MAT154: Cálculo 1

Beatriz Ribeiro, Flaviana Ribeiro e Reginaldo Braz

Com a colaboração dos professores: André Hallack, Frederico Sércio,

Sérgio Vasconcelos e Tatiana Gouveia

Departamento de Matemática - UFJF

Versão 2023-3

[0]Baseada na apostila da Professora Maria Julieta Ventura Carvalho de Araújo.

Sumário

Capítulo 0

Pré-requisitos

O objetivo desse capítulo é apresentar uma coleção de propriedades e resultados sobre números reais e outros temas que serão utilizados ao longo do curso e devem ser relembrados por todos. Você deve ler esse capítulo com calma, refazendo os exemplos apresentados e, em seguida, os exercícios propostos. Você pode procurar seu professor, os monitores e os tutores para tirar dúvidas e solicitar sugestões de bibliografia para complementar algum tema que julgue necessário. Bons estudos!

0.1 Notação matemática

A matemática é uma linguagem e, como tal, tem suas regras de escrita. Por exemplo, quando escrevemos em português, sabemos que perguntas são pontuadas com o símbolo de interrogação e que frases devem começar com letra maiúscula. Conhecer os significados dos símbolos utilizados e as regras de utilização é essencial não só para compreender corretamente os textos, mas também para escrever de forma que sejamos compreendidos pelos demais. O mesmo vale para textos matemáticos.

Ao longo dessa apostila, utilizaremos noções de lógica matemática e símbolos lógicos que vamos apresentar brevemente nessa seção. Alguns símbolos você já conhece bem, por exemplo o $=$, que é colocado entre duas expressões matemáticas exatamente para mostrar que elas são iguais. Mesmo que você esteja continuando um raciocínio, não deve usar igualdade quando duas expressões não são iguais. Por exemplo, digamos que $2x^2 - 2 = 0$, sabemos que $0 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1)$ e, como consequência, podemos dividir tudo por 2 e obter $0 = x^2 - 1$. No entanto, não podemos escrever $2(x^2 - 1) = x^2 - 1$. Quando duas expressões não são iguais, podemos usar o símbolo $\neq$.

Lembre ainda que expressões matemáticas não devem ser lidas como frases de português, fazendo o que aparecer primeiro, mas sim respeitando prioridades. Você já sabe, mas não custa lembrar, a importância também dos parênteses, que servem para isolar expressões e indicando prioridades ao leitor. O uso de parênteses, em geral, não é opcional, pois muda a completamente o siginificado da expressão. Por exemplo

$$4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 12 + 8 = 20$$

é completamente diferente de

$$4 \cdot (3 + 4) \cdot 2 = 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56$$

Isso ocorre porque, em geral, na leitura de uma expressão, multiplicações têm prioridade em cima de somas, mas, no segundo caso, utilizamos os parênteses para indicar que devemos priorizar a soma $3+4$. Outros exemplos desse tipo:

$$(-5)^2 = 25, \text{ mas } -5^2 = -25$$

$$2(x+1)+1 = 2x+3, \text{ mas } 2x+1+1 = 2x+2$$

Vamos pensar agora em implicações do tipo *se... então...*. Essa estrutura é comumente usada em matemática para apresentar uma noção de consequência:

Se chover, então o chão da rua ficará molhado.

Se o chão da rua não estiver molhado, podemos concluir que não choveu. Agora, se não chover, não podemos concluir que o chão da rua estará seco. De fato, ele pode ser molhado de outra forma. Ainda, se o chão da rua estiver molhado, não podemos concluir que choveu. Já que, novamente, ele pode ter sido molhado em outra situação. Assim, é importante notar qual é a *hipótese*, isto é, condição que deve acontecer, e qual é a *tese*, condição implicada pela inicial. Vamos passar a exemplos matemáticos.

Se $x = 5$, então $x^2 = 25$.
Se $2x^2 - 2 = 0$, então $x^2 - 1 = 0$.

Como vamos lembrar, se $x^2 = 25$, não podemos afirmar que $x = 5$. De fato, $(-5)^2$ também é 25. Ainda, se $x \neq 5$, não podemos afirmar que $x^2 \neq 25$, porque, novamente, podemos usar o exemplo do -5. Agora, se $x^2 \neq 25$, certamente $x \neq 5$. Faça esse mesmo raciocínio para a segunda afirmação apresentada.

Para representar a implicação *se... então...*, usamos o símbolo $\Rightarrow$.

$$x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$$

$$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

Note que o símbolo é uma seta dupla e não $\to$. Essa seta simples tem uma noção de aproximação que será vista mais pra frente no curso, pode ser lida como *tende a*. Veja que isso significa que não podemos usar a seta simples apenas para indicar que estamos continuando um raciocínio, já que ela tem outro significado matemático.

Voltando à expressão *se... então...*, podemos pensar ainda nas cojunções *e* e *ou*.

Se chover ou alguém o regar, o jardim ficará molhado.

Se chover e o jardim for descoberto, ele ficará molhado.

Veja que na primeira frase, qualquer uma das hipóteses *chover* ou *alguém o regar*, o jardim ficará molhado. Não é necessário que as duas ocorram, embora o jardim ainda fique molhado caso isso aconteça. Já na segunda frase, é necessário que as duas hipóteses aconteçam, pois um jardim coberto não ficará molhado se chover. Podemos pensar assim também na matemática:

Se x é primo ou $x = 2$, então $x \neq 4$.

Se x é par e x é primo, então $x = 2$.

A primeira expressão é verdadeira mesmo que só uma das hipóteses seja verdadeira, mas a segunda pode ser falsa se apenas x é par for verdadeira, por exemplo.

Agora, vejamos o seguinte exemplo, onde usamos a noção ± 1, que significa que estamos considerando tanto 1 quanto -1:

$$x = \pm 1 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Na primeira, $x = \pm 1$ é a hipótese e $x^2 = 1$ é a tese. Na segunda, hipótese e tese trocam de papéis. No entanto, ambas expressões são verdadeiras. Nesse caso, podemos usar uma implicação dupla $\Leftrightarrow$ e escrever matematicamente:

$$x = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

Lemos isso como $x = \pm 1$ *se e somente se* $x^2 = 1$ e entedemos exatamente que há duas implicações, uma em cada direção.

Ao longo desse capítulo, outros símbolos matemáticos serão relembrados, como $\subset$ e $\leq$. Fique atento às definições e ao uso dos vários símbolos apresentados.

0.2 Conjuntos Numéricos

Um conjunto é uma coleção de elementos. A relação básica entre um objeto e o conjunto é a relação de pertinência: quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x pertence a A e representamos como $x \in A$. Caso x não esteja no conjunto A, dizemos que x não pertence a A, isto é, $x \notin A$. Um conjunto sem elementos é dito vazio e representado por $\emptyset$.

Dados dois conjuntos A e B, podemos ter as seguintes relações:

- $A \subset B$ (lê-se A está contido em B), isto é, A é um subconjunto de B: nesse caso, todo elemento de A é também um elemento de B, mas pode ser que B tenha elementos que não pertençam a A. Essa relação pode ser escrita ainda como $B \supset A$ (lê-se B contém A).
- $A = B$, isto é, todo elemento de A é também um elemento de B e todo elemento de B é também um elemento de A, ou usando o item anterior, $A \subset B$ e $B \subset A$.
- $A \cap B$ é o conjunto interseção de A e B, isto é, o conjunto de todos os elementos que pertencem tanto a A quanto a B. Observe que se $A \subset B$, então $A \cap B = A$. Também observe que $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.
- Se dois conjuntos A e B são tais que $A \cap B = \emptyset$, então dizemos que A e B são disjuntos.
- $A \cup B$ é o conjunto união de A e B, isto é, o conjunto de todos os elementos que pertecem a A e/ou a B. Observe que se $A \subset B$, então $A \cup B = B$. Ainda, observe que $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B$.

Alguns conjuntos são bem conhecidos:

- Conjunto dos naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Conjunto dos inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

- Conjunto dos racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{n}{m} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

Veja ainda que todo número natural é um número inteiro e todo número inteiro é um número racional (basta ver o número n como $n/1$), isto é, em linguagem de conjuntos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Cada número racional tem também uma representação decimal finita ou como uma dízima periódica. Por outro lado, todo número que tem uma representação decimal finita e toda dízima periódica são números racionais.

$$\frac{1}{4} = 0,25 \qquad \frac{12}{5} = 2,4 \qquad \frac{5}{12} = 0,4166\cdots = 0,41\underbrace{\overline{6}}_{\text{período}} \qquad \frac{1}{3} = 0,33\cdots = 0,\underbrace{\overline{3}}_{\text{período}}$$

Existem ainda números que não podem ser representados na forma $\dfrac{n}{m}$, onde $n, m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$, isto é, números cuja expansão decimal não é finita e nem periódica. Tais números são ditos irracionais e representados por $\mathbb{Q}^c$. Por exemplo:

$$2,101001000100001... \qquad \sqrt{2} \cong 1,41421... \qquad \pi \cong 3,1415927... \qquad e \cong 2,7182818....$$

Observe que, pela definição acima, os conjuntos dos racionais e dos irracionais não tem elementos em comum, isto é, são disjuntos ($\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$). O conjunto dos números reais é a união de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^c$, isto é:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$$

Observação 0.1. Algumas observações sobre operações com números inteiros, racionais e irracionais:

1. Observe que o conjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é fechado para a soma, subtração e produto, isto é, se a e b são números inteiros, então $a+b$, $a-b$ e $a \cdot b$ também são números inteiros. Observe ainda que a/b pode não ser inteiro, mesmo a e b sendo. Por exemplo, se $a = 4$ e $b = 2$, então $a/b = 2$ é um inteiro, mas $b/a = 1/2$ não é um inteiro.

2. O conjunto dos racionais é fechado para a soma, isto é, a soma de dois números racionais ainda é um número racional. De fato:
$$\underbrace{\frac{n}{m}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{p}{q}}_{\in\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{nq+mp}{mq}}_{\in\mathbb{Q}}$$

3. O conjunto dos irracionais não é fechado para a soma, isto é, existem números irracionais cuja soma não é um número irracional. Por exemplo, tanto π quanto $-\pi$ são números irracionais, mas
$$\underbrace{\pi}_{\notin\mathbb{Q}} + \underbrace{(-\pi)}_{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{0}_{\in\mathbb{Q}}$$

4. O conjunto dos racionais é fechado para o produto, isto é, o produto de dois números racionais ainda é um número racional. De fato:
$$\underbrace{\frac{n}{m}}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{p}{q}}_{\in\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{np}{mq}}_{\in\mathbb{Q}}$$

5. O conjunto dos irracionais não é fechado para o produto, isto é, existem números irracionais cujo produto não é um número irracional. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional, mas

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{2}_{\in\mathbb{Q}}$$

Lista de propriedades 0.2. Algumas propriedades das operações com números reais:

1. Para qualquer número real r, temos $r \cdot 0 = 0$.

2. Não existem dois números reais não nulo cujo produto seja 0. Mais formalmente: para quaisquer números reais r, s, se $r \cdot s = 0$, então $r = 0$ ou $s = 0$. Ou, analogamente, se dois números reais r, s não são nulos, então $r \cdot s$ não pode ser 0.

3. Para quaisquer números reais r, s, t:

   (a) Se $r + s = t + s$, então $r = t$.

   (b) Se $rs = ts$ e $s \neq 0$, então $r = t$.

4. Se dois números reais r, s são tais $r = s$ ou $r = -s$, então $r^2 = s^2$.

   Por outro lado, se $r^2 = s^2$, então $r = s$ ou $r = -s$.

Exemplo 0.3. Por exemplo, a propriedade 2 acima significa que se $(x-1)(x+1) = 0$ então $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$ isto é $x = 1$ ou $x = -1$.

Exemplo 0.4. Utilizando a última propriedade temos que se $x^2 = 4 = 2^2$, então $x = -2$ ou $x = 2$.

0.3 Desigualdades

Note que se r é um número real, então apenas uma das três afirmações é correta r é negativo ou zero ou positivo, isto é, $r < 0$ ou $r = 0$ ou $r > 0$. Isso significa que o conjunto dos números reais pode ser dividido em três conjuntos sem interseção:

$$\mathbb{R} = \underbrace{\mathbb{R}^*_-}_{\substack{\text{reais}\\ \text{negativos}}} \cup \{0\} \cup \underbrace{\mathbb{R}^*_+}_{\substack{\text{reais}\\ \text{positivos}}}$$

Lista de propriedades 0.5. Temos que:

P1) Se $r, s > 0$ ou $r, s < 0$, então $rs > 0$. Segue daí que se $r \neq 0$, então $r^2 > 0$.

P2) Se $r > 0$ e $s < 0$, então $rs < 0$. Segue daí que se $r > 0$, então $-r = -1 \cdot r < 0$, e que se $r < 0$, então $-r = -1 \cdot r > 0$.

P3) Se $r, s > 0$, então $r + s > 0$.

P4) Se $r < s$ e $s < t$, então $r < t$.

P5) Se $r < s$, então $r + t < s + t$ qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$.

P6) Se $r < s$ e $t > 0$, então $rt < st$. Mas se $r < s$ e $t < 0$, então $rt > st$.

P7) Se $0 < r < s$ e $0 < t < u$ então $rt < su$.

P8) Se $r > 0$ então $\dfrac{1}{r} > 0$. Segue daí que se $r > 0$ e $s > 0$, então $\dfrac{r}{s} > 0$.

P9) Se $0 < r < s$, então $\dfrac{1}{s} < \dfrac{1}{r}$.

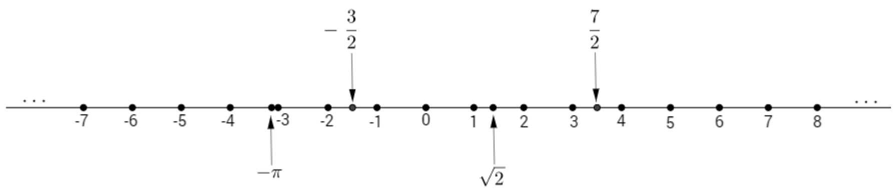
Observe que as propriedades P6 e P8 implicam na seguinte propriedade extra:

P10) Se $r, s > 0$ ou $r, s < 0$, então $\dfrac{r}{s} > 0$. Mas se $r > 0$ e $s < 0$ ou $r < 0$ e $s > 0$, então $\dfrac{r}{s} < 0$.

Dessa forma, quando temos um quociente $\dfrac{r}{s}$ positivo, então devemos ter r, s ambos positivos ou ambos negativos. Por outro lado, se $\dfrac{r}{s}$ for negativo, então r, s tem sinais opostos.

Observação 0.6. As propriedades valem também para $\geq$ e $\leq$ no lugar de $>$ e $<$, respectivamente.

Observação 0.7. Geometricamente, o conjunto dos números reais pode ser visto como uma reta. Um ponto arbitrário da reta, denominado origem, representa o 0 e convenciona-se que $a < b$ significa que a fica à esquerda de b. Assim, na semi-reta da direita representamos os números reais positivos e, na semi-reta da esquerda, os números reais negativos.

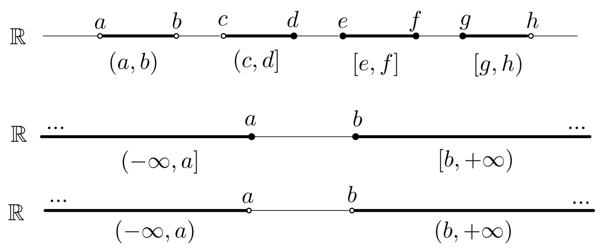


Observação 0.8. Podemos representar alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ com notações especiais. Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ sendo $r < s$, os conjuntos abaixo definidos são ditos intervalos:

Intervalos limitados	Intervalos ilimitados
$[r, s] = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, r \leq x \leq s\}$	$(-\infty, s] = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, x \leq s\}$
$(r, s) = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, r < x < s\}$	$(-\infty, s) = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, x < s\}$
$[r, s) = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, r \leq x < s\}$	$[r, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, x \geq r\}$
$(r, s] = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, r < x \leq s\}$	$(r, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, x > r\}$

Atenção: os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ não são números reais.

Vejamos esses intervalos representados na reta real:



Vamos ver como podemos usar algumas propriedades da lista 0.5 para resolver problemas com desigualdades.

Exemplo 0.9. Se $\dfrac{x+1}{2} > 2$, então usando a propriedade P6, $x+1 > 2 \cdot 2 = 4$, donde $x > 4-1 = 3$, isto é $x > 3$. Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{x+1}{2} > 2$ é $S = \{x | x > 3\} = (3, +\infty)$.

Exemplo 0.10. Se $\dfrac{2}{x+1} > 2$, temos pela propriedade P5, $\dfrac{2}{x+1} - 2 > 0$, isto é, $\dfrac{2-2x-2}{x+1} > 0$ ou $\dfrac{-2x}{x+1} > 0$. Portanto, pela propriedade P10, temos dois casos possíveis

a) Se $x+1 > 0$ e $-2x > 0$, então $x > -1$ e $x < 0$. Dessa forma, a solução nesse caso é

$$S_a = \{x \mid -1 < x < 0\} = (-1, 0)$$

b) Se $x+1 < 0$ e $-2x < 0$, então $x < -1$ e $x > 0$. Porém, não existe número real positivo e menor que -1 ao mesmo tempo. Logo, a solução desse caso é $S_b = \emptyset$.

Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{2}{x+1} > 2$ é

$$S = S_a \cup S_b = S_a = \{x \mid -1 < x < 0\} = (-1, 0)$$

Exemplo 0.11. Se $\dfrac{x}{x+1} > 2$, então $\dfrac{x-2x-2}{x+1} > 0$, isto é, $\dfrac{-x-2}{x+1} > 0$. Pela propriedade P10, temos novamente dois casos possíveis:

a) Se $x+1 > 0$ e $-x-2 > 0$, então $x > -1$ e $-x > 2$, isto é, $x > -1$ e $x < -2$. Porém, não existe número real maior que -1 e menor que -2 ao mesmo tempo. Logo, a solução desse caso é $S_a = \emptyset$.

b) Se $x+1 < 0$ e $-x-2 < 0$, então $x < -1$ e $-x < 2$, isto é, $x < -1$ e $x > -2$. Logo, a solução desse caso é $S_b = \{x \mid -2 < x < -1\} = (-2, -1)$

Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{x}{x+1} > 2$ é

$$S = S_a \cup S_b = S_b = \{x \mid -2 < x < -1\} = (-2, -1)$$

Exemplo 0.12. Se $\dfrac{x+3}{x-2} < 2$, então $\dfrac{x+3-2x+4}{x-2} < 0$, isto é, $\dfrac{-x+7}{x-2} < 0$. Assim, pela propriedade P10, temos dois casos possíveis:

a) Se $x-2 > 0$ e $-x+7 < 0$, então $x > 2$ e $-x < -7$, isto é, $x > 2$ e $x > 7$. Logo, a solução desse caso é $S_a = \{x \mid x > 7\} = (7, +\infty)$.

b) Se $x-2 < 0$ e $-x+7 > 0$, então $x < 2$ e $-x > -7$, isto é, $x < 2$ e $x < 7$. Logo, a solução desse caso é $S_b = \{x \mid x < 2\} = (-\infty, 2)$

Portanto, o conjunto solução da inequação $\dfrac{x+3}{x-2} < 2$ é

$$S = S_a \cup S_b = \{x \mid x < 2 \text{ ou } x > 7\} = (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$$

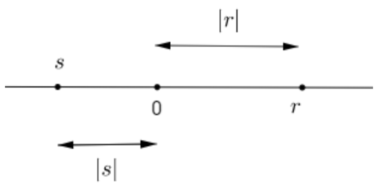
No fundo, o que fizemos foi reduzir as desigualdades àquelas que podemos fazer usando estudo de sinal. Isso será bastante útil quando, ao fim do curso, estivermos estudando esboço de gráficos de funções a partir de suas propriedades. No capítulo 1, voltaremos a esse assunto.

0.4 Valor absoluto (módulo)

Definição 0.13. O valor absoluto (ou módulo) de um número real r, denotado por $|r|$, é definido como:

$$|r| = \begin{cases} r, & \text{se } r \geq 0 \\ -r, & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

Geometricamente, o valor absoluto de x representa a distância entre x e 0 na reta real:



Exemplo 0.14. Alguns exemplos de valor absoluto.

a) $|0| = 0$

b) $|\pi| = |-\pi| = \pi$

c) $|2| = |-2| = 2$

d) $|-0,345609| = |0,345609| = 0,345609$

e) Como $e > 2,71$, então $2,71 - e < 0$ e, assim, $|2,71 - e| = -(2,71 - e) = e - 2,71$.

f) $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$, isto é $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

g) $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1), & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases}$, isto é $|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -2x-1, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$

Lista de propriedades 0.15. Algumas propriedades diretas da definição acima:

M1) Pela propriedade P2, temos que $|r| \geq 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

M2) Se $|r| = 0$, então $r = 0$, e se $r = 0$, claro que $|r| = 0$, assim: $|r| = 0$ se e somente se $r = 0$.

M3) Dado um $r \in \mathbb{R}^*$, sabemos que $r > 0$ ou $r < 0$. Se $r > 0$, temos que $r > -r$ e $|r| = r$. Se $r < 0$, temos $-r > 0$ e, então, $r < -r$ e $|r| = -r$. Assim, $|r|$ é sempre o maior entre r e $-r$, isto é, $|r| = \max\{-r, r\}$.

M4) Para qualquer $r \in \mathbb{R}$, temos $|r| = |-r|$ e $|r|^2 = r^2$ (veja a propriedade P1).

M5) Dado $r > 0$, se $|x| = r$, então $x = r$ ou $x = -r$. Em particular, se $t, s \in \mathbb{R}$ são tais que $|t| = |s|$, então $t = s$ ou $t = -s$.

M6) $|rs| = |r| \cdot |s|$ para todos $r, s \in \mathbb{R}$ e $\left|\dfrac{r}{s}\right| = \dfrac{|r|}{|s|}$ se $s \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de equações modulares.

Exemplo 0.16. $|2x+1| = 4$

Vamos usar a definição de módulo. Temos (veja o item (f) do exemplo 0.14):

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -2x-1, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$$

Assim:

$$4 = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -2x-1, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$$

Isto é, há dois casos:

a) Se $x \geq -1/2$, temos $2x+1 = 4$, ou seja, $x = 3/2$. Como $3/2 \geq -1/2$, a solução é válida.

b) Se $x < -1/2$, temos $2x+1 = -4$, ou seja, $x = -5/2$. Como $-5/2 < -1/2$, a solução é válida.

Portanto, a solução da equação $|2x+1| = 4$ é $S = \{-5/2, 3/2\}$.

Exemplo 0.17. $|x+1| = |2x|$

Pela propriedade M5, temos dois casos: $x+1 = 2x$ e $x+1 = -2x$.

a) $x+1 = 2x \Rightarrow 1 = 2x - x = x$.

b) $x+1 = -2x \Rightarrow 2x + x = -1 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -1/3$.

Portanto, a solução da equação $|x+1| = |2x|$ é $S = \{-1/3, 1\}$.

Lista de propriedades 0.18. Propriedades envolvendo valor absoluto e desigualdades:

D1) Dado $r > 0$:

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$$

D2) Dado $r > 0$:

$$|x| > r \Leftrightarrow x > r \text{ ou } x < -r$$

$$|x| \geq r \Leftrightarrow x \geq r \text{ ou } x \leq -r$$

D3) Desigualdade triangular: $|r+s| \leq |r| + |s|$ para todos $r, s \in \mathbb{R}$

D4) Para todos $r, s, t \in \mathbb{R}$, seguem da desigualdade triangular:

$$|r-s| \leq |r| + |s|$$

$$|r-s| \leq |r-t| + |t-s|$$

Vejamos alguns exemplos de inequações modulares.

Exemplo 0.19. $|x-2| < 5$.

Vamos resolver essa inequação de duas formas.

Primeiro, pela definição de módulo. Temos $|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$. Assim, temos dois casos:

a) Se $x \geq 2$, temos $x - 2 < 5$, isto é, $x < 7$. Assim, a solução desse caso é $S_a = [2, 7)$.

b) Se $x < 2$, temos $-x + 2 < 5$, isto é, $x > -3$. Assim, a solução desse caso é $S_b = (-3, 2)$.

Portanto, a solução da inequação $|x - 2| < 5$ é $S = S_a \cup S_b = (-3, 7)$.

Agora, vamos resolver usando a propriedade D1:

$$|x-2| < 5 \stackrel{D1}{\iff} -5 < x - 2 < 5 \iff -5 + 2 < x - 2 + 2 < 5 + 2 \iff -3 < x < 7$$

Portanto, novamente, a solução da inequação $|x - 2| < 5$ é $S = (-3, 7)$.

Exemplo 0.20. $|4x - 2| \geq 3$.

Vamos resolver essa inequação de duas formas.

Primeiro, pela definição de módulo. Temos $|4x-2| = \begin{cases} 4x-2, & \text{se } x \geq 1/2 \\ -4x+2, & \text{se } x < 1/2 \end{cases}$. Assim, temos dois casos:

a) Se $x \geq 1/2$, temos $4x - 2 \geq 3$, isto é, $x \geq 5/4$. Assim, a solução desse caso é

$$S_a = [1/2, +\infty) \cap [5/4, +\infty) = [5/4, +\infty)$$

b) Se $x < 1/2$, temos $-4x + 2 \geq 3$, isto é, $x \leq -1/4$. Assim, a solução desse caso é

$$S_b = (-\infty, 1/2) \cap (-\infty, -1/4] = (-\infty, -1/4]$$

Portanto, a solução da inequação $|4x - 2| \geq 3$ é $S = S_a \cup S_b = (-\infty, -1/4] \cup [5/4, +\infty)$.

Agora, vamos resolver usando a propriedade D2:

$$|4x-2| \geq 3 \stackrel{D2}{\iff} 4x - 2 \geq 3 \text{ ou } 4x - 2 \leq -3 \iff x \geq 5/4 \text{ ou } x \leq -1/4$$

Portanto, novamente, a solução da inequação $|4x - 2| \geq 3$ é

$$S = S_a \cup S_b = (-\infty, -1/4] \cup [5/4, +\infty)$$

Finalizamos essa seção com a raiz n-ésima de um número real.

Definição 0.21. Dados um real $r \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a *raiz $n-$ésima* de r, representada por $\sqrt[n]{r}$, é o número real positivo s tal que $s^n = r$. Agora, se $r < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é um ímpar maior do que 1, a *raiz $n-$ésima* de r, é o número real negativo s tal que $s^n = r$.

Exemplo 0.22. Por exemplo, $\sqrt{9} = 3$ pois $3^2 = 9$ e $\sqrt[3]{-27} = -3$ pois $(-3)^3 = -27$.

Observação 0.23. Note que há uma diferença entre obter a raiz $n-$ésima de r e obter as raízes de $x^n = r$. Por exemplo, as soluções de $x^2 = 36$ são ± 6, pois tanto 6^2 quanto $(-6)^2$ valem 36. Porém, a raiz quadrada de 36 é 6, pois, por definição, a raiz de um número positivo é positiva.

Observação 0.24. Observe ainda que, por definição, $(\sqrt[n]{r})^n = r$. Isso significa que, por exemplo, $(\sqrt{5})^2 = 5$. Note ainda que $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, mas $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq -5$. Concluímos que não é correto afirmar que $\sqrt{r^2} = r$. Na verdade, note que $\sqrt{r^2} = |r|$.

0.5 Polinômios

Um *polinômio* é uma soma formal utilizando uma variável x do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,,$$

onde os números reais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são ditos coeficientes (note que alguns podem ser nulos, mas consideramos $a_n \neq 0$) e n é dito o *grau* do polinômio. O coeficiente a_0 é dito *termo independente* e a_n é dito *coeficiente líder*. Um *monômio* é um polinômio de um termo só: em geral, polinômios são somas de monômios. Um monômio formado apenas por um termo independente é dito ter grau 0.

Exemplo 0.25. O polinômio $4x^5 - \pi x^2 + \sqrt{2}\,x + 3$ tem grau 5, coeficiente líder 4 e termo independente 3. Além disso, é formado pelos monômios $4x^5$, $-\pi x^2$, $\sqrt{2}x$ e 3.

Observação 0.26. $x^2 + \sqrt{2x} + 1$ não é um polinômio, pois nem todo x está com expoente natural.

A soma e a diferença de polinômios são feitas termo a termo, como no seguinte exemplo:

Exemplo 0.27. Se $p(x) = 2 - x + x^2$ e $q(x) = 3 - 2x^2 - 3x^3$, então, por exemplo:

$$p(x) + q(x) = (2+3) + (-x) + (x^2 - 2x^2) - 3x^3 = 5 - x - x^2 - 3x^3$$

$$p(x) - q(x) = (2-3) + (-x) + (x^2 + 2x^2) + 3x^3 = -1 - x + 3x^2 + 3x^3$$

Já o produto de dois polinômios é feito usando a regra distributiva da multiplicação. Por exemplo:

Exemplo 0.28. Usando os polinômios do exemplo 2.9:

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (2 - x + x^2)(2 - 2x^2 - 3x^3) \\ &= 4 - 4x^2 - 6x^3 - 2x + 2x^3 + 3x^4 + 2x^2 - 2x^4 - 3x^5 \\ &= 4 - 2x - 2x^2 - 4x^3 + x^4 - 3x^5 \end{aligned}$$

Por fim, a divisão de polinômios é feita analogamente à divisão de números inteiros. Na divisão de $f(x)$ por $g(x)$, começamos dividindo o monômio de maior grau de $f(x)$ pelo de maior grau de $g(x)$ (se for possivel) e seguimos ate encontrar o resto: um polinômio de grau menor que o de $g(x)$. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 0.29. Sejam $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ e $g(x) = x^2 + 3x + 1$. Começamos dividindo o monômio de maior grau de $f(x)$ pelo de maior grau de $g(x)$, isto é, $2x^2$ dividido por x^2, isto é, $q(x) = 2$. Temos:

$$\begin{array}{r|r} 2x^2 + 4x + 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} 2x^2 + 6x + 2 & 2 \\ \cline{1-1} -\,2x + 1 & \end{array}$$

Como o grau de $-2x + 1$ é menor que o grau de $g(x) = x^2 + 3x + 1$, não podemos continuar. Assim, temos $r(x) = -2x + 1$ e $q(x) = 2$.

Exemplo 0.30. Vamos dividir $f(x) = x^2 - 1$ por $g(x) = x - 1$. Começamos dividindo os monômios de maior grau de $f(x)$ e $g(x)$, obtendo $q_1(x) = x$ e $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = x - 1$ isto é:

$$\begin{array}{r|l} x^2+0x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-\ \ x & x+1 \\ \hline x-1 & \end{array}$$

Agora, o resto $x-1$ é igual ao $g(x)$. Assim, $q_2(x)=1$ e $r_2(x)=0$. Isto é:

$-$

$$\begin{array}{r|l} x^2+0x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-\ \ x & x+1 \\ \hline x-1 & \\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Assim, concluimos que $x-1$ divide x^2-1 e que $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

Definição 0.31. Um número real r tal que $p(r)=0$ é dito uma raiz do polinômio $p(x)$.

Exemplo 0.32. Seja $f(x)=x^4-x^3-x+1$. Temos que 1 é uma raiz de pois $f(1)=1^4-1^3-1+1=0$, mas -1 não é raiz pois $f(-1)=1+1+1+1=4$.

Encontrar raízes de um polinômio qualquer nem sempre é fácil. Para polinômios quadráticos, ou seja, de grau 2, conhecemos a fórmula de Bhaskara, que diz que as raízes de ax^2+bx+c (com $a\neq 0$) são dadas por

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e também o teorema da soma e do produto das raízes (ax^2+bx+c tem raízes r_1, r_2 tais que $r_1+r_2=-b/a$ e $r_1r_2=c/a$.) Para graus maiores, o resultado abaixo pode ajudar em alguns casos.

Teorema 0.33. *Temos que $a\in\mathbb{R}$ é uma raiz de $f(x)$ se e somente se $x-a$ divide $f(x)$.*

Note que o resultado do teorema 0.33 diz ainda que se a é raiz de $f(x)$, então existe um polinômio $g(x)$ tal que $f(x)=(x-a)g(x)$.

Exemplo 0.34. Considere o polinômio $f(x)=x^3+x$. Temos que 0 é raiz de $f(x)$, o que significa que x divide $f(x)$. Efetuando a divisão, temos $f(x)=x(x^2+1)$ e x^2+1 não tem raízes reais.

Exemplo 0.35. Seja $f(x)=40-18x-3x^2+x^3$. Por inspeção, temos que 2 é uma raiz de $f(x)$ dividindo $f(x)$ por $x-2$, temos $f(x)=(x-2)(x^2-x-20)$. U x^2-x-20 podem ser encontradas pelo teorema da soma e produto: $r_1r_2=-20$ e $r_1+r_2=1$, isto é, $r_1=-4$ e $r_2=5$. Logo, o polinômio pode ser escrito como $f(x)=(x-2)(x+4)(x-5)$.

O processo feito nos exemplos 0.34 e 0.35 pode ser repetido para polinômios $f(x)$ de qualquer grau, obtendo uma escrita de $f(x)$ como produto de fatores $x-a$ ou quadráticos irredutíveis. Esse processo é chamado fatoração.

Exemplo 0.36. As raízes de $2x^2+5x-3$ são $1/2$ e -3 (verifique). Assim, a fatoração desse polinômio é $2x^2+5x-3=2(x-1/2)(x+3)=(2x-1)(x+3)$

Exemplo 0.37. A fatoração de $x^6+3x^5-13x^4-13x^3-38x+60$ é $(x^2+2)(x-1)(x+2)(x-3)(x+5)$.

A fatoração de polinômios pode ser facilitada, em certos casos, usando produtos notáveis como por exemplo:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo 0.38. Usando quadrado da soma, temos que $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Já usando diferença de cubos, temos que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

Em particular, a fatoração de um polinômio pode ser útil, por exemplo, para determinar para quais valores de x certa função polinomial é positiva ou negativa.

Exemplo 0.39. Consideramos o polinômio $p(x) = x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$. Para determinar os valores de x para os quais $p(x) < 0$, temos dois casos:

a) Se $x + 4 > 0$ e $x - 5 < 0$, então $x > -4$ e $x < 5$, isto é $x \in (-4, 5)$.

b) Se $x + 4 < 0$ e $x - 5 > 0$, então $x < -4$ e $x > 5$. Como não existe x real nesses condições, esse caso tem solução vazia.

Esse processo pode ser resumido em uma tabela onde colecionamos as raízes dos fatores e os sinais dos fatores em cada intervalo:

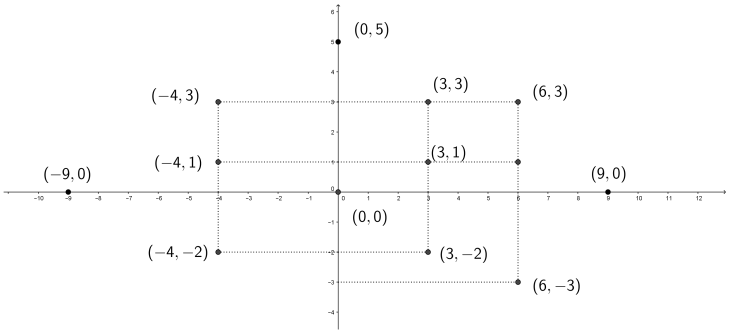
		-4		5	
$x+4$	$---$	-4	$+++$		$+++$
$x-5$	$---$		$---$	5	$+++$
$(x+4)(x-5)$	$+++$	-4	$---$	5	$+++$

Assim, esse polinômio assume valores negativos quando $x \in (-4, 5)$.

0.6 Plano cartesiano

Encerramos esse capítulo relembrando o plano cartesiano, que será usado para representar graficamente funções.

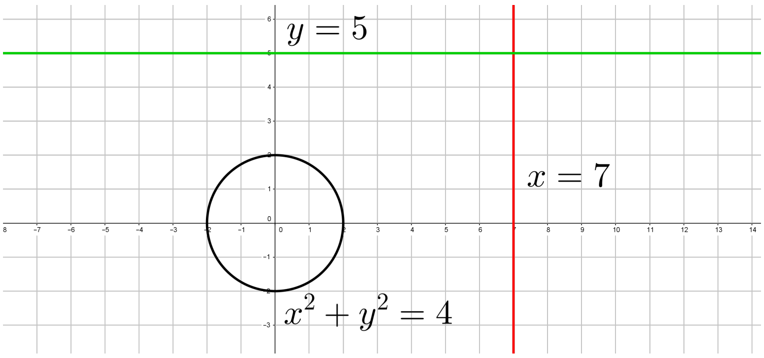
Um **sistema ortogonal de coordenadas** em um plano é uma tripla (X, Y, O) em que X e Y são retas perpendiculares que se intersectam em um ponto O chamado **origem** do sistema. A reta X, usualmente horizontal, é chamada **eixo** x ou **das abscissas**. A reta Y é chamada **eixo** y ou **das ordenadas**. Cada ponto de X ou Y é identificado com um número real e O é identificado com o 0 em ambos os casos.



Cada ponto P do plano é idenficado por um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chamado **coordenadas cartesianas** de P (como na figura acima). Escrevemos $P = (x, y)$ para indicar que P tem coordenadas (x, y) dizendo que x é **primeira coordenada** ou **abscissa** de P e y a **segunda coordenada** ou **ordenada** de P.

O conjunto solução de uma equação nas variáveis x e y é o conjunto S dos pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem esta equação. O conjunto dos pontos P do plano com coordenadas $(x, y) \in S$ é o **gráfico da equação**. Vejamos alguns exemplos.

1. O gráfico da equação $x^2 + y^2 = a^2$ é um círculo de centro na origem $(0, 0)$ e raio a.
2. O gráfico da equação $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$ fixo, é uma reta vertical passando por $(k, 0)$
3. O gráfico da equação $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$ fixo, é uma reta horizontal passando por $(0, k)$.



O gráfico de uma equação do tipo $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma reta não vertical r que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$. O número a é chamado de **inclinação** da reta r e corresponde à tangente do ângulo entre a reta r e o eixo X.

