema $x'O'y'$, a equação da parábola fica da forma: $(y')^2 = 4px'$.

Usando as fórmulas de transformação entre os sistemas:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

obtemos:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

4). Parábola com vértice em $V = (h, k)$ e eixo paralelo ao eixo-y

A equação dessa parábola é da forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.

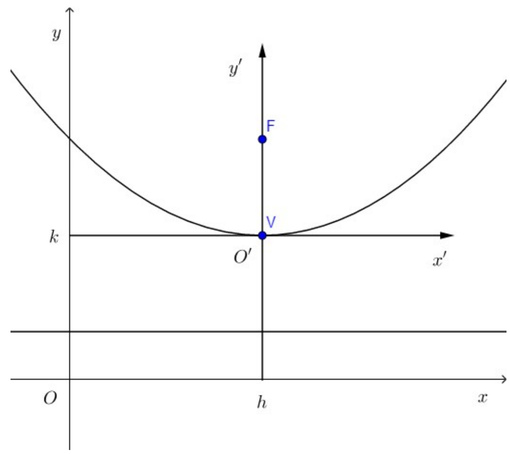

Figura 5.39:

Fazendo o mesmo processo do caso anterior, obtemos a equação:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Observação 34. *As equações encontradas nos 4 casos acima são chamadas de equações reduzidas da parábola.*

Exemplo 79. *1). Uma parábola de equação* $x^2 = 4p(y-k)$ *passa pelos pontos* $A = (-4, 0)$, *e* $B = (8, 6)$. *Encontre as coordenadas do vértice, foco e a equação da reta diretriz dessa parábola.*

Como A e B são pontos dessa parábola, então suas coordenadas satisfazem a equação da curva:

$(-4)^2 = 4p(0-k) \Longrightarrow 16 = -4pk \quad (1)$

$8^2 = 4p(6-k) \Longrightarrow 64 = 24p - 4pk \quad (2)$

Substituindo (1) em (2), obtemos: $64 = 24p + 16 \Longrightarrow 24p = 48 \Longrightarrow p = 2$.

Usando que $16 = -4pk$ *e* $p = 2$, *obtemos que* $k = -2$.

Assim, a equação da curva fica da forma: $x^2 = 8(y+2)$.

Vértice: $V = (h, k) = (0, -2)$.

Usando a forma da equação da parábola (caso 4) e que $p = 2 > 0$, *temos que a parábola possui concavidade para cima.*

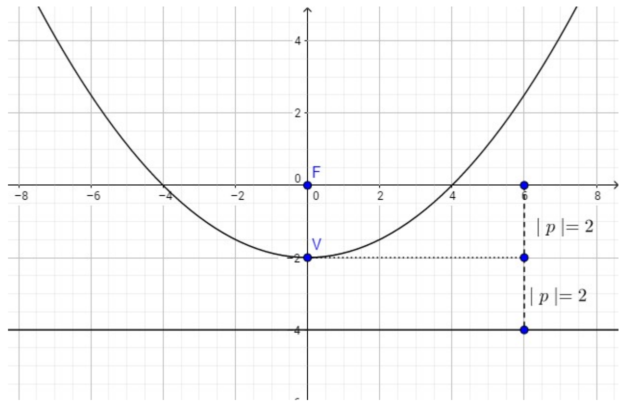

Figura 5.40:

Com o auxílio da figura acima, obtemos:

Foco: $F = (0, 0)$

Reta diretriz: $y = -4$

2). Dada a equação $y^2 - 6y + 4x - 11 = 0$*, identifique a curva trabalhada e encontre as coordenadas cartesianas de seus elementos.*

Vamos inicialmente trabalhar a equação dada até chegarmos na equação reduzida correspondente.

$y^2 - 6y + 4x - 11 = 0$

$y^2 - 6y + 9 - 9 + 4x - 11 = 0$

$(y^2 - 6y + 9) - 9 + 4x - 11 = 0$

$(y - 3)^2 - 9 + 4x - 11 = 0$

$(y - 3)^2 + 4x - 20 = 0$

$(y - 3)^2 = -4x + 20$

$(y - 3)^2 = -4(x - 5)$ *(Equação reduzida de uma parábola - caso 3)*

Observando a equação acima, podemos escrever:

Vértice: $V = (5, 3)$

$4p = -4 \Longrightarrow p = -1$

Como $p = -1 < 0$*, a concavidade da parábola estã voltada para a esquerda.*

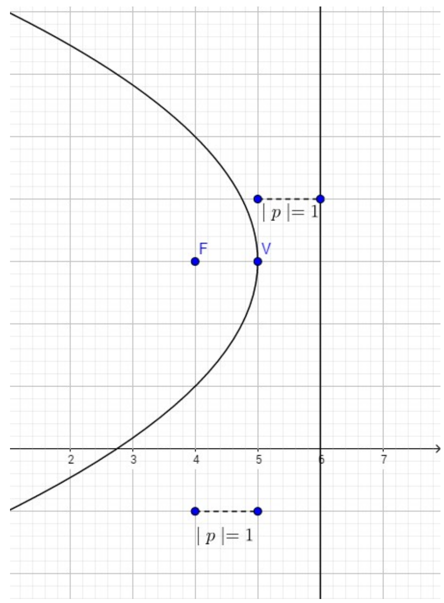

Figura 5.41:

Com o auxílio da figura acima, obtemos que:

Foco: $F = (4, 3)$

Reta diretriz: $x = 6$

5.4 Equações Paramétricas

Consideremos $F(x, y) = 0$ a equação cartesiana de uma curva plana C e sejam x e y funções de uma terceira variável t de maneira que podemos escrever:

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

Suponhamos que, para qualquer valor permissível de t, as equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$ determinem um par de valores reais x e y que satisfazem a equação $F(x, y) = 0$. Consideremos ainda que, para qualquer par de valores reais x e y que satisfazem $F(x, y)$, exista t tal que $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Se essas duas situações ocorrerem, vamos dizer que $x = f(t)$ e $y = g(t)$ são equações paramétricas da curva C. Nesse caso a variável é denominada parâmetro.

