

LISTA DE EXERCÍCIOS - INVERSAS

1) Considere as matrizes invertíveis $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Considere a matriz $C = A^t B$. **Sobre a matriz C^{-1}** , podemos afirmar que a soma dos elementos de sua **última linha** vale:

a). $\frac{5}{2}$ b). -2 c). $\frac{3}{4}$ d). $\frac{3}{2}$ e). $\frac{1}{4}$

Resposta: letra (d).

2) Considere as matrizes A , B e C^{-1} dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabendo que $CMA^{-1} = -3B^t$, **sobre a matriz M** , podemos afirmar que:

- a). a soma dos elementos de sua diagonal principal é 3.
- b). a soma dos elementos de sua última coluna é -6 .
- c). a soma dos elementos de sua primeira coluna é -12 .
- d). a soma dos elementos de sua primeira linha é 5.
- e). a soma dos elementos de sua última linha é 1.

Resposta: letra (b).

3) Considere a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Considere a matriz

$C = A^t$ (a matriz transposta de A). **Sobre a matriz C^{-1}** , podemos afirmar que a soma dos elementos de sua **última coluna** vale:

2

- a). $\frac{5}{2}$ b). $-\frac{3}{4}$ c). -2 d). $\frac{1}{2}$ e). $\frac{3}{2}$

Resposta: letra (a).

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

4) Considere as matrizes A (invertível) e B dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $A^{-1}M = 2B^t$, **sobre a matriz M** , podemos afirmar que:

- a). a soma dos elementos de sua diagonal principal é 3.
b). a soma dos elementos de sua última coluna é 10.
c). a soma dos elementos de sua primeira coluna é -12 .
d). a soma dos elementos de sua primeira linha é 5.
e). a soma dos elementos de sua última linha é 2.

Resposta: letra (b).

$$M = \begin{bmatrix} -8 & 14 \\ 2 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

5) Considere a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Considere a matriz } C = A^t \text{ (a matriz transposta}$$

de A). **Sobre a matriz C^{-1}** , podemos afirmar que a soma dos elementos de sua **última coluna** vale:

- a). $\frac{5}{2}$ b). $-\frac{3}{4}$ c). -2 d). $\frac{5}{4}$ e). $\frac{3}{2}$

Resposta: letra (d).

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

6) Considere as matrizes A (invertível) e B dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $MA^{-1} = -3B^t$, **sobre a matriz M** , podemos afirmar que:

- a). a soma dos elementos de sua diagonal principal é 3.
 b). a soma dos elementos de sua última coluna é 10.
 c). a soma dos elementos de sua primeira coluna é -12 .
 d). a soma dos elementos de sua primeira linha é 5.
 e). a soma dos elementos de sua última linha é -3 .

Resposta: letra (e).

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

7) Encontre a matriz inversa das seguintes matrizes, se possível:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

Resposta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

E não é invertível.

8) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ invertível, podemos afirmar que a soma dos elementos da terceira coluna de A^{-1} (inversa de A) vale:

a). $-\frac{5}{2}$.

b). $-\frac{1}{2}$.

c). $\frac{7}{2}$.

d). -1 .

(CORRETA) e). -6 .

9) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $a, b \in R$. Sabendo que $A^{-1} = B$, temos que a soma $a + b$ vale:

(CORRETA) a). $-\frac{11}{6}$.

b). $\frac{13}{6}$.

c). $\frac{7}{2}$.

d). 4.

e). $\frac{1}{6}$.

Sugestões: Exercícios 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 e 2.1.5 da seção 2.1 do livro texto.

LISTA DE EXERCÍCIOS - DETERMINANTES

1) Determine os valores de $k \in R$ para os quais $\det \begin{bmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{bmatrix} = 0$.

Resposta: 0 ou 2.

2) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} t+3 & 0 & 1 \\ 5 & t-2 & 1 \\ 6 & t-2 & t+4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: $\det A = (t+2)(t-2)(t+4)$, $\det B = -54$, $\det C = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, $\det D = 7$, $\det E = 5$, $\det F = 372$

3) Faça o que se pede.

a). Calcule o determinante da matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b). Se B é um matriz de tamanho 4×4 tal que $\det B = b$, quanto vale o determinante da matriz $C = \frac{1}{3}B^2B^t$? Justifique sua resposta.

Resposta: a). 34. b). $\frac{b^3}{81}$.

4) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Se C é uma matriz 4×4 tal que $\det C = -8$, então o **determinante** da matriz CA^{-1} vale:

- a). -10.
- b). 4.
- c). 16.
- d). -4.
- e). -16.

Resposta: letra (b).

5) A partir de uma matriz A de tamanho 3×3 invertível, foi feita a seguinte operação elementar para se obter a matriz B (troca de posição de duas linhas):

$$A \quad \underline{1^a \text{ linha} \leftrightarrow 3^a \text{ linha}} \quad B$$

Sabendo que $\det B = 4$, o valor do determinante de $2A^{-1}$ é:

- a). $\det 2A^{-1} = -4$
- b). $\det 2A^{-1} = -\frac{1}{2}$
- c). $\det 2A^{-1} = \frac{1}{2}$
- d). $\det 2A^{-1} = -2$
- e). $\det 2A^{-1} = 2$

8

Resposta: letra (d).