Dados três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ de uma reta não vertical r, temos que a inclinação a desta reta é dada por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Para encontrar a equação de uma reta não vertical passando por dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), observamos primeiro que sua inclinação é dada por $a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Agora, qualquer outro ponto (x, y) desta reta deve satisfazer $\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$. Portanto, devemos ter $(y - y_0) = a(x - x_0)$ donde $y = ax - (ax_0 + y_0)$. Assim, a equação da reta não vertical passando por (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$y = ax + b \quad com \quad a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad e \quad b = -(ax_0 + y_0).$$

0.7 Exercícios

1. Sejam a e b números reais positivos tais que $a < b$.

   Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) $4 - a < 4 - b$

   (b) $-3b < -3a$

   (c) $\frac{a}{4} < \frac{b}{4}$

   (d) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

2. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:
   (a) Se a e b são números inteiros positivos, então $\frac{a}{b}$ é um número racional.
   (b) Se a e b são números inteiros, então $\frac{a}{b}$ é um número racional.
   (c) Se a e b são números inteiros e $a - b \neq 0$, então $\frac{a+b}{a-b}$ é um número racional.
   (d) Se a e b são números inteiros, então $\frac{a+b}{1+a^2}$ é um número racional.
   (e) Se a e b são números inteiros, então $\frac{a+b}{1+a}$ é um número racional.
   (f) Se a é um número inteiro, então a^{56} é um número racional.
   (g) Se a e b são números racionais, então $\frac{a}{b}$ é um número racional.
   (h) Se $x^2 > 4$, então $x > \pm 2$.
   (i) Se $\frac{1}{|x|} < 1$, então $x > 1$.
   (j) Se $x, y \notin \mathbb{Q}$, então $x + y \notin \mathbb{Q}$.
   (k) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x \leq x^2$.
   (l) Se $xy = 1$, então $x = y = 1$ ou $x = y = -1$.
   (m) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   (n) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

3. Marque a alternativa correta:
   (a) Se x é um número real e $x < 1$, então $x^2 < 1$.
   (b) Se x é um número real tal que $|x| > 1$, então $x > 1$.
   (c) Se x e y são números reais tais que $x < y$, então $x^2 > y^2$.
   (d) Se x é um número real então $\sqrt{(-x)^2} = -x$.
   (e) Se x é um número real tal que $|x| < 1$ então $x < 1$ e $x > -1$.

4. O conjunto dos possíveis valores assumidos pela expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ quando a, b, c são números reais não nulos é:
   (a) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
   (b) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$
   (c) $\{-4, 0, 4\}$
   (d) $\{4\}$
   (e) $\mathbb{R}$

5. Classifique cada uma das sentenças abaixo como verdadeira ou falsa:
   (a) $|5| = 5$
   (b) $|-3/4| = -3/4$
   (c) $|0| = 0$
   (d) $|1 - \sqrt{2}| = 1 - \sqrt{2}$
   (e) $|\pi - 3,14| = 0$
   (f) $|\pi - 3,15| = 3,15 - \pi$
   (g) $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}| = 0$
   (h) $|\sqrt{5} - 2,2| = \sqrt{5} - 2,2$
   (i) $|\sqrt[3]{10} - 2,3| = 2,3 - \sqrt[3]{10}$

6. Encontre os números reais que satisfaçam as desigualdades abaixo.

(a) $2+3x<5x+8$

(b) $4<3x-2\leq 10$

(c) $x^2-4x<0$

(d) $\dfrac{7}{x}>2$

(e) $(x+3)(x+4)>0$

(f) $\dfrac{x}{x-3}<4$

(g) $x^3-x<0$

(h) $x^2+x-2\geq 0$

(i) $x^2-2x+1>0$

7. Resolva as seguintes equações:

   (a) $|3x+2| = 5$
   (b) $|2x-1| = |4x+3|$
   (c) $|x|\,|x-5| = 6$
   (d) $|5x+4| = -3$
   (e) $|x| + 2|x-2| = 1+4x$
   (f) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$
   (g) $|x-1| = |x-1|^2$
   (h) $|5x+8| = |4x+10|$
   (i) $|2x^2-3x| = |x-2|$
   (j) $|x-2| = |x+3|$
   (k) $|x^2-x| = x$
   (l) $\sqrt{(x-3)^2} + |x| = 3x$

8. Encontre as soluções das seguintes inequações:

   (a) $|x-5| < 4$
   (b) $\left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4$
   (c) $|3x+2| > 5$
   (d) $|3x+5| \leq 11$
   (e) $1 < |x-3| < 4$
   (f) $\dfrac{5}{|2x+1|} \leq 3$
   (g) $|x^2-3x| \geq 1$
   (h) $|5x-10| + |2-x| \leq 6x$
   (i) $|2-3x| > 2x-12$

9. Determine todas as raízes dos polinômios a seguir.

   (a) $x^3 + \sqrt{2}x^2 - 4x$

   (b) $x^3 - 23x^2 + 119x + 143$

   (c) $x^4 - 5x^3 - 63x^2 + 137x - 70$

10. Determine $A \cap B$ e $A \cup B$ nos casos a seguir utilizando intervalos.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \geq 0\}$

   (b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\}$

   (c) $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} :\ x < -3\}$

Exercícios extras

11. Página A9 do livro *Cálculo - vol 1, 6a edição* (James Stewart)

12. Páginas 10 e 11 do livro *Cálculo A* (Diva Flemming e Mirian Gonçalves).

Exercícios de provas anteriores

13. (2016-2) Sejam a e b números reais. Considere as seguintes afirmativas:

    I. Se $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

    II. Se $a, b \in \mathbb{Q}$, então $ab \in \mathbb{Q}$.

    III. Se $a \notin \mathbb{Q}$ e $b \notin \mathbb{Q}$, então $ab \notin \mathbb{Q}$.

    IV. $\sqrt{4} = \pm 2$.

    V. Se $a < b$, então $ca < cb$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

    Marque a alternatica **<u>CORRETA</u>**.

    a) Nenhuma afirmativa é verdadeira.
    b) Apenas uma afirmativa é verdadeira.
    c) Apenas duas afirmativas são verdadeiras.
    d) Apenas três afirmativas são verdadeiras.
    e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

14. (2016-2) Sobre o conjunto solução S da equação $|x+1| + |x-1| = 2$, podemos afirmar que:

    (a) $S = \emptyset$.
    (b) S tem apenas um elemento.
    (c) S tem apenas dois elementos.
    (d) S é infinito e é um intervalo.
    (e) S é infinito, mas não é um intervalo.

15. (2016-2 opcional) Sobre o conjunto solução S da equação $|2x| + |x-1| = 1$ é correto afirmar que:

    (a) S é vazio.
    (b) S é infinito.
    (c) S tem apenas um elemento.
    (d) S tem apenas dois elementos.
    (e) S tem mais do que dois elementos, mas é finito.

16. (2014-2) Marque a alternativa INCORRETA.

    (a) Nenhum número racional é solução da equação $x^2 = 2$.
    (b) A raiz quadrada de um número natural é um número natural ou um número irracional.
    (c) Existe, pelo menos, um número real que é solução da equação $x^2 = 2$.
    (d) Se p e q são números inteiros não nulos tais que $\frac{p}{q}$ é um inteiro, então $\frac{q}{p}$ é um inteiro.
    (e) $\sqrt{13}$ é um número real menor do que 4.

17. (2014-2) Marque a alternativa CORRETA.

    (a) $|x| + 1 < |x+1|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (b) $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (c) $\sqrt{(1-x)^2} \geq 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (d) $|x| - 2 > |x-2|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
    (e) $|x|\sqrt{x^2} > x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. (2014-2) Resolva a seguinte desigualdade: $\dfrac{1}{|x+1|\,|x-3|} \geq \dfrac{1}{5}$.

19. (2013-2) Determine os valores de x para os quais $1 < |2x+5| \leq \dfrac{1}{x+2}$.

0.8 Respostas dos exercícios

1. (a) F (b) V (c) V (d) V

2. (a) V (b) F (c) V (d) V (e) F (f) V (g) F (h) F (i) F (j) F (k) F (l) F (m) F (n) F

3. (e)

4. (c)

5. (a) V (b) F (c) V (d) F (e) F (f) V (g) V (h) V (i) V

6. (a) $(-3,+\infty)$ (b) $(2,4]$ (c) $(0,4)$ (d) $(0,7/2)$ (e) $(-\infty,-4)\cup(-3,+\infty)$ (f) $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$ (g) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ (h) $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$ (i) $\mathbb{R}-\{0\}$

7. (a) $\{-7/3,1\}$ (b) $\{-2,-1/3\}$ (c) $\{-1,2,3,6\}$ (d) $\emptyset$ (e) $\{3/5\}$ (f) $\{-4,4\}$ (g) $\{0,1,2\}$ (h) $\{-2,2\}$ (i) $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ (j) $\{-1/2\}$ (k) $\{0,2\}$ (l) $\{1\}$

8. (a) $(1,9)$ (b) $(-\infty,-11/2]\cup[-5,6,+\infty)$ (c) $(-\infty,-7/3)\cup(1,+\infty)$ (d) $[-16/3,2]$ (e) $(-1,2)\cup(4,7)$ (f) $(-\infty,-4/3]\cup[1/3,+\infty)$ (g) $(-\infty,\frac{(3-\sqrt{13})}{2}]\cup[\frac{(3-\sqrt{5}}{2},\frac{(3+\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{(3+\sqrt{13})}{2},+\infty)$ (h) $[1,+\infty)$ (i) $\mathbb{R}$

9. (a) $-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}$ (b) $-1,11,13$ (c) $-7,1,10$

10. (a) $A\cup B=\mathbb{R}$ e $A\cap B=\{4\}$ (b) $A\cup B=(-2,2)$ e $A\cap B=[-1,2)$ (c) $A\cup B=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ e $A\cap B=\emptyset$

13. b) 14. d) 15. c) 16. d) 17. c)

18. $(-2,-1)\cup(-1,3)\cup(3,4]$

19. $(-2,-3/2]$

Capítulo 1

Funções

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **função** com **domínio** A e **contradomínio** B é uma **regra** f que a **cada** elemento em A associa um **único** elemento em B. A notação usual para uma função f de domínio A e contradomíno B é

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

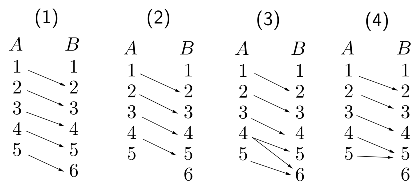
em que $x \mapsto f(x)$ indica que f faz corresponder a x o valor $f(x)$ também chamado **imagem de** x **por** f. O domínio A é também denotado por $D(f)$.

Os elementos do domínio são representados por uma variável, usualmente mas não necessariamente denotada por x, chamada **variável independente**. Os elementos do contradomínio são representados por uma variável, usualmente mas não necessariamente denotada por y, chamada **variável dependente**.

O conjunto de todos os valores $y \in B$ para os quais existe algum $x \in A$ satisfazendo $f(x) = y$ é chamado **conjunto imagem** de f e é denotado por $Im(f)$. Formalmente

$$Im(f) = \{f(x) \in B : x \in D(f)\}$$

Exemplo 1.1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e considere a regras que associam elementos A com elementos de B ilustradas nos seguintes diagramas.



1. A regra em (1) define uma função $f : A \to B$ tal que $Im(f) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. A regra em (2) **não** define uma função de A em B porque $5 \in A$ não está associado a nenhum elemento de B.

3. A regra em (3) **não** define uma função de A em B porque $4 \in A$ está associado a mais de um elemento de B.

4. A regra em (4) define uma função $f : A \to B$ tal que $Im(f) = \{2, 3, 4, 5\} \subsetneq B$. Observe que neste caso 4 e 5 tem a mesma imagem, ou seja $f(4) = f(5) = 5$.

Exemplo 1.2. A função que associa cada $x \in \mathbb{R}$ ao seu dobro $2x$ é definida por:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x \end{array}$$

Exemplo 1.3. A função h que a cada $t \in \mathbb{R}$ associa o quadrado de t somado ao dobro t e a 1 é definida por:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & h(t) = t^2 + 2t + 1 \end{array}$$

Exemplo 1.4. A função que a cada $x \geq 0$ associa a raiz quadrada de x é definida por

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Observação 1.5. Definimos uma função f explicitando seu domínio, contradomínio e regra $x \mapsto f(x)$. No entanto, é comum falarmos de uma função f explicitando apenas sua regra. Neste caso, convenciona-se que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ ao qual podemos aplicar a regra $x \mapsto f(x)$. Este último conjunto é chamado **domínio** da função.

Exemplo 1.6. O domínio de $f(x) = x^2$ é $\mathbb{R}$ pois a regra $x \mapsto x^2$ se aplica a todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.7. O domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ já que não podemos dividir por 0.

Exemplo 1.8. A função $f(x) = \sqrt{x+1}$ tem domínio $[-1, +\infty)$ já que $\sqrt{x+1}$ está definida apenas para $x + 1 \geq 0$. Assim devemos ter $x \geq -1$ para calcular $f(x)$. Logo, o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty)$.

Exemplo 1.9. A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$. Isso porque para efetuar a divisão de 1 por $x^2 - 9$ é necessário que $x^2 - 9 \neq 0$ o que acontece se e somente se $x \neq \pm 3$.

Observação 1.10. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função, a **restrição** de f a um subconjunto A_0 do domínio A é a função $g : A_0 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A_0$. Por exemplo, a restrição de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ao intervalo $[2, 9]$ é a função $g : [2, 9] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2$ para todo $x \in [2, 9]$.

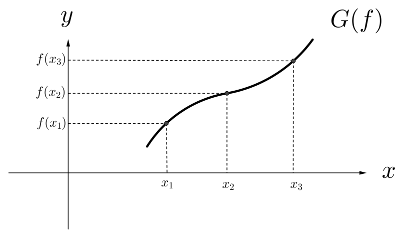
Observação 1.11. Duas funções são **iguais** quando tem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra. As funções $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 5$ e $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = 3t + 5$ são iguais pois tem mesmo domínio, contradomínio e regra. Já as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ e $g : [5, 10] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, embora 7 tenham a mesma regra, são diferentes pois seus domínios são diferentes.

1.1 Gráfico de uma Função

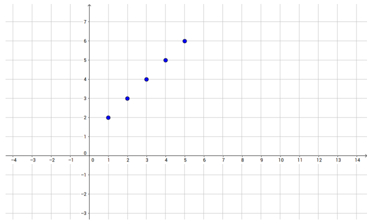
Definição 1.12. O **gráfico** de uma função $f : A \to B$, é o conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}.$$

Esboçar o gráfico de uma função f consiste em traçar todos os pontos de $G(f)$ no plano cartesiano. Quando o domínio da função é finito, este procedimento é bem simples (veja o exemplo a seguir). Quando o domínio da função possui infinitos elementos, como um intervalo, precisaremos usar conceitos mais sofisticados como, por exemplo, o conceito de derivada. Em alguns casos, como nos exemplos mais a frente, podemos fazer um esboço bem fiel através do estudo da lei que define a função.



Exemplo 1.13. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e seja $f : A \to B$, $f(x) = x + 1$. O gráfico de f é o conjunto $G(f) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$.



Para fazermos gráficos com mais detalhes, vamos explorar algumas propriedades de funções que serão definidas nas seções seguintes.

1.2 Funções Limitadas

Definição 1.14. Uma função $f(x)$ é dita limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in D(f)$. Por outro lado, é dita limitada inferiormente se existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq N$ para todo $x \in D(f)$.

Se $f(x)$ for limitada superiormente e inferiormente, dizemos apenas que $f(x)$ é limitada. Nesse caso, temos que $Im(f) \subset [N, M]$ e, então, tomando $L = \max\{|N|, |M|\}$ temos que $|f(x)| \leq L$.

Exemplo 1.15. A função $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 12, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é limitada, pois $Im(f) = \{1, 12\}$.

Exemplo 1.16. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela regra $f(x) = x + 1$ é ilimitada pois $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.17. A função $f(x) = \sqrt{x}$ é limitada inferiormente, pois $\sqrt{x} \geq 0$ por definição. No entanto, quando x cresce arbitrariamente, vemos que $\sqrt{x}$ também cresce arbitrariamente:

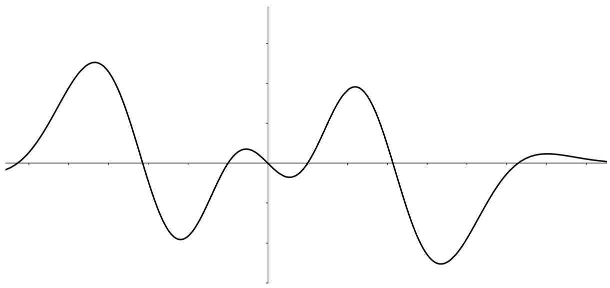
x	$\sqrt{x}$
100	10
10000	100
1000000	1000
100000000	10000
10000000000	100000
1000000000000	1000000
100000000000000	10000000
10000000000000000	100000000
1000000000000000000	1000000000
$\vdots$	$\vdots$

Dessa forma, $\sqrt{x}$ não é limitada superiormente.

Exemplo 1.18. Vejamos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Sabemos que $x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = D(f)$. Assim, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ para todo $x \in D(f)$, o que significa que $f(x)$ é limitada inferiormente. Porém, para qualquer valor $M > 0$, se escolhermos $x \in (-\dfrac{1}{\sqrt{M}}, \dfrac{1}{\sqrt{M}})$ teremos $f(x) = \dfrac{1}{x^2} > M$, ou seja, $f(x)$ torna-se arbitrariamente grande e, portanto, $f(x)$ não é limitada superiormente.

Exemplo 1.19. Seja $x \in \mathbb{R}$. Temos que $x^2 \geq 0$ e, então, $x^2 + 1 \geq 1$. Isso significa que $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geq 0$. Além disso, $x^2 < x^2 + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o que significa que $\dfrac{x^2}{x^2+1} < 1$. Assim, a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ é limitada pois sua imagem está contida em $[0, 1]$

1.3 Crescimento e Decrescimento



Percorrendo o gráfico de uma função $y = f(x)$ da esquerda para a direita vemos que os valores de y crescem ou decrescem dependendo da posição de x. Este comportamento motiva a seguinte definição.

Definição 1.20. Seja f uma função definida em um intervalo I.

- Dizemos que f é crescente em I se $f(x_1) < f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$ em I.
- Dizemos que f é decrescente em I se $f(x_1) > f(x_2)$ para todos $x_1 < x_2$ em I.
- Dizemos que f é constante em I de $f(x_1) = f(x_2)$ para todos x_1, x_2 em I.

Estudando a lei da função, podemos encontrar os intervalos onde ela cresce ou decresce. Vamos ver um exemplo.

Exemplo 1.21. Considere $f(x) = x^2$. Dados dois pontos $x_1 < x_2$ temos que

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

Como $x_1 < x_2$ temos $x_2 - x_1 > 0$. Agora vejamos

- se $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ então $x_2 + x_1 > 0$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$. Concluímos que $f(x)$ é crescente no intervalo $[0, +\infty)$.
- se $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ então $x_2 + x_1 < 0$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$. Concluímos que $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$.

Se a lei de f não é tão simples como no exemplo anterior, o trabalho de encontrar o intervalos de crescimento e decrescimento pode ser complicado e será feito posteriormente usando o conceito de derivada.

1.4 Máximos e Mínimos de uma Função

Considere a função f cujo gráfico é ilustrado na figura abaixo. Observe que a imagem do ponto x_1 é maior que a imagem de qualquer outro x próximo de x_1. Quando isso acontece, dizemos que f possui um máximo local em x_1. Outros pontos onde f possui máximos locais são x_3 e x_5.

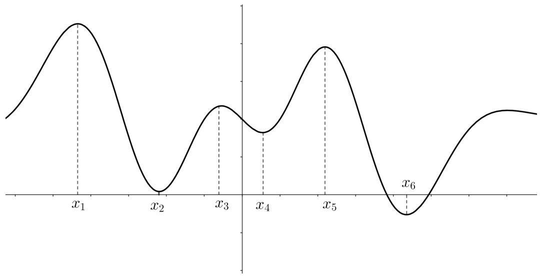


Figura 1.1: Gráfico de f.

Observe agora que a imagem de x_2 é menor que a imagem de qualquer outro ponto x próximo de x_2. Quando isso acontece, dizemos que f possui um ponto de mínimo local em x_2. Outros pontos onde f possui mínimo local são x_4 e x_6.

Definição 1.22. Considere uma função f.

- Dizemos que f possui um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em x_0 se existir um intervalo (a, b) contendo x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (a, b) \cap D(f)$.
- Dizemos que f possui um **mínimo local** (ou **mínimo relativo**) em x_0 se existir um intervalo (a, b) contendo x_0 tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in (a, b) \cap D(f)$.

Os pontos de máximo ou mínimo locais também são chamados de pontos de **extremos locais** da função.

Voltando ao gráfico da figura 1.1, observamos que a imagem $f(x_1)$ é maior que imagem de qualquer outro ponto no domínio de f, descrevemos isso dizendo que f possui um máximo global em x_1. Já a imagem $f(x_6)$ é menor que a imagem de qualquer outro ponto no domínio de f, neste caso dizemos que f possui um mínimo global em x_6. Os pontos x_1 e x_6 desta função são ditos **extremos globais**. Vamos dar a definição formal.

Definição 1.23. Considere uma função f.

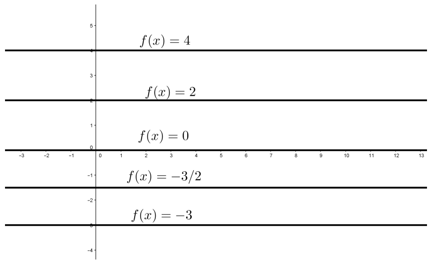
- Dizemos que f possui um **máximo global** (ou **máximo absoluto**) em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x no domínio de f. Neste caso dizemos que $f(x_0)$ é o valor máximo absoluto de f.
- Dizemos que f possui um **mínimo global** (ou **mínimo absoluto**) em x_0 se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x no domínimo de f. Neste caso dizemos que $f(x_0)$ é o valor mínimo absoluto de f.

Observação 1.24. Todo extremo global é um extremo local. Mas recíproca não vale, ou seja, é possível que f possua um extremo local em x_0 sem que f possua um extremo global neste ponto. Por exemplo, os pontos x_2, x_3, x_4 e x_5 do gráfico na figura 1.1 são exemplos de pontos onde f possui extremos locais mas não possui extremos globais.

1.5 Exemplos de funções e seus gráficos

Exemplo 1.25. Uma **função constante** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, onde $b \in \mathbb{R}$. Neste caso, $\mathrm{G}(f) = \{(x, b); x \in \mathbb{R}\}$ é uma reta horizontal e $Im(f) = \{b\}$.

A função constante $f(x) = b$ é limitada poque $|f(x)| \leq |b|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Essa função também tem valor máximo e mínimo em todo x do seu domínio.



Gráficos de funções constantes.

Exemplo 1.26. Uma **função Afim** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico deste tipo de função, dado por $G(f) = \{(x, y) | y = ax + b\}$, é uma reta com coeficiente angular a intersectando o eixo y no ponto $(0, b)$ e intersectando o eixo x no ponto $(-\frac{b}{a}, 0)$.

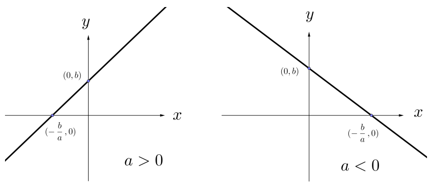


Figura 1.2: Gráficos de funções afins $f(x) = ax + b$

Vamos mostrar que a imagem de uma função afim $f(x) = ax + b$ é $Im(f) = \mathbb{R}$, ou seja, vamos mostrar que para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$. Para isso, observamos que dado qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$ a equação $y_0 = ax + b$ tem solução única $x_0 = \dfrac{y_0 - b}{a}$. Isso implica que $f\left(\dfrac{y_0 - b}{a}\right) = y_0$ donde $y_0 \in Im(f)$. Como o argumento vale para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, temos que $Im(f) = \mathbb{R}$. Assim, uma função afim não é limitada. Além disso, $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$ pois, supondo $a > 0$, temos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2).$$

O caso $a < 0$ é mostrado de maneira análoga.

Exemplo 1.27. A função afim $f(x) = 2x - 1$ restrita ao intervalo fechado $[-1, 2]$ é limitada e assume o valor máximo em $x = 2$ e o valor mínimo em $x = 2$. Observe no gráfico de f que $f(-1) = -3 \leq f(x) \leq 3 = f(2)$.

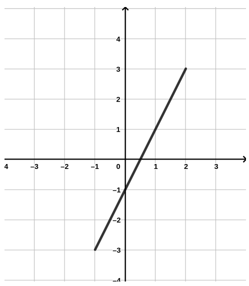
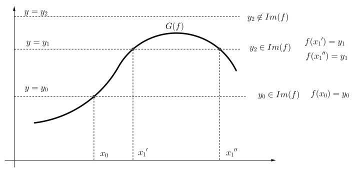


Figura 1.3: Gráfico da função $f(x) = 2x - 1$; $-1 \leq x \leq 2$

Observação 1.28. Podemos estudar a imagem $Im(f)$ de uma função f analisando seu gráfico $G(f)$. Para fazer isso, observamos que $y_0 \in Im(f)$ se, e somente se, a reta horizontal $y = y_0$ intersecta $G(f)$. Neste caso, existirá x_0 no domínio de f tal que $(x_0, y_0) \in G(f)$, ou seja, $y_0 = f(x_0)$ e portanto $y_0 \in Im(f)$.



Exemplo 1.29. Uma **função quadrática** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico deste tipo de função é uma **parábola** simétrica com respeito à reta vertical S de equação $x = \dfrac{-b}{2a}$ (**eixo de simetria**). A concavidade da parábola é voltada para cima se $a > 0$ e para baixo de $a < 0$. O vértice da parábola é seu ponto de interseção com a reta S e tem coordenadas $(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a})$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

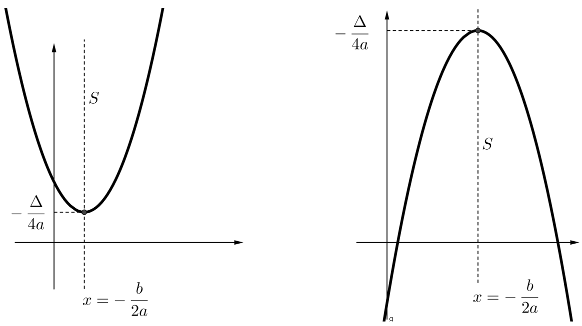


Figura 1.4: Gráficos de funções quadráticas

Para descrever o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ observamos que, completando quadrado, temos:

$$\begin{aligned} f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left[\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Temos então que $f(x) = 0$ se, e só se, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Assim, temos os seguintes casos:

1. Se $\Delta = 0$ então $f(x) = 0$ tem solução única $x = \frac{-b}{2a}$. Neste caso, $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$ é o único ponto de interseção entre $G(f)$ e o eixo das abscissas.
2. Se $\Delta > 0$ então $f(x) = 0$ tem duas soluções, $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Neste caso $G(f)$ intersecta o eixo das abscissas nos pontos $(x', 0)$ e $(x'', 0)$.
3. Se $\Delta < 0$ então $f(x) = 0$ não tem solução. Neste caso, $G(f)$ não intersecta o eixo das abscissas.

Para estudar a imagem de $f(x)$, observemos que:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \Leftrightarrow \quad y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Vamos estudar dois casos. Primeiramente, se $a > 0$ então $y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ tem solução se e somente se $y + \frac{\Delta}{4a} \geq 0$, ou seja $y \geq -\frac{\Delta}{4a}$. Assim, concluímos que

$$\text{se } a > 0 \text{ então } Im(f) = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$$

Agora, se $a < 0$ então então $y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ tem solução se e somente se $y + \frac{\Delta}{4a} \leq 0$, ou seja $y \leq -\frac{\Delta}{4a}$. Assim, concluímos que

$$\text{se } a < 0 \text{ então } Im(f) = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}].$$

Vamos mostrar agora que o gráfico de $f(x)$ é simétrico com respeito à reta $x = -\frac{b}{2a}$. Isso equivale a dizer que se x_1 e x_2 são equidistantes de $x = \frac{-b}{2a}$ então $f(x_1) = f(x_2)$. Mas, se x_1 e x_2 são equidistantes de $x = \frac{-b}{2a}$ então $\left|x_1 - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right| = \left|x_2 - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right|$. Assim, temos

$$f(x_1) = a\left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f(x_2)$$

Portanto $f(x_1) = f(x_2)$.

A tabela da Figura 1.5 resume as propriedades que provamos.

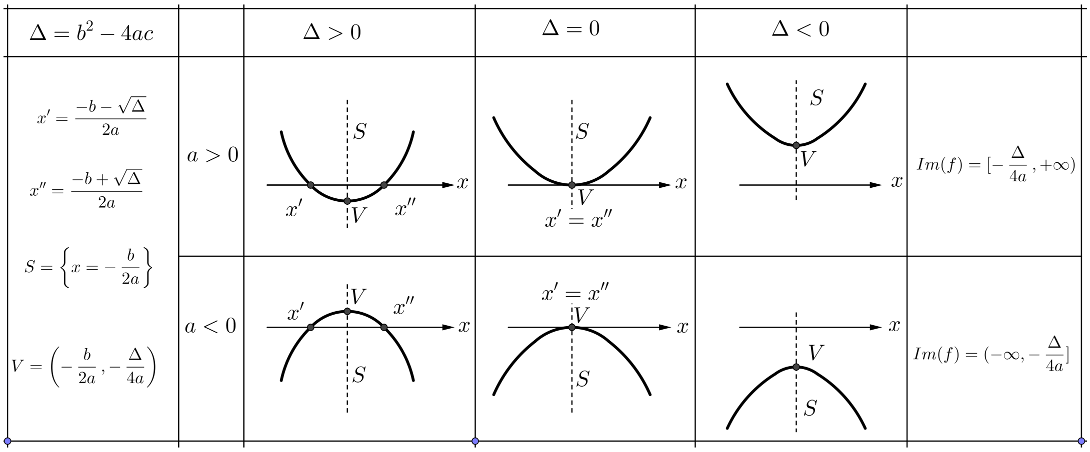


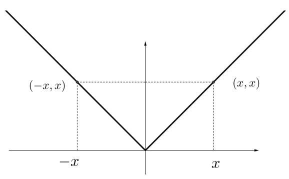
Figura 1.5: Dependência do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com respeito aos parâmetros a, b, c.

A tabela 1.5 nos diz que uma função quadrática é limitada inferiormente se $a > 0$, pois $f(x) \geq -\Delta/(4a)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mas não é limitada superiormente. Se $a < 0$, f é limitada superiormente, $f(x) \leq -\Delta/(4a)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, mas não é limitada inferiormente. Também podemos observar que para $a > 0$, a função quadrática é crescente no intervalo $[-b/2a, +\infty)$ e decrecente no intervalo $(-\infty, -b/2a]$. Já para $a < 0$, o comportamento da função inverte, isto é, ela é crescente no intevalo $(-\infty, -b/2a]$ e decrescente no intervalo $[-b/2a, +\infty)$.

Exemplo 1.30. A **função módulo** é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Pela definição de $|x|$ temos

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

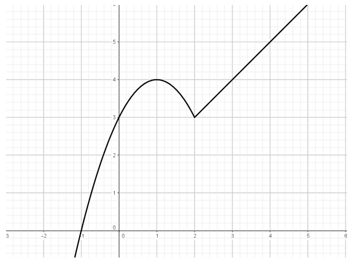
Se $x < 0$ então $f(x) = -x$ e o gráfico da restrição de f a $(-\infty, 0)$ é uma semireta de inclinação -1. Se $x \geq 0$ então $f(x) = x$ e o gráfico da restrição de f a $[0, +\infty)$ é uma semireta de inclinação 1. A Imagem de f é $Im(f) = [0, +\infty)$.



Assim, a função $f(x) = |x|$ é limitada inferiormente, mas não é limitada superirormente. Ela é crescente no intervalo $(0, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$.

A função módulo é um exemplo de **função definida por partes**, ou seja, uma função cuja regra muda dependendo do conjunto ao qual pertence x. Outros exemplos de funções deste tipo são dados a seguir.

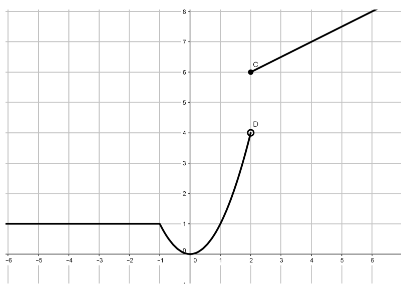
Exemplo 1.31. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & \text{se } x \leq 2 \\ x + 1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$



Para $x \leq 2$ o gráfico de f coincide com a parábola dada pelo gráfico de $x \mapsto -x^2 + 2x + 3$. Para $x > 2$ o gráfico de f coincide com a reta dada pelo gráfico de $x \mapsto x + 1$. A imagem desta função é $Im(f) = \mathbb{R}$, mostre isso! Analise se a função é limitada ou não e determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f.

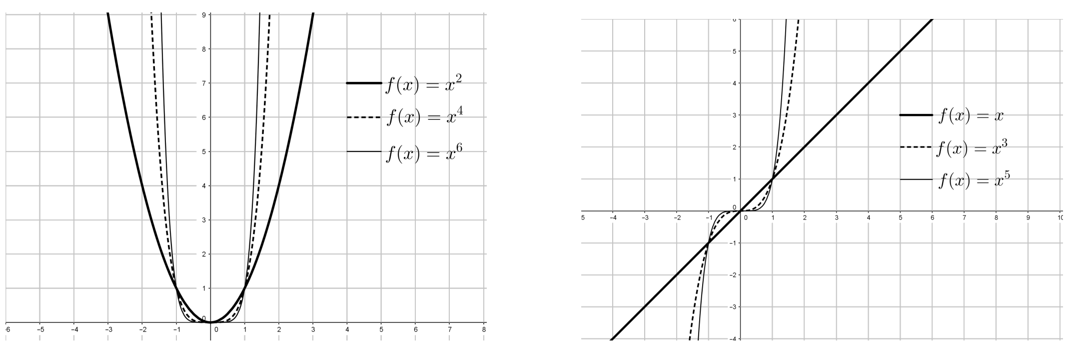
Exemplo 1.32. Na figura a seguir temos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq -1 \\ x^2, & \text{se } -1 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2}x + 5, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



Para $x \in (-\infty, -1)$ temos $f(x) = 1$. Para $x \in (-1, 2)$, $f(x) = x^2$ e para $x \in [2, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 5$. Esta função tem imagem $Im(f) = [0, 4) \cup [6, +\infty)$. Justifique isso! Analise se a função é limitada ou não e determine os intervalos de crescimento/decrescimento de f.

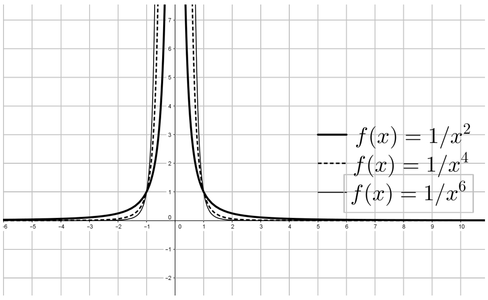
Exemplo 1.33. Dado um inteiro positivo p consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$. As características dos gráficos destas funções mudam dependendo de p ser par ou ímpar como vemos na figura abaixo.

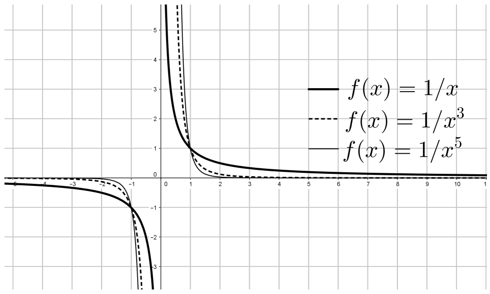


1. Se p é **par** então a equação $y = x^p$ tem solução se e somente se $y \geq 0$. As soluções são $x' = \sqrt[p]{y}$ e $x'' = -\sqrt[p]{y}$ se $y > 0$ e $x = 0$ se $y = 0$. Assim, $y \in Im(f)$ se, e somente se, $y \geq 0$. Neste caso, $Im(f) = [0, +\infty)$.

2. Se p é **ímpar** então a equação $y = x^p$ tem solução única $x = \sqrt[p]{y}$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Neste caso $Im(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 1.34. Dado um inteiro positivo p consideremos a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-p} = \dfrac{1}{x^p}$. Como no caso anterior, as características do gráfico mudam dependendo de p ser par ou ímpar como vemos na figura abaixo.





1. Se p é **par** então a equação $y = \dfrac{1}{x^p}$ tem solução se e somente se $y > 0$. As soluções são $x' = -\dfrac{1}{\sqrt[p]{y}}$ e $x'' = \dfrac{1}{\sqrt[p]{y}}$. Neste caso, $Im(f) = (0, +\infty)$.

2. Se p é **ímpar** então a equação $y = \dfrac{1}{x^p}$ tem solução única $x = \dfrac{1}{\sqrt[p]{y}}$ para qualquer $y \neq 0$. Neste caso, $Im(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.6 Função Par e Função Ímpar

Definição 1.35. Considere uma função $f : A \to \mathbb{R}$ tal que todo $x \in A$ tem-se $-x \in A$

1- Dizemos que f é uma **função par** se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$

2- Dizemos que f é uma **função ímpar** se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$

Exemplo 1.36. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ é par, pois

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Generalizando, toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ com p par , isto é $p \in \{2, 4, 6...\}$, é uma função par. Mostre isso!

Exemplo 1.37. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é ímpar por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

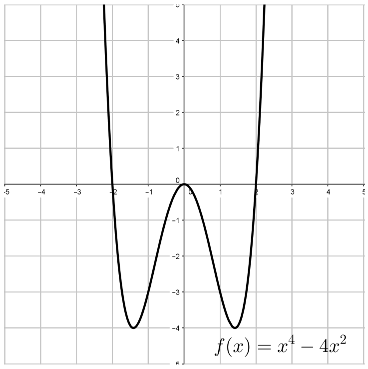
Generalizando, toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ com p ímpar, isto é $p \in \{1, 3, 5...\}$, é uma função ímpar. Mostre isso!