Veremos, através de exemplos, que equações paramétricas não são únicas.

Exemplo 80. *1) Encontre equações paramétricas para a reta de equação* $y = -3x + 4$.

Chamando $x = t$, podemos escrever:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

As equações acima são paramétricas para a reta dada. Poderíamos, por exemplo, parametrizá-las da seguinte forma: chamando $x = t + 1$, teríamos:

$y = -3x + 4 = -3(t + 1) + 4 = -3t - 3 + 4 = -3t + 1.$

Assim:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

são equações paramétricas para a reta dada.

2) Encontre equações paramétricas para o segmento de reta AB, onde $A = (-2, 1)$ e $B = (1, -2)$.

Vamos encontrar inicialmente a equação da reta que passa por A e B. Temos:

$y + 2 = m(x - 1)$ *(usando o ponto B)*

Como o ponto $A = (-2, 1)$ é um ponto da reta:

$1 + 2 = m(-2 - 1)$

$3 = -3m \Rightarrow m = -1.$

Assim, a equação da reta fica da forma:

$y + 2 = -1(x - 1)$

$y = -2 - x + 1$

$y = -x - 1$

Parametrizando a reta: chamando $x = t$, temos:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Mas queremos uma parametrização para o segmento AB:

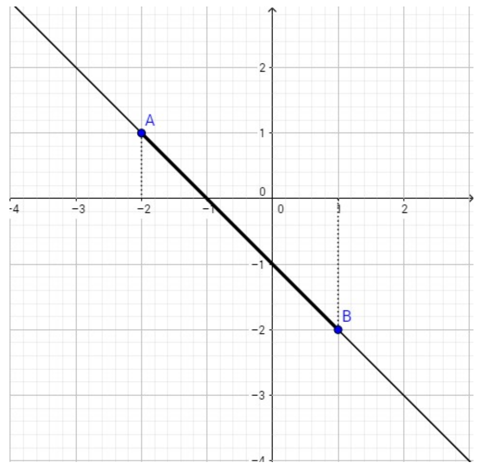

Figura 5.42:

Nesse segmento, temos que $-2 \leqslant x \leqslant 1$. *Como* $x = t$, *temos* $-2 \leqslant t \leqslant 1$. *Assim, a parametrização do segmento fica da forma:*

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t - 1 \end{cases} \quad -2 \leqslant t \leqslant 1.$$

3) Encontre uma parametrização para a parábola: $(y-2)^2 = 16(x-4)$

Resolução: *chamando* $y = t + 2$, *podemos escrever:*

$(t + 2 - 2)^2 = 16x - 64$

$t^2 = 16x - 64 \Rightarrow x = \dfrac{1}{16}t^2 + \dfrac{64}{16} \Rightarrow x = \dfrac{1}{16}t^2 + 4$

Assim, paramétricas para essa parábola ficam da forma:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{16}t^2 + 4 \\ y = t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

5.4.1 Uma parametrização para a circunferência

Consideremos a circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$. Vamos apresentar a seguir uma forma de parametrizá-la (existem outras...)

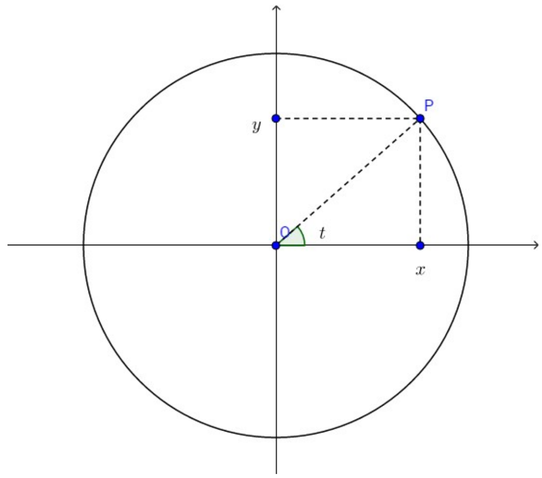

Figura 5.43:

Seja $P = (x, y)$ um ponto da circunferência. Consideremos t o ângulo que o segmento OP faz com o lado positivo do eixo-x (medido no sentido anti-horário). Podemos escrever:

$\cos t = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = a\cos t$

$\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{a} \Rightarrow y = a \operatorname{sen} t$

Entâo: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

é uma parametrização para a circunferência dada.

Vamos considerar agora a circunferência de equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \quad , \quad a > 0$$

Fazemos uma translação no sistema xOy para obtermos o sistema $x'O'y'$, onde $O' = (x_0, y_0)$. Com relação ao novo sistema, a equação cartesiana da circunferência é:

$$(x')^2 + (y')^2 = a^2$$

Assim:

$\begin{cases} x' = a\cos t \\ y' = a\operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

são paramétricas para a circunferência. Lembrando que:

$\begin{cases} x = x' + x_o \\ y = y' + y_o \end{cases} ,$

podemos reescrever as paramétricas:

$$\begin{cases} x - x_0 = a\cos t \\ y - y_0 = a \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ou seja:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + a \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

.

