

LISTA DE EXERCÍCIOS - MATRIZES

1) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre a matriz $D = 3A + 4B - 2C$.

Resposta: $D = \begin{bmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{bmatrix}$.

2) Encontre os valores de x, y, z e w tais que:

$$3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$$

Resposta: $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$.

3) Dadas as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, encontre AB e BA , se possível.

Resposta: $AB = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$

Não é possível calcular BA .

4) Calcule os seguintes produtos, quando possível:

a). DE b). ED c). EF d). FE

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2

Resposta: $DE = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, $ED = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$, $EF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -6 \\ -9 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$,
não é possível fazer FE .

5) Dadas as matrizes A, B e C abaixo, calcule a matriz X de cada um dos itens abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

a). $A + 2X = B^t + 3A$.

b). $2C - \frac{1}{2}X^t = BA + 5C$.

Resposta: a). $X = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -1 \\ -1 & \frac{9}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. b). $X = \begin{bmatrix} -18 & -6 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}$.

6) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. O **traço** da matriz A , indicado por $tr A$, é a soma dos elementos da diagonal principal de A , ou seja: $tr A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

a). Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

calcule $tr A$ e $tr B$.

b). Se C e D são matrizes 3×3 , prove que $tr (C + D) = tr C + tr D$.

Resposta: $tr A = -\frac{9}{5}$ $tr B = \frac{11}{2}$.

7). Considere as matrizes A , B e C e a igualdade abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(X + A) = (3B + C)^t$$

Sobre a matriz X , podemos afirmar que:

- a). X é uma matriz 3×2 e sua terceira linha é $\begin{bmatrix} -1 & 6 \end{bmatrix}$.
- b). X é uma matriz 2×3 e a sua primeira linha é $\begin{bmatrix} 14 & 20 & -11 \end{bmatrix}$.
- c). X é uma matriz 2×3 e a soma dos elementos de sua primeira coluna é 25.
- (CORRETA) d). X é uma matriz 3×2 e a soma dos elementos de sua segunda linha é 15.
- e). X é uma matriz 3×2 e a soma dos elementos de sua última linha é 8.

8). Considere as matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix} \quad b \in R \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Sabendo que $AB = C$, então valor de b deve satisfazer:

- a). $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{2}$.
- b). $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{2}$.
- c). $-3 < b < -1$.

(CORRETA) d). $4 < b < 6$.

e). $7 < b < 9$.

4

9) Considere as matrizes A , B e C e a igualdade abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(X + A^t) = 2(B + C)$$

Sobre a matriz X , podemos afirmar que:

a). X é uma matriz 3×2 e sua primeira linha é $\begin{bmatrix} 2 & 21 \end{bmatrix}$.

b). X é uma matriz 2×3 e a sua primeira linha é $\begin{bmatrix} -2 & 16 & 1 \end{bmatrix}$.

(CORRETA) c). X é uma matriz 2×3 e a soma dos elementos de sua última coluna é -19 .

d). X é uma matriz 2×3 e a soma dos elementos de sua segunda linha é 4.

e). X é uma matriz 3×2 e a soma dos elementos de sua primeira linha é 9.

Sugestões: Exercícios 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6 e 1.1.7 da seção 1.1 do livro texto.

LISTA DE EXERCÍCIOS - SISTEMAS LINEARES

1) Faça o que se pede.

a). Resolva o seguinte sistema pelo método de Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \\ -3x - 5y + z = 1 \end{cases}$$

Explicita os passos da resolução.

b). Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $AX = B$, verifique se $X_o = \frac{9}{7}X_1 - \frac{3}{7}X_2$ também é solução para esse sistema.

Resposta: a). $x = -4, y = 1, z = -6$. b). Não.

2) Faça o que se pede.

a). Resolva o seguinte sistema pelo método de Gauss-Jordan:
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 12 \\ 5x + 6y - 6z = 0 \\ x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

Explicita os passos da resolução.

b). Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $AX = B$, mostre que $X_o = \frac{5}{3}X_1 - \frac{2}{3}X_2$ também é solução para esse sistema.