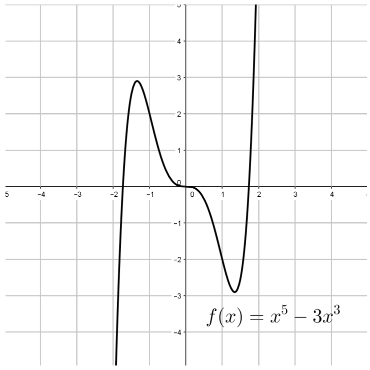
Observação 1.38. Se $f(x)$ é uma função par e (x_0, y_0) é um ponto do seu gráfico então como $y_0 = f(x_0) = f(-x_0)$ temos que $(-x_0, f(x_0))$ também é um ponto de $G(f)$. Consequentemente, **o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo** y.

Observação 1.39. Se $f(x)$ é uma função ímpar e (x_0, y_0) é um ponto do seu gráfico então como $-y_0 = -f(x_0) = f(-x_0)$ temos que $(-x_0, -f(x_0))$ também é um ponto de $G(f)$. Consequentemente, **o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem**.

Exemplo 1.40. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 - 4x^2$ é um função par, pois

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x).$$





Exemplo 1.41. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5 - 3x^3$ é um função ímpar, pois

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 = -x^5 + 3x^3 = -f(x).$$

Exemplo 1.42. A função $f(x) = x^2 - 1$ é par, pois $f(x) = x^2 - 1 = (-x)^2 - 1 = f(-x)$.

Nem toda função é par ou ímpar. Para mostrar que uma função $f(x)$ não é par é suficiente exibir um x_0 tal que $f(-x_0) \neq f(x_0)$. Para mostrar que uma função $f(x)$ não é ímpar é suficiente exibir x_0 tal que $f(-x_0) \neq -f(x_0)$.

Exemplo 1.43. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$ **não** é par. Para mostrar isso basta ver que $f(-1) = 1$ e $f(1) = 5$. Portanto $f(1) \neq f(-1)$.

Exemplo 1.44. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ **não** é ímpar. Para mostrar isso basta ver que $f(2) = 6$ e $f(-2) = 2$. Portanto $f(2) \neq -f(-2)$.

1.7 Soma, Diferença, Produto e Quociente de Funções

Podemos construir funções a partir de outras definindo **operações aritméticas** entre funções.

Definição 1.45. Dadas duas funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ tais que $A \cap B \neq \emptyset$, podemos definir:

i) **Função Soma**: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Então, $\mathrm{D}(f+g) = A \cap B$.

ii) **Função Diferença**: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Então, $\mathrm{D}(f-g) = A \cap B$.

iii) **Função Produto**: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Então, $\mathrm{D}(fg) = A \cap B$.

iv) **Função Quociente**: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, para todo $x \in A \cap B$,tal que $g(x) \neq 0$. Então, $\mathrm{D}(\dfrac{f}{g}) = \{x \in A \cap B; g(x) \neq 0\}$.

Observação 1.46. Se f for uma função constante, digamos $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então o produto de f e g será denotado por kg. Desta forma, multiplicar uma função por uma constante é um caso particular de multiplicação de duas funções.

Observação 1.47. Seja $n \in \mathbb{N}$. A função $g(x) = x^n$ é a multiplicação da função afim $f(x) = x$ (chamada função identidade) n-vezes.

Exemplo 1.48. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$. A função $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (**chamada função polinomial**) é a soma de funções do tipo do exemplo anterior multiplicadas por constantes.

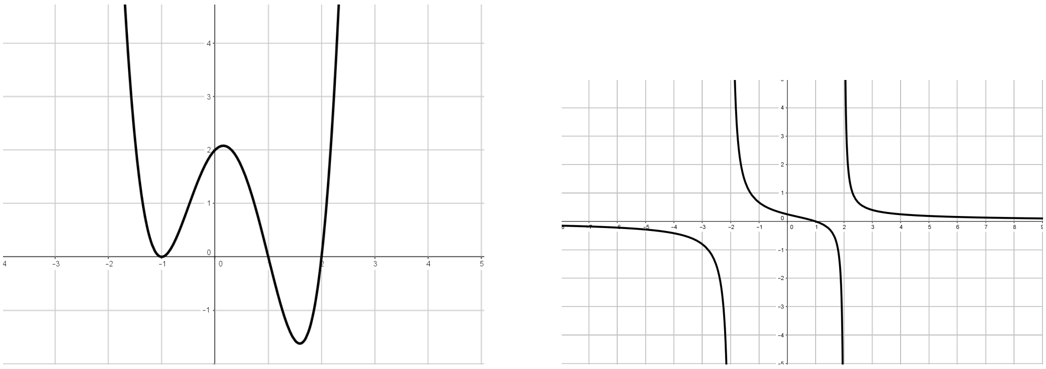
Exemplo 1.49. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ é um exemplo de função polinomial.

Exemplo 1.50. Uma função do tipo quociente de dois polinômios é chamada uma **função racional**. Funções racionais são da forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0, b_m, b_{m-1}, \cdots, b_0$ são constantes reais. O domínio de uma função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ é o conjunto $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$

Exemplo 1.51. $f : \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ é um exemplo de função racional.



(a) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

Figura 1.6: Exemplos de funções polinomial (a) e racional (b).

1.8 Composição de funções

Outro procedimento que nos permite obter funções a partir de outras é a **composição de funções.**

Definição 1.52. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ funções. Se $Im(f) \subset B$ então podemos calcular $g(f(x))$ para todo $x \in A$. A **função composta** de f e g é a função $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemplo 1.53. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ e $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Observe que $Im(f) = [1, +\infty)$ está contida em $D(g) = [0, +\infty)$. Portanto, podemos definir a composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é dada por:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Por outro lado, também temos $Im(g) = [0, +\infty)$ contida em $D(f) = \mathbb{R}$. Assim, podemos definir a composta $f \circ g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

Observe que $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções diferentes.

Observação 1.54. É possível definir $g \circ f$, mesmo quando $Im(f)$ não está contida em $D(g)$. Neste caso, definimos o domínio da composta $(g \circ f)$ como sendo o conjunto dos $x \in D(f)$ tais que $f(x) \in D(g)$, ou seja

$$\mathrm{D}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{D}(f); f(x) \in \mathrm{D}(g)\}.$$

Exemplo 1.55. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$ e $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Temos que $Im(f) = \mathbb{R}$ não está contida em $D(g) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Assim, só podemos definir $g \circ f$ no conjunto $\{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$. Observe que $f(x) \in D(g)$ se e somente se $2x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Portanto,

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$$

Assim, definimos $g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}$ por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x + 4}$$

Exemplo 1.56. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ e $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Observe que $Im(f) = (-\infty, 1/4]$ não está contida em $D(g) = [0, +\infty)$. Assim, só podemos definir $g \circ f$ no conjunto $\{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \{x \in D(f) : f(x) \in [0, +\infty)\}$. Estudando o sinal de f vemos que $f(x) \in [0, +\infty)$ se e somente se $x \in [2, 3]$. Assim, temos

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = [2, 3]$$

Definimos $g \circ f : [2, 3] \to \mathbb{R}$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$$

Exemplo 1.57. Considere a função quadrática $h(x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, cujo domínio é $\mathbb{R}$. Veja que podemos obter qualquer elemento da imagem de h pelo seguinte processo:

$$x \overset{f}{\longmapsto} 2x + 1 \overset{g}{\longmapsto} (2x + 1)^2 \in \mathrm{Im}(h)$$

Isso significa que os elementos da imagem de h podem ser obtidos compondo duas funções f e g dadas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$, cujos domínios são $\mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que $h = g \circ f$.

Exemplo 1.58. Considere $h : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x + 1}$. Vejamos que podemos obter os elementos da imagem de h a partir de cada $x \in [-1, +\infty)$ como:

$$x \overset{f}{\longmapsto} x + 1 \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x + 1} \in \mathrm{Im}(h)$$

Isso significa que os elementos da imagem de h podem ser obtidos compondo duas funções f e g dadas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Note que se $x \in [-1, +\infty)$, então $x + 1 \in [0, +\infty) = \mathrm{D}(g)$. Assim, considerando $\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(h) = [-1, +\infty)$, temos $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty) = \mathrm{D}(g)$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(h)$.

1.8.1 Composições com Translações

Vamos estudar as composições de uma função f com uma função do tipo $g(x) = x \pm a$ com $a > 0$. Temos duas possibilidades para a composição : $f \circ g$ ou $g \circ f$. Em cada caso a composição gera uma função cujo gráfico é uma **translação** do gráfico de f na horizontal ou na vertical dependendo da ordem da composição. Vamos estudar os casos possíveis.

Translações Horizontais: Considere uma função $f : A \to \mathbb{R}$ e uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + a$, com $a > 0$. Considere a composta $h(x) = f \circ g(x) = f(x + a)$. O domínio de h é

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} : x + a \in A\}$$

Para todo $x_0 \in A$ temos $x_0 - a \in D(h)$. Portanto, o domínio de h é uma translação à esquerda do domínio de f. Observe ainda que se $y_0 = f(x_0)$ então temos

$$y_0 = f(x_0) = f(x_0 - a + a) = h(x_0 - a)$$

Isso implica que $(x_0, y_0) \in G(f)$ se e somente se $(x_0 - a, y_0) \in G(h)$. Observe que o ponto $(x_0 - a, y_0)$ é uma translação horizontal à esquerda do ponto (x_0, y_0). Assim, **o gráfico de $h = f(x + a)$ com $a > 0$ é uma translação horizontal à esquerda do gráfico de f.**

Consideremos agora a composição de $f : A \to \mathbb{R}$ com a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - a$, $a > 0$. A composta $h(x) = f \circ g(x) = f(x - a)$ tem domínio

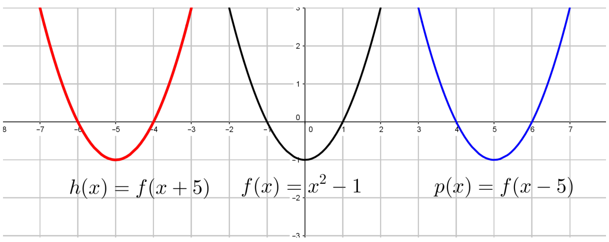
$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} : x - a \in A\}$$

que é uma translação à direita do domíno de $\mathbb{R}$. Fazendo uma análise parecida com a que fizemos acima podemos ver que **o gráfico de $h(x) = f(x - a)$ com $a > 0$ é uma translação horizontal à direita do gráfico de f.**

Exemplo 1.59. Consideremos a função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ e seja $h(x) = f(x + 5)$. O domínio de h é:

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} : x + 5 \in [-2, 2]\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x + 5 \leq 2\} = [-7, -3]$$

Observe que $[-7, -3]$ é obtido transladando o intervalo $[-2, 2]$ em 5 para a esquerda. O gráfico de $h(x)$ é uma translação horizontal à esquerda do gráfico de $f(x)$ como ilustrado na figura a seguir.



Vejamos alguns pontos.

$$\begin{aligned} h(-6) &= f(-6 + 5) = & f(-1) = 0 \\ h(-5) &= f(-5 + 5) = & f(0) = -1 \\ h(-4) &= f(-4 + 5) = & f(1) = 0 \\ h(-3) &= f(-3 + 5) = & f(2) = 3 \end{aligned}$$

Agora, considere a função e $p(x) = f(x - 5)$. O domínio de $p(x)$ é:

$$D(p) = \{x \in \mathbb{R} : x - 5 \in [-2, 2]\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x - 5 \leq 2\} = [3, 7]$$

Observe que $[3,7]$ é obtido transladando $[-2,2]$ em 5 para a direita. O Gráfico de $p(x)$ é uma translação horizontal à direita do gráfico de $f(x)$. Vejamos alguns pontos.

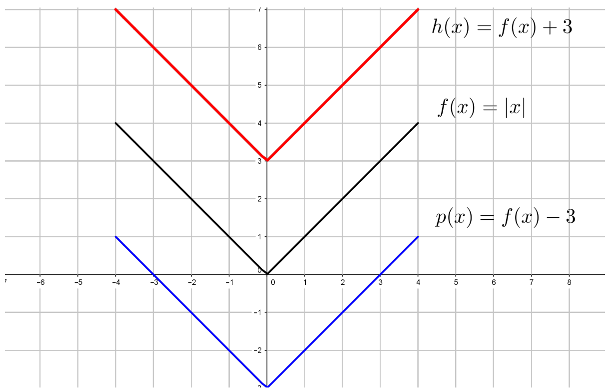
$$\begin{aligned}
p(6) &= f(6-5) = & f(1) = 0\\
p(5) &= f(5-5) = & f(0) = -1\\
p(4) &= f(4-5) = & f(-1) = 0\\
p(3) &= f(3-5) = & f(-2) = 3
\end{aligned}$$

Observação 1.60. Quando $D(f) = \mathbb{R}$, o domínio de $h = f(x \pm a)$ é também $\mathbb{R}$ pois para todo $k \in \mathbb{R}$ temos $\{x \in \mathbb{R} : x + k \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Translações verticais Considere uma função $f : A \to \mathbb{R}$ e uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x+a$, $a > 0$. Considere a composta $h(x) = g \circ f(x) = f(x) + a$. Observe que, neste caso, $D(h) = A = D(f)$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$ temos que $h(x_0) = f(x_0) + a$. Isso implica que a imagem de x_0 por h é uma translação vertical para cima da imagem de x_0 por f. Consequentemente, **o gráfico de $h(x) = f(x) + a$ com $a > 0$ é uma translação vertical para cima do gráfico de $f(x)$.**

Agora, consideremos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - a$, $a > 0$ e a composta $h(x) = g \circ f(x) = f(x) - a$. Novamente, $D(h) = A = D(f)$. Para todo $x_0 \in A$ temos por $h(x_0) = f(x_0) - a$. Logo, a imagem de x_0 por h é uma translação para baixo da imagem de x_0 por f. Consequentemente, **o gráfico de $h(x) = f(x) - a$ com $a > 0$ é uma translação vertical para baixo do gráfico de $f(x)$.**

Exemplo 1.61. Considere a função $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$,$f(x) = |x|$. Na figura abaixo ilustramos os gráficos de $h(x) = f(x) + 3$ e $p(x) = f(x) - 3$



1.8.2 Composições com a função Módulo

Vamos estudar as composições de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a função módulo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Como na seção anterior, consideraremos as duas possibilidades de composição estudando como, em cada caso, o gráfico da composta se relaciona com o gráfico de f.

Consideremos primeiro a composta $(g \circ f)(x) = |f(x)|$ que é dada por

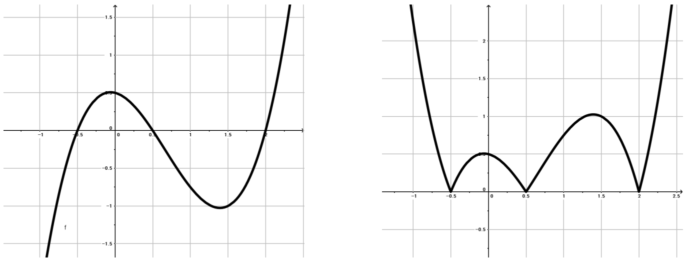
$$g \circ f(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Para descrever o gráfico de $|f(x)|$, observemos que esta é uma função definida por partes. Temos dois casos a analisar.

1. Se $f(x) \geq 0$ então $(g \circ f)(x) = f(x)$. Isso implica que o gráfico de $|f(x)|$ coincide com o gráfico de $f(x)$ nos pontos onde $f(x) \geq 0$.

2. Agora, se $f(x) < 0$ então $|f(x)| = -f(x)$. Isso implica que se $(x, y) \in G(f)$ e $y = f(x) < 0$ então $(x, -y) \in G(|f|)$. Ou seja, o gráfico de $|f(x)|$ é uma reflexão do gráfico de f com relação ao eixo das abiscissas nos pontos onde $f(x) < 0$.

Vamos ilustrar o que discutimos acima com um exemplo. Nas gráficos representados nas figuras 1.7a e 1.7b, temos uma função polinomial de 3^o grau $f(x)$ e a função $|f(x)|$, respectivamente. Veja que $f(x) \geq 0$ em $[-1/2, 1/2] \cup [2, +\infty)$, assim $|f(x)| = f(x)$ aí. Já nos intervalos $(-\infty, -1/2)$ e $(1/2, 2)$, temos $f(x) < 0$, donde $|f(x)| = -f(x)$.



(a) $y = f(x)$ (b) $y = |f(x)|$

Figura 1.7

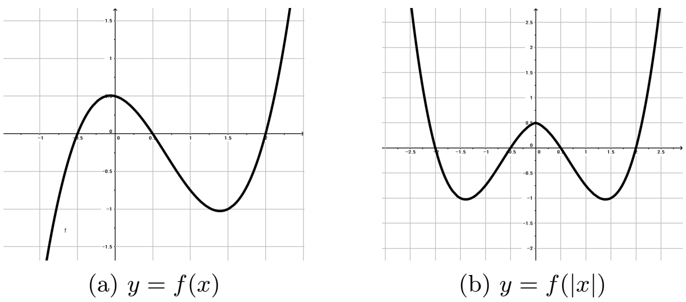
Agora, consideremos a composta $(f \circ g)(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Novamente, temos uma função definida por partes e dois casos a considerar

1. Se $x \geq 0$ então $f(|x|) = f(x)$. Isso implica que o gráfico de $f(|x|)$ coincide com o gráfico de f nos pontos onde $x \geq 0$.

2. Se $x < 0$ então $f(|x|) = f(-x)$. Isso implica que se $x < 0$ e (x, y) pertence ao gráfico de $f(|x|)$ então $(-x, y)$ pertence ao gráfico de f. Ou seja, a parte do gráfico de $f(|x|)$ correspondente aos pontos $x < 0$ é a reflexão com respeito ao eixo das ordenadas da parte do gráfico de $f(x)$ correspondente aos pontos $x > 0$.

Vamos ilustrar o que discutimos acima com um exemplo. Considere a função polinomial cujo gráfico está representado na figura 1.8a. Então, o gráfico de $f(|x|)$ é a figura 1.8b.



(a) $y = f(x)$ (b) $y = f(|x|)$

Figura 1.8

1.9 Funções Inversas

Podemos pensar uma função $f : A \to B$ como sendo uma regra que *transforma* elementos $x \in A$ em elementos $y = f(x) \in B$. Nesta seção, veremos que, sob certas condições, essa transformação pode ser *invertida*. Precisamente, veremos que existem funções $f : A \to B$ que admitem uma **função inversa** $f^{-1} : B \to A$ cuja regra *inverte* ou *desfaz* a transformação definida pela regra de f.

Como exemplo, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que transforma cada $x \in \mathbb{R}$ em seu dobro, ou seja, $f(x) = 2x$. Esta função pode ser invertiva e sua inversa é a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada x associa a metade de x, ou seja, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$.

Para que uma função seja invertível, isto é, admita inversa, é necessário que ela satisfaça algumas propriedades. Isso nos leva a estudar, primeiramente, duas classes de funções: as injetoras e as sobrejetoras. As funções invertíveis são aquelas que são bijetoras, ou seja, as funções que são injetoras e também sobrejetoras.

1.9.1 Funções Injetoras

Definição 1.62. Uma função f é dita **injetora** se elementos diferentes do domínio tem imagens diferentes. Mais precisamente, dizemos que $f(x)$ é injetora se satisfaz a seguinte condição

$$\text{para} \quad \text{todos} \quad x_1, x_2 \in D(f), \quad \text{se} \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{então} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \tag{1.1}$$

ou, equivalentemente:

$$\text{para} \quad \text{todos} \quad x_1, x_2 \in D(f), \quad \text{se} \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \text{então} \quad x_1 = x_2 \tag{1.2}$$

Vejamos alguns exemplos de funções injetoras.

Exemplo 1.63. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 \neq 2x_2 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Logo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ é injetora.

Exemplo 1.64. Também podemos verificar que a função do exemplo acima é injetora usando a condição (1.2) na definição 1.62. De fato, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Portanto, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Logo, $f(x)$ é injetora.

Observação 1.65. Podemos fazer exatamente o mesmo raciocínio do exemplo anterior para mostrar que qualquer função afim $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é injetora.

Exemplo 1.66. Considere $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Observe que se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ satisfazem $f(x_1) = f(x_2)$ então $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$, mas como x_1, x_2 são não-negativos, devemos ter $x_1 = (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 = x_2$. Logo, se $f(x_1) = f(x_2)$ devemos ter $x_1 = x_2$, o que mostra que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função injetora.

Observação 1.67. Segue da definição de raiz n-ésima de um número real que as seguintes funções são injetoras

- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ par.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

Exemplo 1.68. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2$. Observemos que dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1^5 + 2 = x_2^5 + 2 \quad \Rightarrow \quad x_1^5 = x_2^5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[5]{x_1^5} = \sqrt[5]{x_2^5} \quad \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Portanto, $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$. Logo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2$ é injetora.

Nem toda função é injetora! Para mostrar que uma função $f(x)$ **não** é injetora, é suficiente encontrarmos dois valores $x_1, x_2 \in D(f)$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.69. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$ não é injetora. De fato, $g(2) = 3$ e $g(-2) = 3$.

Exemplo 1.70. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^2 + 3$ não é injetora pois $f(1) = 3$ e $f(-1) = 3$.

Em algumas situações será útil restringir o domínio de uma função não injetora a fim de obter uma função injetora. Este procedimento é ilustrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.71. Como vimos anteriormente, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ não é injetora, no entanto a restrição $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$ é um função injetora. De fato, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ são tais que $g(x_1) = g(x_2)$ então $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$, donde $x_1^2 = x_2^2$, mas como x_1 e x_2 são não negativos, temos $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exemplo 1.72. A função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ não é injetora (verifique isso!), mas a restrição $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é injetora. (verifique isso!)

1.9.2 Funções Sobrejetoras

Definição 1.73. Uma função f é dita **sobrejetora** se todo elemento do contradomínio é imagem de um elemento do domínio, ou seja, $f : A \to B$ é sobrejetora se $\text{Im}(f) = B$.

Vejamos alguns exemplos de funções sobrejetoras.

Exemplo 1.74. Toda função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ tem imagem $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Portanto, toda função afim é sobrejetora.

Exemplo 1.75. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é sobrejetora. Para mostrar isso, observemos que dado qualquer $y \in \mathbb{R}$ temos

$$y = (\sqrt[3]{y})^3 = f(\sqrt[3]{y})$$

isto é, qualquer $y \in \mathbb{R}$ é imagem de algum elemento em $\mathbb{R}$. Isso mostra que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é uma função sobrejetora.

Exemplo 1.76. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2$. Observe que para todo $y \in \mathbb{R}$ temos

$$y = (\sqrt[5]{y - 2})^5 + 2 = f(\sqrt[5]{y - 2}).$$

Assim, qualquer $y \in \mathbb{R}$ é imagem de algum $x \in \mathbb{R}$. Logo, f é uma função sobrejetora.

Nem toda função é sobrejetora! Alguns exemplos de funções não sobrejetoras são dados a seguir.

Exemplo 1.77. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ não é sobrejetora, pois $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$, isto é, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}$.

Dada uma função $f : A \to B$ não sobrejetora, é sempre possível construir uma função sobrejetora g com mesma regra e domínio de f, bastando, para isso, definir o contradomínio de g como sendo $\mathrm{Im}(f)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.78. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4$ não é sobrejetora e tem imagem $\mathrm{Im}(f) = [-4, +\infty)$. A função de mesma regra e mesmo domínio $g : \mathbb{R} \to [-4, +\infty)$, $g(x) = x^2 - 4$ é sobrejetora.

Exemplo 1.79. A função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é sobrejetora pois $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Mas, a função de mesma regra e mesmo domínio $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ é sobrejetora.

1.9.3 Funções bijetoras e suas inversas

Definição 1.80. Quando $f : A \to B$ é injetora e sobrejetora, dizemos que f é **bijetora** ou ainda que f é uma **bijeção** entre A e B.

Exemplo 1.81. Toda função linear $f(x) = ax + b$, onde $a \neq 0$, é injetora e sobrejetora. Portanto, toda função afim é bijetora.

Exemplo 1.82. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^5 + 2$ é bijetora. De fato, em exemplos anteriores mostramos que esta função é injetora e sobrejetora.

Observemos que se $f : A \to B$ é bijetora e $y_0 \in B$ então

1. f é sobrejetora e existe uma solução $x_0 \in A$ para a equação $f(x) = y_0$.
2. f é também injetora, a solução de $f(x) = y_0$ é única.

Assim, cada $y_0 \in B$ está associado a um único $x_0 \in A$. Este fato nos permite definir uma função de domínio B e contradomínio A que a cada $y_0 \in B$ associa o único $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y_0$. Tal função é o que chamamos de inversa da função f.

Definição 1.83. Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. A **inversa** de f é a função $f^{-1} : B \to A$ definida pela regra

$$f^{-1}(y) = x \ \ se, \ \ e \ \ \ somente \ \ se, \ \ \ f(x) = y, \ \ \ \forall y \in B.$$

Observação 1.84. Algumas propriedades da relação entre uma função bijetora e sua inversa são:

1. Cada função bijetora admite uma **única** função inversa.
2. Se $g : B \to A$ é a inversa de $f : A \to B$, isto é $g = f^{-1}$, então f é a inversa de g, isto é, $f = g^{-1}$.
3. A composição de $f : A \to B$ com sua inversa $f^{-1} : B \to A$ resulta na função identidade em A ou B, dependendo da ordem da composição. Mais exatamente, temos as seguinte relações:

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \ \text{para todo } y \in B$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \ \text{para todo } x \in A.$$

Vejamos alguns exemplos de funções bijetoras e suas respectivas inversas.

Exemplo 1.85. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ é bijetora, como toda função afim. Logo, f admite uma inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para encontrar f^{-1} observemos que, pela definição 1.83, temos

$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) = 3x + 2$$

Mas,

$$y = 3x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{3} - \frac{2}{3}$$

Assim, a inversa de f é a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{3} - \frac{2}{3}$.

Observação 1.86. Como observamos acima, ao compor uma função f com sua inversa obtemos funções identidades. Vamos verificar este fato considerando a função do exemplo anterior. Observemos que para todo $y \in \mathbb{R}$ temos $(f \circ f^{-1})(y) = y$, de fato:

$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(\frac{y}{3} - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{y}{3} - \frac{2}{3}\right) + 2 = 3.\frac{y}{3} - 3.\frac{2}{3} + 2 = y - 2 + 2 = y$$

Por outro lado, temos que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, de fato:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(3x + 2) = \frac{3x + 2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3x}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = x$$

Observação 1.87. Sabemos que qualquer função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ é bijetora. Argumentando como no exemplo anterior podemos mostrar que a inversa de $f(x) = ax + b$ é a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{a} - \dfrac{b}{a}$. (Mostre isso!)

Exemplo 1.88. A função $f : [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 1$ é bijetora (verifique isso!). Para encontrar, sua inversa devemos resolver a equação $y = f(x)$ considerando $y \geq -1$ e $x \geq 0$. Observemos que

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = x^2$$

Mas, para $x \geq 0$ temos

$$x^2 = 1 + y \Leftrightarrow x = \sqrt{y + 1}.$$

Logo, a inversa de f é a função $f^{-1} : [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$.

Compondo f com sua inversa obtemos funções identidade, de fato:

$$(f \circ f^{-1})(y) = f\left(\sqrt{y + 1}\right) = (\sqrt{y + 1})^2 - 1 = y + 1 - 1 = y \quad \forall y \in [-1, +\infty)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(x^2 - 1\right) = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

Um fato interessante sobre funções bijetoras é que o gráfico de f, $G(f)$, e o gráfico da sua inversa f^{-1}, $G(f^{-1})$, são simétricos com relação à reta $y = x$. Isto acontece porque $x = f(y)$ se, e somente se, $y = f^{-1}(x)$ o que implica em

$$(x, y) \in \mathrm{G}(f) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathrm{G}(f^{-1}).$$

A simetria do gráfico de uma função bijetora f e o gráfico de sua inversa é ilustrado na Figura 1.9, para a função estudada no Exemplo 1.88.

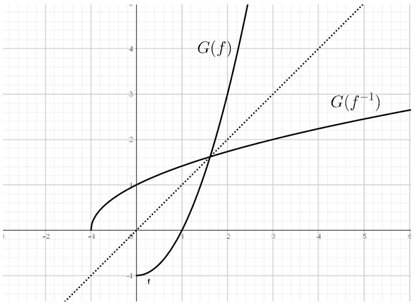


Figura 1.9: Gráficos de $f : [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 1$ e sua inversa.

Exemplo 1.89. Considere $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$. Vamos mostrar que f é bijetora e encontrar sua inversa. Primeiramente, observemos que se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ então

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} + 1 = \frac{2}{x_2} + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} = \frac{2}{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

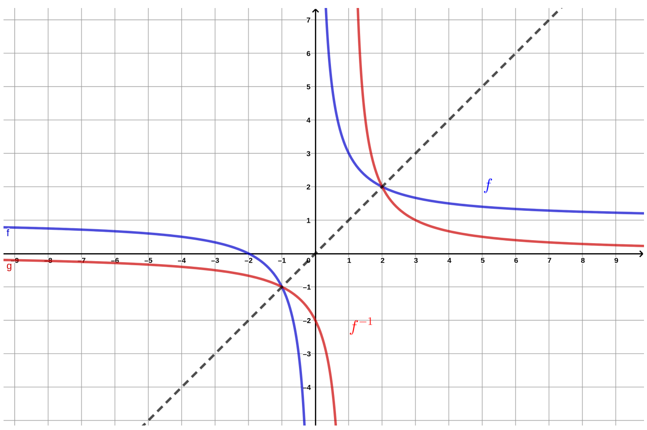
Portanto, f é uma função injetora. Agora, observemos que dado $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ temos que

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2}{x} + 1 \Leftrightarrow y - 1 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y-1}$$

Logo, cada $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ está associado a algum $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Assim, f é sobrejetora. Sendo injetora e sobrejetora, f é bijetora e, por ser bijetora, admite uma inversa $f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, Como vimos acima, temos

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{y-1}$$

Assim, $f^{-1}(y) = \dfrac{2}{y-1}$. Os gráficos de f e f^{-1} são ilustrados na figura a seguir.



1.10 Funções trigonométricas e suas inversas

Nessa seção, discutiremos as funções trigonométricas, começando por suas definições no triângulo retângulo. Em seguida, veremos as funções trigonométricas inversas e finalizaremos com alguns limites trigonométricos.

1.10.1 Medidas de ângulos

A partir desse ponto, trabalharemos com ângulos medidos em *radianos*. Veremos como definir 1 radiano. Em geral, um ângulo é medido a partir de uma reta horizontal em sentido antihorário.

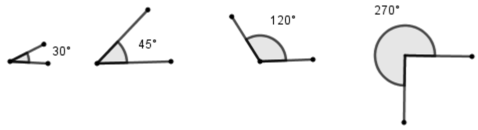


Figura 1.10: Alguns ângulos medidos em graus.

O valor do ângulo total é definido como 360^o. Considerando um círculo de raio 1 centrado na origem, se partimos do ponto $(1,0)$ (no sentido antihorário), definimos 1 radiano como a medida do ângulo formado quando percorremos o arco de medida 1:

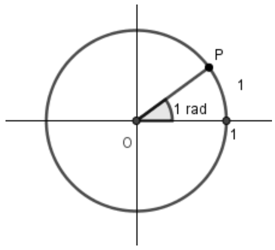


Figura 1.11: Definição de 1 radiano.

Dessa forma, 360^o correspondem ao comprimento da circunferência, isto é, 2π, o que nos dá um parâmetro para converter θ_g graus em θ_r radianos e vice-versa:

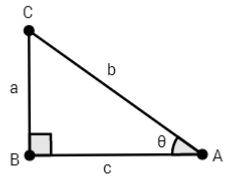
$$\frac{\theta_g}{\theta_r} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$$

Exemplo 1.90. Por exemplo, para um ângulo de 120^o, temos:

$$\frac{120}{\alpha_r} = \frac{180}{\pi} \Longrightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{2\pi}{3}$$

1.10.2 O círculo trigonométrico

Vamos começar trabalhando com um triângulo ABC retângulo em B.



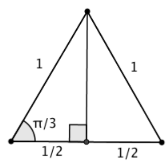
Conhecidas as medidas dos lados a, b, c, podemos relacioná-las com o ângulo $\theta \in (0, \pi/2)$ a partir das funções

$$\operatorname{sen}\theta := \frac{a}{b} \qquad \cos\theta := \frac{c}{b} \qquad \operatorname{tg}\theta := \frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Exemplo 1.91. Vamos calcular $\operatorname{sen}(\pi/3)$, $\cos(\pi/3)$ e $\operatorname{tg}(\pi/3)$. Para isso, vamos começar com um triângulo equilátero de lado 1 dividido em dois triângulos retângulos.

Usando o Teorema de Pitágoras, temos que a altura mede $\sqrt{3}/2$. Assim, olhando para o triângulo do lado esquerdo, temos:

$$\operatorname{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(\pi/3) = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$



Usando esse mesmo triângulo, podemos calcular ainda (faça isso!):

$$\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2} \qquad \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{tg}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

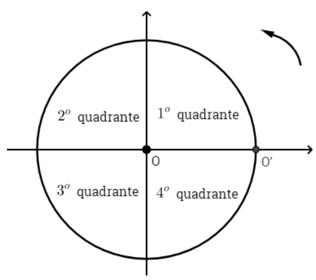
Exemplo 1.92. Considerando um triângulo retâgulo isóceles de base 1, pode-se provar que

$$\operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$$

Observamos que, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + c^2 = b^2$, assim, usando as definições acima temos a relação fundamental entre seno e cosseno:

$$b^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta = b^2 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é π e o triângulo ABC já tem um ângulo reto, temos que o valor de θ está limitado. Assim, vamos generalizar as funções seno, cosseno e tangente para que possam estar definidas para mais valores. Para isso, usaremos um círculo orientado de raio 1, no qual identificaremos o ponto $O' = (1, 0)$ com o ângulo de medida 0 radianos.



Dado um ângulo θ, definido por um ponto $P = (x, y)$ sobre o círculo orientado, como na figura 1.12, definimos

$$\operatorname{sen}\theta = y \qquad \cos\theta = x \qquad \operatorname{tg}\theta = \overline{O'P'}$$

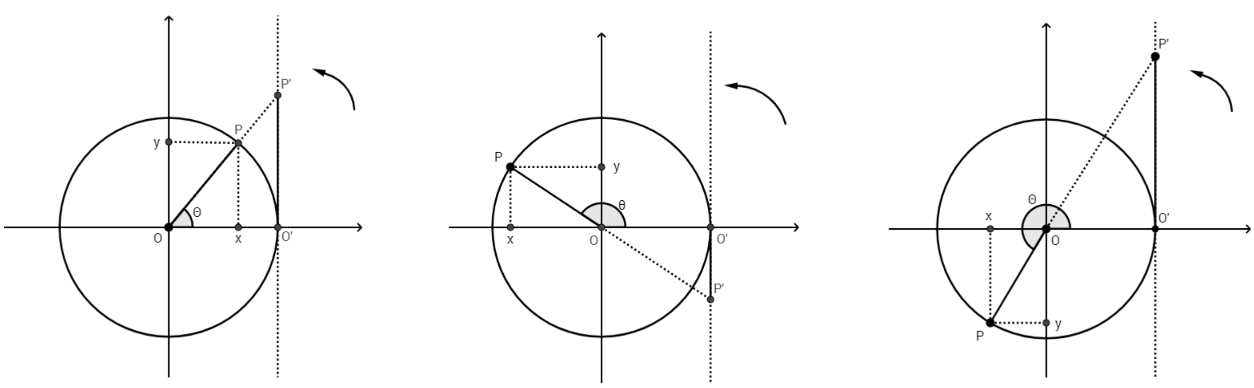


Figura 1.12: Funções trigonométricas definidas para um ângulo θ nos 1º, 2º e 3º quadrantes.

Como um exercício, faça o desenho do caso em que θ está no 4º quadrante.

Exemplo 1.93. É imediato que

$$\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(\pi) = \operatorname{sen}(2\pi) = 0 \qquad \cos(0) = \cos(2\pi) = 1 \qquad \cos(\pi) = -1$$

$$\operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \qquad \operatorname{sen}(3\pi/2) = -1 \qquad \cos(\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$$

Exemplo 1.94. Já calculamos $\cos(\pi/6)$ e $\operatorname{sen}(\pi/6)$ (veja exemplo 1.91). Na figura 1.13, vemos representados os ângulos de medidas $\pi/6$ e $2\pi/3$ no círculo trigonométrico.

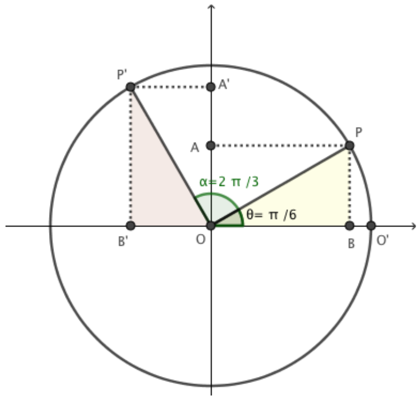


Figura 1.13: Senos e cossenos de $2\pi/3$ e $\pi/6$.

Temos que

$$O\hat{P}B = \pi - \pi/6 - \pi/2 = \pi/3$$
$$B'\hat{O}P' = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$$
$$O\hat{P}'B' = \pi - \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$$

Dessa forma, os dois triângulos na figura 1.13 são congruentes, isto é

$$\overline{B'P'} = \overline{OB} \quad \text{e} \quad \overline{OB'} = \overline{BP}$$

Agora, devido ao sinal do cosseno de $2\pi/3$ ser negativo, concluimos então que

$$\operatorname{sen}(2\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \qquad \cos(2\pi/3) = -\operatorname{sen}(\pi/6) = -1/2$$

O exemplo acima pode ser generalizado como

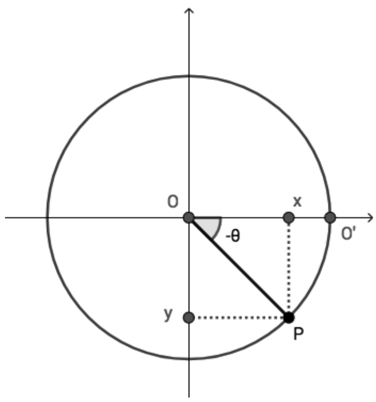
$$\operatorname{sen}(\pi/2 + \theta) = \cos\theta \quad \text{e} \quad \cos(\pi/2 + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

Outras propriedades análogas são:

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad \operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\pi/2 - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \qquad \operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$$

Apesar do maior ângulo que conseguimos representar em uma figura como em 1.12 ser 2π, as funções seno e cosseno estão definidas para ângulos de qualquer medida real, considerando várias voltas no círculo trigonométrico. Por exemplo, para um ângulo de medida $5\pi/2 = 2\pi + \pi/2$, temos uma volta completa no círculo e mais um ângulo de medida $\pi/2$. Assim, $\operatorname{sen}(5\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi/2) = 0$.