Exemplo 81. *1) A circunferência $x^2 + y^2 = 9$ pode ser parametrizada da seguinte forma:*

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3 \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

2) A circunferência $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 7$ pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{7}\cos\theta \\ y = -5 + \sqrt{7} \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

3) A parte da circunferência $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$ em que $1 \leqslant x \leqslant 3$ pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos\varphi \\ y = -5 + 2 \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

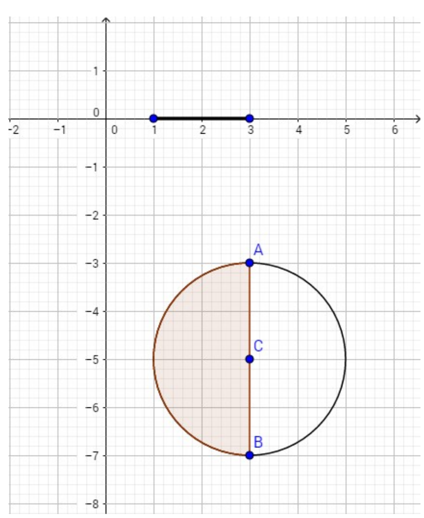

Figura 5.44:

4) Sabendo que

$$\begin{cases} x = 1 + 4\cos\rho \\ y = -4\,\mathrm{sen}\,\rho \end{cases} \qquad \rho \in [0, 2\pi]$$

são equações paramétricas de uma curva plana, encontre a equação cartesiana correspondente. Identifique a curva trabalhada.

Sabemos que $\cos^2\rho + \mathrm{sen}^2\rho = 1$. *Observando as paramétricas, podemos escrever:*

$$\cos\rho = \frac{x-1}{4} \qquad \mathrm{sen}\,\rho = \frac{y}{-4}$$

Assim: $\left(\dfrac{x-1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{-4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 16.$

A curva é uma circunferência de centro $C = (1, 0)$ *e raio* 4.

5.4.2 Parametrização da elipse

Vamos iniciar esta parte apresentando uma parametrização para uma elipse de centro na origem e focos sobre o eixo-x.

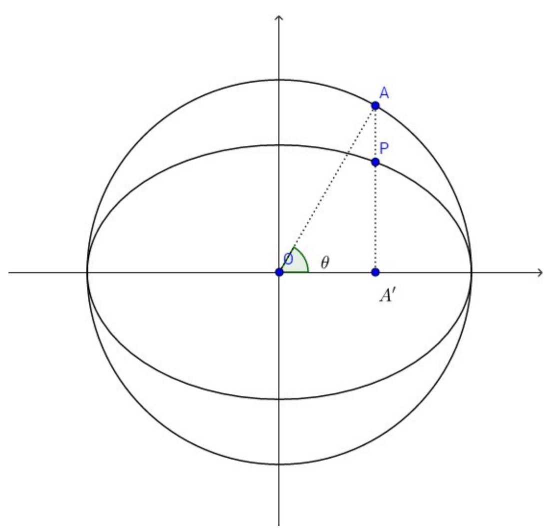

Figura 5.45:

Dada a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, tracemos uma circunferência de centro na origem e raio a. Seja $P = (x, y)$ um ponto sobre a elipse. Agora, tracemos uma reta perpendicular ao eixo-x, passando por P. Vamos chamar de A o ponto de interseção dessa reta com a circunferência localizado no mesmo quadrante do ponto P. Vamos chamar de θ o ângulo que o segmento $\overline{OA}$ faz com o eixo-x (lado positivo, ângulo medido no sentido anti-horário).

Chamando de A' o ponto de intersecção do eixo-x com a reta que passa por P e A e observando o triângulo OAA', podemos escrever:

$$\cos\theta = \frac{\mid \overline{OA'} \mid}{\mid \overline{OA} \mid} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a\cos\theta$$

(1)

Usando a equação cartesiana da elipse e usando que $x = a\cos\theta$, temos:

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2\theta \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2\theta \quad \Rightarrow \quad y^2 = b^2\operatorname{sen}^2\theta \quad \Rightarrow \quad y = \pm b\operatorname{sen}\theta$$

(2)

Temos que $b > 0$ e fazendo uma análise da figura, observamos que y e $\operatorname{sen}\theta$ têm sempre o mesmo sinal. Assim:

$$y = b\operatorname{sen}\theta$$

Para descrever todos os pontos da elipse, é necessário que $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Notemos ainda que, se $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x = a\cos\theta$ e $y = b\operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, teremos (x, y) pertencente à elipse, pois:

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\operatorname{sen}\theta)^2}{b^2} = 1$$

Dessa forma:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

são equações paramétricas para a elipse em questão.

Usando um processo semelhante, podemos parametrizar uma elipse de centro na origem e focos sobre o eixo-y.

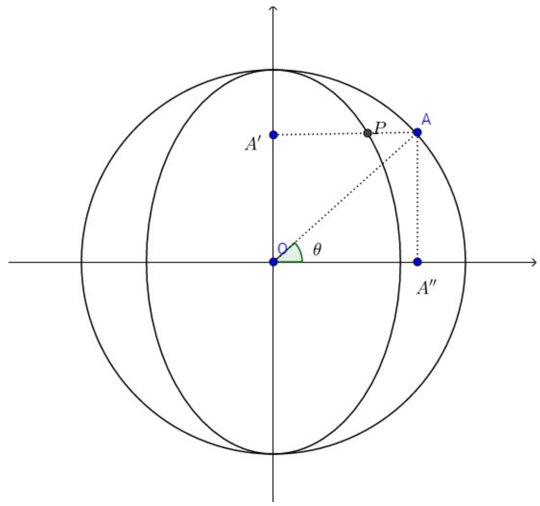

Figura 5.46:

Usando o triângulo OAA” podemos escrever:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\,\overline{AA"}\,|}{|\,\overline{OA}\,|} \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{a} \Longrightarrow y = a\operatorname{sen}\theta.$$

Como $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, temos:

$$\frac{x^2}{b^2} = 1 - \frac{y^2}{a^2} \Longrightarrow \frac{x^2}{b^2} = 1 - \frac{a^2\operatorname{sen}^2\theta}{a^2} \Longrightarrow \frac{x^2}{b^2} = \cos^2\theta \Longrightarrow x = b\cos\theta$$

pois $b > 0$ e x e $\cos\theta$ têm o mesmo sinal.