6) Considere a matriz A de tamanho 4×4 invertível tal que sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & -1 & 0 \\ b & -1 & c & 2 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Calcule o valor do determinante de A , sabendo que $\det \begin{bmatrix} a & -1 \\ b & c \end{bmatrix} = 5$.

Resposta: $-\frac{1}{3}$.

7) A partir de uma matriz A de tamanho 3×3 invertível, foi feita a seguinte operação elementar para se obter a matriz B (troca de posição de duas linhas):

$$A \quad \underline{1^a \text{ linha}} \leftrightarrow \underline{3^a \text{ linha}} \quad B$$

Sabendo que $\det B = -5$, o valor do determinante de A^{-1} é:

- a). $\det A^{-1} = \frac{5}{2}$ b). $\det A^{-1} = -\frac{1}{5}$ c). $\det A^{-1} = -5$ d). $\det A^{-1} = 5$
e). $\det A^{-1} = \frac{1}{5}$

Resposta: letra (e).

8) Considere uma matriz A de tamanho 3×3 tal que $\det A = -4$. Seja B a matriz

$$B = \frac{1}{2}A^2A^tA^{-1}. \text{ O determinante de } B \text{ vale:}$$

- a). $\det B = 8$ b). $\det B = 2$ c). $\det B = 32$ d). $\det B = \frac{1}{8}$
 e). $\det B = \frac{1}{2}$

Resposta: letra (b).

9) Dadas as matrizes M e N abaixo, sabendo que $\det N = 2$, calcule os valores de:

- a). $\det M$
 b). $\det \left(-\frac{1}{3}M \right)$.

Justifique os passos da resolução.

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} r & 5r + x & -2a \\ s & 5s + y & -2b \\ t & 5t + z & -2c \end{bmatrix}$$

Resposta: a). -1 . b). $\frac{1}{27}$.

10) O determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

vale:

- (CORRETA) a). 96.
 b). -84 .
 c). 90.
 d). -40 .
 e). 20.

10

11) O determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

vale:

(CORRETA) a). -128 .

b). -112 .

c). 40 .

d). 60 .

e). -20 .

12) Seja A uma matriz 4×4 . A matriz C abaixo foi obtida a partir de A fazendo-se as seguintes operações elementares:

$$\mathbf{A} \underbrace{2L_1 \rightarrow L_1}_I \quad \mathbf{B} \underbrace{L_3 + 5L_2 \rightarrow L_3}_{II} \quad \mathbf{C}$$

(I): Multiplicação da linha 1 por 2.

(II): soma da linha 3 com a linha 2 multiplicada por 5.

Se $\det A = 3$, então o valor de $\det C$ é:

(CORRETA) a). 6 .

b). 30 .

c). $\frac{3}{2}$.

d). $\frac{3}{10}$.

e). 12 .

13) Seja A uma matriz 4×4 . A matriz C abaixo foi obtida a partir de A fazendo-se as seguintes operações elementares:

$$\mathbf{A} \underbrace{L_1 - 8L_2 \rightarrow L_1}_I \quad \mathbf{B} \underbrace{6L_4 \rightarrow L_4}_{II} \quad \mathbf{C}$$

(I): soma da linha 1 com a linha 2 multiplicada por -8 .

(II): multiplicação da linha 4 por 6.

Se $\det A = -\frac{1}{3}$, então o valor de $\det C$ é:

(CORRETA) a). -2 .

b). 16.

c). $-\frac{1}{18}$.

d). $\frac{1}{144}$.

e). -2 .

14) Considere as afirmações abaixo:

(I) Se A e B são matrizes 2×2 diagonais, então $AB = BA$.

(II) Seja A uma matriz $n \times n$. Se $B = AA^t$, então $B^t = B$.

(III) Seja A uma matriz 2×2 . Então: $\det(3AA^tA^{-1}) = 3 \det A$.

Sobre as afirmações acima, podemos afirmar que:

(CORRETA) a). Somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

b). Somente a afirmação (I) é verdadeira.

c). Todas as afirmações são verdadeiras.

d). Somente a afirmação (II) é verdadeira.

e). Somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

15) Considere as afirmações abaixo:

(I) Se A e B são matrizes $n \times n$, onde $B = A + A^t$, então $B^t = B$.

(II) Seja A uma matriz 3×3 . Então: $\det (2A^{-1}A^tA) = 8 \det A$.

(III) Se A e B são matrizes 2×2 diagonais, então: $AB = BA$.

Sobre as afirmações acima, podemos afirmar que:

a). Somente as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

b). Somente a afirmação (I) é verdadeira.

(CORRETA) c). Todas as afirmações são verdadeiras.

d). Somente a afirmação (II) é verdadeira.

e). Somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

16) Considere as afirmações abaixo:

(I) Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $AB = BA$, então $(AB)^t = A^tB^t$.

(II) Se A e B são matrizes 2×2 invertíveis, então $A + B$ é invertível.

(III) Seja A uma matriz 4×4 tal que $\det A = 2$. Então: $\det \left(\frac{1}{2}A^2A^tA^{-1} \right) = \frac{1}{4}$.

Sobre as afirmações acima, podemos afirmar que:

(CORRETA) a). Somente as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

b). Somente a afirmação (I) é verdadeira.

c). Todas as afirmações são verdadeiras.

d). Somente a afirmação (III) é verdadeira.

e). Somente as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Sugestões: Exercícios 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.5, 2.2.6 e 2.2.7 da seção 2.2 do livro texto.