Além disso, podemos calcular seno e cosseno de ângulos negativos, usando a orientação oposta do círculo trigonométrico.



Nesse caso, não é difícil notar que (prove!):

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

Por fim, voltando à figura 1.12, notamos ainda que como P pertence ao círculo de raio 1 e suas coordenadas são exatamente $(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, segue que

$$1 = x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$$

como tínhamos no triângulo retângulo.

Encerramos essa seção com mais algumas identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\,\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\,\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

1.10.3 Funções Trigonométricas

Vamos considerar as funções seno e cosseno definidas na seção anterior. Temos que ambas tem $\mathbb{R}$ como domínio e $[-1, 1]$ como imagem (pois o círculo trigonométrico tem raio 1). Os gráficos dessas funções estão nas figuras 1.14 e 1.15.

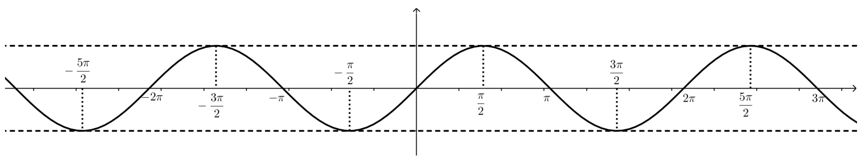


Figura 1.14: Gráfico da função seno.

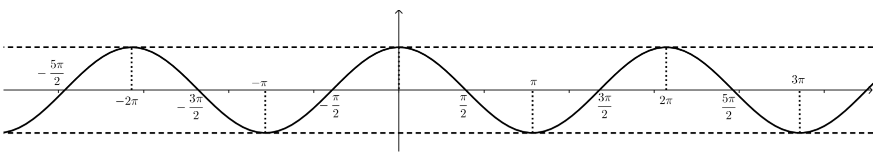


Figura 1.15: Gráfico da função cosseno.

Observamos que:

1. O gráfico do seno é simétrico em relação à origem, o que reflete o fato do seno ser uma função ímpar. Já o gráfico do cosseno é simétrico em relação ao eixo y, o que reflete o fato dessa ser uma função par.

2. Para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

   Isto é, tanto o seno quanto o cosseno são exempos de funções *periódicas*, de período 2π.

3. O gráfico da função cosseno pode ser obtido do gráfico da função seno por uma translação horizontal de $\pi/2$ unidades.

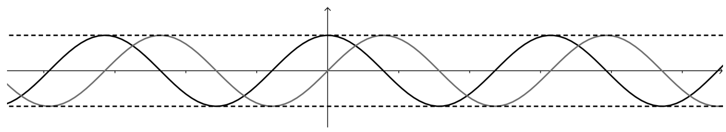


Figura 1.16: Comparação dos gráficos das funções seno e cosseno.

Considerando $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, temos que

$$\mathrm{D}(\operatorname{tg}) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \cos\theta \neq 0\} = \left\{\theta \in \mathbb{R} \,|\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Mas $\mathrm{Im}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$. O gráfico da tangente está a seguir:

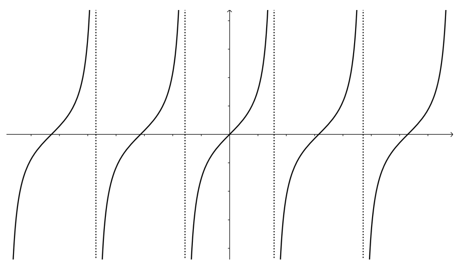


Figura 1.17: Gráfico da função tangente.

Observamos que

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\operatorname{tg}\theta$$

o que significa que a tangente é uma função ímpar, o que está refletido no gráfico, que é simétrico em relação à origem. Além disso, a tangente também é uma função periódica, mas de período π. Por fim, vemos que o gráfico da tangente tem assíntotas verticais $x = \pi/2 + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Podemos ainda definir a secante, a cossecante e a cotangente como:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Pelas definições, devemos ter:

$$\mathrm{D}(\sec) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \cos\theta \neq 0\} = \left\{\theta \in \mathbb{R} \,|\, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{cossec}) = \{\theta \in \mathbb{R} \,|\, \operatorname{sen}\theta \neq 0\} = \{\theta \in \mathbb{R} \,|\, \theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{cotg}) = \{\theta \in \mathbb{R} \,|\, \mathrm{sen}\,\theta \neq 0\} = \{\theta \in \mathbb{R} \,|\, \theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Já as imagens são:

$$\mathrm{Im}(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\mathrm{Im}(\mathrm{cossec}) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\mathrm{Im}(\mathrm{cotg}) = \mathbb{R}$$

Por fim, os gráficos das funções secante, cossecante e cotangente estão a seguir:

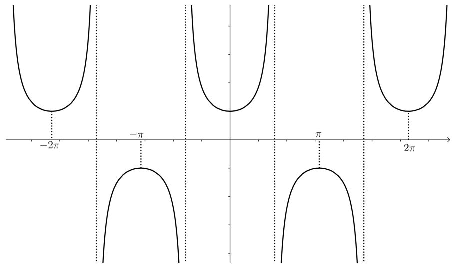


Figura 1.18: Gráfico da função secante.

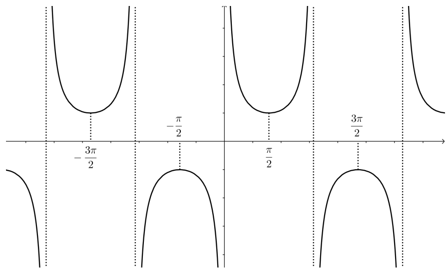


Figura 1.19: Gráfico da função cossecante.

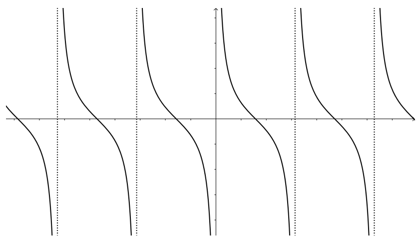


Figura 1.20: Gráfico da função cotangente.

1.10.4 Funções Trigonométricas Inversas

Vimos na seção anterior que seno e cosseno não são funções injetivas. Por exemplo, $\mathrm{sen}\,(k\pi) = 0$ e $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, a fim de ser possível definir funções inversas, devemos restringir o domínio. Trabalharemos então com:

$$\mathrm{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad \text{e} \qquad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

Dessa forma, tanto o seno quanto o cosseno são funções bijetores e, portanto, admitem inversas.

A função inversa do seno é chamada arcoseno e, por ser inversa, temos

$$\mathrm{arc}sen : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arc}seny$$

Além disso, para todos $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $y \in [-1, 1]$, temos

$$\operatorname{arc}sen(\operatorname{sen} x) = x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arc}seny) = y$$

Ainda, podemos obter o gráfico do arcoseno a partir de uma reflexão do gráfico do seno em relação à reta $y = x$, como na figura a seguir.

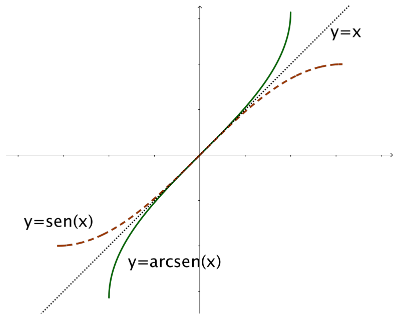


Figura 1.21: Gráficos das funções seno e arcoseno.

Analogamente, chamamos a inversa do cosseno de arcocosseno, obtendo

$$\operatorname{arc}cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \operatorname{arc}cosy$$

E para todos $x \in [0, \pi]$ e $y \in [-1, 1]$ temos

$$\operatorname{arc}cos(\cos x) = x \qquad \text{e} \qquad \cos(\operatorname{arc}cosy) = y$$

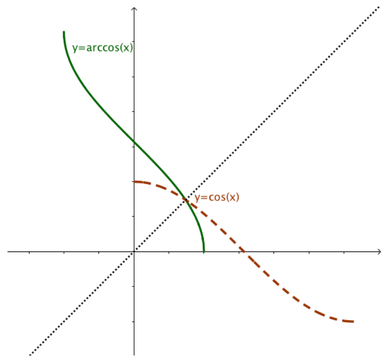


Figura 1.22: Gráficos das funções cosseno e arcocosseno.

Já para inverter a função tangente, devemos ter cuidado com os pontos $-\pi/2$ e $\pi/2$, já que a função não está definida nesses pontos. Assim, faremos a restrição

$$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

que é bijetora e, portanto, admite função inversa, chamada arcotangente. Como nos casos do seno e do cosseno, temos

$$\operatorname{arc}tg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

e para todos $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arc}tg(\operatorname{tg} x) = x \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arc}tgy) = y$$

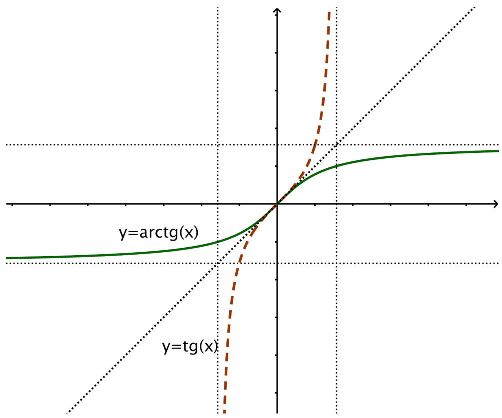


Figura 1.23: Gráficos das funções tangente e arcotangente.

O gráfico da função arcotangente pode ser, como antes, obtido pela reflexão do gráfico da tangente em relação à reta $y = x$:

Sobre o gráfico de arcotangente, observamos ainda

1. Tem assíntotas horizontais $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$.
2. É simétrico em relação à origem, isto é, arcotangente é uma função ímpar.

Por fim, restrigimos as funções secante, cossecante e cotangente a fim de que sejam bijetoras e, então, admitam inversas:

$$\sec : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{cossec} : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{cotg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

Você deve fazer os gráficos das funcões arcosecante, arcocossecante e arcocotangente. Utilize os gráficos da secante, cossecante e cotangente (figuras 1.18, 1.19 e 1.20) e a reta $y = x$ para isso.

1.11 Funções exponencial e logarítmica

Nos interessa definir uma função do tipo a^x, onde a é uma constante real positiva fixada e x é um número real qualquer. Façamos primeiro uma revisão de potenciação.

Seja a um número real. Para todo número natural $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$a^n := \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n-vezes}.$$

Em particular, $a^1 = a$. Temos que para todo $m, n \in \mathbb{N}$:

$$a^n a^m = a^{n+m}, \tag{1.3}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}. \tag{1.4}$$

Se b for outro número real, então

$$a^n b^n = (ab)^n, \tag{1.5}$$

Nosso objetivo é estender, passo a passo, a definição de a^n para $n \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ de modo que as propriedades (1.3), (1.4) e (1.5) continuem válidas. Então, definimos:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^{-n} &:= \frac{1}{a^n}, \qquad \text{se } a \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Para $a \geq 0$ e n PAR definimos $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$ e $b \geq 0$ e para n ÍMPAR e $a \in \mathbb{R}$, $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$. Daí, definimos potências racionais de números reais positivos da seguinte forma:

$$\text{se } a > 0,\ n, m \in \mathbb{Z} \ \text{ e } m \neq 0, \ \text{ então } \ a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Mas como definir a^x se x for um número irracional? Procederemos por aproximação, usando que qualquer real x pode ser aproximado por números racionais $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$, isto é, dado um número real x existem racionais $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots$ tais que

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots \to x \quad \text{ou ainda} \quad \lim_{n \to \infty} r_n = x.$$

Como a^{r_n} já foi definido para cada r_n da sequência, e os valores de a^{r_n} se aproximam de um valor real, definimos a^x como sendo esse valor, ou seja:

$$a^x := \lim_{n \to \infty} a^{r_n}.$$

Exemplo 1.95. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional e é possível obter aproximações pegando sequências de números do tipo:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots$$

onde o número racional r_{n+1} é obtido recurssivamente por $r_{n+1} = \dfrac{r_n}{2} + \dfrac{1}{r_n}$.

De fato, temos que

$$b = \lim_{n \to +\infty} r_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{r_n}{2} + \frac{1}{r_n} \right) = \frac{b}{2} + \frac{1}{b}$$

isto é,

$$b = \frac{b^2 + 2}{2b} \Rightarrow 2b^2 = b^2 + 2 \Rightarrow b^2 = 2$$

Como $r_n > 0$ para todo n, segue que $b > 0$ e, então $b = \sqrt{2}$.

Dessa forma, dado $a > 0$,

$$a^1, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{17}{12}}, a^{\frac{577}{408}}, a^{\frac{665857}{470832}}, a^{\frac{886731088897}{627013566048}}, \ldots, a^{r_n}, \ldots \longrightarrow a^{\sqrt{2}}$$

Assim, conseguimos definir a **função exponencial** com base $a > 0$.

Definição 1.96. Seja a um número real, $0 < a \neq 1$. Chamamos de **função exponencial com base** a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

Observação 1.97. Dentre todas as base possíveis para a função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. Essa base foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727 e é denotada por e. Tal constante é um número irracional, $2 < e < 3$, e $e \simeq 2,71828$. Uma das definições possíveis para a **constante de Euler** é o número para o qual tende o valor de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce ilimitadamente. Voltaremos a essa discussão quando estudarmos limites.

Do modo como foi construída a função exponencial, temos que se $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \tag{1.6}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \tag{1.7}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \tag{1.8}$$

Os gráficos das funções exponenciais sempre passam pelo ponto $(0, 1)$ e estão sempre acima do eixo x, pois $a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sempre que $a > 0$.

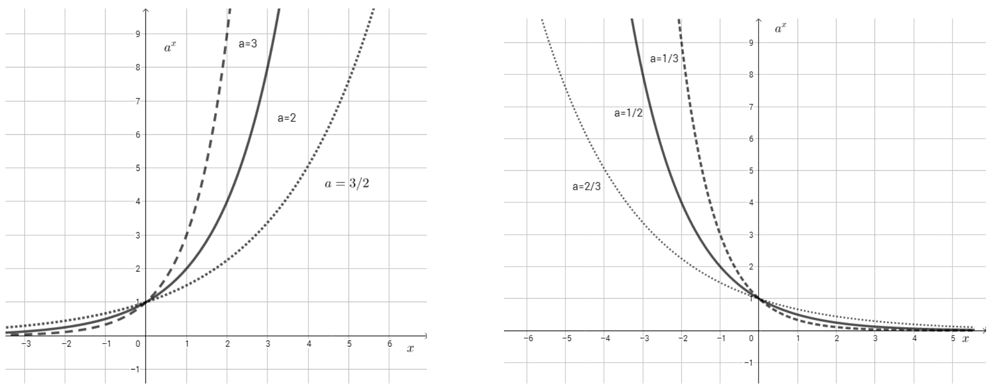
Veremos mais adiante, usando a derivada como ferramenta para construção de gráficos, que a função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 1$, é estritamente crescente, isto é,

$$\text{dados} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Para $0 < a < 1$, temos que a função exponencial $f(x) = a^x$ é estritamente decrescente, isto é,

$$\text{dados} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}.$$

Como funções estritamente crescentes ou estritamente decrescentes são injetoras (verifique isso!), temos que as funções exponenciais são sempre injetoras.



(a) $f(x) = a^x, \ a > 1$ (b) $f(x) = a^x, \ 0 < a < 1$

Figura 1.24: Gráficos de funções exponenciais

Vimos que se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ é sempre injetora. Também é possível mostrar que qualquer que seja o valor $a > 0$ e $a \neq 1$ o conjunto imagem da função exponencial $f(x) = a^x$, com $x \in \mathbb{R}$, é o intervalo $(0, +\infty)$. Assim, a $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ dada por $f(x) = a^x$ admite uma inversa f^{-1}, chamada **função logarítmica com base** a e denotada por $\log_a$. Segue da definição de função inversa que $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e que

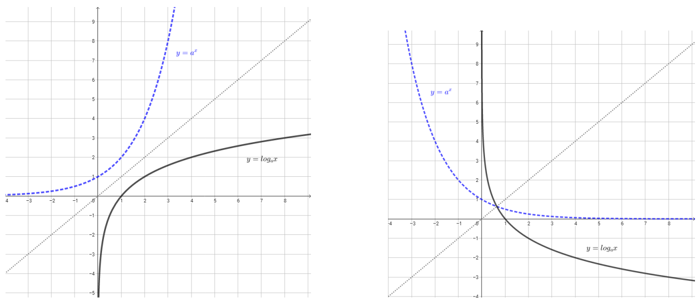
$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y.$$

Além disso,

$$\log_a(a^x) = x, \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

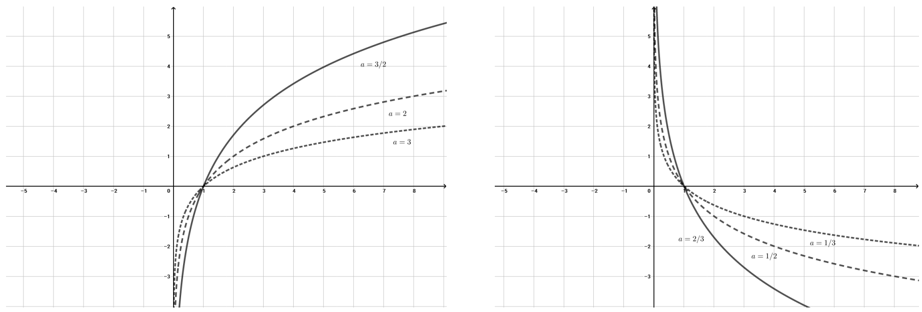
$$a^{\log_a y} = y, \ \text{para todo } y > 0.$$

Usando a simetria dos gráficos de $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$ em relação à origem, pois uma é inversa da outra, temos as seguintes possibilidades para os gráficos de $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.



(a) $y = log_a x, \;\; a > 1$ (b) $y = log_a x, \;\; 0 < a < 1$

Figura 1.25: Gráficos de funções logarítmicas



(a) $f(x) = \log_a x, \;\; a > 1$ (b) $f(x) = \log_a x, \;\; 0 < a < 1$

Figura 1.26: Mais gráficos de funções logarítmicas

O logaritmo satisfaz às seguinte identidades (supondo $x_1, x_2 > 0$ e $r \in \mathbb{R}$):

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2. \tag{1.9}$$

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2. \tag{1.10}$$

$$\log_a(x^r) = r\log_a x. \tag{1.11}$$

Para provar a primeira, chamemos $z = \log_a(x_1 x_2)$, o que significa que $a^z = x_1 x_2$. Escrevendo $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$ e usando a propriedade (1.6) da exponencial, temos

$$a^z = a^{\log_a x_1} a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2}$$

Assim, como a função exponencial é sempre injetora, temos que $z = \log_a x_1 + \log_a x_2$, o que prova (1.9). Verifique as identidades (1.10) e (1.11)!

Suponha agora que o $\log_a x$, para $x > 0$, seja conhecido. Como calcular $\log_b x$ numa outra base $b > 0$? Chamando $z = \log_b x$, temos $b^z = x$. Mas b pode ser escrito como $b = a^{\log_a b}$, assim temos $a^{z\log_a b} = x$. Portanto, $z\log_a b = \log_a x$. Obtemos assim a fórmula de mudança de base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

O logaritmo na base e é denotado por $\ln x$ (em vez de $\log_e x$) e é chamado **logaritmo neperiano** (devido a Napier) ou **logaritmo natural**.

1.12 Funções Hiperbólicas

A função exponencial na base e nos permite definir funções fundamentais chamadas funções hiperbólicas.

Função **Seno Hiperbólico**: é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

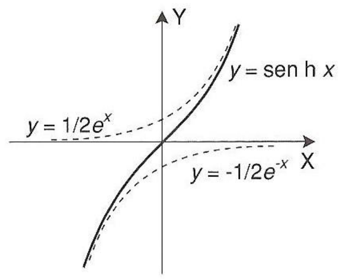


Figura 1.27: Gráfico da função seno hiperbólico. Observe que $\operatorname{Im}(\operatorname{senh} x) = \mathbb{R}$

Função **Cosseno Hiperbólico**: é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

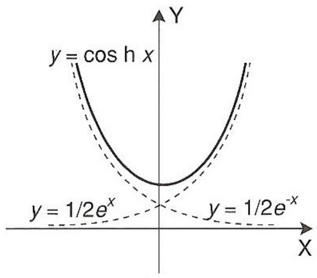


Figura 1.28: Gráfico da função cosseno hiperbólico. Observe que $\operatorname{Im}(\cosh x) = [1, +\infty)$

Observação 1.98. A figura abaixo representa um fio de telefone ou de luz. Observamos que a curva representada pelo fio aparenta a forma de uma parábola; no entanto, é possível mostrar que a equação correspondente é $y = \cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$, onde a é uma constante real não nula. Esta curva recebe o nome de catenária.

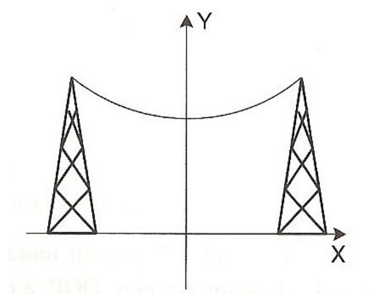


Figura 1.29: Catenária

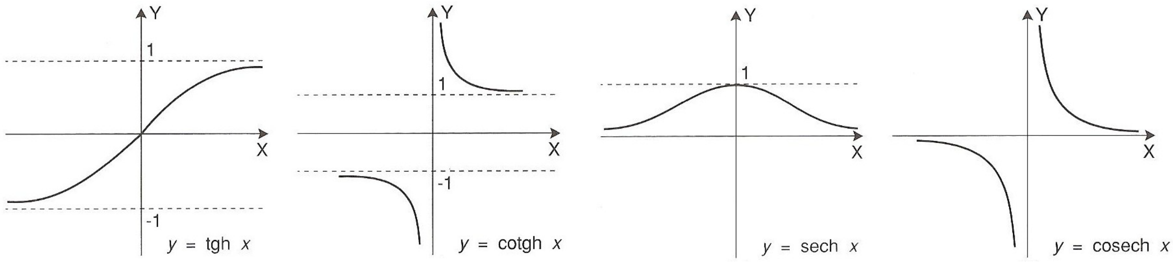
Podemos ainda definir as funções, **tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas**.

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \qquad D(\operatorname{tgh} x) = \mathbb{R} \text{ e } \operatorname{Im}(\operatorname{tgh} x) = (-1, 1)$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}; \qquad D(\operatorname{cotgh} x) = \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } \operatorname{Im}(\operatorname{cotgh} x) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}; \qquad D(\operatorname{sech} x) = \mathbb{R} \text{ e } \operatorname{Im}(\operatorname{sech} x) = [0, 1)$$

$$\operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}; \quad D(\operatorname{tgh} x) = \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } \operatorname{Im}(\operatorname{cossech} x) = \mathbb{R} - \{0\}$$



Você pode provar que as funções hiperbólicas satisfazem as seguintes identidades:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{1.12}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{tgh}} x \tag{1.13}$$

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x \tag{1.14}$$

$$-\operatorname{cossech}^2 x = 1 - \operatorname{cotgh}^2 x \tag{1.15}$$

Observação 1.99. Usando a identidade (1.12) temos que os pontos do plano ($\mathbb{R}^2$) da forma $(\cosh x, \operatorname{senh} x)$, para $x \in \mathbb{R}$, descrevem os pontos da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. Por isso o nome de funções hiperbólicas.

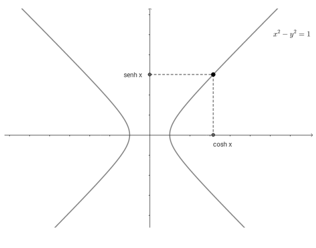


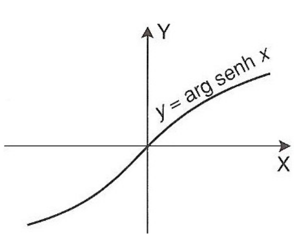
Figura 1.30: A hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

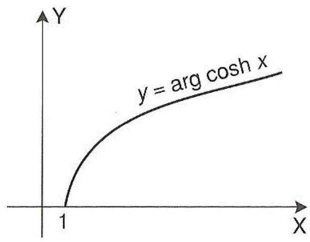
Analisando o gráfico da função $f(x) = \operatorname{senh} x$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (veja figura 1.27), vemos que é bijetora; logo admite inversa. A função inversa do seno hiperbólico, chamada **argumento do seno hiperbólico** e denotada por arg senh, é definida por:

$$\operatorname{argsenh} y = x \Leftrightarrow \operatorname{senh} x = y; \quad D(\operatorname{arg\,senh}) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\operatorname{arg\,senh}) = \mathbb{R}.$$

A função $f(x) = \cosh x$, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, não é injetora já que é uma função par. Porém, a função $f(x) = \cosh x$, definida de $[0, +\infty)$ em $[1, +\infty)$ é bijetora e portanto admite uma inversa. A sua inversa, chamada **argumento cosseno hiperbólico** é denotada por $\arg\cosh$. Então,

$$\arg\cosh x = y \Leftrightarrow \cosh y = x; \quad \mathrm{D}(\arg \mathrm{senh}) = [1, +\infty) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(\arg \mathrm{senh}) = [0, +\infty).$$





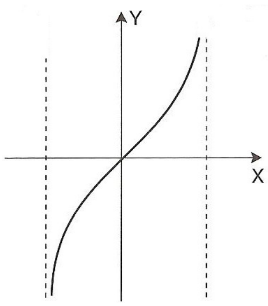
De maneira análoga definimos:

$$\arg \mathrm{tgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}; \quad \arg \mathrm{tgh}\, x = y \Leftrightarrow \mathrm{tgh}\, y = x;$$

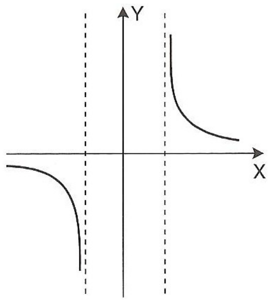
$$\arg \mathrm{cotgh} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R} - \{0\}; \quad \arg \mathrm{cotgh}\, x = y \Leftrightarrow \mathrm{cotgh}\, y = x;$$

$$\arg \mathrm{sech} : (0, 1] \to [0, +\infty); \quad \arg \mathrm{sech}\, x = y \Leftrightarrow \mathrm{sech}\, y = x;$$

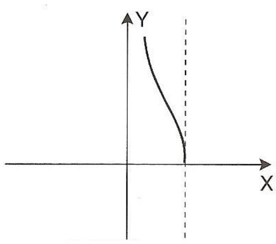
$$\arg \mathrm{cossech} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}; \quad \arg \mathrm{cossech}\, x = y \Leftrightarrow \mathrm{cossech}\, y = x;$$



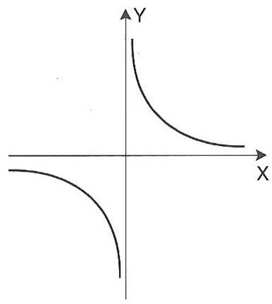
y=arc tgh x



y= arg cotgh x



y=arg sech x



y=arg cossech x

1.13 Exercícios

1. Dizemos que uma relação entre dois conjuntos não vazios A e B é uma função de A em B quando:

   (a) todo elemento de B é imagem de algum elemento de A.

   (b) todo elemento de B é imagem de um único elemento de A.

   (c) todo elemento de A possui somente uma imagem em B.

   (d) todo elemento de A possui, no mínimo, uma imagem em B.

   (e) todo elemento de A possui somente uma imagem em B e vice-versa.

2. Sobre o conjunto de pontos de interseção do gráfico de uma função f com uma reta vertical, podemos afirmar que:

   (a) possui exatamente dois elementos.

   (b) é vazio.

   (c) é infinito.

   (d) possui, pelo menos, dois elementos.

   (e) possui no máximo um elemento.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(3x) = 3\,f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $f(9) = 45$, determine $f(1)$.

4. Seja f uma função definida para todo n inteiro satisfazendo as seguintes condições $f(2) = 2$ e $f(p+q) = f(p)f(q)$. Determine $f(0)$ e $f(-2)$.

5. Seja $f(x) = ax + b$, onde a, b são reais fixos. Se $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$, determine $f(3)$.

6. A função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m+2)x - 1$ está definida quando:

   (a) $m \neq 4$ (c) $m \neq -2$ (e) $m \neq \pm 2$

   (b) $m \neq 2$ (d) $m = -2$ ou $m = 2$

7. Determine a imagem da função $f : (-4, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 - 12$.

8. Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt[3]{x - 1}}$.

9. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x + b$ e $g(x) = x^2$, onde $b \in \mathbb{R}$. Conhecendo a composta $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 9$, determine b.

10. Sejam $f(x) = \sqrt{x - 4}$, $g(z) = (f(z))^2$ e $h(y) = y - 4$. Considere as seguintes afirmativas:

    I) Os domínios de g e h coincidem.

    II) O domínio de g contém estritamente o domínio de h.

    III) A interseção dos domínios de f e g é vazia.

    IV) Qualquer que seja z real, $g(z) = z - 4$.

    Marque a alternativa correta:

    (a) Todas as afirmativas são verdadeiras.

    (b) Todas as afirmativas são falsas.

(c) Apenas uma afirmativa é verdadeira.

(d) Apenas duas afirmativas são verdadeiras.

(e) Apenas três alternativas são verdadeiras.

11. Dada $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Determine $h(x) = [f \circ (f \circ f)](x)$ e seu domínio.

12. Encontre o domínio das seguintes funções .

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

    (b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

    (c) $f(x) = x^2 + 5$

    (d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

    (e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x-1}$

    (f) $f(x) = \sqrt{x^2-a}$, $a \geq 0$

13. Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre e determine o domínio das funções:

    (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

14. Classifique as seguintes funções em par, ímpar ou nem par nem ímpar.

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

    (b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

    (c) $f(x) = x^2 + 5$

    (d) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

    (e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x-1}$

    (f) $f(x) = x^3 - 2\sqrt[3]{x}$

15. Um fabricante de refrigerante quer produzir latas cilíndricas para seu produto. A lata dever ter um volume de 360 ml. Expresse a área superficial total da lata em função do seu raio e dê o domínio da função.

16. Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + 1$. Determine a soma das raízes de f de forma que sua imagem seja $(-\infty, 3]$ e o eixo de simetria do gráfico de f seja $x = -1$.

17. Sejam $f(x)$ uma função par e $g(x)$ uma função ímpar. Então, sobre $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $r(x) = f(x)g(x)$, podemos afirmar que:

    (a) Ambas pares.

    (b) Ambas ímpares.

    (c) h é par e r é ímpar.

    (d) h é ímpar e r é par.

    (e) Nenhum dos casos anteriores.

18. Determine os intervalos em que $f(x) \geq 0$:

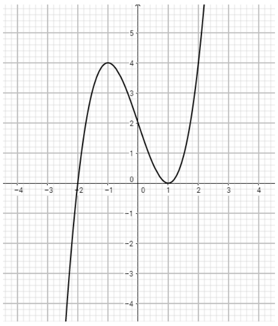
    (a) $f(x) = x(x^2 - 9)$

    (b) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

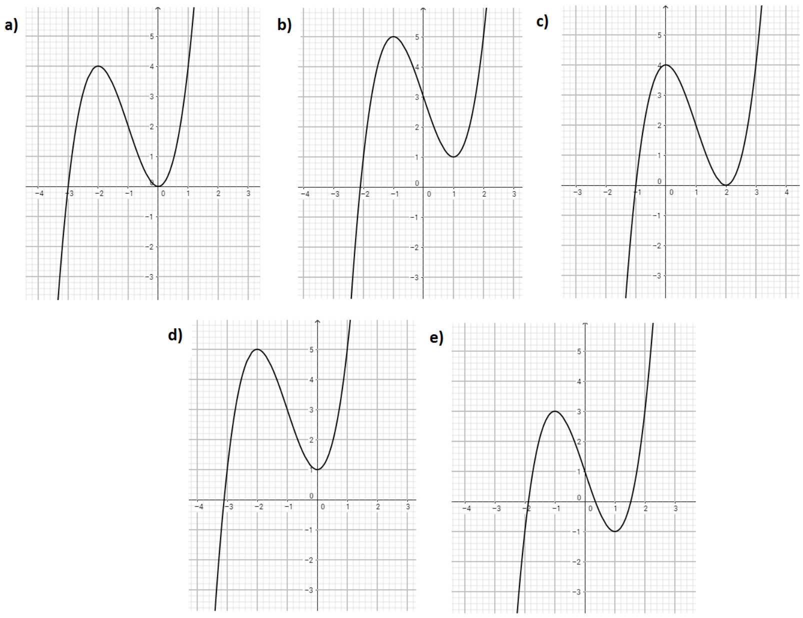
    (c) $f(x) = x^4 - 1$

    (d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

19. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada a seguir.



O gráfico da função $g(x) = f(x + 1)$ é:



20. (2012-1) Considere a função $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. Sobre a composta $h(x) = (f \circ f)(x)$ e seu domínio, podemos afirmar:

   (a) $h(x) = x$ e $D(h) = \mathbb{R} - \{-1\}$
   (b) $h(x) = x$ e $D(h) = \mathbb{R}$
   (c) $h(x) = -\dfrac{1}{x}$ e $D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$
   (d) $h(x) = x$ e $D(h) = \mathbb{R} - \{1\}$
   (e) $h(x) = \dfrac{1}{x}$ e $D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$

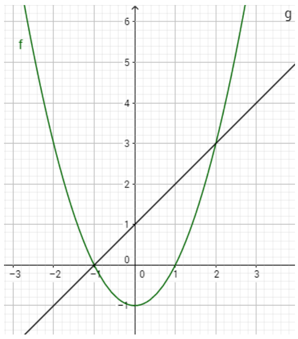
21. (2016-1) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + 2x + 1$. O valor de a para que a imagem de f seja $(-\infty, 3]$ pertence ao intervalo:

   (a) $(-1, 0)$
   (b) $(0, 1)$
   (c) $[-1, -1/2)$
   (d) $[1, 2)$
   (e) $[2, 4]$

22. (2016-1) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + 1$, onde a, b são constantes reais não-nulas e $a > 0$. Se o eixo de simetria do gráfico de é $x = 2$, podemos afirmar que o conjunto imagem de f é:

(a) $[-b-1, +\infty)$
(b) $[-b+1, +\infty)$
(c) $[b, +\infty)$
(d) $[b-1, +\infty)$
(e) $[b+1, +\infty)$

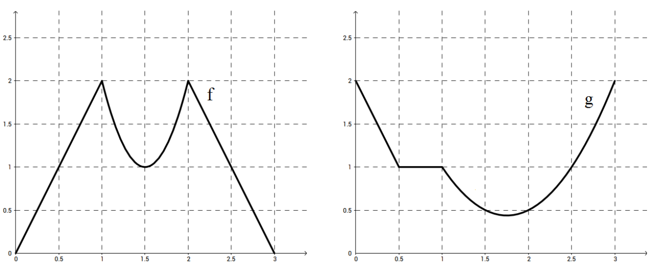
23. (2012-1) Considere os gráficos da função quadrática f e da função afim g representados na figura abaixo.



Marque a alternativa INCORRETA:

(a) $f(x)g(x) \le 0$, para todo $x \in (-\infty, -1)$.
(b) $f(x)g(x) \ge 0$, para todo $x \in (2, +\infty)$.
(c) $f(x) \ne g(x)$, se $x \ne -1$ e $x \ne 2$.
(d) $g(x) \ge f(x)$, para todo $x \in (1, 2]$.
(e) $g(x) > 0 > f(x)$, para todo $x \in (-1, 2)$.

24. (2016-2) Considere as funções $f, g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ representadas graficamente abaixo.



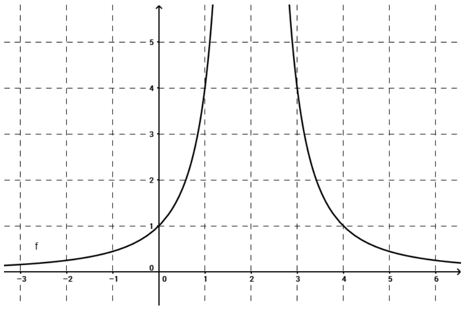
A solução da equação $(f \circ g)(x) = 2$ é:

(a) $[\frac{1}{2}, 1] \cup \{0, 3\}$.
(b) $[0, \frac{1}{2}] \cup \{0, \frac{5}{2}, 3\}$.
(c) $\{0, 1, 2, \frac{5}{2}, 3\}$.
(d) $\{0, 1, \frac{5}{2}, 3\}$.
(e) $[\frac{1}{2}, 1] \cup \{0, \frac{5}{2}, 3\}$.

25. (2017-1) Considere a função dada por $f(x) = ax^2 + 2x + a$. O valor de a para que a imagem de f seja $(-\infty, 2]$ pertence ao intervalo:

(a) $(0,1]$
(b) $(-1,0)$
(c) $(1,2]$
(d) $(-2,-1]$
(e) $(2,3]$

26. (2017-1) Considere a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ representada graficamente a seguir:



O domínio da função $g(x) = \sqrt{f(x) - 4}$ é:

(a) $[1,3]$
(b) $\{1,3\}$
(c) $[4,+\infty)$
(d) $(1,2) \cup (2,3)$
(e) $[1,2) \cup (2,3]$

27. Determine quais das seguintes funções são injetoras.

(a) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x^7}$.
(b) $f : [1/2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 1|$.
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.
(d) $f : \mathbb{R}\backslash\{-5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x+5}$.
(e) $f : [0,5]\backslash \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 3|$.
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^8 + x^2 - 9$.

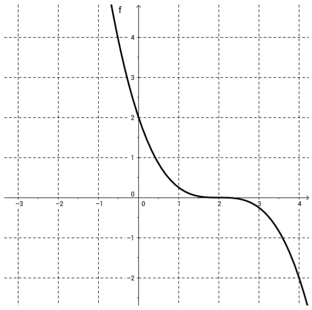
28. Determine quais das seguintes funções são sobrejetoras.