Assim:

$$\begin{cases} x = b\cos\theta \\ y = a\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{onde } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

são equações paramétricas da elipse em questão.

Vamos agora olhar os casos em que a elipse tem centro em $C = (h, k)$ e eixos paralelos aos eixos coordenados. Usaremos translação de eixos para encontrar parametrizações para as elipses:

(1) $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(2) $$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Seja o sistema $x'O'y'$ (onde $O'(h,k)$) obtido a partir de translação do sistema xOy. As equações paramétricas para os tipos de elipse citados com relação ao sistema $x'O'y'$ ficam respectivamente na forma:

(1) $\quad x' = a\cos\theta \quad y' = b \operatorname{sen}\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ e

(2) $\quad x' = b\cos\theta \quad y' = a \operatorname{sen}\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Como $x' = x - h$ e $y' = y - k$, podemos escrever:

$$(1)\ \begin{cases} x = h + a\cos\theta \\ y = k + b\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$(2)\ \begin{cases} x = h + b\cos\theta \\ y = k + a\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Essas são parametrizações para as elipses citadas acima (1) e (2) respectivamente.

Exemplo 82. *1) A elipse* $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ *pode ser parametrizada da forma:*

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 3\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

(Neste caso: $a^2 = 9$ *e* $b^2 = 4$*)*

2) A elipse $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{7} = 1$ *pode ser parametrizada da forma:*

$$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = -1 + \sqrt{7}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

(Neste caso: $a^2 = 25$ *e* $b^2 = 7$*)*

3) Dadas as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + 4\cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

encontre a equação cartesiana correspondente. Identifique a curva trabalhada.

Temos que:

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Usando que: $\cos t = \dfrac{x-2}{4}$ *e* $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{3}$, *obtemos:*

$$\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

.

5.4.3 Parametrização da hipérbole

Vamos iniciar apresentando uma parametrização para a hipérbole de centro na origem e focos sobre o eixo-x.

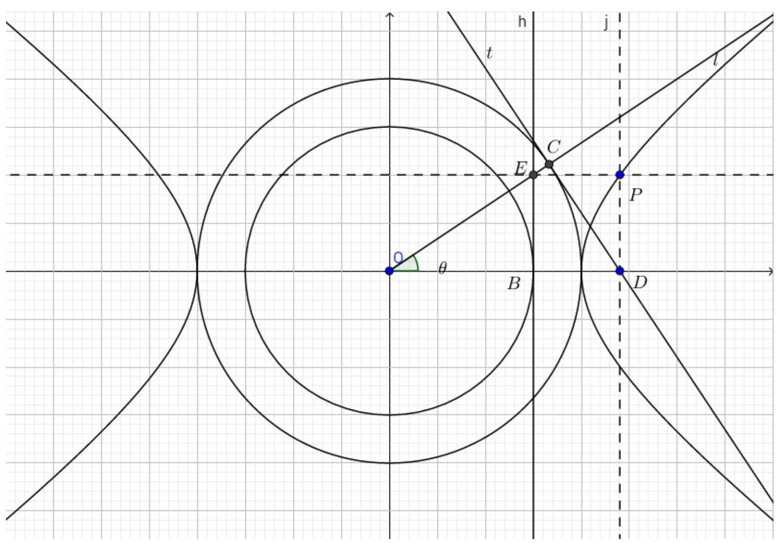

Figura 5.47:

Vamos fazer uma demonstração considerando o caso $b < a$. O caso $b > a$ é feito de forma análoga.

O procedimento que dá origem ao desenho acima é o seguinte:

1. Traçar as circunferências de centro em $(0, 0)$ e raios a e b.

2. Traçar uma semi-reta l passando pela origem. Tal reta encontra a circunferência de raio a no ponto que vamos chamar de C. A reta l forma um ângulo θ com o lado positivo do eixo-x (sentido anti-horário).

3. Traçar a reta t tangente à circunferência de raio a no ponto C. A reta t encontra o eixo-x no ponto que vamos chamar de D.

4. Traçar uma perpendicular ao eixo-x passando pelo ponto B (encontro da circunferência de raio b com o eixo-x). Esta perpendicular encontra l no ponto E. Traçar uma perpendicular ao eixo-x passando por D. Traçar uma paralela ao eixo-x passando por E. Encontramos o ponto $P(x, y)$. Veremos que tal ponto P é um ponto da hipérbole (como a figura sugere).