Resposta: a). $x = -12, y = 11, z = 1$.

3) Considere o seguinte sistema linear:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ \quad \quad 2y - 4z = b \\ x - 2y + 5z = c \end{cases}, \text{ onde}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$. A condição sobre a, b e c para que o sistema possua solução é:

a). $a = c$

b). $a + b + c = 0$

c). $c + 2b - a = 0$.

d). $a + 2c - b = 0$.

6

e). $c = 0$.

Resposta: letra (c).

4) Considere o sistema:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ \quad \quad 2y - 4z = b \\ x + y - z = c \end{cases}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a). Qual deve ser a condição sobre a, b e c para que o sistema possua infinitas soluções?

b). Resolva o sistema para $a = b = c = 0$.

Resposta: a). $b = 2(a - c)$. b). $(-z, 2z, z); z \in \mathbb{R}$.

5) Considere o sistema:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad \quad + 2y - 4z = -2 \\ x + y + cz = 2 \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

a). Resolva o sistema para $c = -1$.

b). Resolva o sistema para $c = 2$.

Resposta: a). $(3 - z, -1 + 2z, z), z \in \mathbb{R}$. b). $x = 3, y = -1, z = 0$.

6) Resolva o sistema:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad \quad 2y - 4z = 1 \\ x + y + 2z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resposta: $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ (solução única).

7) A partir da matriz aumentada de um sistema de 4 equações e 3 variáveis, fizemos algumas operações elementares até obtermos a seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2 + 2k + 1 & 1 - k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Podemos afirmar então:

- a). o sistema em questão não possui solução, qualquer que seja o valor de k .
- b). o sistema possui solução para todo $k \in R - \{1\}$.
- c). o sistema possui solução para todo $k \in R - \{-1\}$.
- d). $x = 3 - 2z$ e $y = 1 + z$, $z \in R$ é a solução do sistema independentemente do valor de k .
- e). se $1 - k \neq 0$, o sistema possui solução única.

Resposta: letra (c).

8) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ x + y + 4z & = 7, \text{ onde } k \in R. \\ x + (11 - k^2)z & = k \end{cases}$$

- a). Para quais valores de k o sistema possui solução única? Justifique.
- b). Qual é o conjunto solução do sistema quando $k = 3$? Justifique.

Resposta: a). $k \in R - \{3, -3\}$. b). Não há solução.

$$9) \text{ Resolva o sistema linear: } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2y - 4z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + 5y - 8z = 5 \end{cases}$$

Resposta: sistema sem solução.

10) O sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = -4 \end{cases}$$

tem o mesmo conjunto solução de:

$$\text{(CORRETA) a). } \begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = -1 \\ x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$$

$$\text{b). } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = -1 \\ x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\text{c). } \begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ x_3 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\text{d). } \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = -1 \\ x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\text{e). } \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = -1 \\ x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$$

11) A partir da matriz aumentada de um sistema, fizemos algumas operações elementares e chegamos na seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4a^2 - a & a \end{array} \right] \quad a \in R.$$

Para quais valores de $a \in R$ o sistema possui solução única?

a). $a \in R$.

b). $a \in R - \{0\}$.

c). $a \in R - \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

d). $a = 0$.

CORRETA e). $a \in R - \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$.

12) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 3 & a \end{bmatrix}$. O valor de a para que o sistema linear associado $AX = B$ tenha solução única satisfaz:

a). $a \in R - \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$.

b). $a \in R$.

c). $a = 2\sqrt{3}$ ou $a = -2\sqrt{3}$.

d). $a = 12$ ou $a = -12$.

e). $a \in R - \{12, -12\}$.

Sugestões: Exercícios 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6 e 1.2.10 da seção 1.2 do livro texto.