(a) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x^6}$
(b) $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = |x + 9|$
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 9$
(d) $f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x-3}$.
(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^7$
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^8 + x^2 - 9$.

29. Em cada item, mostre que f é bijetora, encontre a inversa f^{-1} e esboce os gráficos de f e f^{-1}.

(a) $f : [0,1] \to [3,8]$, $f(x) = 5x + 3$.
(b) $f : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$, $f(x) = 1 + (x - 1)^2$.
(c) $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)^3$.

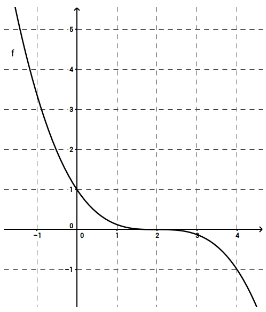
30. Considere a função invertível $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



O intervalo onde $2 \leq f^{-1}(x) \leq 4$ é:

(a) $(2, 6)$ (b) $(-3, 0]$ (c) $[0, 2)$ (d) $[-2, 0]$ (e) $(0, 6]$

31. Considere a função invertível $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada por:

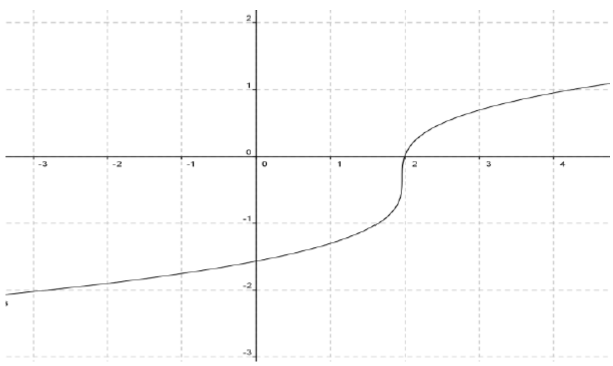


Sabendo que $f^{-1}(x) = a\sqrt[3]{x} + b$, é **correto** afirmar que:

(a) $ab = 1$ (b) $a = b$ (c) $a > b$ (d) $ab > -1$ (e) $|ab| > 2$

32. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 18$. Determine o valor de $b \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(b) = f(b)$.

33. A figura a seguir representa parte do gráfico de uma função inversível $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Marque a alternativa INCORRETA

(a) O gráfico da função inversa de f intersecta o eixo das abscissas em um ponto $(x, 0)$ com $x < 0$.

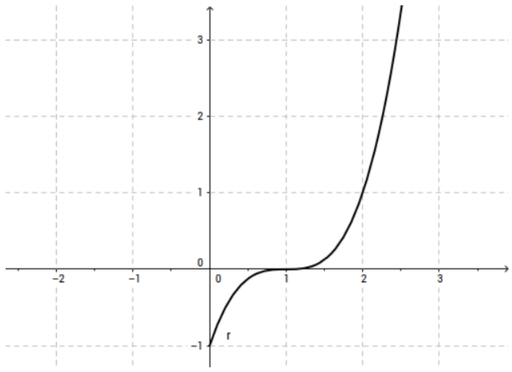
(b) O gráfico da função inversa de f intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 2)$.

(c) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(a) = f(a)$.

(d) A função inversa de f possui uma raiz negativa.

(e) $f^{-1}(-2) = -1$.

34. A figura abaixo representa parte do gráfico de uma função inversível $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.



Marque a alternativa INCORRETA

(a) $f^{-1}(1) = 2$.

(b) $f^{-1}(x) \leq 0$ para todo $0 \leq x \leq 1$.

(c) O ponto $(-1, 0)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

(d) Para todo $x \in [1, 2]$, tem-se $2 \leq f^{-1}(x) < 3$.

(e) Existe $a \in (-1, 0)$ tal que $f^{-1}(a) = 1/2$.

35. Determine o domínio das funções $f(x) = \text{tg}\,(x - \pi)$ e $g(x) = \text{arc}tg(x - 1)$.

36. (2011-1) Sobre o domínio da função $f(x) = \text{arc}cosx - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, podemos afirmar que:

(a) O domínio de f é um intervalo fechado.

(b) O domínio de f é um intervalo aberto.

(c) O domínio de f é um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita.

(d) O domínio de f é um intervalo aberto à esquerda e fechado à direita.

(e) O domínio de f não é um intervalo.

37. (2015-1) Considere as funções f e g definidas por $f(x) = |\text{sen}\, x|$ e $g(x) = \text{sen}\,|x|$. Marque a alternativa INCORRETA.

(a) Os dominios das funções f e g coincidem.

(b) As imagens das funções f e g não coincidem.

(c) As funções f e g são pares.

(d) As funções f e g são não negativas.

(e) $f(x) = g(x)$,se $-\pi \leq x \leq \pi$.

38. (2012-2) Sejam $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \text{sen}\, x$. Sobre a função composta $f \circ g$ e seu domínio $\text{D}(f \circ g)$ é correto afirmar que:

(a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\text{sen}\, x}$ e $\text{D}(f \circ g) = [0, \pi]$

(b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\text{sen}\, x}$ e $\text{D}(f \circ g) = [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$

(c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\text{sen}\, x}$ e $\text{D}(f \circ g) = [0, +\infty)$

(d) $(f \circ g)(x) = \text{sen}\,(\sqrt{x})$ e $D(f \circ g) = [0, +\infty)$

(e) $(f \circ g)(x) = \text{sen}\,(\sqrt{x})$ e $D(f \circ g) = [0, 2\pi]$

39. $|\cos(\text{arc}sen x)| = \sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in [-1, 1]$. Verdadeiro ou falso?

40. (2013-2) Considerando a função $\text{arc}cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, podemos afirmar que o valor de $\text{tg}\,\big(2\text{arc}cos(\sqrt{3}/2)\big)$ é:

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}/2$ (c) $\sqrt{3}/3$ (d) $\sqrt{3}/2$ (e) $1/2$

41. (2014-2) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\text{sen}\, x|$ e as seguintes afirmativas sobre f.

I. $f(1,7) > f(2,5)$
II. $f(\pi/2) = f(3\pi/2)$
III. $f(2\pi/3) > f(-5\pi/3)$
IV. A função admite inversa.
V. A função é par.

Marque a alternativa CORRETA:

(a) Todas as afirmativas são verdadeiras.
(b) Todas as afirmativas são falsas.
(c) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(d) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(e) Apenas as afirmativas I, II e V são verdadeiras.

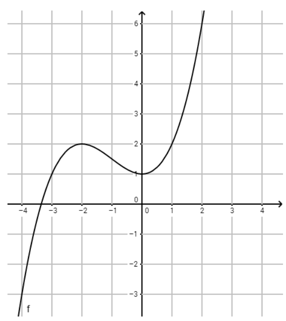
42. (2016-1) O domínio da função $f(x) = \dfrac{\ln(x-3)}{\sqrt{6x - x^2}}$ é:

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(6, +\infty)$ (c) $(3, 6)$ (d) $(0, 6)$ (e) $(0, 3)$

43. (2017-1) Considere a função dada por $f(x) = -4e^x - b$. O valor de b para que a imagem de f seja $(-\infty, -1)$ pertence ao intervalo:

(a) $[-1, 0)$ (b) $(0, 1]$ (c) $(1, 2]$ (d) $(-2, -1)$ (e) $(2, 3]$

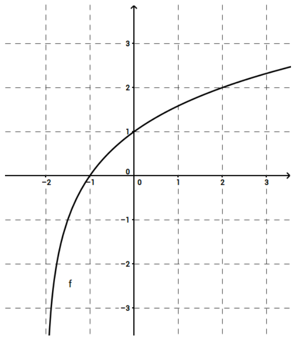
44. (2017-1) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada no gráfico a seguir.



O domínio da função $g(x) = \dfrac{\sqrt{f(x) - 1}}{\ln(2 - f(x))}$ é:

(a) $(1, 2)$
(b) $[-3, 1]$
(c) $[-3, -2) \cup (-2, 1)$
(d) $(-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1)$
(e) $(-3, 0) \cup (0, 1)$

45. (2017-1) Considere a função $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ representada graficamente a seguir:



O domínio da função $g(x) = \dfrac{x}{\log_3(2 - f(x))}$ é:

(a) $(-2, 2)$ (c) $(-1, +\infty)$ (e) $[0, +\infty)$
(b) $[0, 2)$ (d) $(-2, 0) \cup (0, 2)$

O conjunto solução da equação $e^{f(x)} - 1 = 0$ é:

(a) $\{0\}$ (b) $\{0, 1\}$ (c) $\{-1\}$ (d) $\{1, -1\}$ (e) $\{0, 1, -1\}$

Exercícios extras

46. "Cálculo - Vol 1", James Stewart

Páginas 33 e 34: exercícios 1 a 7

Página 35: exercícios 29 a 32, 37 a 39, 41 a 44, 50 a 54

47. Faça os seguintes exercícios dos livro *Cálculo A*.

(a) Páginas 74, número 16;

48. Faça os seguintes exercícios (sobre funções hiperbólicas) do livro *Cálculo A*.

(a) Páginas 53, 54, 55, 56, 57, 58 e 59.

1.14 Respostas dos exercícios

1. (c) 3. 5 5. -1 7. $[-12, 36)$ 9. -3

2. (e) 4. 1 e 1/2 6. (e) 8. $[-2, 1) \cup (1, 2]$ 10. (b)

11. $(f \circ f \circ f)(x) = x$ e $D(h) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

12. (a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (c) $\mathbb{R}$ (e) $\mathbb{R} \setminus \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$
(b) $[-1, +\infty)$ (d) $\mathbb{R}$ (f) $(-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty)$.

13. (a) $f \circ g(x) = \sqrt[4]{2 - x}$ e $D(f \circ g) = (-\infty, 2]$
(b) $g \circ f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$ e $D(g \circ f) = [0, 4]$
(c) $f \circ f(x) = \sqrt[4]{x}$ e $D(f \circ f) = [0, +\infty)$
(d) $g \circ g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$ e $D(g \circ g) = [-2, 2]$

14. (a) Par
(b) Nem par nem ímpar
(c) Par
(d) Par
(e) Nem par nem ímpar
(f) Ímpar

15. $A(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{720}{r}$, $D(A) = \mathbb{R}_+^*$

16. -2

17. (b)

18. (a) $[-3, 0) \cup [3, +\infty)$
(b) $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$
(c) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
(d) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

19. (a) 20. (a) 21. (a) 22. (e) 23. (e) 24. (e) 25. (b) 26. (e)

27. São injetoras as funções das letras (a), (b) e (d).

28. São sobrejetoras as funções das letras (b), (d) e (e).

29. (a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{5}$ (b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$ (c) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2$ (d) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

30. (d) 31. (e) 32. $b = 9$ 33. (e) 34. (b)

35. $\mathrm{D}(\mathrm{tg}\,(x-\pi)) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathrm{D}(\mathrm{arc}tg(x-1)) = \mathbb{R}$

36. (b) 37. (d) 38. (a) 39. V 40. (a) 41. (e)

42. (c) 43. (b) 44. (d) 45. (d), (c)

Capítulo 2

Limite de uma função

Podemos afirmar que o conceito de limite é uma das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial. Seu processo de construção surge historicamente a partir de problemas geométricos como, por exemplo, no cálculo da área de regiões planas e na determinação retas tangentes à uma curva. Apresentaremos rapidamente esses dois problemas que motivaram a definição de limite, como no livro *Cálculo com Geometria Analítica - Vol.1* de George Simmons (Editora Makron Brooks).

2.1 O problema das áreas - método de exaustão

A área de um retângulo é o produto das medidas de sua base e sua altura. Já a área de um triângulo é a metade do produto das medidas de sua base e altura. Como um polígono pode ser sempre decomposto em triângulos, sua área é a soma das áreas desses triângulos.

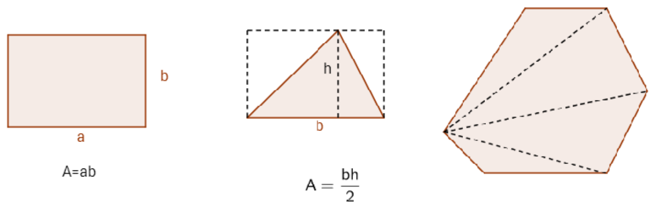


Figura 2.1: Áreas.

O círculo é uma figura mais complicada. Os gregos resolveram o problema de achar a sua área de uma maneira natural.

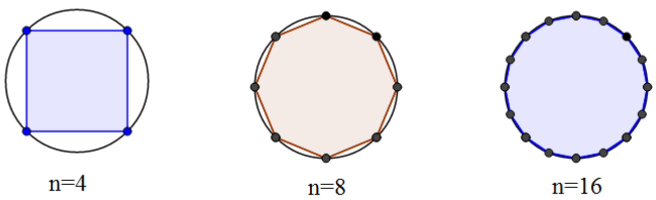


Figura 2.2: Método para aproximar a área do círculo.

Primeiro eles aproximaram essa área, inscrevendo um quadrado. Depois eles melhoram a aproximação, passo a passo, dobrando o número de lados, isto é, inscrevendo um octógono regular, depois um polígono regular de 16 lados e assim por diante. As áreas desses polígonos inscritos aproximam a área exata do círculo com uma precisão cada vez melhor. Vamos ver que esse processo chega à fórmula $A = \pi r^2$ para a área do círculo de raio r.

Suponha que o círculo tenha inscrito nele um polígono com um número grande n de lados, como na Figura 2.3.

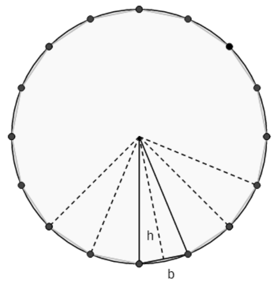


Figura 2.3: Círculo com polígono de n lados.

Cada um dos triângulos isóceles mostrados na figura anterior tem área igual a $\dfrac{bh}{2}$ e a soma dessas áreas é igual a área do polígono, que é uma aproximação da área do círculo. Se p denota o perímetro do polígono, então temos que

$$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh + \ldots + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}h(b + b + \ldots + b) = \frac{1}{2}hp.$$

Como o número de lados cresce, h "tende" a r (em símbolos $h \to r$) e p "tende" ao comprimento do círculo $c = 2\pi r$ (em símbolos $p \to c$). Portanto,

$$A_{\text{polígono}} = \frac{1}{2}hp \longrightarrow \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(2\pi r) = \pi r^2.$$

Esse processo é conhecido por *método de exaustão* porque a área do círculo foi *exaurida* pelas áreas dos polígonos inscritos.

2.2 Reta tangente a uma curva

Um problema básico do Cálculo Diferencial é o problema das tangentes: determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto P dado.

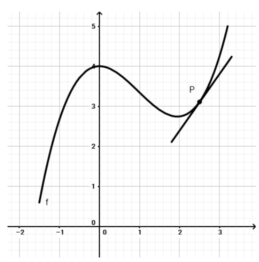


Figura 2.4: Reta tangente à uma curva.

Antes de tentar calcular o coeficiente angular da reta tangente, devemos decidir primeiro o que é uma reta tangente. No caso de uma circunferência não há dificuldade. Uma reta tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em um único ponto, chamado ponto de tangência. As retas não tangentes ou não interceptam a circunferência ou interceptam em dois pontos.

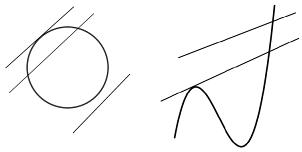


Figura 2.5: Relações entre círculo e retas e entre curvas e retas.

Essa situação reflete a ideia intuitiva que a maioria das pessoas tem de tangente a uma curva num dado ponto como sendo a reta que "toca" a curva naquele ponto. Ela sugere também a possibilidade de definir uma tangente a uma curva como uma reta que intercepta a curva em apenas um ponto, mas em geral essa ideia é insatisfatória, como vemos na Figura 2.5.

O conceito moderno de reta tangente originou-se com Fermat, em torno de 1630. Considere uma curva, gráfico da função $y = f(x)$, e P um ponto nessa curva. Considere Q um segundo ponto próximo de P sobre essa curva e desenhe a reta secante PQ. A reta tangente em P pode ser definida como a posição limite da secante variável quando Q desliza ao longo da curva na direção de P.

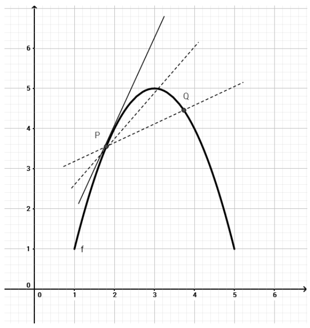


Figura 2.6: Posição limite da secante.

Mas como calcular o coeficiente angular da reta tangente? Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto na curva $y = f(x)$. Para começar o processo escolha um segundo ponto $Q = (x_1, y_1)$ sobre a curva. O coeficiente angular da secante PQ é

$$m_{sec} = \text{coeficiente angular da reta } PQ = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

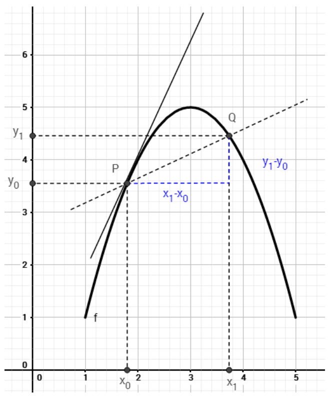


Figura 2.7: Cálculo do coeficiente angular.

Em seguida, façamos x_1 se aproximar de x_0, de modo que o ponto variável Q se aproxime do ponto P, ao longo da curva. Quando acontece isso, a secante muda de posição e se aproxima da tangente em P como sua posição limite. É também intuitivo que o coeficiente angular m

da tangente é o valor limite aproximado pelo coeficiente angular m_{sec} da secante. Se usarmos o símbolo $\to$ para indicar "se aproxima" (ou "tende"), então dizemos que quando x_1 tende a x_0, m_{sec} tende a m e escrevemos:

$$m = \lim_{P\to Q} m_{sec} = \lim_{x_1\to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

A formalização do conceito de limite de uma função visto através do método da exaustão e do cálculo do coeficiente angular de uma reta tangente será nosso objeto de estudo ao longo do capítulo.

2.3 Definição de limite

Intuitivamente dizemos que uma função f tem limite L quando x tende para a, se é possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de x, $x \neq a$, suficientemente próximos de a.

Inicialmente, vamos desenvolver essa ideia intuitiva, estudando o comportamento de uma função $y = f(x)$ próximo a um ponto que não pertence, necessariamente, ao seu domínio.

Consideramos, por exemplo, a função a seguir, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

Vamos construir uma tabela de valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 1, pela esquerda (isto é, quando $x < 1$) e pela direita (isto é, quando $x > 1$):

$x < 1$	$x - 1$	$f(x)$
0	-1	2
0,5	-0,5	2,5
0,7	-0,3	2,7
0,9	-0,1	2,9
0,99	-0,01	2,99
0,999	-0,001	2,999
0,9999	-0,0001	2,9999
0,99999	-0,00001	2,99999
0,999999	-0,000001	2,999999
0,9999999	-0,0000001	2,9999999
0,99999999	-0,00000001	2,99999999

$x > 1$	$x - 1$	$f(x)$
2	1	4
1,5	0,5	3,5
1,3	0,3	3,3
1,1	0,1	3,1
1,09	0,01	3,09
1,009	0,001	3,009
1,0009	0,0001	3,0009
1,00009	0,00001	3,00009
1,000009	0,000001	3,000009
1,0000009	0,0000001	3,0000009
1,00000009	0,00000001	3,00000009

Observando as tabelas, concluimos que: quando x se aproxima de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 3. A noção de proximidade fica mais precisa se utilizarmos o valor absoluto: no caso, o que observamos é que quando $|x - 1|$ fica pequeno $|f(x) - 3|$ fica pequeno também. Veja que essa relação de implicação vem da própria função, pois quando $x \neq 1$, isto é, $x \in \operatorname{Dom} f$, então:

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} - 3 \right| = |x + 2 - 3| = |x - 1|$$

Assim, a distância entre $f(x)$ e 3 depende da distância entre x e 1.

Para outro exemplo, vamos considerar $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$. Aqui, o domínio de f é todo o conjunto dos reais. Vamos analisar o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de 1. Para isso, vamos assumir que $|x - 1|$ está ficando pequeno, como no exemplo anterior.

$x < 1$	$x - 1$	$f(x)$
0	-1	1
0,5	-0,5	1,25
0,7	-0,3	1,35
0,9	-0,1	1,45
0,99	-0,01	1,495
0,999	-0,001	1,4995
0,9999	-0,0001	1,49995
0,99999	-0,00001	1,499995
0,999999	-0,000001	1,4999995
0,9999999	-0,0000001	1,49999995
0,99999999	-0,00000001	1,499999995

$x > 1$	$x - 1$	$f(x)$
2	1	2
1,5	0,5	1,75
1,3	0,3	1,65
1,1	0,1	1,55
1,09	0,09	1,545
1,009	0,009	1,5045
1,0009	0,0009	1,50045
1,00009	0,00009	1,500045
1,000009	0,000009	1,5000045
1,0000009	0,0000009	1,50000045
1,00000009	0,00000009	1,500000045

Pelas tabelas, vemos que quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima de $\frac{3}{2}$. Na verdade, como fizemos no exemplo anterior, podemos notar que

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}|x - 1|$$

Isto é, a distância entre $f(x)$ e $\frac{3}{2}$ depende da distância entre x e 1. Por exemplo, se a distância entre x e 1 for menor do que $0,0001$, isto é, $|x - 1| < 0,0001$, então a distância entre $f(x)$ e $\frac{3}{2}$ será

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}|x - 1| < 0,00005$$

Vemos que o tamanho $0,0001$ foi apenas um exemplo, pois podemos escolher qualquer número positivo, o menor que seja, e fazer o mesmo raciocínio.

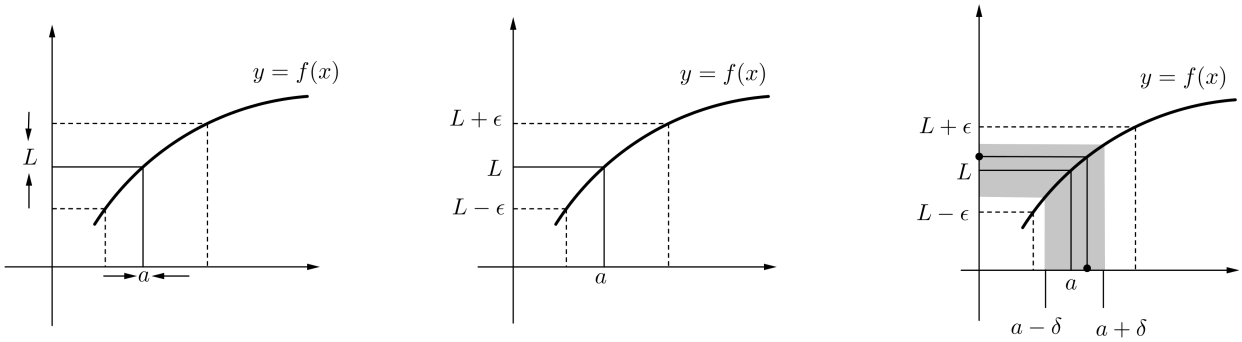
Estamos prontos para a definição formal de limite. Compare-a com os exemplos anteriores.

Definição 2.1. Sejam a um número real e I um intervalo aberto contendo a. Seja f uma função definida em I, exceto, talvez, no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Observação 2.2. Como vimos no primeiro exemplo dessa seção, para a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ não é necessário que a função f esteja definda em a. Nos interessa o comportamento de $f(x)$ quando x está próximo de a.

Teorema 2.3. *Se existe limite de uma função $f(x)$, quando x tende a a, então ele é único.*

Exemplo 2.4. Sejam k um número real e $f(x) = k$ a função constante. Então para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$. Primeiro, notamos que $|f(x) - k| = |k - k| = 0$, que é menor do que qualquer número positivo. Então, fixando qualquer $\varepsilon > 0$ e escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos que independentemente de $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon$ sempre teremos $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$.

Exemplo 2.5. Sejam a um número real e $f(x) = x$ a função identidade. Então $\lim\limits_{x\to a} x = a$. De fato, fixando qualquer $\varepsilon > 0$, então escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos:

$$0 < |x - a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Exemplo 2.6. Vamos mostrar que $\lim\limits_{x\to 2}(2x - 3) = 1$. Para isso, devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(2x - 3) - 1| < \varepsilon.$$

Observe que $|(2x - 3) - 1| = |2x - 4| = |2(x - 2)| = 2|x - 2|$. Logo: se $0 < |x - 2| < \delta$, então $|(2x - 3) - 1| = 2|x - 2| < 2\delta$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ fixado, escolhendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ teremos que

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |(2x - 3) - 1| = |2(x - 2)| = 2|x - 2| < 2\delta = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exemplo 2.7. O exemplo anterior pode ser generalizado para qualquer função afim $f(x) = ax+b$ quando x tende a c, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. De fato, para mostrar que $\lim\limits_{x\to c}(ax+b) = ac+b$, vemos primeiro que $|ax + b - (ac + b)| = |ax - ac| = a|x - c|$. Assim, fixando $\varepsilon > 0$ e escolhendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{a}$ temos que

$$0 < |x - c| < \frac{\varepsilon}{a} \Longrightarrow |ax + b - (ac + b)| = |ax - ac| = a|x - c| < a\delta = \frac{a\varepsilon}{a} = \varepsilon.$$

2.4 Propriedades do limite de uma função

Teorema 2.8. *Sejam f e g funções definidas em um intervalo I contendo a, exceto, possivelmente, em a. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então:*

L1) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$;

L2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x)) = LM$;

L3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$;

L4) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, *se* $L > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *ou* $L < 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$ *ímpar.*

Uma consequência imediada das propriedades L1 e L2 é o exemplo dado a seguir.

Exemplo 2.9. Se $p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 := \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$ é uma função polinomial, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} p(x) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L1}}}{=} \sum_{i=0}^{n}\left(\lim_{x\to a} b_i x^i\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{L2}}}{=} \sum_{i=0}^{n} b_i a^i = p(a).$$

Pelo exemplo anterior, uma função polinomial é nosso primeiro exemplo de *função contínua*, isto é, uma função tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ para todo $a \in D(f)$. Voltaremos a isso mais a frente.

Exemplo 2.10. Pelo exemplo 2.9, temos: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x+5) = 2^2+6+5 = 15$.

Exemplo 2.11. Pela propriedade L3 e o exemplo 2.9, como 3 não é raiz de x^3-7, temos

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-5}{x^3-7}\right) = \frac{3-5}{3^3-7} = -\frac{1}{10}.$$

Exemplo 2.12. Pela propriedade L4 e o Exemplo 2.9,

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{x^3-4x+1} = \sqrt{(-2)^3+8+1} = \sqrt{1} = 1.$$

Exemplo 2.13. Como, pelo exemplo 2.9 e a propriedade L3, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+1}{3x-2} = 2$, segue da propriedade L2 que $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{3x-2}\right)^2 = 4$.

2.5 Forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$

Se f e g são funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, o limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, quando x tende a a, pode ou não existir e, portanto, é denominado forma indeterminada do tipo $\dfrac{0}{0}$. Observe os exemplos a seguir (que provaremos a seguir):

Exemplo 2.14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\right) = \dfrac{3}{2}$.

Exemplo 2.15. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Exemplo 2.16. Não existe $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}\right)$. Esse tipo de problema será tratado mais a frente.

Nesse momento, para resolvermos limites com a forma indeterminada 0/0, devemos trabalhar a expressão do quociente $f(x)/g(x)$ a fim de não mais ter uma indeterminação. Vamos começar calculando os limites dos exemplos 2.14 e 2.15.

No primeiro, temos que 1 é raiz do numerador e do denominador, então vamos fatorá-los, o que é feito através de divisão de polinômios.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}\right) \underset{\text{fatorando } x^3-1 \text{ e } x^2-1}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) \underset{\text{como } x-1\neq 0}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right) \underset{\text{L3}}{=} \frac{3}{2}$$

No segundo, novamente 1 é raiz do numerador e do denominador, mas a função não é racional. Nesse caso, vamos racionalizar o quociente, isto é, multiplicar por 1 como uma fração de numerador e denominador iguais a $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}$. Usaremos ainda o fato de que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}\right) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{racionalizando}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Vamos fazer mais exemplos envolvendo funções racionais e raízes $n-$ésimas:

Exemplo 2.17. Mais um exemplo com fatoração.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}\right) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{colocando } x-1 \text{ em evidência}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(3x^2-x-2)}{(x-1)(2x^2-x-1)}\right)\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^2-x-2}{2x^2-x-1}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{continuamos com } 0/0\text{, dividimos por } x-1 \text{ de novo}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(2x+1)}\right)\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right) = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Note que se tivéssemos fatorado o numerador e o denominador, teríamos poupado trabalho:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fatorando}}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)^2(3x+2)}{(x-1)^2(2x+1)}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-1\neq 0}}{=} \lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{2x+1}\right) = \frac{5}{3}$$

Exemplo 2.18. Mais uma exemplo com racionalização.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}\right) &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{racionalizando}}}{=} \lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+2}{\sqrt{1+x}+2}\right)\\
&= \lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x-3\neq 0}}{=} \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+2}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Para alguns limites do tipo $0/0$, pode ser útil fazer uma mudança de variáveis, como veremos a seguir.

Exemplo 2.19. Vamos calcular $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}\right)$ fazendo uma troca de variáveis do tipo $y = \sqrt[3]{4x}$. Como $x \to 2$, temos que $y \to \sqrt[3]{8} = 2$. Ainda, como $y = \sqrt[3]{4x}$, temos que $4x = y^3$, donde

$x = \dfrac{y^3}{4}$. Assim:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fazendo } y=\sqrt[3]{4x}}}{=} \lim_{y\to 2}\left(\frac{y-2}{\frac{y^3}{4}-2}\right) = \lim_{y\to 2}\left(4\cdot\frac{y-2}{y^3-8}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } y^3-8}}{=} \lim_{y\to 2}\left(4\cdot\frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } y\neq 2}}{=} \lim_{y\to 2}\left(\frac{4}{y^2+2y+4}\right) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 2.20. Vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$ fazendo a seguinte troca de variáveis $y = \sqrt[6]{x}$. Temos que

$$y = \sqrt[6]{x} \Rightarrow y^2 = \sqrt[3]{x} \text{ e } y^3 = \sqrt{x}$$

Além disso, como $x \to 1$, temos que $y \to \sqrt[6]{1} = 1$. Dessa forma:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fazendo } y=\sqrt[6]{x}}}{=} \lim_{y\to 1}\left(\frac{y^2-1}{y^3-1}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando}}}{=} \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } y-1\neq 0}}{=} \lim_{y\to 1}\left(\frac{y+1}{y^2+y+1}\right) = \frac{2}{3}$$

Veremos outros exemplos envolvendo funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas mais a frente.

2.6 Limites Laterais

Ao considerarmos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, estamos interessados no comportamento da função $y = f(x)$ para valores de x próximos de a, podendo ser x maior ou menor que a. Entretanto, algumas funções tem um comportamento diferente à direita e à esquerda de a.

Exemplo 2.21. Considere a função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, então

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, se x está próximo de 0 e à direita de 0, então os valores de $f(x)$ são sempre iguais a 1. Por outro lado, se x está próximo de 0 e à esquerda de 0, então os valores de $f(x)$ são sempre iguais a -1.

Representamos essa situação da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1.$$

O símbolo $x \to 0^+$ indica que estamos considerando somente valores de x maiores que 0 e o símbolo $x \to 0^-$ indica que estamos considerando somente valores de x menores que 0.

Definição 2.22. (Limite lateral à direita) Seja f uma função definida no intervalo aberto (a, b). Escrevemos

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

e dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L, se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L bastando para isso tomarmos valores de x suficientemente próximos de a e à direita de a. Isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Analogamente definimos limite lateral à esquerda.

Definição 2.23. (Limite lateral à esquerda) Seja f uma função definida no intervalo aberto (c, a). Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L, se os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L bastando para isso tomarmos valores de x suficientemente próximos de a e à esquerda de a. Isto é, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 2.24. As propriedades L1, L2, L3 e L4 do Teorema 2.8 continuam válidas para limites laterais, ou seja, se trocarmos $x \to a$ por $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.

Exemplo 2.25. Seja $f(x) = \sqrt{x-2}$. Como $x \to 2^+$ quer dizer que $x > 2$, temos que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \sqrt{2-2} = 0$. Por outro lado, se $x \to 2^-$, temos que $x < 2$, donde $x - 2 < 0$ e a função não está definida para valores negativos. Assim, não podemos calcular o limite à esquerda $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

Exemplo 2.26. Considere a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Temos que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$. Assim, nos pontos $x = -1$ e $x = 1$, não estão definidos os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente. No entanto

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$

Limites laterais são especialmente importantes no cálculo de limites de funções definidas por partes, já que a existência do limite de $f(x)$ quando x tende a a está condicionada à existência dos limites laterais da seguinte forma:

Teorema 2.27. *Se f está definida em um intervalo aberto I contendo a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.*

Exemplo 2.28. Vamos calcular, se possível, o $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 1, \\ -1, & \text{se } x = 1 \\ -2 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Quando $x < 1$, a função é $x^2 - 4$, donde

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 4) = -3\,.$$

Já quando $x > 1$, temos $f(x) = -2 - x$, donde

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-2 - x) = -3\,.$$

Então, pelo teorema 2.27, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$.

Note que não usamos o fato de $f(1) = -1$, já que no cálculo do limite estamos interessados no comportamento da função quando x se aproxima de 1, mas é diferente de 1. Ainda, note que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -3 \neq -1 = f(1)$$

isso quer dizer que a função $f(x)$ *não é contínua em* $x = 1$. Esse será o assunto da próxima seção.

Note ainda que poderíamos calcular facilmente outros limites. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 - 4 = -4 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} -2 - x = -5$$

pois a lei da função na proximidade de 0 ou de 3 não muda.

Exemplo 2.29. Vamos calcular, se possível, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ onde $f(x) = \dfrac{|3x^2 - 5x - 2|}{x-2}$, $x \neq 2$. Primeiro, notamos que essa é uma função por partes:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x-2}, & \text{se } x \leq -1/3 \\[2mm] \dfrac{-3x^2 + 5x + 2}{x-2}, & \text{se } -1/3 < x < 2 \\[2mm] \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x-2}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Então:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } -1/3 < x < 2}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{-3x^2 + 5x + 2}{x-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } -3x^2 + 5x + 2}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{-(3x+1)(x-2)}{x-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x - 2 \neq 0}}{=} \lim_{x\to 2^-} -(3x+1) = -7$$

Por outro lado:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x > 2}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } 3x^2 - 5x - 2}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(3x+1)(x-2)}{x-2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x - 2 \neq 0}}{=} \lim_{x\to 2^+} 3x + 1 = 7$$

Portanto, pelo Teorema 2.27, não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Exemplo 2.30. (Questão da 1^a prova de 2017-1) Vamos calcular, se existir, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3|x|}{2x}$.

Temos que $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, assim, é necessário analisar os limites laterais. Temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 3|x|}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ x \to 0^+ \Rightarrow x > 0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 3x}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } x^2 - 3x}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-3)}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x \neq 0}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x-3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 3|x|}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ x \to 0^- \Rightarrow x < 0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 3x}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatorando } x^2 - 3x}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x+3)}{2x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } x \neq 0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{2} = \frac{3}{2}$$

Como os limites laterais são distintos, segue que não existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3|x|}{2x}$.

2.7 Funções contínuas

Definição 2.31. Seja f uma função definida no intervalo aberto I e seja $a \in I$. Dizemos que f é contínua em a se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Observação 2.32. Note que estamos exigindo, na verdade, 3 condições para que f seja contínua em a:

1. existe $f(a)$,
2. existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 2.33. Para todo $a \in (0, +\infty)$, a função $y = \sqrt{x}$ é contínua em a.

Exemplo 2.34. (veja o exemplo 2.9) A função polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é contínua em a, para todo $a \in \mathbb{R}$, já que

$$\lim_{x \to a} p(x) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = p(a).$$

Nesse caso, como é contínua em todo $a \in D(p)$, dizemos apenas que $p(x)$ é contínua.

Definição 2.35. Dizemos que uma função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo 2.36. Toda função polinomial é contínua.

Exemplo 2.37. As funções seno, cosseno, tangente são contínuas, isto é:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R} \\
&\lim_{x \to a} \cos x = \cos a \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R} \\
&\lim_{x \to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \quad \text{para todo } a \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\lim_{x \to a} \sec x = \sec a \quad \text{para todo } a \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\lim_{x \to a} \operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec} a \quad \text{para todo } a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\lim_{x \to a} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} a \quad \text{para todo } a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

São também contínuas as funções trigonométricas inversas (na verdade, em geral, a inversa de uma função contínua é ainda contínua).

Exemplo 2.38. As funções exponenciais e logarítmicas são contínuas, isto é:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to b} a^x = a^b \quad \text{para todo } 0 < a \neq 1,\ b \in \mathbb{R} \\
&\lim_{x \to b} \log_a x = \log_a b \quad \text{para todo } 0 < a \neq 1,\ b \in \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

Definição 2.39. Seja f uma função definida no intervalo aberto I e seja $a \in I$. Dizemos que f é descontínua em a se f não for contínua em a, isto é, se:

$$\text{não existe } \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a).$$

Exemplo 2.40. A função do exemplo 2.28 é descontínua em 1 pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3 \neq -1 = f(1)$. Porém, nos demais $a \in \mathbb{R}$, a função é contínua (pois é polinomial). De fato, $D(f) = \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} -2 - x = -2 - a = f(a), & \text{se } a > 1 \\ \lim\limits_{x \to a} x^2 - 4 = a^2 - 4 = f(a), & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.41. A função $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \neq 1, \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ é descontínua em 1. De fato,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x+1 = 3 \neq 4 = f(1)$$

Porém, para os demais $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f é contínua (pois é polinomial).