Do triângulo OCD, temos:

$$\cos\theta = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OD}|} = \frac{a}{x} \Longrightarrow x = a\sec\theta, \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } \theta \neq \frac{3\pi}{2}$$

Do triângulo OEB:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{|\overline{BE}|}{|\overline{OB}|} = \frac{y}{b} \Longrightarrow y = b\operatorname{tg}\theta, \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } \theta \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Notemos que, se $P(x, y)$ pode ser obtido através do processo acima, isto é, se P satisfaz $x = a\sec\theta$ e $y = b\operatorname{tg}\theta$, então x e y satisfazem a equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Logo, P pertence à hipérbole acima. Notemos ainda que as equações $x = a\sec\theta$ e $y = b\operatorname{tg}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta \neq \dfrac{3\pi}{2}$ descrevem todos os pontos da hipérbole trabalhada: como $\sec\theta$ assume todos os valores no conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, temos que $x = a\sec\theta$ assume todos os valores menores ou iguais a $-a$ e também maiores ou iguais a a. Como $\operatorname{tg}\theta$ assume todos os valores reais, temos que $y = b\operatorname{tg}\theta$ assume também todos os valores reais. Logo, as equações:

$$\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\ tg\theta \end{cases}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \ \ e \ \ \theta \neq \frac{3\pi}{2}$$

são equações paramétricas para a hipérbole de equação cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Passamos agora à parametrização da hipérbole de centro em $C = (0, 0)$ e focos sobre o eixo-y. Vamos apresentar apenas as equações, sem demonstrações:

$$\begin{cases} x = b\operatorname{tg}\theta \\ y = a\sec\theta \end{cases}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \ \ e \ \ \theta \neq \frac{3\pi}{2}$$

.

Consideremos agora as hipérboles de equações:

(1) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

(2) $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$

Usaremos translação de eixos para encontrar parametrizações para essas hipérboles. Seja o sistema $x'O'y'$ (onde $O'(h,k)$) obtido a partir da translação do sistema xOy. As equações paramétricas para os tipos de hipérbole citados com relação ao sistema $x'O'y'$ ficam respectivamente da forma:

(1) $x' = a\sec\theta \quad y' = b\,\mathrm{tg}\,\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ com $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta \neq \dfrac{3\pi}{2}$.

(2) $x' = b\,\mathrm{tg}\,\theta \quad y' = a\sec\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ com $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $\theta \neq \dfrac{3\pi}{2}$

Como $x' = x - h$ e $y' = y - k$, podemos escrever:

$$(1)\ \begin{cases} x = h + a\sec\theta \\ y = k + b\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad \text{e} \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } \theta \neq \frac{3\pi}{2}$$

$$(2)\ \begin{cases} x = h + b\,\mathrm{tg}\,\theta \\ y = k + a\sec\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad \text{e} \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } \theta \neq \frac{3\pi}{2}$$

As equações (1) e (2) acima são parametrizações para as hipérboles (1) e (2), respectivamente.

Exemplo 83. *1) A hipérbole de equação cartesiana* $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{8} = 1$ *pode ser parametrizada da seguinte forma:*

$$\begin{cases} x = 2\sec\theta \\ y = 2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad e \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \ e\ \theta \neq \frac{3\pi}{2}$$

Aqui, $a = 2$ *e* $b = 2\sqrt{2}$.

2) A hipérbole de equação cartesiana $\dfrac{(y-2)^2}{9} - \dfrac{(x+1)^2}{7} = 1$ *pode ser parametrizada da seguinte forma:*

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{7}\,\mathrm{tg}\,\theta \\ y = 2 + 3\sec\theta \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad e \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} \ e\ \theta \neq \frac{3\pi}{2}$$

Neste caso, o centro é $C = (-1, 2)$, $a = 3$ *e* $b = \sqrt{7}$.

3) Dadas as equações paramétricas abaixo, encontre a equação cartesiana correspondente. Identifique a curva trabalhada.

$$\begin{cases} x = 3 + 5\sec t \\ y = 2 + \operatorname{tg} t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \quad e \quad t \neq \frac{\pi}{2} \ e \ t \neq \frac{3\pi}{2}$$

Usando que $1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t$, *podemos escrever:* $1 + (y-2)^2 = \dfrac{(x-3)^2}{5^2}$. *Ou seja:*

$$\frac{(x-3)^2}{25} - (y-2)^2 = 1.$$

As equações paramétricas dadas representam a hipérbole que tem como equação cartesiana a equação encontrada acima.

4) Encontre uma parametrização para a parte da hipérbole $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, *onde* $x \geqslant 2$.

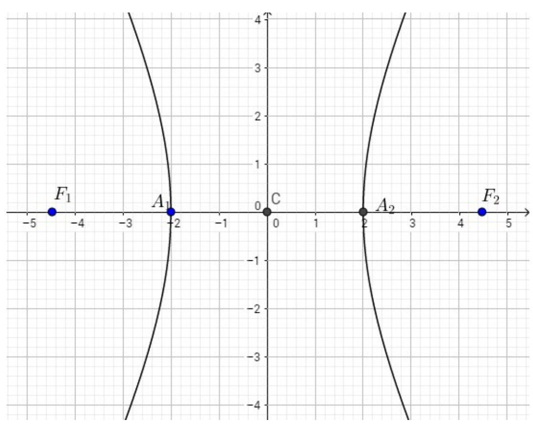

Figura 5.48:

Vamos trabalhar com a equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{16} \Rightarrow x^2 = 4\left(1 + \frac{y^2}{16}\right) \Rightarrow x = \pm 2\left(1 + \frac{y^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Observando o esboço da hipérbole, notamos que a parte da hipérbole em que $x \geqslant 2$ *é exatamente seu "ramo de direita". Assim, neste caso:*

$$x = 2\sqrt{1 + \frac{y^2}{16}}$$

Chamando $y = t$, temos:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{1 + \dfrac{t^2}{16}} \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

é uma parametrização da parte pedida.

5.5 Coordenadas Polares

Um sistema de coordenadas no plano é utilizado para localizar qualquer ponto nesse plano. O sistema de coordenadas polares é constituído de um ponto fixo e uma semi-reta orientada que passa pelo ponto fixo citado.

Figura 5.49: Sistema de Coordenadas Polares

O ponto O é chamado de polo e a semi-reta, de eixo polar.

Um ponto P do plano fica bem determinado por um par ordenado (r, θ), onde:

$| r |= dist(P, O)$.

θ: medida (em radianos) do ângulo entre o eixo polar e o segmento OP.

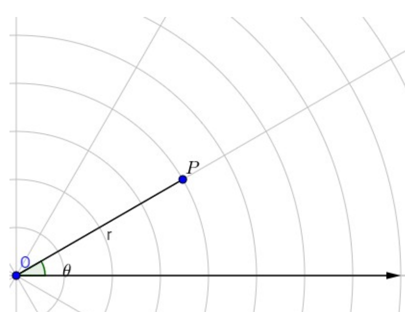

Figura 5.50:

Algumas observações devem ser feitas:

1) Se θ for medido no senti anti-horário, temos $\theta > 0$. Caso contrário, ou seja, se θ for medido no sentido horário, teremos $\theta < 0$.

2) O par ordenado $(0, \theta)$, para θ qualquer, representa o polo.

3) As coordenadas polares de um ponto não são únicas. Por exemplo, se (r, θ) representa um ponto P, o mesmo poderá ser representado por: $(r, \theta + 2\pi)$, $(r, \theta + 4\pi)$, etc.

4) Se $r \geqslant 0$, teremos $r = dist(P, O)$. Caso $r < 0$, vale o seguinte:

$$(r, \theta) = (\mid r \mid, \theta + \pi).$$

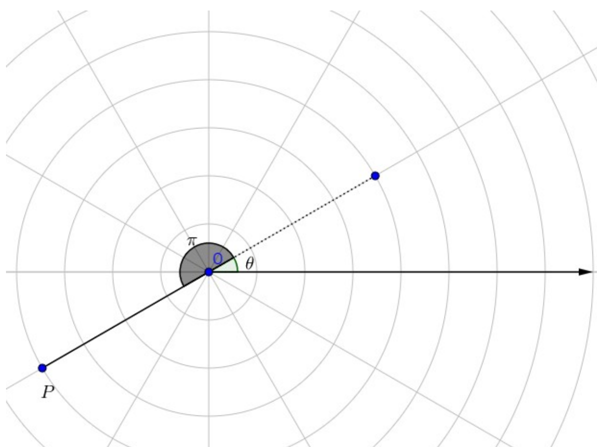

Figura 5.51:

Exemplo 84. *Representar os seguintes pontos em um sistema de coordenadas polares:*

a) $A = \left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ *b)* $B = \left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$ *c)* $C = \left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$ *d)* $D = \left(-4, -\frac{3\pi}{2}\right)$

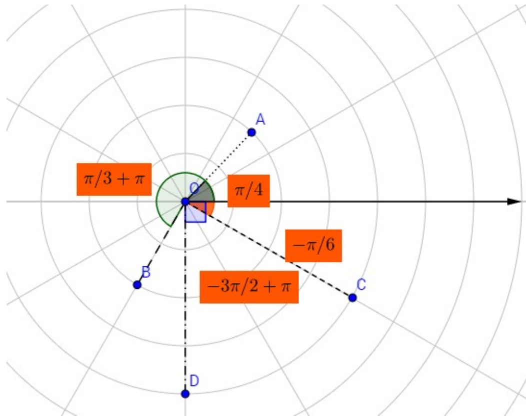

Figura 5.52:

Observação 35. *O ponto A do exemplo anterior poderia ser representado também das seguintes formas (dentre outras):*

$$A=\left(2,\frac{9\pi}{4}\right)\quad,\quad A=\left(2,-\frac{7\pi}{4}\right)\quad,\quad A=\left(-2,\frac{5\pi}{4}\right)$$

Relação entre o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas polares

Vamos considerar aqui a seguinte situação: o polo do sistema de coordenadas polares coincidindo com a origem do sistema de coordenadas cartesianas e o eixo polar coincidindo com o lado positivo do eixo das abscissas. Seja P um ponto do plano de coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ).

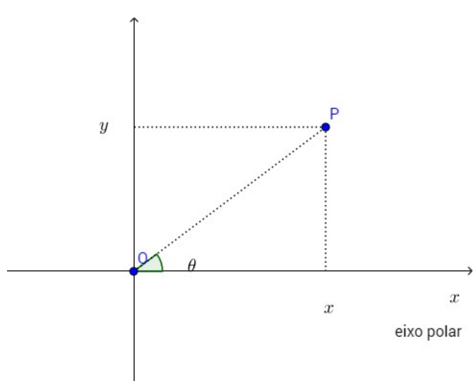

Figura 5.53:

Observando a figura, podemos escrever:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Longrightarrow \quad x = r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \Longrightarrow \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \quad se \quad x \neq 0$$

.