Exemplo 2.42. Vamos determinar $a, b \in \mathbb{R}$ para que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a, \text{ se } x < -1 \\ b, \text{ se } x = -1 \\ -x+1, \text{ se } x > -1 \end{cases}$$

seja contínua em $\mathbb{R}$. Para $x < -1$ e $x > -1$, a função é polinomial e, portanto, contínua. Para $x = -1$, devemos ter

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = b$$

Temos que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x^2 - a = -a+1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} -x+1 = 2$$

Assim, para que exista $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, devemos ter $a = -1$. Por fim,

$$b = f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = 2$$

Exemplo 2.43. (Questão da 1^a prova de 2017-1) Consideramos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 - 3 & \text{se } x < a \\ x^2 - 7 & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

Vamos determinar os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$. Primeiro, para $x \neq a$ a função f é polinomial e portanto contínua. Temos que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} x^4 - 4x^2 - 3 = a^4 - 4a^2 - 3$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} x^2 - 7 = a^2 - 7.$$

Logo, para que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é necessário que

$$a^4 - 4a^2 - 3 = a^2 - 7 \Leftrightarrow a = \pm 1 \text{ ou } a = \pm 2.$$

Além disso, como

$$f(a) = a^2 - 7 = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

o que fizemos anteriormente já basta. Portanto, temos que f é contínua se e somente se $a = \pm 1$ ou $a = \pm 2$.

Teorema 2.44. *Sejam f e g funções contínuas em a, então são contínuas em a as funções $f+g$, fg e f/g, se, neste último caso, $g(a) \neq 0$.*

Exemplo 2.45. Toda função racional é contínua (em seu domínio), o que já sabíamos pela propriedade L3 de limites (ver Teorema 2.8).

Exemplo 2.46. (Questão da 1^a prova de 2016-2) Sejam a e b constantes reais não nulas e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax + 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$$

Vamos determinar a e b de forma que f seja contínua em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 1$, a função é racional, donde é contínua. Para $x = 1$, temos que $f(1) = b$, donde devemos ter

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - ax + 2}{x - 1} = b$$

Para o limite existir, devemos ter 1 como raiz de $x^2 - ax + 2$, isto é,

$$1 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Portanto, $b = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} x - 2 = -1.$

Teorema 2.47. *Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e g contínua em b,*

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g(b), \text{ ou seja, } \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)).$$

Em particular, a composição de funções contínuas é contínua.

Exemplo 2.48. Se $f(x)$ é uma função polinomial e $g(x) = \sqrt{x}$, então $g \circ f(x) = \sqrt{f(x)}$ é contínua em a se $f(a) > 0$ (veja propriedade L4 no Teorema 2.8).

Exemplo 2.49. Pelo Teorema 2.47 temos que se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \operatorname{sen} L \\
&\lim_{x\to a} \cos(f(x)) = \cos\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \cos L \\
&\lim_{x\to a} \operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \operatorname{tg} L \quad \text{se } L \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\lim_{x\to a} \sec(f(x)) = \sec\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \sec L \quad \text{se } L \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\lim_{x\to a} \operatorname{cossec}(f(x)) = \operatorname{cossec}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \operatorname{cossec} L \quad \text{se } L \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\lim_{x\to a} \operatorname{cotg}(f(x)) = \operatorname{cotg}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \operatorname{cotg} L \quad \text{se } L \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Por exemplo

$$\lim_{x\to \pi/2} \operatorname{sen}\,(\pi - 2x)) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to\pi/2} (\pi - 2x))\right) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)\right) = \cos\left(\lim_{x\to 1}(x + 1)\right) = \cos(2)$$

Exemplo 2.50. Se $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, então $\lim\limits_{x\to b} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to b} f(x)} = a^c$

Exemplo 2.51. Se $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c > 0$, então $\lim\limits_{x\to b} (\log_a f(x)) = \log_a\left(\lim\limits_{x\to b} f(x)\right) = \log_a c$

Como a continuidade depende da existência do limite $\lim_{x\to a} f(x)$, faz sentido estudar também continuidade lateral, analogamente ao que fizemos com limites laterais:

Definição 2.52. Seja f uma função definida no intervalo $[a,b)$ com $a<b$. Dizemos que f é contínua à direita de a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Seja f uma função definida no intervalo $(c,a]$ com $c<a$. Dizemos que f é contínua à esquerda de a se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Em particular, se f for uma função definida no intervalo aberto I com $a\in I$, f é contínua em a se e somente se for contínua à esquerda e à direita de a.

Definição 2.53. Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ se f for contínua em (a,b), contínua à direita de a e contínua à esquerda de b.

Exemplo 2.54. Voltando à função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ do exemplo 2.26. Sabemos que $D(f) = [-1,1]$ e

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ se } a\in(-1,1)$$

Portanto, f é contínua em seu domínio $[-1,1]$.

Teorema 2.55. *(Teorema do Valor Intermediário) Se f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e L for um número real tal que $f(a)\le L\le f(b)$ ou $f(b)\le L\le f(a)$, então existe pelo menos um $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=L$.*

Observação 2.56. Como consequência desse teorema temos que:

1. o gráfico de uma função contínua num intervalo pode ser traçado sem tirar o lápis do papel.

2. se f for contínua em $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Exemplo 2.57. Seja $f(x) = x^4-5x+3$. Temos que $f(0)=3$ e $f(1)=1-5+3=-1$, assim, pelo Teorema 2.55, existe pelo menos um $a\in[0,1]$ tal que $f(a)=0$. Ainda, $f(2) = 2^4-10+3=9$, então existe pelo menos mais uma raiz de $f(x)$ em $[1,2]$.

2.8 Limite trignométrico fundamental

O limite da função $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ quando $x\to 0$ é um exemplo de indeterminação do tipo $0/0$, porém vamos provar o seguinte:

Limite Trigonométrico Fundamental. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Para isso, vamos precisar do seguinte resultado:

Teorema do Confronto. *Sejam f, g e h funções que satisfazem $g(x)\le f(x)\le h(x)$ para todo x numa vizinhança de a. Suponha ainda que $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$. Então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.*

Antes de provar o limite trigonométrico fundamental, vamos ver um exemplo de uso do Teorema do Confronto.

Exemplo 2.58. Supondo que para todo $x \neq 1$ temos

$$-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \frac{x^2-1}{x-1},$$

podemos inferir que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. De fato,

$$\lim_{x\to 1} -x^2 + 3x = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

Então, pelo Teorema do Confronto $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Sobre o limite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, vamos começar com uma ideia que depende do fato de que quando o raio do círculo é 1, então a medida do arco $O'P$ (denotada por arc$O'P$) é exatamente x, a medida do ângulo $P\hat{O}D$ (veja figura 2.8). Isso só é verdade para ângulos medidos em radianos, não em graus.

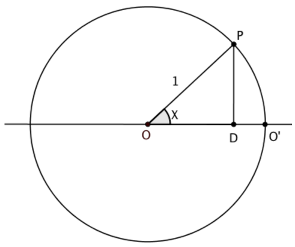


Figura 2.8: Ideia da prova de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

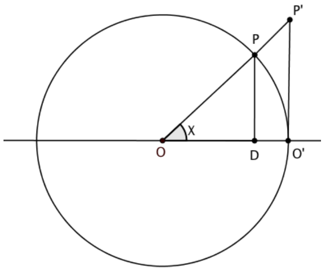
Além disso, notamos que $\overline{OP} = 1$ (o raio do círculo), o que implica em $\operatorname{sen} x = \frac{\overline{DP}}{\overline{OP}} = \overline{DP}$. Dessa forma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\overline{DP}}{\text{arc}O'P}$$

Dessa forma, quando x tende a 0, D se aproxima de O' e $\overline{DP}$ se aproxima de arc$O'P$.

Um argumento mais formal será visto a seguir.

Se $x \in (0, \pi/2)$, consideremos a figura:



Temos que

$$\underbrace{\text{Área do } \triangle POO'}_{=\frac{\overline{PD}}{2}} < \underbrace{\text{Área do setor } POO'}_{=\frac{\text{arc}PO'}{2}} < \underbrace{\text{Área do } \triangle P'OO'}_{=\frac{\overline{P'O'}}{2}}$$

onde usamos o fato de que $\overline{OO'}$ é o raio do círculo e, portanto, 1. Segue então que

$$\underbrace{\overline{PD}}_{=\operatorname{sen} x} < \underbrace{\text{arc}PO'}_{=x} < \underbrace{\overline{P'O'}}_{=\operatorname{tg} x}$$

Dividindo por $\operatorname{sen} x$, temos:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \text{ou seja} \qquad 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Como seno e a identidade são funções ímpares e cosseno é uma função par, vale também

$$\cos x = \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1,$$

para $x \in (-\pi/2, 0)$. Como $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Os exemplos a seguir mostram como usar o limite fundamental trigonométrico para calcular outros limites que são formas indeterminadas envolvendo funções trigonométricas.

Exemplo 2.59.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{\cos x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite fundamental e } \lim_{x\to 0} \cos x = 1}}{=} 1$$

Exemplo 2.60.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}{\frac{x}{4x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}{1/4} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando y=4x}}}{=} 4 \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite fundamental}}}{=} 4$$

Exemplo 2.61. Para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(5x)}$, notamos que

$$\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(5x)} = \frac{4x\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}{5x\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}} = \frac{4}{5} \frac{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}}$$

Argumentando como no exemplo anterior, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}$$

Portanto concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(5x)} = \frac{4}{5}$$

Exemplo 2.62. Vamos calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, que é uma indeterminação do tipo 0/0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} \underset{\text{usando que } \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}{\uparrow =} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1}\,\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}}_{\to 0} = 0$$

Outro resultado interessante sobre limites que pode ser aplicado para alguns limites envolvendo funções trigonométricas é o seguinte:

Teorema 2.63. *Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $g(x)$ é limitada $I - \{a\}$ (onde I é um intervalo contendo a), então*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

A ideia de prova desse teorema vem também do Teorema do Confronto: se $g(x)$ é limitada, então existe $n > 0$ tal que $-n \le g(x) \le n$. Se $f(x) > 0$ próximo a a, então

$$-n\, f(x) < f(x)g(x) < f(x)\, n.$$

Então, pelo Teorema do Confronto, segue o resultado. Poderíamos fazer parecido para o caso em que $f(x) < 0$.

Exemplo 2.64. No gráfico à esquerda na figura 2.9, vemos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe.

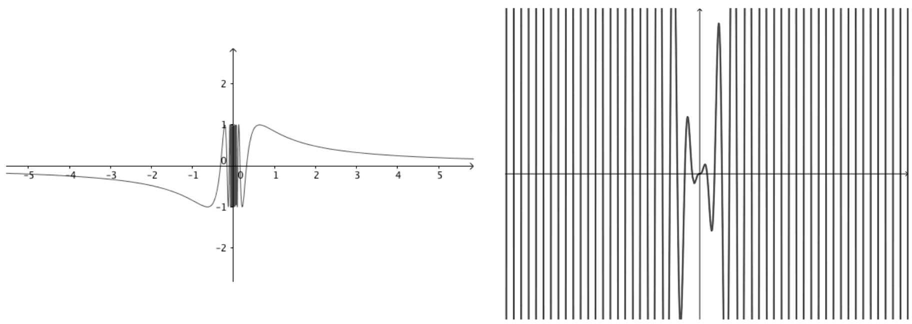


Figura 2.9: Gráficos de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ e $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Porém, $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0$ já que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e $|\operatorname{sen}(1/x)| \le 1$.

2.9 Limites infinitos

Vamos começar analisando o comportamento de algumas funções ilimitadas.

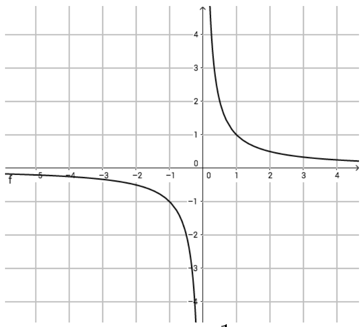
Exemplo 2.65. A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é limitada: quando x se aproxima de 0 pela direita ou esquerda, temos:

$x < 0$	$\frac{1}{x}$
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,0001	-10000
-0,00001	-100000
-0,000001	-1000000
$\vdots$	$\vdots$

$x > 0$	$\dfrac{1}{x}$
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000
0,000001	1000000
$\vdots$	$\vdots$

Isto é, a medida que $x > 0$ se aproxima de zero, $f(x)$ atinge valores positivos arbitrariamente grandes. Por outro lado, quando $x < 0$ se aproxima de zero, $f(x)$ atinge valores negativos com módulos arbitrariamente grandes. Por isso, temos que os limites laterais $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ não existem. O comportamento observado, na verdade, é que o módulo de $\dfrac{1}{x}$ cresce indefinidamente quando x se aproxima de 0.

Mais formalmente, temos que dados $M > 0$ e $N < 0$, existe $\delta > 0$ tal que sempre $x \in (0, \delta)$, tem-se que $f(x) = \dfrac{1}{x} > M$ e se $x \in (-\delta, 0)$, então $f(x) = \dfrac{1}{x} < N$.



$f(x) = \dfrac{1}{x}$

Na notação de limite, escrevemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Em geral, fazendo uma análise como a do exemplo 2.65, temos que para $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Em qualquer um desses casos, dizemos que a reta $x = 0$ (ou seja, o eixo y) é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

A definição formal de um limite infinito é dada a seguir:

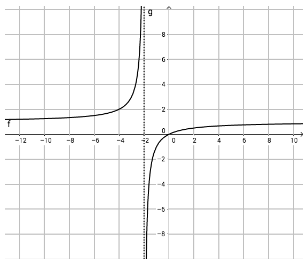
Definição 2.66. Dizemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ se dado $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que sempre que $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > M$.

Dizemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ se dado $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que sempre que $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < N$.

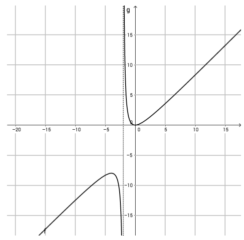
Observação 2.67. Os limites infinitos com $x \to a^+$ ou $x \to a^-$ são análogos, trocando $0 < |x-a| < \delta$ por $x \in (0, \delta)$ ou $x \in (-\delta, 0)$, respectivamente.

Definição 2.68. Em qualquer um dos casos da definição 2.66 ou da observação 2.67, dizemos que a reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $f(x)$.

Vamos modificar um pouco os exemplos vistos, considerando o comportamento das funções $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ e $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ definidas em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ nas proximidades de $x = -2$.



$f(x) = \dfrac{x}{x+2}$



$g(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

Vemos que ambas funções são ilimitadas, pois quando x se aproxima de -2, tanto $|f(x)|$ quanto $|g(x)|$ crescem arbitrariamente. Vemos ainda que o denominador é o mesmo e se aproxima de 0 quando x se aproxima de -2, sendo negativo quando $x \to -2^-$ e positivo quando $x \to -2^+$. Além disso, ambos os numeradores são diferentes e não se aproximam de de 0 quando x se aproxima de -2, porém, nessa vizinhança, têm sinais opostos. A questão do sinal do numerador e do denominador é, então, determinante para dizermos que a função tende a $-\infty$ ou $+\infty$.

Teorema 2.69. *Sejam f, g funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Então:*

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *se* $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ *próximo de a.*
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ *se* $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ *próximo de a.*

Observação 2.70. O teorema 2.69 continua válido para $x \to a^+$ ou $x \to a^-$ no lugar de $x \to a$.

Observação 2.71. Em qualquer um dos casos do Teorema 2.69 ou da observação 2.70, temos que $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Exemplo 2.72. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Temos que $\lim\limits_{x \to -2} x = -2 \neq 0$ e $\lim\limits_{x \to -2} x + 2 = 0$. Fazendo o estudo de sinal de $f(x)$, temos:

		-2		0	
x	$---$		$---$	0	$+++$
$x+2$	$---$	-2	$+++$		$+++$
$f(x) = \dfrac{x}{x+2}$	$+++$		$---$	0	$+++$

Dessa forma, $f(x) = \dfrac{x}{x+2} > 0$ se $x \to -2^-$ e $f(x) = \dfrac{x}{x+2} < 0$ se $x \to -2^+$. Portanto, segue do Teorema 2.69 que

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x}{x+2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x+2} = -\infty$$

Exemplo 2.73. Seja $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$. Temos que $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4 \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to -2} x+2 = 0$. Como $x^2 > 0$ quando $x \to -2$, temos que o sinal de $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ depende apenas do sinal de $x+2$, que é negativo se $x \to -2^-$ e posivito se $x \to -2^+$. Tudo isso pode ser visto no seguinte estudo de sinal:

		-2		0	
x^2	$+++$		$+++$	0	$+++$
$x+2$	$---$	-2	$+++$		$+++$
$f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$	$---$		$+++$	0	$+++$

Dessa forma, $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2} < 0$ se $x \to -2^-$ e $g(x) = \dfrac{x^2}{x+2} > 0$ se $x \to -2^+$. Segue do Teorema 2.69 que

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$$

Exemplo 2.74. (Questão da 1^a prova de 2016-2) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2(x+2)} = -\infty$.

Primeiro, temos que $\lim\limits_{x\to -2} x-1 = -3 < 0$ e $\lim\limits_{x\to -2^+} x^2(x+2) = 0$. Assim, o numerador é negativo em uma vizinhança de -2 e o sinal do quociente depende do sinal do denominador $x^2(x+2)$. Como $x^2 > 0$ quando $x \neq 0$, segue que o sinal do denominador $x^2(x+2)$ depende apenas do sinal de $x+2$. Agora, como $x \to -2^+$, temos que $x > -2$, donde $x+2 > 0$. Logo, $x^2(x+2) > 0$ quando $x \to -2^+$. Essa discussão pode ser resumida na seguinte tabela:

		-2		0		1	
$x-1$	$---$		$---$		$---$	1	$+++$
x^2	$+++$		$+++$	0	$+++$		$+++$
$x+2$	$---$	-2	$+++$		$+++$		$+++$
$\dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$	$+++$		$---$		$---$	1	$+++$

Portanto, segue do Teorema 2.69 que $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2(x+2)} = -\infty$

Exemplo 2.75. (Questão da 1^a prova de 2017-1) Vamos estudar o $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-1}{4-x^2}$. Temos que $\lim\limits_{x\to 2^+} x^3 - 1 = 7 > 0$ e ainda que $\lim\limits_{x\to 2^+} 4 - x^2 = 0$. Como o numerador é positivo na vizinhança de 2, o sinal do quociente depende apenas do sinal do denominador. Temos

$$x \to 2^+ \Longrightarrow x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4 \Longrightarrow -x^2 < -4 \Longrightarrow 4 - x^2 < 0$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-1}{4-x^2} = -\infty$

Exemplo 2.76.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = -\infty,$$

pois $\lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1$ e, para $x \in (-\pi/2, 0)$, $\cos x > 0$ donde concluímos que $\dfrac{\cos x}{x} < 0$ nesse intervalo. Portanto, do Teorema 2.69 o resultado segue.

Exemplo 2.77. Seja $a = \pi/2 + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\lim_{x\to a^+} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Para verificar isso, observe que $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ e que $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a = 0$. Além disso, se $x \in (\pi/2 + k\pi, \pi + k\pi)$, então $\operatorname{tg} x < 0$ e se $x \in (k\pi, \pi/2 + k\pi)$ então $\operatorname{tg} x > 0$. Portanto, segue do Teorema 2.69 o resultado.

No gráfico da função tangente é possível observar os limites trabalhados nesse exemplo.

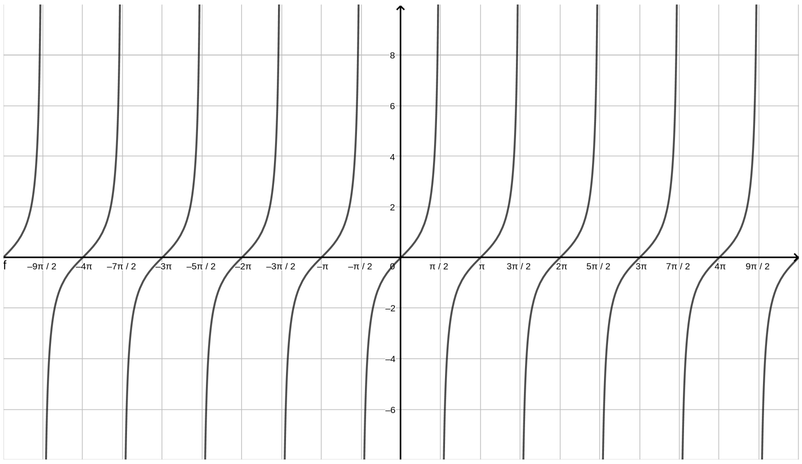


Figura 2.10: Gráfico da função tangente.

2.10 Limites no infinito

Já investigamos comportamentos de funções quando x se aproxima de um valor fixado. Agora, gostaríamos de estudar os casos em que x cresce ou descresce ilimitadamente. Isto é, os casos em que $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Como um primeiro exemplo, consideremos a função $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. Nas tabelas abaixo, temos os valores de $f(x)$ para alguns valores de módulo grande de x. Em ambos os casos, vemos que $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ se aproxima de 1, o que é fácil de entender, pois em $\dfrac{1}{x}$ estamos dividindo 1 por um número de módulo muito grande, obtendo um número de módulo muito pequeno.

$x \to -\infty$	$1 - \frac{1}{x}$
-10	1,1
-100	1,01
-1000	1,001
-10000	1,0001
-100000	1,00001
-1000000	1,000001
-10000000	1,0000001
-100000000	1,00000001
$\vdots$	$\vdots$

$x \to +\infty$	$1 - \frac{1}{x}$
10	0,9
100	0,99
1000	0,999
10000	0,9999
100000	0,99999
1000000	0,999999
10000000	0,9999999
100000000	0,99999999
$\vdots$	$\vdots$

Tentando ser um pouco mais precisos no caso em que x cresce indefinidamente, vamos considerar o seguinte: podemos tormar x grande o suficiente de forma a tornar $1 - \dfrac{1}{x}$ arbitrariamente perto de 1. Vamos começar escolhendo uma "tolerância"para essa distância, isto é, um número positivo arbitrário pequeno. Consideremos, por exemplo, $0,000001$. Quão grande devemos escolher x para termos $0,999999 < 1 - \frac{1}{x} < 1$?

Temos que

$$0,999999 < 1-\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow -0,000001 < -\frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 0,000001 \Leftrightarrow x > \frac{1}{0,000001} = 1000000$$

Isto é, tomando $x > 1000000$, temos que $1 - f(x) < 0,000001$.

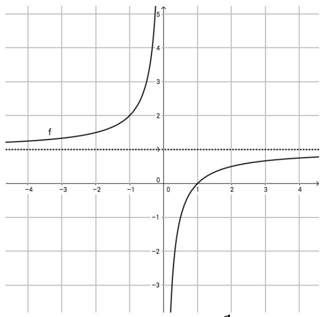
Esse argumento funcionará para qualquer tolerância $\epsilon > 0$ escolhida: existirá $M > 0$ tal que sempre que $x > M$, teremos $0 < 1 - f(x) < \epsilon$. Dessa forma, dizemos que quando $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$ e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

Fazendo o mesmo tipo de raciocínio quando x decresce ilimitadamente, obtemos

$$\lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

No gráfico da função, vemos esses comportamentos:



$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

A reta $y = 1$ é chamada, nesse caso, assíntota horizontal do gráfico da função.

As definições a seguir generalizam os comportamentos apresentados:

Definição 2.78. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $M > 0$ tal que sempre que $x > M$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 2.79. Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, a)$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $N < 0$ tal que sempre que $x < N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 2.80. Em qualquer um dos casos da definições 2.78 e 2.79, dizemos que $y = L$ é uma assíntota horizontal para o gráfico de $f(x)$.

Exemplo 2.81. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Seja $\epsilon > 0$. Sempre que $x > \dfrac{1}{\epsilon} > 0$, temos que $0 < \dfrac{1}{x} < \epsilon$. Por outro lado, sempre que $x < -\dfrac{1}{\epsilon} < 0$, temos que $-\epsilon < \dfrac{1}{x} < 0$. Isso significa que dado $\epsilon > 0$, sempre que $|x| > \dfrac{1}{\epsilon}$, temos que $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \epsilon$. Dessa forma, concluimos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Decorrem das definições 2.78 e 2.79, mas não mostraremos, que:

Teorema 2.82. *Se duas funções f, g possuem limites quando x tende a $+\infty$, digamos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, então*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = L_1 + L_2 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L_1 L_2 \in \mathbb{R}$$

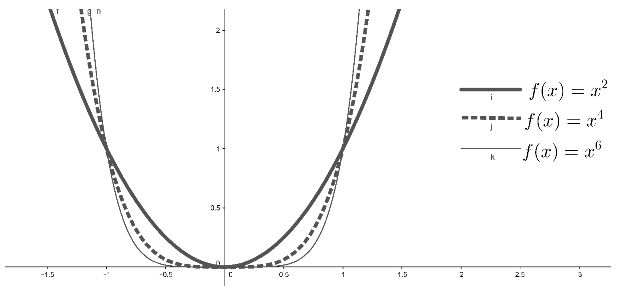
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \in \mathbb{R}, \ \textit{se } L_2 \neq 0$$

Observação 2.83. O Teorema 2.82 continua válido trocando $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$

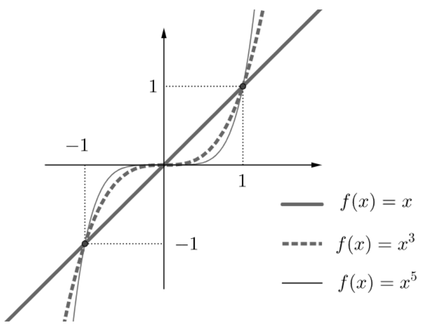
Exemplo 2.84. Seja n um inteiro positivo, como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, então segue do Teorema 2.82:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Algumas funções têm comportamento ainda diferente. Por exemplo, o gráfico a seguir mostra as funções $y = x^n$ para $n \in \{2, 4, 6\}$. O que observamos é que quando x cresce ou decresce ilimitamente, a função $y = x^n$, nesses casos, cresce ilimitadamente.



De fato, potências pares de números reais não-nulos são sempre positivas e crescem ilimitadamente. Já para potências ímpares, quando x descresce ilimitadamente, x^n também decresce ilimitadamente.



Teorema 2.85. *Seja $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Então*

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \textit{se } n \textit{ é par} \\ -\infty, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

Vejamos a definição formal do caso em que $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x cresce ilimitadamente.

Definição 2.86. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se e somente se fixado $M > 0$, existe $N > 0$ tal que sempre que $x > N$, então $f(x) > M$

Observação 2.87. Os limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ são definidos de forma análoga. Faça isso.

Podemos usar o Teorema 2.85 para estudar o comportamento de polinômios e funções racionais quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, como veremos nos exemplos a seguir:

Exemplo 2.88. Vamos ver alguns exemplos de limites de polinômios usando o exemplo 2.84 e o Teorema 2.85.

a) $$\lim_{x\to+\infty} 2x^4 + 4x^3 - 3x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^4 \left(2 + \overset{0}{\cancel{\frac{4}{x}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{3}{x^3}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^4}}} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4 = +\infty}}{=} +\infty$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} 2x^4 + 4x^3 - 3x + 1 = \lim_{x\to-\infty} x^4 \left(2 + \overset{0}{\cancel{\frac{4}{x}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{3}{x^3}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^4}}} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^4 = +\infty}}{=} +\infty$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} -x^3 - x^2 + 2x - 1 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 \left(1 + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{2}{x^2}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^3}}} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty}}{=} -\infty$$

d) $$\lim_{x\to-\infty} -x^3 - x^2 + 2x - 1 = \lim_{x\to-\infty} -x^3 \left(1 + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}} - \overset{0}{\cancel{\frac{2}{x^2}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^3}}} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como } \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty}}{=} +\infty$$

Esses exemplos nos mostram que o comportamento da função polinomial quando $x \to \pm\infty$ depende apenas do comportamento do monômio de maior grau.

Exemplo 2.89. Vamos ver alguns exemplos de limites de funções racionais novamente usando o exemplo 2.84 e o Teorema 2.85.

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x\neq 0}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(1-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)}{\left(1+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)} = 2$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2x}{x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x\neq 0}}{==} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x\left(1-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)}{\left(1+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}\right)} \underset{\substack{\uparrow\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty}}{=} -\infty$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{2x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x\neq 0}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}{2x\cancel{^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}\right)}{2x\left(1-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)} \underset{\substack{\uparrow\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0}}{=} 0$$

Pelo que aconteceu no exemplo anterior, dizemos que os limites de funções racionais quando $x\to\pm\infty$ são indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$: podem existir (isto é, resultar em um número) ou não.

Vamos ver agora exemplos de limites quando $x\to\pm\infty$ envolvendo polinômios e raízes.

Exemplo 2.90.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-3x+2} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } \sqrt{x^2}=|x|=x \text{ pois } x>0}}{=} \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\left(2-\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2}x=+\infty}}{=} +\infty$$

Exemplo 2.91.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-3x+2} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } \sqrt{x^2}=|x|=-x \text{ pois } x<0}}{=} \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{\left(2-\cancelto{0}{\frac{3}{x}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}\right)} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } \lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty}}{=} -\infty$$

Exemplo 2.92. (Questão da 1^a prova de 2017-1) Vamos calcular, se existir, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{3-x}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(3+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } \sqrt{x^2}=|x|}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(3+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}\underset{\substack{\uparrow\\ x<0\Rightarrow|x|=-x}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(3+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{x\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{como } x\neq 0}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{\left(3+\dfrac{5}{x^2}\right)}}{\cancel{x}\left(\dfrac{3}{x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3+\cancelto{0}{\dfrac{5}{x^2}}}}{\cancelto{0}{\dfrac{3}{x}}-1}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$$

Exemplo 2.93. (2016-2) Vamos calcular $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{16x^6-x+1}}{2x^3-x^2+20}\right)$.

Temos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^6-x+1}}{2x^3-x^2+20}=-2\qquad\text{(prove isso!)}$$

Dessa forma, segue que

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{16x^6-x+1}}{2x^3-x^2+20}\right)=\operatorname{sen}\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{16x^6-x+1}}{2x^3-x^2+20}\right)\right)=\operatorname{sen}(-2)$$

Exemplo 2.94. O limite abaixo tem uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$ entre parênteses:

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)$$

Vamos começar multiplicando e dividindo por $\sqrt{x^2-1}+x$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x) &= \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\,\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}\,\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+x} \\
&\underset{\sqrt{x^2}=|x|=x \text{ pois } x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1\right)} \\
&\underset{\text{como } x\neq 0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^2}}}}+1} = \frac{-1}{\sqrt{1}+1} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

A seguir, vamos ver alguns exemplos de cálculo de limites no infinito com funções trigonométricas. Para resolvê-los, utilizaremos novamente o Teorema do Confronto.

Exemplo 2.95. Vamos calcular o limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Como $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, segue que $\frac{-1}{x} \le \operatorname{sen} x \le \frac{1}{x}$ se $x > 0$ (o que é o caso, pois $x \to +\infty$). Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, segue do Teorema do Confronto que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Exemplo 2.96. Vamos provar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\cos x}{x+3} = 0$. Primeiro, notamos que $-1 \le \cos x \le 1$, donde $-1 \le -\cos x \le 1$. Somando 2 em cada termo, temos $1 \le 2-\cos x \le 3$. Agora, como $x \to +\infty$, temos que $x+3 > 0$, donde

$$\frac{1}{x+3} \le \frac{2-\cos x}{x+3} \le \frac{3}{x+3}$$

Usando o fato de que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+3} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+3}$ e o Teorema do Confronto, encerramos a prova.

Exemplo 2.97. (2016-2) Vamos calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(3x-2\cos x)}{5x^2+1}$. Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(3x-2\cos x)}{5x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2}{5x^2+1} - \frac{2x\cos x}{5x^2+1}\right)$$

Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{5x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3+1/x^2)}{x^2(5+1/x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+1/x^2}{5+1/x^2} = \frac{3}{5}$$

Temos ainda que

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{2x\cos x}{5x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{5x^2+1}\ \cos x$$

Como $\cos x$ é limitado e $\lim_{x\to+\infty} -\dfrac{2x}{5x^2+1} = 0$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{2x\cos x}{5x^2+1} = 0$$

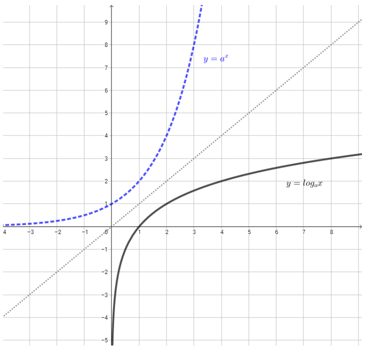
Portanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(3x-2\cos x)}{5x^2+1} = \frac{3}{5}$$

2.11 Mais limites exponenciais e logarítmicos

Outros limites no infinito e infinitos interessantes surgem observando as funções exponeciais e logarítmicas.

Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$:



$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty.$$

$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty.$$

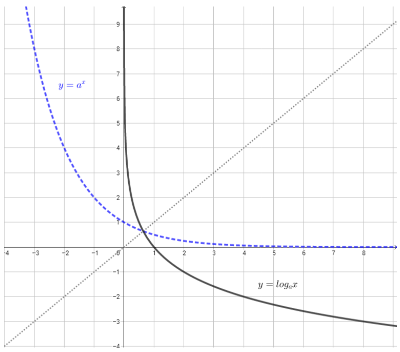
Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty.$$

$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty.$$



Ainda, como já foi menciosado, podemos definir a constante de Euler e como o valor do limite a seguir:

$$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Existem outras possíveis definições para essa constante, como certas somas infinitas ou o valor para o qual a área abaixo da curva $y = 1/x$ considerado a partir de $x = 1$ é exatamente 1 (aqui, usaríamos a noção de integral). Nese texto, escolhemos a definição usando limite como apresentada, que será o ponto de partida que nos permite calcular outros limites interessantes.

Exemplo 2.98. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

De fato, fazendo a mudança de variável $t=-x$ temos que $x\to-\infty$ implica $t\to+\infty$ e

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}.$$

Agora faça $y=t-1$. Então, quando $t\to+\infty$ temos que $y\to+\infty$ e

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e.1 = e.$$

Exemplo 2.99. $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ e $\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Fazendo a mudança de variável $t=1/x$ temos que $x\to0^+$ implica $t\to+\infty$ e

$$\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Quando $x\to0^-$, $t\to-\infty$ e

$$\lim_{h\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Exemplo 2.100. $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{\log_a(1+h)}{h} = \dfrac{1}{\ln a}.$

De fato, fazendo a mudança de variável $t=1/h$ temos que $h\to0^+$ implica $t\to+\infty$ e

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\log_a(1+h)}{h} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a(1+\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty}t\log_a(1+\frac{1}{t}) = \lim_{t\to+\infty}\log_a(1+\frac{1}{t})^t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Exemplo 2.101. $\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{1}{\ln e} = 1.$

Exemplo 2.102. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a.$

Para esse limite, façamos $z=a^x$. Então, quando $x\to0^+$, $z\to1^+$ e

$$\lim_{x\to0^+}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to1^+}\frac{z-1}{\log_a(z)} = \lim_{z\to1^+}\frac{1}{\frac{\log_a(z)}{z-1}}.$$

Agora fazemos $t=z-1$. Então, quando $z\to1^+$ temos que $t\to0^+$ e

$$\lim_{x\to0^+}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to1^+}\frac{z-1}{\log_a(z)} = \lim_{z\to1^+}\frac{1}{\frac{\log_a(z)}{z-1}} = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{1/\ln a} = \ln a.$$

Observação 2.103. Os limites dados nos exemplos anteriores valem ainda para $x\to0^-$ e, portanto, para $x\to0$.

2.12 Exercícios

1. Calcule os limites, se existirem.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x+5\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-5}{x^3-7}\right)^3$

(c) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^4-4x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{x^3+2x^2+3x+2}{x^2+4x+3}}$

(e) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{2x^2-x}{3x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{6x^2+11x+3}{2x^2-5x-12}$

(h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x-1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$

(k) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

(l) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+3x}{1+4x^2+3x^4}\right)^3$

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

(n) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$

(o) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}}$

(p) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-2x}$

(q) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+9}{x^2-1}$

(r) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x-4}{|x-4|}$

(s) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x-3+|x-1|}{x+2}$

(t) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$

(u) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

(v) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

(w) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+3x-1}{2x^2+x+1}$

(x) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-3x^2+1}{1-2x^2}$

(y) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$

(z) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$

2. Calcule os limites, se existirem.

(a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5-4x}{2x-3}$

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x-1}{3x^2+5x-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-2x+2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-x}{(x-2)^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{(x-1)^2}$

(h) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x+2}{|x+1|}$

(i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}$

(k) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x}{(x-3)^2}$

(l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-13x^2+51x-63}{x^3-4x^2-3x+18}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9x+9}-3}{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^3+3x^2-4x}$

(o) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sqrt{4-t}-2}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

(q) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+x+2}{x^3-x-6}$

(r) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-10x^2+28x-24}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x^2+3x}$

(t) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$

(u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}$

(v) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7-x+2x^2-3x^3-5x^4}{4+3x-x^2+x^3+2x^4}$

(w) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x^4-137)^5}{(x^2+429)^{10}}$

(x) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(5x^{10}+32)^3}{(1-2x^6)^5}$

(y) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

(z) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

3. Seja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\ , \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

Marque a alternativa incorreta:

(a) $f(1)=2$.
(b) A função não possui raízes reais.
(c) A reta $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de f.
(d) A reta $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.
(e) O gráfico de f intercepta $y=x$ em pelo menos 2 pontos.

4. Sobre a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \le 3 \\ \sqrt{x-3}, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

pode-se afirmar que

(a) É definida e contínua para todo $x\in\mathbb{R}$.
(b) É definida e contínua somente para $x>3$.
(c) É definida para todo $x\in\mathbb{R}$ e descontínua apenas em $x=3$.
(d) É definida e contínua somente para $x\le 3$.
(e) É definida e contínua somente para $x\ne 3$.

5. Determine, se existir, o limite da função a seguir quando x tende a 1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{|x-1|}, & \text{se } x\ne 1 \\ 4, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

A função é contínua em $\mathbb{R}$?

6. Considere as seguintes afirmativas:

I. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$.
II. Se existe $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ então existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
III. Se f é uma função definida em $[a,b]$ e $f(a)<0<f(b)$, então existe $c\in[a,b]$ tal que $f(x)=0$.

Temos que

(a) Todas as afirmativas são verdadeiras.
(b) Todas as afirmativas são falsas.
(c) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(d) Apenas a afirmativa II é falsa.
(e) Apenas a afirmativa III é falsa.

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a função **contínua** $y = f(x)$ definida no intervalo $[-4, 8]$ dada por
$$\begin{cases} x+6, & \text{se } -4 \le x \le 0 \\ ax+b, & \text{se } 0 < x < 4 \\ 2x-10, & \text{se } 4 \le x \le 8 \end{cases}$$
Podemos afirmar que $a + b$ vale

(a) -12 (b) -2 (c) 0 (d) 4 (e) 6

8. Marque a alternativa correta:

(a) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$
(b) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
(c) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$
(d) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
(e) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = -\infty$

9. Mostre que $x^3 - 4x + 8 = 0$ tem pelo menos uma solução real.

10. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

11. Ache as assíntotas horizontais de $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}$. Existem assíntotas verticais?

12. Determine, se existirem as assíntotas verticais e horizontais das funções a seguir.

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$
(b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{|x|-1}$
(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-3}$
(d) $f(x) = \dfrac{x+9}{x^2-81}$

13. Calcule os limites laterais nos pontos de descontinuidade das funções a seguir.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{if } x < 2; \\ x^2+1, & \text{if } x > 2. \end{cases}$
(b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$.
(c) $f(x) = \begin{cases} 5x-3, & \text{if } x < 1; \\ x^2, & \text{if } x \ge 1. \end{cases}$
(d) $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{if } x < -2; \\ x^2+3x-1, & \text{if } x \ge -2. \end{cases}$

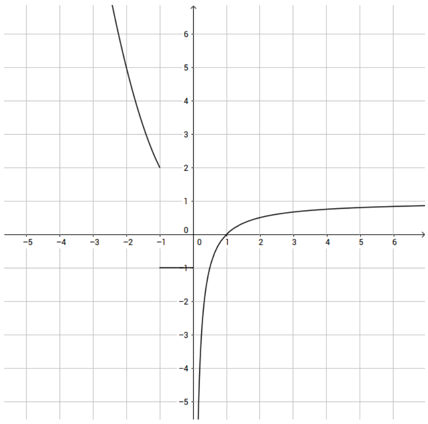
14. (2016-2) Sejam a e b constantes reais não nulas e $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a + \dfrac{2}{x}}{x-1}, & x \neq 1 \\ b, & x \neq 1 \end{cases}$$
Sabendo que f é contínua, podemos afirmar que:

(a) $ab > 0$ (b) ab é ímpar (c) $a + b = 0$ (d) $a + b < 0$ (e) $a < b$

15. (2016-2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. Podemos afirmar que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2-1)}{x-1}$ vale:

    (a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2 (e) $+\infty$

16. (2016-2) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada pelo gráfico abaixo.



Marque a afirmação **CORRETA**.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{f(x)} = -\infty$ (c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{f(x)} = 1$ (e) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x+1} = +\infty$

(b) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{f(x)} = 0$ (d) $\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = \infty$

17. Calcule

(a) (2016-1) $\lim_{x\to \pi/3} \left(\text{sen}\,\frac{x}{2} - \cos x + \text{tg}\, x\right)$

(b) (2017-1) $\lim_{x\to \pi} \frac{(x-\pi)}{\text{tg}\, x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\text{sen}\, x}$ (n) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x^2)}{1-\cos x}$

(c) (2017-1) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x}$ (i) $\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{1-\text{sen}\,\theta}{\theta-\pi/2}$ (o) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$ (j) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3+3x^2\cos x}{(x+2)^3}$. (p) $\lim_{x\to \pi/2} (x-\frac{\pi}{2})\text{tg}\, x$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(3x)}{\text{sen}\,(4x)}$ (k) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{1-\cos x}$ (q) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2+9}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ (l) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x^2)}{x^2}$ (r) $\lim_{x\to \pi} \frac{\text{sen}\, x}{x-\pi}$

(s) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x+\text{sen}\, x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(2x)}{\text{sen}\, x}$ (m) $\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{\text{tg}^3 x}$ (t) $\lim_{x\to \infty} \frac{\text{sen}\, x}{x}$

18. Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\,(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$?

19. Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$?

20. Use o Teorema do Confronto para calcular:

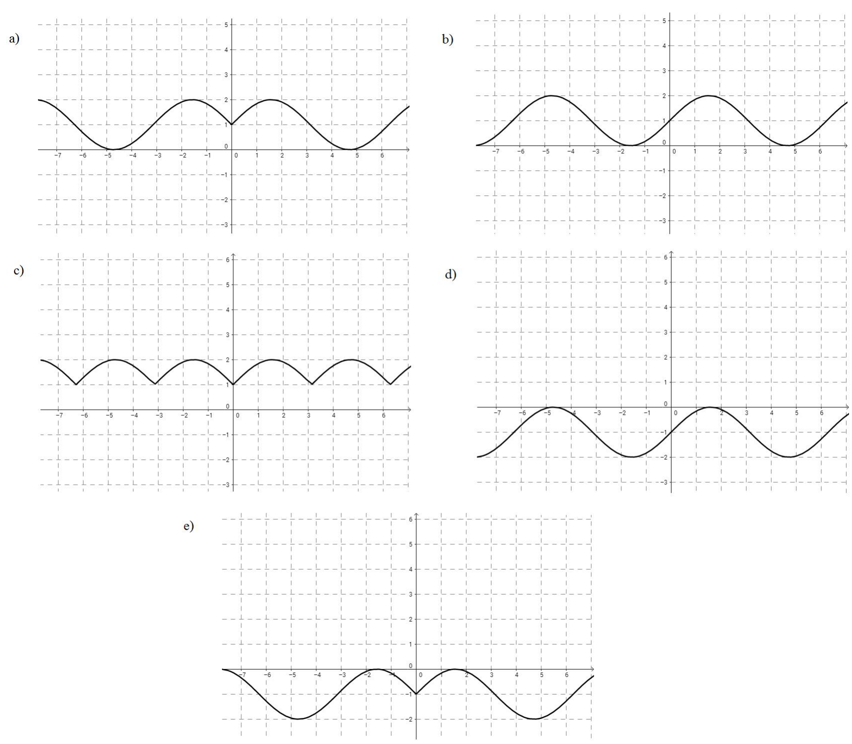
    (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2(2x)}{3-2x}$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^3\cos(2/x)$

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^2\operatorname{sen}(1/x^2)$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-\operatorname{sen}(3x)}{x^2+10}$

21. (2016-2) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = \operatorname{sen}|x| + 1$ é:



22. Calcule os seguintes limites.

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x}$

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1}{x}$

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{2^{5x}-1}$

    (h) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$

    (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$

    (j) (2016-2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{4x}$

23. Faça os seguintes exercícios dos livro *Cálculo A*.

    (a) Página 75, números 35 e 37;

    (b) Página 94, número 14;

    (c) Páginas 103, 104 e 105.

2.13 Respostas dos exercícios

1. (a) 15 (b) -1/1000 (c) 5 (d) 2 (e) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$ (f) 2 (g) 7/11 (h) 1/4 (i) $\sqrt{2}/4$ (j) 1 (k) 3 (l) 1/8 (m) $\sqrt{2}$ (n) 1 (o) -9 (p) -1/8 (q) 5/3 (r) -1 (s) 3 (t) 1/4 (u) 6 (v) 1/6 (w) $+\infty$ (x) $+\infty$ (y) 1/2 (z) $+\infty$

2. (a) -2 (b) 0 (c) $-\sqrt{2}$ (d) $+\infty$ (e) $+\infty$ (f) $-\infty$ (g) $+\infty$ (h) $-\infty$ (i) $-\infty$ (j) $+\infty$ (k) $+\infty$ (l) -4/5 (m) 3/2 (n) 3/5 (o) -4 (p) 1/6 (q) 1/11 (r) -5/4 (s) -1/12 (t) -4 (u) $+\infty$ (v) -5/2 (w) 32 (x) -125/32 (y) 1/2 (z) 1

3. (b)

4. (c)

5. $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

6. (c)

7. (d)

8. (e)

9. $f(x) = x^3 - 4x + 8$ é contínua em $\mathbb{R}$, $f(-3) = -7$ e $f(1) = 5$. Logo, pelo TVI, existe $c \in (-3, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

10. Sim, existe $x \in [-2, 0]$.

11. Assíntota vertical:$x = -5/3$. Assíntotas horizontais: $y = \pm\sqrt{2}/3$.

12. (a) Assíntota vertical: $x = 5$. Assíntota horizontal: $y = 0$
    (b) Assíntota vertical: $x = -1$. Assíntota horizontal: $y = 1$
    (c) Assíntota vertical: $x = 3$
    (d) Assíntota vertical: $x = 9$. Assíntota horizontal: $y = 0$

13. (a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$
    (b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$
    (c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$
    (d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -4$ e $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -3$

14. (b)

15. (b)

16. (b)

17. (a) $\sqrt{3}$ (b) 1 (c) 0 (d) 0 (e) 3/4 (f) -1/2 (g) 2 (h) 1/2 (i) 0 (j) 2 (k) 2 (l) 1 (m) 1/2 (n) 2 (o) -1 (p) -1 (q) 1/9 (r) -1 (s) 1/2 (t) 0

18. Não

19. $k = 0$

20. (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 5

21. (a)

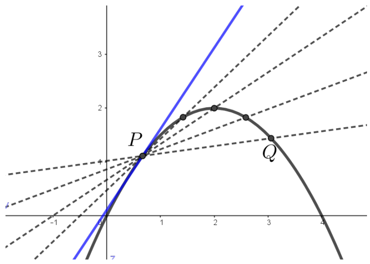
22. (a) e^2 (b) e^3 (c) e^{-6} (d) e^{-5} (e) e^4 (f) $\ln 8$ (g) $\dfrac{2\ln 3}{5\ln 2}$ (h) e^2 (i) 2 (j) 3/4

Capítulo 3

Derivadas

Este capítulo é sobre derivada, um conceito fundamental do Cálculo que é muito útil em problemas aplicados. Este conceito relaciona-se com o problema de determinar a reta tangente a um ponto do gráfico de uma função que foi visto no capítulo 2. Iniciaremos nossa discussão tratando deste problema.

3.1 O problema da reta tangente



Seja $P(x_0, f(x_0))$ um ponto sobre o gráfico de uma função contínua $f(x)$. Dado um ponto $Q = (x_1, f(x_1))$ do gráfico, distinto de P, seja s a reta passando por P e Q. Esta reta é dita secante ao gráfico pois o secciona nos pontos P e Q. O coeficiente angular desta reta é dado por

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Considerando Q como um ponto móvel, quando $x_1 \to x_0$ temos $Q \to P$. Consequentemente, a reta s varia de posição (ver figura). A reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P é definida como sendo a *posição limite de* s quando $x_1 \to x_0$ e seu coeficiente angular, denotado por m, é dado pelo limite do coeficiente angular das retas secantes s quando $x_1 \to x_0$, ou seja

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.1}$$

Se o limite acima existe, então existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P e esta reta tem equação

$$(y - f(x_0)) = m(x - x_0).$$

Mas, pode ocorrer deste limite não existir e neste caso temos duas possibilidades: ou a reta tangente não pode ser definida, ou a reta tangente é uma reta vertical. Este último caso ocorre quando o limite é $\pm\infty$. Nos exemplos a seguir vamos ilustrar todas estas possibilidades.

Exemplo 3.1. Para verificar se existe reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $P = (1, f(1)) = (1,1)$ calculamos o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x} = -1$$

Como o limite existe e vale -1, existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto P e sua equação é

$$(y-1) = -1(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x+2$$

(veja figura 3.1).

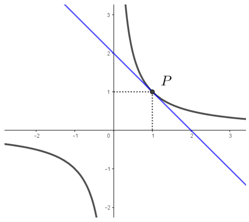


Figura 3.1: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $P = (1,1)$.

Exemplo 3.2. Para verifcar se existe uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $P = (0,0)$ calculamos o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

Como o limite é $+\infty$, a posição limite das retas secantes é a reta vertical $x = 0$, isto é, a reta tangente passando por P é a reta vertical $x = 0$ (veja figura 3.2).

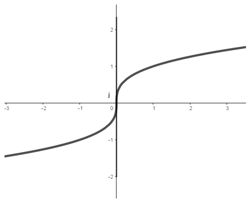


Figura 3.2: A reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $P = (0,0)$ é uma reta vertical.

Exemplo 3.3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \le 1 \\ x^2-4x+4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e o ponto $P = (1,1)$ do seu gráfico. Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4x+4-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x-3 = -2. \end{aligned}$$

Como os limites laterais são distintos, não existe o limite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Ainda, não existe a posição limite das retas secantes. Logo não existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P = (1,1)$.

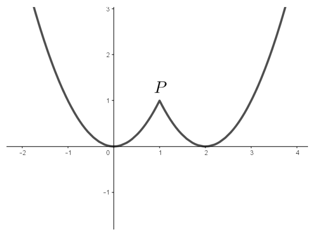


Figura 3.3: Não existe reta tangente ao gráfico da função $f(x)$ do Exemplo 3.3 em $P = (1,1)$.

3.2 Derivada de uma função em um ponto

Definição 3.4. Uma função $f(x)$ é **derivável** ou **diferenciável** em um ponto $x_0 \in D(f)$ se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{3.2}$$

Se este limite $f'(x_0)$ existe ele é chamado de **derivada de** $f(x)$ **no ponto** x_0. Se o limite $f'(x_0)$ não existe, dizemos que $f(x)$ é **não derivável** ou **não diferenciável** em x_0.

Observação 3.5. Pela discussão da seção anterior, dizer que $f(x)$ é derivável em x_0 é o mesmo que dizer que existe a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ e que esta reta não é vertical, sendo o seu coeficiente angular igual a $f'(x_0)$.

Exemplo 3.6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 2$ e $f'(2) = 4$.

Exemplo 3.7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, temos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

Observação 3.8. Fazendo a mudança de coordenadas $h = x_1 - x_0$ vemos que $x_1 \to x_0$ implica em $h \to 0$, logo a derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0 pode também ser expressa pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{3.3}$$

Exemplo 3.9. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$. Observe que

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(4 + h) - 12}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3.$$

Portanto $f(x)$ é derivável em $x = 4$ e $f'(4) = 3$.

3.3 Derivada como Função

Definição 3.10. Considere uma função $f(x)$. A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

é chamada **derivada da função** f **com relação a** x. O domínio da derivada f' é o conjunto dos pontos $x \in D(f)$ para os quais existe o limite $f'(x)$.

Observação 3.11. A derivada de uma função $f(x)$ com relação a x também é denotada por $\dfrac{df}{dx}$ (notação de Leibniz).

Definição 3.12. Quando $f(x)$ é definida em um intervalo aberto e possui derivada em todos os pontos deste intervalo, dizemos que $f(x)$ é uma **função diferenciável** ou **derivável**.

Exemplo 3.13. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2x.h + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x.h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x - h = 2x. \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) = x^2$ é uma função diferenciável. A derivada de $f(x)$ é a função $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Exemplo 3.14. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Para qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h) + 1 - 3x - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3.$$

Como $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R} = D(f)$, temos que $f(x)$ é um função diferenciável e sua derivada é a função constante $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 3$.

Vejamos um exemplo de uma função cuja derivada não existe em algum ponto do domínio.

Exemplo 3.15. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Vimos no exemplo 3.2 que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty\cdot$$

Portanto, $f(x)$ é não derivável no ponto 0. Agora, para todo $x_0 \neq 0$ temos

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}$$

considerando $y = \sqrt[3]{x}$ e recordando que $y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3 = (y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})$ obtemos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0} = \lim_{y\to \sqrt[3]{x_0}} \frac{y - \sqrt[3]{x_0}}{y^3 - (\sqrt[3]{x_0})^3} = \lim_{y\to \sqrt[3]{x_0}} \frac{(y - \sqrt[3]{x_0})}{(y - \sqrt[3]{x_0})(y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})} \\ &= \lim_{y\to \sqrt[3]{x_0}} \frac{1}{y^2 + y\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{x_0}.\sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}\cdot \end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \neq 0$ e a derivada desta função é a função $f' : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot$

3.4 Derivadas laterais

Em algumas situações, é útil considerar os limites laterais associados ao limite $f'(x)$. Estes limites laterais são:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\cdot$$

Definição 3.16. O limite $f'_-(x_0)$, quando existe, é chamado de **derivada à esquerda de** $f(x)$ **no ponto** x_0 e o limite $f'_+(x_0)$, quando existe, é chamado de **derivada à direita de** $f(x)$ **no ponto** x_0**.**

Observação 3.17. Note que a derivada $f'(x_0)$ existe se, e somente se, as derivadas laterais $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ existem e são iguais.

O conceito de derivada lateral é útil, por exemplo, quando estudamos funções definidas por partes. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.18. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e derivável em todo ponto $x \neq 1$ (verifique!). Para ver se ela é derivável em $x = 1$ precisaremos considerar as derivadas laterais em 1, já que a regra da função é diferente para $x < 1$ e $x > 1$. Estas derivadas são:

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2 + 2h - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2.$$

Como os limite laterais $f'_-(1) = f'_+(1) = 2$ temos que existe $f'(1)$ e $f'(1) = 2$.

Exemplo 3.19. Vamos estudar a diferenciabilidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ tratando alguns casos. Observemos, primeiramente, que se $x > 0$ então $|x| = x$ e para h pequeno o suficiente, temos $x + h > 0$ donde $|x + h| = x + h$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Agora, se $x < 0$ então $|x| = -x$ e para h pequeno o suficiente, temos $x + h < 0$ donde $|x + h| = -x - h$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-x - h + x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} -1 = -1.$$

Finalmente, se $x = 0$ então devemos tratar os limites laterais ou seja, as derivadas laterais que são

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1.$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, a derivada $f'(0)$ não existe. Assim, $f(x) = |x|$ é derivável apenas nos pontos $x \neq 0$, com $f'(x) = 1$ para $x > 0$ e $f'(x) = -1$ para $x < 0$. A derivada de $f(x)$ é a função $f' : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \cdot \end{cases}$$

As derivadas laterais também são usadas para estudar funções definidas em intervalos que tenham extremos fechados como veremos nos exemplos a seguir.

Definição 3.20. Dizemos que uma função $f(x)$ é diferenciável (ou derivável) em intervalos da forma $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(a,b]$ ou $[a,b)$ se $f'(x)$ existe para todo ponto x no interior do intervalo e se existem as derivadas laterais adequadas nos extremos destes intervalos.

Exemplo 3.21. Considere a função $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$. Para todo $x>0$ temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f(x)$ é derivável em todo ponto $x>0$ e $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Agora, não podemos calcular o limite $f'(x)$ para $x=0$, já que f está definida apenas em um intervalo à direita de 0. Mas, podemos considerar a derivada lateral à direita $f'_+(0)$ que é

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Portanto não existe a derivada lateral à direita no ponto $x=0$. Concluímos que $f(x)=\sqrt{x}$ não é derivável no intervalo $[0,+\infty)$ embora seja derivável no intervalo $(0,+\infty)$.

Exemplo 3.22. Considere a função $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2$. Para todo $x\in(1,2)$ temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} 6x+3h = 6x.
\end{aligned}$$

Nos extremos do domínio, $x=1$ e $x=2$, devemos considerar as derivadas laterais que são:

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{3+6h+3h^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{6h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} 6+3h = 6$$

e

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-}\frac{3(2+h)^2-12}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{12+12h+3h^2-12}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{12h+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} 12+3h = 12.$$

Portanto, $f(x)$ é diferenciável no intervalo $[1,2]$.

3.5 Continuidade e Diferenciabilidade

Uma relação entre o conceito de continuidade e diferenciabilidade é dada no seguinte teorema:

Teorema 3.23. *Se $f(x)$ é uma função derivável em $x_0\in D(f)$ então f é contínua em x_0.*

Prova: Para provar este teorema devemos mostrar que se $f'(x_0)$ existe então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mas, este último limite equivale ao limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Assim, provamos o teorema mostrando que

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0).0 = 0.$$

Observação 3.24. Este teorema nos diz que se $f(x)$ **é descontínua em** x_0, então $f(x)$ **não é diferenciável em** x_0.

Exemplo 3.25. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é descontínua em $x = 1$ (verifique!). Portanto, pelo teorema 3.23, $f(x)$ não é diferenciável no ponto $x = 1$.

Observação 3.26. Continuidade não implica em diferenciabilidade, ou seja, se $f(x)$ é contínua em x_0 não necessariamente $f(x)$ é derivável em x_0. Um bom exemplo para ilustrar esse fato é a função $f(x) = |x|$ que é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável neste ponto.

Exemplo 3.27. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir, queremos determinar valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que a função seja diferenciável em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Primeiramente, pelo Teorema 3.23, devemos ter f contínua em $x = 0$. Temos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + x - 2 = -2,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} ax + b = b = f(0).$$

Assim, devemos ter $b = -2$.

Temos então: $f(x) = \begin{cases} ax - 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Agora, devemos ter as derivadas laterais em $x = 0$ iguais:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ f(0) = -2}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) + 2}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ h \to 0^+ \Rightarrow h > 0 \Rightarrow f(h) = h^2 + h - 2}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + h - 2 + 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + h}{h} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ f(0) = -2}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) + 2}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ h \to 0^- \Rightarrow h < 0 \Rightarrow f(h) = ah - 2}}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{ah - 2 + 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{ah}{h} = a.$$

Portanto, devemos ter $a = 1$ e, assim, $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

3.6 Regras de Derivação

Nesta seção estudaremos regras para derivar funções sem o uso do limite que define a derivada.

3.6.1 Derivadas de funções constantes

Se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$ ou $\dfrac{df}{dx} = 0$. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Exemplo 3.28. Se $f(x) = 5$ então $f'(x) = 0$.

3.6.2 Derivada do produto de uma função por uma constante

Se f é derivável em x e $g(x) = cf(x)$ para alguma constante c então $g(x)$ é derivável em x e

$$g'(x) = cf'(x) \qquad ou \qquad \frac{dg}{dx} = c\frac{df}{dx}\cdot$$

De fato,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).$$

Exemplo 3.29. Sabemos que $f(x) = x^2$ tem derivada $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pela regra acima temos que $g(x) = 5f(x) = 5x^2$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e sua derivada é $g'(x) = 5.f'(x) = 5.2x = 10x$.

3.6.3 Derivadas de potências

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$ então $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e temos

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1} \qquad ou \qquad \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para provar esta regra, recordemos que

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} = x^n + nx^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}.h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1} \\
&= nx^{n-1} + 0 + 0 + ... + 0 = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.30. Segue da regra acima que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2.$$

A regra acima pode ser generalizada para expoentes reais quaisquer. Mais precisamente, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^\alpha$ então

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Daremos a prova deste fato mais à frente. Por agora, vamos explorar esta regra em alguns exemplos.

Exemplo 3.31. Considere $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Observe que $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$. Considerando a regra geral da derivação de potências, temos que $f(x)$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e

$$f'(x) = (x^{-2})' = -2.x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}\cdot$$

Exemplo 3.32. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$. Observando que $f(x) = \sqrt[5]{x^6} = x^{\frac{6}{5}}$ e considerando a regra de derivação acima, temos

$$f'(x) = (x^{\frac{6}{5}})' = \frac{6}{5}x^{\frac{6}{5}-1} = \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} = \frac{6\sqrt[5]{x}}{5}\cdot$$

Exemplo 3.33. Seja $f(x) = x^\alpha$. Como $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(cf(x)) = cf'(x)$ para $c \in \mathbb{R}$ constante, temos

$$(cx^\alpha)' = c\alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{para} \qquad \alpha, c \in \mathbb{R},$$

por exemplo,

$$(6x^3)' = 3.6.x^{3-1} = 18x^2.$$

3.6.4 Regra da soma

Se f e g são deriváveis em x então a soma $(f+g)$ é derivável em x e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad ou \qquad \frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}\cdot$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} = f'(x)+g'(x). \end{aligned}$$

Exemplo 3.34. A função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

é a soma das funções $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Sabemos que $g(x)$ é derivável para todo $x \in (0, +\infty)$ com $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Também sabemos que $h(x) = \dfrac{1}{x}$ é derivável para todo $x \neq 0$ sendo $h'(x) = \frac{-1}{x^2}$. Considerando então a regra da soma temos

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

3.6.5 Derivadas de polinômios

Funções polinomiais são somas de funções do tipo $a.x^n$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ como consideradas no exemplo 3.33. Segue da regra da soma que toda função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

é derivável em qualquer $x \in \mathbb{R}$ e sua derivada é a função polinomial $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = n.a_n x^{n-1} + (n-1).a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1.$$

Exemplo 3.35. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 5x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1$$

é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e a sua derivada é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (5x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 2x^2 + 1)' \\
&= (5x^6)' + (3x^5)' + (-2x^3)' + (2x^2)' + (1)' \\
&= 5(x^6)' + 3(x^5)' - 2(x^3)' + 2(x^2)' + (1)' \\
&= 5.6x^5 + 3.5x^4 - 2.3x^2 + 2.2x + 0 \\
&= 30x^5 + 15x^4 - 6x^2 + 4x.
\end{aligned}$$

3.6.6 Regra do Produto

Se f e g são deriváveis em x então o produto $(f.g)$ é derivável em x e temos

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) \qquad ou \qquad \frac{d}{dx}[f.g] = \frac{df}{dx}.g + f.\frac{dg}{dx}.$$

$$(f.g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x+h).g(x) + f(x+h).g(x) - f(x).g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).[g(x+h) - g(x)] + g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).[g(x+h) - g(x)]}{h}}_{=f(x)g'(x)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h}}_{=f'(x)g(x)} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Exemplo 3.36. Vamos usar a regra do produto para derivar $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{x}.(x^3 + 4x - 5)$$

note que $f(x) = g(x).h(x)$ sendo $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^3 + 4x - 5$. Sabemos que $g(x) = \sqrt{x}$ é derivável em todo ponto $x > 0$ e que $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Sabemos também que a função polinomial $h(x) = x^3 + 4x - 5$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e $h'(x) = 3x^2 + 4$. Assim, pela regra do produto, $f(x)$ é derivável em todo $x > 0$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x).h(x) + g(x).h'(x) \\ &= (\sqrt{x})'.(x^3 + 4x - 5) + \sqrt{x}.(x^3 + 4x - 5)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.(x^3 + 4x - 5) + \sqrt{x}.(3x^2 + 4) \\ &= \frac{7x^3 + 12x - 5}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3.6.7 Regra do Quociente

Se f e g são deriváveis em um ponto x e $g(x) \neq 0$ então a função quociente $\dfrac{f}{g}$ é derivável em x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad ou \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{\frac{df}{dx}.g - f.\frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{g(x+h).g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x) + f(x).g(x) - f(x).g(x+h)}{g(x+h).g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] g(x) - f(x)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]}{\lim_{h\to 0} g(x+h).g(x)}.\lim_{h\to 0} g(x) - \lim_{h\to 0} f(x).\frac{\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{\lim_{h\to 0} g(x+h).g(x)} \\ &= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.37. Vamos usar a regra do quociente para encontrar a derivada de $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x - 1}.$$

Observe que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ sendo $p(x) = x^3 + 2x^2$ e $q(x) = x - 1$ deriváveis em todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Segue da regra do quociente que $f(x)$ é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ e

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{[q(x)]^2} &= \frac{(x^3+2x^2)'(x-1) - (x^3+2x^2).(x-1)'}{(x-1)^2} \\
&= \frac{(3x^2+4x)(x-1) - (x^3+2x^2)(1)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{3x^3+4x^2-3x^2-4x-x^3-2x^2}{x^2-2x+1} \\
&= \frac{2x^3-x^2-4x}{x^2-2x+1}.
\end{aligned}$$

3.6.8 Regra da Cadeia (Derivada de Função Composta)

Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ funções deriváveis tais que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{D}(f)$. Então, a função composta $y = f(g(x))$ é derivável e vale a

Regra da Cadeia. $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

Vamos fazer uma prova supondo que $g(x+h) - g(x) \neq 0$ para todo h suficientemente pequeno. Fixemos x. Usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}.
\end{aligned}$$

Além disso:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sejam } a = g(x) \text{ e } y = g(x+h).\ \text{Se } h \to 0, \text{ então } y \to a.}}{=} \lim_{y\to a} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(a) = f'(g(x)).$$

Portanto,

$$(f(g(x)))' = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}}_{\to f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} = f'(g(x))g'(x).$$

Exemplo 3.38. Seja $h(x) = (x^2+1)^{10}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = x^{10} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = 10x^9 \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 10(g(x))^9 \cdot (2x) = 10(x^2+1)^9 \cdot (2x) = 20x(x^2+1)^9.$$

Exemplo 3.39. Seja $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ e } g(x) = x^3 + 2x^2 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } g'(x) = 3x^2 + 4x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (3x^2+4x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+2x^2}} \cdot (3x^2+4x) = \frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2}}.$$

Note que a derivada não existe nos pontos $x = -2$ e $x = 0$.

Exemplo 3.40. Seja $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Essa função pode ser vista como uma composição:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ e } g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)).$$

Temos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ e } g'(x) = 2x.$$

Portanto

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot 2x = -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

3.7 Derivada da Função Inversa

Sejam $y = f(x)$ uma função invertível e $x = g(y)$ sua inversa, temos que

$$f(g(y)) = y, \quad \forall\, y \in \mathrm{D}(g).$$

Então, derivando os dois lados em relação à y, temos

$$f'(g(y))g'(y) = 1 \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Derivada da Função Inversa. Seja $y = f(x)$ uma função derivável e invertível em (a, b) tal que $f'(x) \neq 0$ em (a, b). Seja $x = g(y)$ a função inversa de $f(x)$. Então, $x = g(y)$ é derivável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{se } f'(g(y)) \neq 0.$$

Exemplo 3.41. Seja $y = f(x) = 8x^3$. A inversa dessa função é $x = g(y) = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{y}$. Pelo resultado anterior, a derivada de $x = g(y)$ é

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{24(g(y))^2} = \frac{1}{24\left(\dfrac{\sqrt[3]{y}}{2}\right)^2} = \frac{1}{6y^{2/3}}$$

que também pode ser encontrada usando a regra da potência.

Exemplo 3.42. A questão a seguir estava na prova opcional de 2017-1.

Considere a função bijetora $f : [0, \frac{3}{2}] \to [-\frac{281}{32}, 5]$ dada por

$$f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5.$$

Se $f(1) = -2$ e g é a inversa de f, então $g'(-2)$ vale:

a) $\dfrac{-1}{14}$ b) $\dfrac{-1}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{1}{14}$

Vamos resolver essa questão. Sejam $y = f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 5$ e $x = g(y)$ sua inversa. Então, usando a derivada da inversa, temos que

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{f'(1)}.$$

$f(1) = -2 \Rightarrow g(-2) = 1$

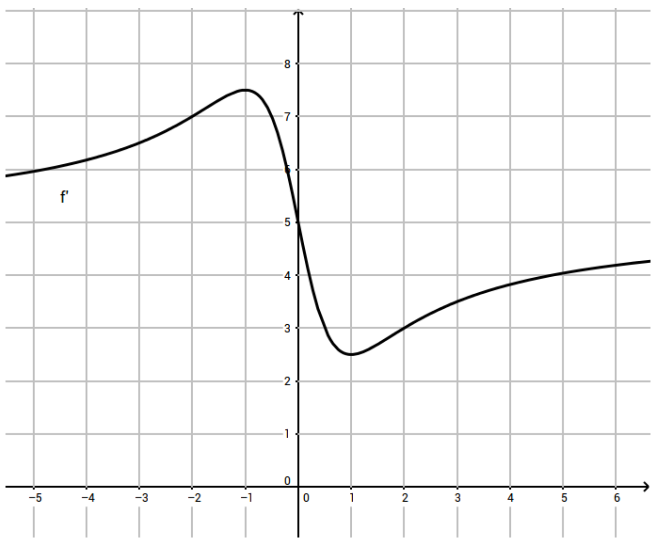
Assim, basta calcular $f'(1)$. Temos que

$$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 10x \Rightarrow f'(1) = 5 - 9 - 10 = -14.$$

Portanto

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{14}.$$

Exemplo 3.43. (2016-2) A figura abaixo representa o gráfico da derivada f' de uma função bijetora f.



Sabendo que o gráfico de f passa pelo ponto $(5, 2)$, a derivada da inversa de f no ponto 2 é igual a:

a) $\dfrac{-1}{4}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) 3 e) $\dfrac{-1}{3}$

Vamos resolver essa questão. Seja $x = g(y)$ a inversa de $y = f(x)$. Então

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{f'(5)}.$$

$(5, 2)$ no gráfico de $f \Rightarrow f(5) = 2 \Rightarrow g(2) = 5$

Pelo gráfico, temos que $f'(5) = 4$, donde $g'(2) = 1/4$.

Vamos ver nas próximas seções mais exemplos de uso da derivada da função inversa.

3.8 Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja $1 \neq a > 0$. Vamos determinar a derivada da função $f(x) = a^x$ usando a definição de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \underset{\text{como } \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a}{=} a^x \ln a.$$

Portanto

Derivada da Função Exponencial. $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$.

Exemplo 3.44. Se $f(x) = 2^x$, então $f'(x) = 2^x \ln 2$.

Exemplo 3.45. Se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x \ln e \underset{\ln e = 1}{=} e^x$.

Exemplo 3.46. Se $h(x) = 5^{x^2+1}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = 5^x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Como $f'(x) = 5^x \ln 5$ e $g'(x) = 2x$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 5^{g(x)} \cdot \ln 5 \cdot 2x = 2x \cdot 5^{x^2+1} \cdot \ln 5 = 10x \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5.$$

Exemplo 3.47. Se $h(x) = e^{1/x}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1/x$. Como $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = -1/x^2$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot (-1/x^2) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}\cdot$$

Exemplo 3.48. Se $h(x) = 3^{\sqrt{x}}$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Como $f'(x) = 3^x \ln 3$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3^{g(x)} \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3}{2\sqrt{x}}\cdot$$

Dada uma função exponencial $y = f(x)$ onde $f(x) = a^x$, sabemos que sua função inversa $f^{-1}(y)$ é dada por $x = \log_a(y)$. Assim, usando o que vimos na seção anterior sobre derivada da função inversa, temos que a derivada de $\log_a(y)$ é

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{a^{f^{-1}(y)} \ln a} = \frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{y} \log_a e$$

Ou seja:

Derivada da Função Logarítmica. $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$.

Exemplo 3.49. Se $f(x) = \log_3 x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_3 e$.

Exemplo 3.50. Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \ln e \underset{\ln e = 1}{=} \dfrac{1}{x}\cdot$

Exemplo 3.51. Se $h(x) = \log_7(x^3 + x^2)$, então $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \log_7 x$ e $g(x) = x^3 + x^2$. Como $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_7 e$ e $g'(x) = 3x^2 + 2x$, segue da regra da cadeia que

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \log_7 e \cdot (3x^2 + 2x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2} \cdot \log_7 e = \frac{3x + 2}{x^2 + x} \cdot \log_7 e.$$

Exemplo 3.52. A derivada de $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)$ é

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x+1}} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{e^x}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)\,(e^x)' - (x+1)'(e^x)}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{x+1}{e^x} \cdot \left(\frac{(x+1)\,e^x - e^x}{(x+1)^2}\right) = \frac{x+1}{e^x} \cdot \frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}.$$

Exemplo 3.53. A derivada de $f(x) = e^{x \ln x}$ é

$$f'(x) = e^{x \ln x}(x \ln x)' = e^{x \ln x}(x' \ln x + x(\ln x)') = e^{x \ln x}\left(\ln x + x\,\frac{1}{x}\right) = e^{x \ln x}(1 + \ln x).$$

Exemplo 3.54. Vamos calcular $a, b \in \mathbb{R}$ para que a função a seguir seja derivável em todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ b \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Para $x \neq 1$, temos que f é contínua (verifique!) e derivável, sendo

$$f'(x) = \begin{cases} -2axe^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Agora, para $x = 1$, devemos, primeiramente, pelo Teorema 3.23, ter f contínua. Temos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} b \ln(1) + 1 = b \ln 1 + 1 = 1 = f(1),$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ae^{-x^2} = ae^{-1}.$$

Assim, devemos ter $ae^{-1} = 1$, isto é, $a = e$ e $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ b \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Agora, verifique que $f'_-(1) = -2$ e $f'_+(1) = b$.

Portanto, devemos ter $b = -2$ e $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+1} & \text{se } x < 1 \\ -2 \ln x + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Exemplo 3.55. Para a derivada de $f(x) = x^x$, escrevemos $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ e aplicamos a regra da cadeia:

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exemplo 3.53}}}{=} e^{x \ln x}(1 + \ln x) \underset{\substack{\uparrow \\ x^x = e^{x \ln x}}}{=} x^x(1 + \ln x).$$

Podemos usar a Regra da Cadeia para generalizar o exemplo anterior, isto é, calcular a derivada de uma função na forma $f(x)^{g(x)}$ onde f e g são deriváveis e $f(x) > 0$. Escrevemos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Pela regra da cadeia, segue que

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g(x)\ln(f(x))\right)'$$

e portanto,

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Por exemplo:

Exemplo 3.56. Para a derivada de $h(x) = (x+1)^{2x+3}$, chamemos $f(x) = x+1$ e $g(x) = 2x+3$. Então, $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2$. Dessa forma:

$$h'(x) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = (2x+3)(x+1)^{2x+2} + 2(x+1)^{2x+3}\ln(x+1).$$

Observação 3.57. Em particular, temos a regra da potência para potências reais: se $h(x) = x^r$, onde $r \in \mathbb{R}$, temos que $h'(x) = r\,x^{r-1}$. De fato, escrevendo

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r\,\ln x}$$

Temos que

$$(x^r)' = \left(e^{r\,\ln x}\right)' = e^{r\,\ln x}(r\,\ln x)' = e^{r\,\ln x}\left(\frac{r}{x}\right) \underset{\text{como } x^r = e^{r\,\ln x}}{\uparrow\!=} \frac{r\,x^r}{x} = r\,x^{r-1}.$$

3.9 Derivadas das Funções Trigonométricas

Vamos começar obtendo a derivada da função seno a partir da definição de derivada, lembrando que $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x\,\cos h + \operatorname{sen} h\,\cos x$. Então, se $f(x) = \operatorname{sen} x$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\,\cos h + \operatorname{sen} h\,\cos x - \operatorname{sen} x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h\,\cos x + \operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\,\underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1} + \operatorname{sen} x\,\underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0}\right) = \cos x.
\end{aligned}$$

Portanto

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

No capítulo anterior, vimos que $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$ e $\cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim:

$$\cos x = \operatorname{sen}(x+\pi/2) \Rightarrow (\cos x)' = (\operatorname{sen}(x+\pi/2))'.$$

Para derivar, $\operatorname{sen}(x+\pi/2)$ usamos a regra da cadeia:

$$(\operatorname{sen}(x+\pi/2))' = \cos(x+\pi/2)\cdot(x+\pi/2)' = \cos(x+\pi/2) = -\operatorname{sen} x.$$

Portanto

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Você também pode fazer essa derivada usando a definição, como um exercício. Usando essas derivadas e a regra da cadeia, podemos derivar várias funções:

Exemplo 3.58. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(x^4 + x^2)$ é $f'(x) = \cos(x^4 + x^2) \cdot (4x^3 + 2x)$.