Observação 36. *Na figura, consideramos $r > 0$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Demonstração análoga pode ser feita para o caso em que $r < 0$, $\theta > \frac{\pi}{2}$ ou $\theta < 0$. As relações serão as mesmas.*

Exemplo 85. *1) Encontrar coordenadas polares para o ponto A que tem como coordenadas cartesianas: $A = (\sqrt{3}, -1)$.*

Temos:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad onde \quad k \in \mathbb{R}$$

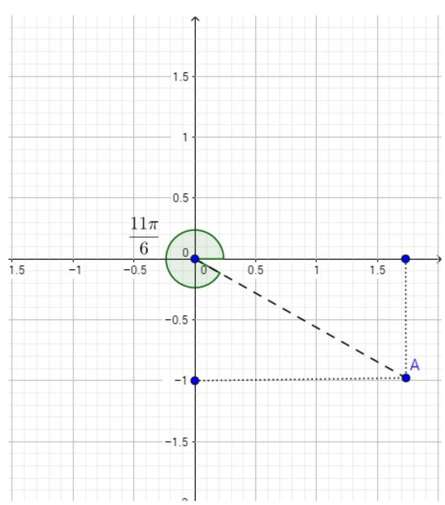

Figura 5.54:

Neste caso (observando a figura acima), coordenadas polares para o ponto A poderiam ser (dentre outras).

$$A = \left(2, \frac{11\pi}{6}\right) \quad , \quad A = \left(-2, \frac{5\pi}{6}\right)$$

2) Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto B cujas coordenadas polares são: $B = \left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$.

$$x = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x = 4\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad y = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

Logo, as coordenadas cartesianas de B são $B = (-2\sqrt{3}, -2)$

3) Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto C cujas coordenadas polares são: $C = \left(-4, \frac{7\pi}{6}\right)$

Temos:

$$x = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x = -4\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad y = -4\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

Logo, as coordenadas cartesianas de C são $C = (2\sqrt{3}, 2)$.

4) Transformar as seguintes equações (que estão em coordenadas cartesianas) em coordenadas polares:

a) $x^2 + y^2 = 4$

Como $x^2 + y^2 = r^2$*, podemos escrever:* $r^2 = 4$*. Notemos que* $r = 2$ *e* $r = -2$ *representam a mesma curva: uma circunferência de raio 2 e centro no polo. Assim, podemos dar como resposta qualquer uma das duas equações.*

b) $x = 4$

Como $x = r\cos\theta$*, podemos reescrever a equação acima da forma:*

$$r\cos\theta = 4$$

c) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

Usando que $x^2 + y^2 = r^2$ *e que* $x = r\cos\theta$*, podemos escrever:*

$$r^2 - 2r\cos\theta = 0 \Rightarrow r(r - 2\cos\theta) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 2\cos\theta$$

Se $r = 0$*, o ponto descrito é o polo (que, no nosso caso, coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas).*

Notemos que o ponto de coordenadas polares $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *satisfaz a equação* $r = 2\cos\theta$*. Esse ponto é exatamente o polo ! Assim, quando passamos a trabalhar com a equação* $r = 2\cos\theta$ *não excluímos o polo. Logo, a equação em coordenadas polares é a seguinte:*

$$r = 2\cos\theta$$

5) Transformar as seguintes equações (dadas em coordenadas polares) em coordenadas cartesianas. Identifique a curva trabalhada.

a) $r = 4\,\text{sen}\,\theta$

Vamos multiplicar os dois lados da equação por r*:*

$$r^2 = 4r\,\text{sen}\,\theta$$

$$x^2 + y^2 = 4y$$

Trabalhando a equação acima:

$$x^2+y^2 = 4y \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-4y+4-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-2)^2-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-2)^2 = 4$$

A equação representa uma circunferência de centro em $C = (0, 2)$ *e raio 2.*

b) $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

$$r = \frac{2}{1-\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad r(1-\cos\theta) = 2 \quad \Rightarrow \quad r - r\cos\theta = 2 \quad \Rightarrow \quad r = 2 + r\cos\theta$$

Usando que $x = r\cos\theta$*, podemos escrever:* $r = 2 + x$ *Elevando ambos os membros ao quadrado e usando que* $r^2 = x^2 + y^2$*, obtemos:*

$$r^2 = (2+x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = (2+x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 4+4x+x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4+4x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 = 4(x+1)$$

A equação cartesiana correspondente é $y^2 = 4(x+1)$ *e representa uma parábola.*

c) $r = \dfrac{6}{3 + \operatorname{sen}\theta}$

Temos:

$$r = \frac{6}{3 + \operatorname{sen}\theta} \quad \Rightarrow \quad r(3 + \operatorname{sen}\theta) = 6 \quad \Rightarrow \quad 3r + r\operatorname{sen}\theta = 6$$

Usando que $r\operatorname{sen}\theta = y$, *temos:*

$$3r + r\operatorname{sen}\theta = 6 \quad \Rightarrow \quad 3r + y = 6 \quad \Rightarrow \quad 3r = 6 - y$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e usando que $r^2 = x^2 + y^2$, *obtemos:*

$$(3r)^2 = (6-y)^2 \quad \Rightarrow \quad 9r^2 = 36 - 12y + y^2 \quad \Rightarrow \quad 9(x^2+y^2) = 36 - 12y + y^2 \quad \Rightarrow$$
$$9x^2 + 9y^2 = 36 - 12y + y^2 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 8y^2 + 12y = 36 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 8\left(y^2 + \frac{12}{8}y\right) =$$
$$36 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 8\left(y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) = 36 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 8\left[\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] = 36 \quad \Rightarrow$$
$$9x^2 + 8\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{2} = 36 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 8\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{81}{2}$$

A equação representa uma elipse.

d) $r\cos\theta = -5$

Usando que $r\cos\theta = x$, *temos:*

$$r\cos\theta = -5 \quad \Rightarrow \quad x = -5.$$

A equação representa uma reta.

5.5.1 Circunferência em coordenadas polares

1) Circunferência de centro no polo e raio $a > 0$

Equação polar: $r = a$

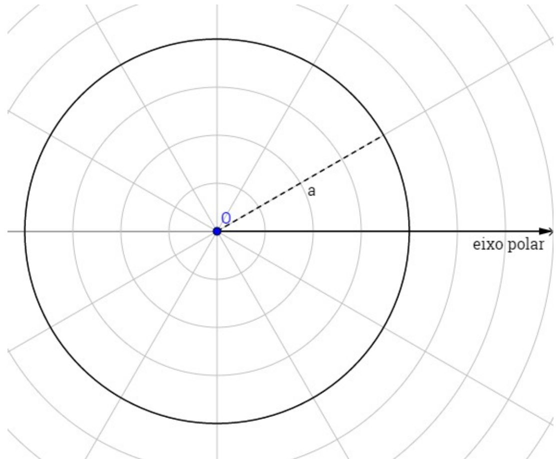

Figura 5.55:

2) Circunferência de raio $a > 0$ e centro em $C = (a, 0)$ (em coordenadas polares).

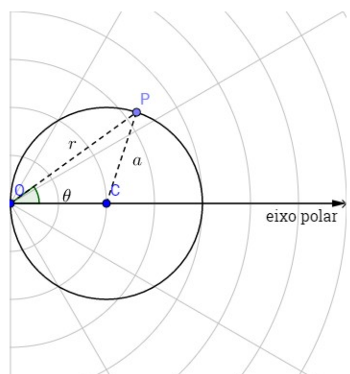

Figura 5.56:

$P = (r, \theta)$ (coordenadas polares).

Observando o triângulo OPC e usando a Lei dos cossenos, temos:

$| CP |^2 = | OC |^2 + | OP |^2 - 2 | OC || OP | \cos\theta$

$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$

$r^2 - 2ar\cos\theta = 0$

$r(r - 2a\cos\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0$ ou $r = 2a\cos\theta$

Se $r = 0$, o ponto descrito é o polo.

Notemos que o ponto (polo) que tem $r = 0$ continua satisfazendo a equação $r = 2a\cos\theta$.

Basta pensarmos que as coordenadas polares $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ representam o polo e satisfazem a referida equação. Logo, a circunferência deste caso tem equação:

$$r = 2a\cos\theta$$

3) Circunferência de raio $a > 0$ e centro em $C = (a, \pi)$ (em coordenadas polares).

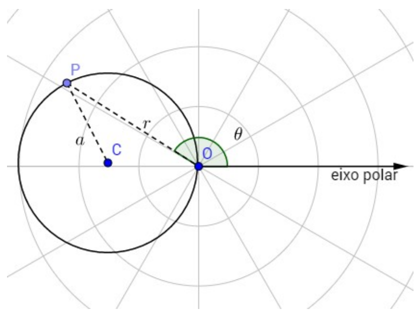

Figura 5.57:

De forma análoga ao caso anterior, utilizamos o triângulo OPC e a lei dos cossenos e o arco $\pi - \theta$ no lugar de θ (baseando-se na demonstração anterior). Assim, obtemos:

$$r = -2a\cos\theta$$

4) Circunferência de raio $a > 0$ e centro em $C = \left(a, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ (em coordenadas polares)

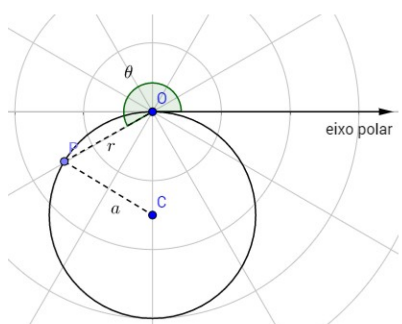

Figura 5.58:

$P = (r, \theta)$ (coordenadas polares)

Observando o triângulo OPC e usando a lei dos cossenos (para o arco $\dfrac{3\pi}{2} - \theta$), temos:

$$\mid CP \mid^2 = \mid OP \mid^2 + \mid OC \mid^2 - 2 \mid OP \mid\mid OC \mid \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$$

$$a^2 = r^2 + a^2 - 2ra\left(\frac{\cos 3\pi}{2}\cos\theta + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$0 = r^2 - 2ar(-\operatorname{sen}\theta)$$

$$r^2 + 2ar\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$r(r + 2a\operatorname{sen}\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0 \text{ ou } r + 2a\operatorname{sen}\theta = 0$$

Se $r = 0$, o ponto descrito é o polo. Notemos que o polo também é contemplado na equação $r = -2a\operatorname{sen}\theta$. Basta usarmos as coordenadas polares $(0, 0)$ para representar o pólo ($(0, 0)$ satisfaz a equação $r = -2a\operatorname{sen}\theta$). Logo, a equação da circunferência deste caso é:

$$r = 2a\operatorname{sen}\theta$$

5) Circunferência de raio $a > 0$ e centro em $C = \left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ (em coordenadas polares).

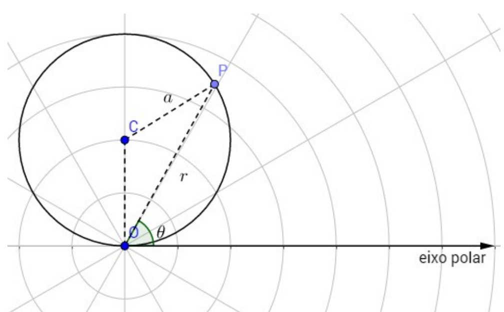

Figura 5.59:

Analogamente ao caso anterior, podemos mostrar a equação polar da referida circunferência é:

$$r = 2a\operatorname{sen}\theta$$

Referências

[1] Lehmann, Charles H., *Geometria Analítica*, Editora Globo, Porto Alegre.

[2] Santos, Reginaldo J., *Matrizes, vetores e geometria analítica*, Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte.

[3] Winterle, Paulo, *Vetores e Geometria Analítica*, Editora Pearson, São Paulo.