Exemplo 3.59. A derivada de $f(x) = \cos(e^x)$ é $f'(x) = -\operatorname{sen}(e^x) \cdot e^x$.

Exemplo 3.60. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\ln x))$ é

$$f'(x) = \cos(\cos(\ln x)) \cdot (-\operatorname{sen}(\ln x)) \cdot (1/x) = -\frac{\cos(\cos(\ln x)) \cdot (\operatorname{sen}(\ln x))}{x}.$$

As derivadas das demais funções trigonométricas podem ser obtidas usando as regras de derivação, por exemplo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow (\operatorname{tg} x)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando a regra do quociente}}}{=} \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \underset{\substack{\uparrow \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1}}{=} \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow (\sec x)' = ((\cos x)^{-1})' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando a regra da cadeia}}}{=} -(\cos x)^{-2} (\cos x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x \sec x.$$

Como um exercício, você deve provar que

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cossec}^2 x,$$

$$(\operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x.$$

Exemplo 3.61. A derivada de $f(x) = \operatorname{tg}(x^3 + 2^x)$ é $f'(x) = (3x^2 + 2^x \ln 2) \cdot \sec^2(x^3 + 2^x)$.

Exemplo 3.62. A derivada de $f(x) = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ é

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia}}}{=} -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra do quociente}}}{=} -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{(x+1)'(x-1) - (x-1)'(x+1)}{(x-1)^2}\right)$$

$$= -\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{2\operatorname{cossec}^2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{(x-1)^2}.$$

Agora, para as derivadas das funções trigonométricas inversas, vamos usar a derivada da função inversa vista na seção anterior.

Temos que $y = \operatorname{arcsen} x$, para todo $x \in (-1, 1)$ se e somente se $x = \operatorname{sen} y$. Assim,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Devemos então determinar $\cos y$ em função de x. Temos que:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Longrightarrow \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y \underset{\substack{\uparrow \\ y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow \cos y > 0}}{\Longrightarrow} \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} \underset{\substack{\uparrow \\ x = \operatorname{sen} y}}{=} \sqrt{1 - x^2}.$$

Portanto:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

Observação 3.63. Observe que não existem as derivadas de $\operatorname{arcsen} x$ nos pontos $x = \pm 1$ e, como pode ser visto no gráfico, as retas tangentes nesses pontos são verticais.

Analogamente, pode-se provar, para $-1 < x < 1$, que

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para a derivada de $y = \operatorname{arctg} x$, repetimos o processo:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\sec^2 y} \underset{\substack{\uparrow \\ \sec^2 y - \operatorname{tg}^2 y = 1}}{=} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exemplo 3.64. A derivada de $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x+1)$ é $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$.

Exemplo 3.65. A derivada de $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ é

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia}}}{=} \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{1+(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1+(\ln x)^2)}.$$

Como exercício, você deve provar as derivadas das demais funções trigonométricas inversas:

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,,\ |x| > 1,$$

$$(\operatorname{arccossec} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,,\ |x| > 1,$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

3.10 Derivadas das Funções Hiperbólicas

As derivadas do seno e do cosseno hiperbólicos seguem facilmente da derivada da função exponencial de base e:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow (\operatorname{senh} x)' \underset{\substack{\uparrow \\ (e^{-x})' = -e^{-x} \text{ pela regra da cadeia}}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x,$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (\cosh x)' \underset{\substack{\uparrow \\ (e^{-x})' = -e^{-x} \text{ pela regra da cadeia}}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x.$$

Já as derivadas das demais funções seguem das regras de derivação, por exemplo:

$$(\operatorname{tgh} x)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{usando a regra do quociente}}}{=} \frac{(\operatorname{senh} x)' \cosh x - \operatorname{senh} x\,(\cosh x)'}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x.$$

Você pode fazer o mesmo para as demais funções hiperbólicas

$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\operatorname{cossech}^2 x,$$

$$(\operatorname{cossech} x)' = -\operatorname{cotgh} x \operatorname{cossech} x,$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x.$$

Exemplo 3.66. A derivada de $f(x) = \operatorname{senh}(x^3 + 3)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \cosh(x^3 + 3).$$

Exemplo 3.67. A derivada de $f(x) = \operatorname{sech}(2x)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -2\operatorname{tgh}(2x)\operatorname{sech}(2x).$$

Exemplo 3.68. A derivada de $f(x) = \ln(\operatorname{tgh}(3x))$ é, usando a regra da cadeia duas vezes,

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tgh}(3x)} \cdot 2\operatorname{sech}^2(2x) = \frac{2\operatorname{sech}^2(2x)}{\operatorname{tgh}(3x)}.$$

Exemplo 3.69. A derivada de $f(x) = \operatorname{cotgh}(1 - x^3)$ é, usando a regra da cadeia,

$$f'(x) = -\operatorname{cossech}^2(1 - x^3) \cdot (-3x^2) = 3x^2 \cdot \operatorname{cossech}^2(1 - x^3).$$

Para as funções hiperbólicas inversas, usaremos novamente a derivada da função inversa, além das identidades hiperbólicas.

Por exemplo, dado $y = \operatorname{argsenh} x$, temos que $x = \operatorname{senh} y$ e

$$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{senh} y)'} = \frac{1}{\cosh y} \underset{\substack{\uparrow \\ \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \cosh^2 y = 1 + x^2}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Para o cosseno hiperbólico podemos fazer analogamente, tomando apenas cuidado com o domínio, que é $D(\cosh x) = [1, +\infty)$:

$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\operatorname{senh} y} \underset{\substack{\uparrow \\ \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{senh}^2 y = 1 - x^2}}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{se } x > 1.$$

As demais derivadas das funções hiperbólicas inversas podem ser obtidas analogamente:

$$(\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}\,,\ |x| < 1,$$

$$(\operatorname{argsech} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}\,,\ 0 < x < 1,$$

$$(\operatorname{argcossech} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}\,,\ x \neq 0,$$

$$(\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}\,,\ |x| > 1.$$

Exemplo 3.70. A derivada de $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{argcosh}(x^2)$ é

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra do produto}}}{=} (x^2)' \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2\,(\operatorname{argcosh}(x^2))'$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia em } (\operatorname{argcosh}(x^2))'}}{=} 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}} = 2x \cdot \operatorname{argcosh}(x^2) + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}.$$

Exemplo 3.71. A derivada de $f(x) = \operatorname{argtgh}(\operatorname{sen}(3x))$, usando a regra da cadeia, é

$$f'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2(3x)} \cdot (\operatorname{sen}(3x))' \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{sen}^2(3x) + \cos^2(3x) = 1}}{=} \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3\cos(3x) = \frac{3}{\cos(3x)}.$$

3.11 Tabela de Derivadas

A seguir, apresentamos um resumo do que foi discutido nas seções anteriores em forma de uma tabela de derivadas.

Função	Derivada	Função	Derivada
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x} \log_a e$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sec x$	$\operatorname{tg} x \sec x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$, $\lvert x\rvert > 1$
$\operatorname{cossec} x$	$-\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x$	$\operatorname{arccossec} x$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$, $\lvert x\rvert > 1$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$	$\operatorname{arccotg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$	$\operatorname{argsenh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\operatorname{argcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $x > 1$
$\operatorname{tgh} x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\operatorname{argtgh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$	$\operatorname{argsech} x$	$\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $0 < x < 1$
$\operatorname{cossech} x$	$-\operatorname{cotgh} x \operatorname{cossech} x$	$\operatorname{argcossech} x$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$, $x \neq 0$
$\operatorname{cotgh} x$	$-\operatorname{cossech}^2 x$	$\operatorname{argcotgh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$, $\lvert x\rvert > 1.$

3.12 Derivadas Sucessivas

Vimos que dada uma função $f(x)$ diferenciável, podemos definir a função derivada $f'(x)$.
Se essa função $f'(x)$ for também diferenciável, definimos a *derivada segunda de* $f(x)$ (ou derivada de ordem 2), denotada por $f''(x)$ ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, como sendo a derivada de $f'(x)$.
Se a derivada segunda $f''(x)$ for diferenciável, podemos definir a *derivada terceira de* $f(x)$ (ou derivada de ordem 3), denotada por $f'''(x)$ ou $\dfrac{d^3f}{dx^3}$, como sendo a derivada de $f''(x)$.
Em geral, se a $n-$ésima derivada de $f(x)$ existe e é derivável, podemos definir a $(n+1)-$ésima (ou derivada de ordem $n+1$) de $f(x)$, denotada por $f^{(n+1)}(x)$ ou $\dfrac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}$, como sendo a derivada de $f^{(n)}(x)$.

Exemplo 3.72. Seja $f(x) = x^5$. Temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 \\ f''(x) &= 20x^3 \\ f'''(x) &= 60x^2 \\ f^{(4)}(x) &= 120x \\ f^{(5)}(x) &= 120 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= 0, \text{ se } n \geq 6. \end{aligned}$$

Não necessariamente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$ sempre que $n \geq n_0$, como veremos a seguir.

Exemplo 3.73. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \\ f^{(6)}(x) &= -\operatorname{sen} x \\ f^{(7)}(x) &= -\cos x \\ f^{(8)}(x) &= \operatorname{sen} x \\ &\vdots \end{aligned}$$

Exemplo 3.74. Seja $f(x) = e^x$. Temos que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 1$. Agora, se $f(x) = a^x$ para $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq e$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= a^x \cdot \ln a \\ f''(x) &= a^x \cdot (\ln a)^2 \\ f'''(x) &= a^x \cdot (\ln a)^3 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= a^x \cdot (\ln a)^n, \text{ para todo } n \geq 1. \end{aligned}$$

3.13 Derivação Implícita

As funções que trabalhamos até agora foram dadas *explicitamente*, isto é, eram funções cujas expressões $y = f(x)$ eram conhecidas e podiam ser usadas para calcular $f(x)$ para cada x do domínio. Além disso, era possível calcular $f'(x)$ usando as regras vistas.

Porém, algumas funções podem ser apresentadas de forma *implícita*, o que veremos a seguir.

Exemplo 3.75. Consideremos a função $y = f(x)$ dada pelas soluções da equação

$$y^3 + x = 2.$$

Vemos que para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que o par (x, y) satisfaz a equação dada. Esse y pode ser conhecido facilmente:

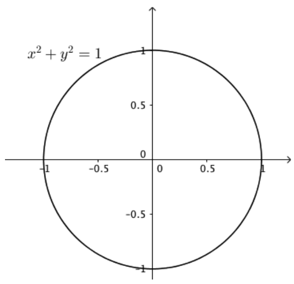
$$y^3 + x = 2 \iff y^3 = 2 - x \iff y = \sqrt[3]{2 - x}.$$

Isso significa que a função dada implicitamente por $y^3 + x = 2$ pode ser dada explicitamente por $y = \sqrt[3]{2 - x}$, bastando isolar o y.

Em geral, dizemos que $y = f(x)$ é uma função definida *implicitamente* por uma equação em x e y quando o par $(x, f(x))$ satisfaz essa equação.

Porém, nem sempre conseguimos explicitar uma função dada implicitamente.

Exemplo 3.76. Consideremos a equação $x^2 + y^2 = 1$.



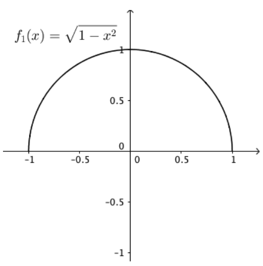
Sabemos que as soluções dessa equação representam um círculo de raio 1 centrado na origem, o que não é uma função, pois cada $x \in (-1, 1)$ se relaciona com dois valores de $y \in [-1, 1]$. Podemos, no entanto, encontrar várias funções que satisfazem essa equação, como por exemplo:

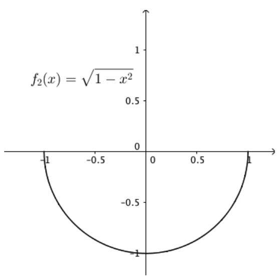
$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

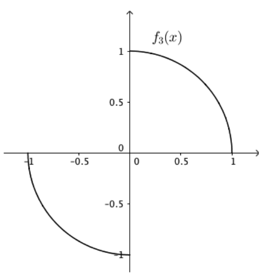
$$f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

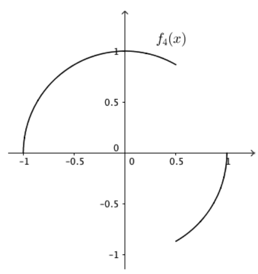
$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2}, \text{ se } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -\sqrt{1 - x^2}, \text{ se } 1/2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1 - x^2}, \text{ se } -1 \leq x < 1/2. \end{cases}$$









Vamos determinar a derivada no ponto de abscissa $x = 1/2$ em cada caso. Por exemplo, usando $f_1(x)$ ou $f_3(x)$, a derivada em $(1/2, \sqrt{3}/2)$ é dada por $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, vale $\dfrac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$. Já com as funções $f_2(x)$ ou $f_4(x)$, o ponto de coordenada $x = 1/2$ é $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. A derivada de $f_2(x)$ nesse ponto é dada por $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, isto é, vale $\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Já a função $f_4(x)$ não possui derivada em $x = 1/2$ pois não é contínua nesse ponto. Isso nos dá a ideia de que a derivada no ponto de abscissa $1/2$ depende da expressão explícita da função.

Porém, quando a função é derivável, podemos calcular essa derivada sem explicitar a função. De fato, voltemos à equação $x^2 + y^2 = 1$ representando implicitamente uma função $y = f(x)$, isto é:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1.$$

Podemos derivar essa expressão em ambos os lados:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1 \underset{\substack{\big\uparrow \\ \text{regra da cadeia em } (f(x))^2}}{\Longrightarrow} 2x + 2f(x)f'(x) = 0 \Longrightarrow f(x)f'(x) = -x \Longrightarrow f'(x) = \frac{-x}{f(x)} = \frac{-x}{y}\cdot$$

Vamos usar essa expressão para calcular novamente as derivadas no ponto de abscissa $x = 1/2$ nos casos de $f(x)$ igual a cada uma das funções deriváveis $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ vistas acima. Para $f(x) = f_1(x)$ ou $f(x) = f_3(x)$ o ponto correspondente é $(x, y) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Para $f(x) = f_2(x)$ o ponto correspondente é $(x, y) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ e daí:

$$f'(x) = \frac{-x}{y} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Note que foram os mesmos valores obtidos anteriormente quando derivamos as expressões explícitas das funções. Isso significa que podemos obter a derivada de $f(x)$ (quando $f(x) \neq 0$) sem conhecer explicitamente $f(x)$.

Esse processo, chamado *derivação implícita*, pode ser feito para qualquer função derivável dada implicitamente por uma equação. No que segue, quando dissermos que uma função é dada implicitamente por uma equação, iremos admitir que essa função é derivável em todos os pontos onde essa derivada puder ser definida. Vamos ver outro exemplo.

Exemplo 3.77. Seja $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação

$$\ln(y) + y^2 = x^2.$$

Não é difícil ver que não conseguimos uma expressão explícita para $y = f(x)$. No entanto, podemos derivar ambos os lados da igualdade:

$$\ln(f(x)) + (f(x))^2 = x^2 \underset{\substack{\big\uparrow \\ \text{regra da cadeia em } (f(x))^2 \text{ e em } \ln(f(x))}}{\Longrightarrow} \frac{1}{f(x)}f'(x) + 2f(x)f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(x)\left(\frac{1}{f(x)} + 2f(x)\right) = 2x$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \frac{2x\, f(x)}{1 + 2(f(x))^2}\cdot$$

Exemplo 3.78. Vamos determinar a reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ dada implicitamente pela expressão

$$e^y + xy = \sqrt{x}$$

no ponto $(1, 0)$. Como $y = f(x)$, temos

$$e^{f(x)} + x\,f(x) = \sqrt{x}.$$

Notamos que $g(x) = e^{f(x)}$ é uma função composta cuja derivada, usando a regra da cadeia, é

$$g'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

Assim:

$$e^{f(x)} + x\,f(x) = \sqrt{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivando ambos os lados}}}{\Longrightarrow} e^{f(x)} f'(x) + f(x) + x\,f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Quando $x = 1$, temos:

$$e^{f(1)} f'(1) + f(1) + f'(1) = \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ f(1)=0}}{\Longrightarrow} e^0 f'(1) + f'(1) = 1/2 \Longrightarrow 2f'(1) = 1/2 \Longrightarrow f'(1) = 1/4.$$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente à curva em $(1, 0)$ é $1/4$ e, então, a reta tangente é:

$$-x + 4y = -1.$$

Exemplo 3.79. A questão abaixo estava em uma prova de 2016-1.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função definida implicitamente por $\operatorname{arctg}(y) + \dfrac{y}{x} = x - 1$ no ponto de ordenada $y = 0$ é:

a) -1 b) 0 c) 1/2 d) 1 e) 2

Vamos resolvê-la notando que $y = f(x)$ satisfaz

$$\operatorname{arctg}(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1.$$

Notamos que, pela regra da cadeia:

$$(\operatorname{arctg}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

Assim:

$$\operatorname{arctg}(f(x)) + \frac{f(x)}{x} = x - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivando ambos os lados}}}{\Longrightarrow} \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} + \frac{x\,f'(x) - f(x)}{x^2} = 1.$$

Queremos determinar a derivada quando $f(x) = 0$, assim, podemos simplificar a expressão anterior:

$$\frac{f'(x)}{1 + \cancelto{0}{(f(x))^2}} + \frac{x\,f'(x) - \cancelto{0}{f(x)}}{x^2} = 1 \Longrightarrow f'(x) + \frac{f'(x)}{x} = 1.$$

Ainda, voltando à expressão inicial, quando $f(x) = 0$, temos que $x = 1$ (usando que $\operatorname{arctg}(0) = 0$). Portanto, obtemos

$$f'(1) + \frac{f'(1)}{1} = 1 \Longrightarrow f'(1) = 1/2.$$

Exemplo 3.80. A questão abaixo estava em uma prova de 2015-2.

A função diferenciável $y = f(x)$ satisfaz a equação $\dfrac{\cos(x-y)}{x+y} = 1/2$. Se $f(1) = 1$, então a derivada da função f em $x = 1$ é:

a) -1 b) 0 c) 1 d) -1/2 e) 1/2

Vamos resolvê-la. Para isso, notamos que $y = f(x)$ satisfaz:

$$\frac{\cos(x - f(x))}{x + f(x)} = 1/2.$$

Derivando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\frac{(\cos(x - f(x)))'(x + f(x)) - (x + f(x))' \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{regra da cadeia}}}{\Longrightarrow} \frac{-\text{sen}\,(x - f(x))(1 - f'(x))(x + f(x)) - (1 + f'(x)) \cos(x - f(x))}{(x + f(x))^2} = 0.$$

Queremos determinar a derivada em $x = 1$, isto é, $f'(1)$. Temos:

$$\frac{-\text{sen}\,(1 - f(1))(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cos(1 - f(1))}{(1 + f(1))^2} = 0.$$

Pode parecer uma expressão horrível, mas voltemos ao enunciado, que diz que $f(1) = 1$, isto é, $1 - f(1) = 0$. Assim:

$$\frac{-\cancelto{0}{\text{sen}\,(1 - f(1))}(1 - f'(1))(1 + f(1)) - (1 + f'(1)) \cancelto{1}{\cos(1 - f(1))}}{(1 + f(1))^2} = 0 \Rightarrow \frac{-1 - f'(1)}{4} = 0.$$

Portanto, $f'(1) = -1$.

3.14 Exercícios

1. Determine a derivada das funções a seguir.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} + x^3$

(c) $f(x) = 12x^{20} + 14x^4 + 13x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

(e) $f(x) = \dfrac{5x^4}{\sqrt{x}}$

(f) $f(x) = 5\sqrt[3]{12x}$

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^5 + x^4 + 3x + 2)$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

(j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + x^2 + 1}$

(k) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1}$

(l) $f(x) = (1 - x^2)^{100}$

(m) $f(x) = \sqrt{x-3}$

(n) $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - 3}$

(o) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

(p) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}$

(q) $f(x) = (x^3 + \sqrt{x+1})^{10}$

(r) $f(x) = 2^{x^2+1}$

(s) $f(x) = \log(x^5 + x^4)$

(t) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(x^2)$

(u) $f(x) = 2^{\text{sen}\, x}$

(v) $f(x) = \ln(\text{sen}\, x)$

(w) $f(x) = 2^x \cdot 3^x$

(x) $f(x) = \ln x \cdot \text{sen}\, x$

(y) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

(z) $f(x) = 4x^2 e^x$

2. Determine a derivada das funções a seguir.

(a) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x \ln x}$
(b) $f(x) = e^x(\sqrt{x} + \sec x)$
(c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$
(d) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$
(e) $f(x) = \ln(4x-2)$
(f) $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 7)^{10}$
(g) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(e^x))$
(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$
(i) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)^4$
(j) $f(x) = 8^{3x^2-1}$
(k) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
(l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
(m) $f(x) = e^{2x}\ln(x^2)$
(n) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$
(o) $f(x) = (\ln x + \sqrt{x})^3$
(p) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}$
(q) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+3x)$
(r) $f(x) = \cos(\ln(x^2))$
(s) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2-2)$
(t) $f(x) = 2^{(\ln(\cos x))}$
(u) $f(x) = x^x$
(v) $f(x) = \dfrac{1}{2}\log\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$
(w) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}$
(x) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x^3}{2}\right)$
(y) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$
(z) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

3. Verifique se a função $f(x) = 3x|x|$ é derivável no ponto $x = 0$.

4. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Encontre $f'(x)$ para $x \neq 0$ e mostre que $f(x)$ é não derivável em $x = 0$.

5. Mostre que se $f(x)$ é uma função par (ímpar) então $f'(x)$ é ímpar (par).

6. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^{a+1}}{x+a}$ em que a é uma constante real. Determine os valores de a para que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

7. Encontre a derivada da função $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)^3$ nos pontos 0, -2 e 2.

8. Sabendo que $f(2) = 1$, $f(8) = 5$, $f'(2) = 7$ e $f'(8) = -3$ encontre

(a) $g'(2)$, onde $g(x) = [f(x)]^2$.
(b) $h'(2)$, onde $h(x) = f(x^3)$.
(c) $q'(2)$, onde $q(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ sendo $h(x)$ e $g(x)$ como acima.

9. Seja $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Ache todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ tais que $f'(x) = 0$.

10. Determine a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa x_0 indicado.

(a) $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}, \quad x_0 = 1.$
(b) $y = x^{\operatorname{sen} x}, \quad x_0 = \pi/2.$
(c) $y = (3-x^2)^4\sqrt[3]{5x-4}, \quad x_0 = 1.$
(d) $y = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right), \quad x_0 = 0.$

11. Calcule as derivadas até 3^a ordem das funções $y = f(x)$ a seguir.

(a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

(b) $y = \dfrac{1}{x}$

(c) $y = \log(x+2)$

(d) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

(e) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

(f) $y = e^{2\cos x}$

12. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$. Calcule $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ supondo que $f'(1) = 2$.

13. Determine os pontos em que a função a seguir é derivável e calcule a derivada nesses pontos.

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & \text{se } x \leq -2, \\ x^2 - 3 & \text{se } -2 \leq x \leq -1, \\ 0 & \text{se } -1 < x < 0, \\ x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ \cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right) & \text{se } 1 < x \leq 2, \\ 2x - 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

14. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f(x) = 2x + |x^2 - 2|$ é derivável. Determine a derivada nesses pontos.

15. É possível determinar $a, b \in \mathbb{R}$ de forma a ter a função a seguir derivável em $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{1}{x} & \text{se } x \leq -1, \\ x^2 + bx & \text{se } -1 < x \leq 1, \\ \log(x^2) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

16. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a função a seguir seja derivável em todo seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{se } x \leq 0, \\ ax^2 + b & \text{se } 0 < x \leq c, \\ \ln x & \text{se } c < x. \end{cases}$$

17. Calcular $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que a função seja derivável em todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{se } x < -\pi; \\ \cos x, & \text{se } -\pi \leq x \leq \pi; \\ cx^2 + dx, & \text{se } x > \pi. \end{cases}$$

Exercícios de provas anteriores

18. (2017-1) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{bx} & \text{se } x < a \\ x - a + 1 & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

O valor de $a + b$ para que f seja derivável em $\mathbb{R}$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) -1 e) -2

19. (2017-1) Sobre a função $f(x) = e^{\cos x} + x$, podemos afirmar que:

a) $f'(0) < f''(0) < f(0)$
b) $f(0) < f''(0) < f'(0)$
c) $f'(0) < f(0) < f''(0)$
d) $f''(0) < f(0) < f'(0)$
e) $f''(0) < f'(0) < f(0)$

20. (2014-2) A derivada da função $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 1}{x - 1}$ em $x = 2$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 7 e) 11

21. (2014-2) Considere a função $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{se } x \in (0, \pi/2) \\ ax + b, & \text{se } x \in (-\pi/2, 0], \end{cases}$$

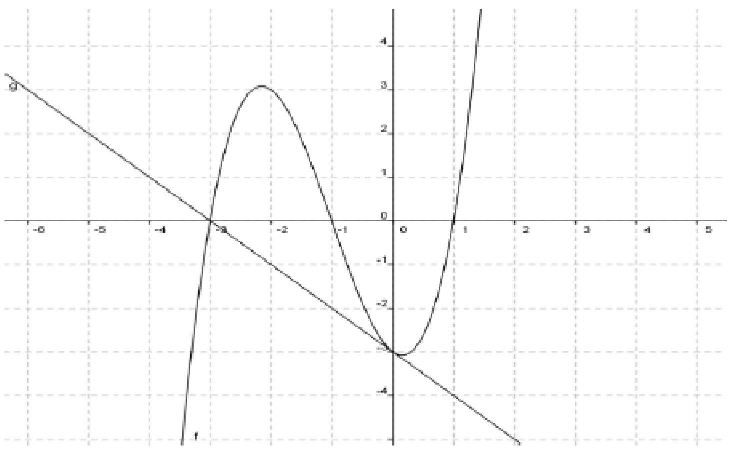
sendo a e b constantes reais. Podemos afirmar que o valor da soma $a+b$ para que a função f seja derivável em $x = 0$ é:

a) - 2 b) - 1 c) 0 d) 1 e) 2

22. (2015-2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^2 + bx$, sendo a e b constantes reais. Sabendo que a tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(1, 5)$ tem inclinação $m = 8$, podemos afirmar que o produto ab é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

23. (2015-1) Na figura abaixo estão representados parte dos gráficos de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da reta tangente g à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 0.



A equação da reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto de abscissa 0 é:

a) $x + y + 3 = 0$
b) $x - y + 3 = 0$
c) $x - y - 3 = 0$
d) $x + y - 3 = 0$
e) $x + 3y + 3 = 0$

24. (2016-2) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente por $(1 + \cos(x^2y^2))^2 + x + y = 5$, no ponto de ordenada $y = 0$, é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1/2 d) 1 e) 2

25. (2016-2) A derivada da função $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2+1)$ em $x=1$ é igual a:

a) 1 b) 0 c) -1/2 d) 1/10 e) 2/5

26. (2016-2) Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$

É **CORRETO** afirmar que:

a) $f'_+(0) = f'_-(0) = 0.$ c) $f'_+(0) = f'_-(0) = 1.$ e) $f'_+(0) = 0$ e $f'_-(0) = -1.$
b) $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1.$ d) $f'_+(0) = 0$ e $f'_-(0) = 1.$

27. (2017-1) Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^{(x-1)} & \text{se} \quad x \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$

Se $f'_-(1) = a$ e $f'_+(1) = b$ podemos afirmar que:

a) $a > b$ b) $ab > 1$ c) $|a| = |b|$ d) $a.b^{-1} < 0$ e) $2a = b$

28. (2017-1) A derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(2x))$ em $x = 1/2$ é:

a) 1 b) 2 c) 1/4 d) -1 e) 1/2

29. (2017-1) Seja a uma constante real positiva e seja f uma função derivável em $x = a$. O limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ é igual a:

a) $2\sqrt{a}f'(a)$ b) $\sqrt{a}f'(a)$ c) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}f'(a)$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}f'(a)$ e) $\dfrac{\sqrt{a}}{2}f'(a)$

30. (2016-1) A derivada da função $f(x) = \ln(x^2+1)$ em $x = 1$ é igual a:

a) 1 b) 0 c) 1/2 d) $\ln 2$ e) 2

31. (2015-2) A derivada segunda da função $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg}(3x)$ em $x = 0$ é:

a) 6 b) 3 c) 0 d) -3 e) -6

32. (2010-1) A inclinação da tangente à curva definida pela equação $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$ no ponto $(2, 0)$ é:

a) $-2/5$ b) $2/5$ c) $-4/5$ d) $4/5$ e) 0

33. (2010-1) A derivada segunda da função $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$ é:

a) $\dfrac{1}{1+e^x}$ b) $\dfrac{-1}{1+e^x}$ c) $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ d) $\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ e) 0

34. (2010-1) Sejam $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. A derivada da função composta $(f \circ g)(x)$ é:

a) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x+1}$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x+1}$ c) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x+1}$ d) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+1}$ e) $\dfrac{\cos x}{\cos^2 x+1}$

35. (2013-1) A equação da reta tangente à curva $y=\dfrac{\ln x}{e^x}$ no ponto de abscissa 1 é dada por:

a) $y=-\dfrac{1}{e}(x-1)$ b) $y=\dfrac{1}{e}(x+1)$ c) $y=e(x-1)$ d) $y=-e(x-1)$ e) $y=\dfrac{1}{e}(x-1)$

36. (2013-2) A soma das constantes a e b para que o gráfico da função $f(x)=a+b\operatorname{sen}^2(x/2)$ e a curva definida implicitamente pela equação $y\cos x+xy=5\pi x$ tenham a mesma reta tangente no ponto $(\pi/2,5\pi)$ é:

a) $10+5\pi$ b) $10-5\pi$ c) $5\pi-10$ d) 20 e) 5π

37. (2013-2) Sabendo que f é uma função derivável com $f(0)=0$ e que

$$g(x)=2(x-1)^2+(f(x)+1)^2$$

é a função constante igual a 5, então $f'(0)$ é igual a:

a) - 2 b) 2 c) - 1 d) 1 e) 0

38. (2013-2) A derivada de $f(x)=\operatorname{arctg}(g(g(x)))$ em $x=-1$, sabendo que $g(-1)=-1$ e $g'(-1)=4$, é:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

3.15 Respostas dos Exercícios

1.

(a) $-1/(x+1)^2$
(b) $(x^{5/2}+6x^5-4)/(2x^3)$
(c) $240x^{19}+56x^3+13$
(d) $-\frac{3}{4x^{7/4}}$
(e) $(35x^{5/2})/2$
(f) $(5(2/3)^{2/3})/x^{2/3}$
(g) $(1-x^2)/(x^2+1)^2$
(h) $(11x^5+9x^4+9x+2)/(2\sqrt{x})$
(i) $(x^2-2x-2)/(x-1)^2$
(j) $(-5x^3-3x^2+1)/(2\sqrt{x}(x^3+x^2+1)^2)$
(k) $(5x-1)/(6(x-1)^{2/3}\sqrt{x+1})$
(l) $200x(x^2-1)^{99}$
(m) $1/2(\sqrt{x-3})$
(n) $x(2-1/\sqrt{x^2-3})$
(o) $(2x+1)/(2\sqrt{x^2+x+1})$
(p) $(3x^2+2x+1)/(3(x^3+x^2+x+1)^{2/3})$
(q) $10(3x^2+1/(2\sqrt{x+1}))(x^3+\sqrt{x+1})^9$
(r) $2^{x^2+2}x\ln 2$
(s) $\log e\,(5x+4)/(x^2+x)$
(t) $(2e^{x^2}(x^2\ln(x^2)+1))/x$
(u) $2^{\operatorname{sen} x}\cos x\ln 2$
(v) $\operatorname{cotg} x$
(w) $6^x\ln 6$
(x) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}+\ln x\,\cos x$
(y) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
(z) $4e^x x(x+2)$

2. (a) $\dfrac{x-2\ln x-2}{x^2\ln^2 x}$
(b) $e^x(\sqrt{x}+\sec x)+e^x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\operatorname{tg} x\,\sec x\right)$
(c) $\dfrac{x^2-2x^2\ln x+1}{(x(x^2+1)^2}$
(d) $-\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
(e) $\dfrac{2}{2x-1}$
(f) $20x(2x^2-3)(x^4-3x^2+7)^9$
(g) $-e^x\operatorname{sen}(e^x)\cos(\cos(e^x))$
(h) $-(2x+1)/(3(x^2+x+1)^{4/3})$
(i) $-\dfrac{4(x+1)^3(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^5}$
(j) $8^{3x^2-1}(6x)\ln 8=3\cdot 2^{9x^2-2}x\ln 8$

(k) $\dfrac{2}{x^2-1}$

(l) $-\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)/(x+1)}(x+1)^2}$

(m) $\dfrac{2e^{2x}(x\ln(x^2)+1)}{x}$

(n) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

(o) $\dfrac{3(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+\ln x)^2}{2x}$

(p) $\dfrac{e^{-x}(1-x\ln x)}{x}$

(q) $(2x+3)\cos(x(x+3))$

(r) $-\dfrac{2\text{sen}\,(\ln(x^2))}{x}$

(s) $2x\sec^2(x^2-2)$

(t) $-\ln(2)\text{tg}\,(x)2^{\ln(\cos x)}$

(u) $x^x(\ln x+1)$

(v) $\frac{\log e}{2}\text{cossec}\,x$

(w) $-\dfrac{(1+\cos^2 x)}{2\text{sen}^3 x}$

(x) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{4-x^6}}$

(y) $\text{sen}^{\,cos(x)}(\cos x\,\text{cotg}\,x-\text{sen}\,x\,\ln(\text{sen}\,x))$

(z) $\dfrac{2\text{sen}\,x}{(\cos x+1)^2}$

3. Sim.

4. $f'(x)=\text{sen}\,(1/x)-\dfrac{\cos(1/x)}{x}$ se $x\neq 0$.

5. $f(x)=f(-x)\Rightarrow f'(x)=-f'(-x)$ e $-f(x)=f(-x)\Rightarrow -f'(x)=-f'(-x)$

6. $a=-1\pm\sqrt{2}$

7. $f'(0)=12,\ f'(2)=64/27,\ f'(-2)=48$

8. (a) 14 (b) -36 (c) 106/25

9. $\pi/4$, $3\pi/4$ e $5\pi/4$.

10. (a) $y=e/2$ (b) $y=x$ (c) $3y=-112x+160$ (d) $y=x$

11. (a) $f'(x)=6x-2,\ f''(x)=6,\ f'''(x)=0$
(b) $f'(x)=-1/x^2,\ f''(x)=2/x^3,\ f'''(x)=-6/x^4$
(c) $f'(x)=(\log e)/(x+2),\ f''(x)=-(\log e)/(x+2)^2,\ f'''(x)=(2\log e)/(x+2)^3$
(d) $f'(x)=4/(x+3)^2,\ f''(x)=-8/(x+3)^3,\ f'''(x)=24/(x+3)^4$
(e) $f'(x)=-(2(x^2+1))/(x^2-1)^2,\ f''(x)=(4x(x^2+3))/(x^2-1)^3,\ f'''(x)=-(12(x^4+6x^2+1))/(x^2-1)^4$
(f) $f'(x)=-2e^{2\cos x}\text{sen}\,x,\ f''(x)=-2e^{2\cos x}(\cos x+\cos(2x)-1)$
$f'''(x)=-8e^{2\cos x}\text{sen}^3 x+2e^{2\cos x}\text{sen}\,x+12e^{2\cos x}\text{sen}\,x\cos x$

12. 4

13. $$f'(x)=\begin{cases}2(x+3) & \text{se } x<-2,\\ 2x & \text{se } -2<x<-1,\\ 0 & \text{se } -1<x\leq 0,\\ 2x & \text{se } 0<x<1,\\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)(x-1)^{-2} & \text{se } 1<x<2,\\ 2 & \text{se } x>2.\end{cases}$$

14. $$f'(x)=\begin{cases}2x+2, & \text{se } x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)\\ -2x+2, & \text{se } x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\end{cases}$$

15. Não.

16. $a=\dfrac{1}{2e},b=0,c=e^{1/2}$

17. $a=\dfrac{1}{\pi^2},\ b=\dfrac{2}{\pi},\ c=\dfrac{1}{\pi^2}$ e $d=\dfrac{-2}{\pi}$

18. b)
19. e)
20. c)
21. d)
22. e)
23. c)
24. a)
25. e)
26. e)
27. a)
28. b)
29. a)
30. a)
31. a)
32. c)
33. d)
34. d)
35. e)
36. a)
37. b)
38. e)

Capítulo 4

Aplicações de Derivadas

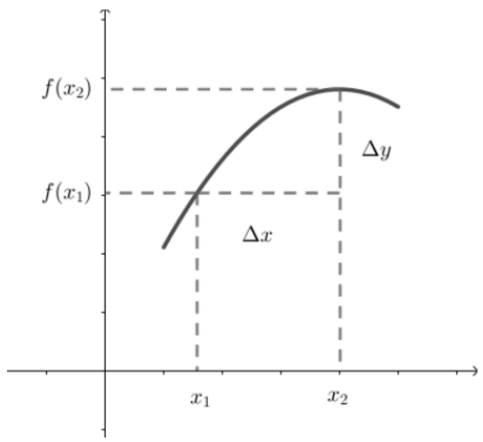
4.1 Acréscimos e Diferenciais

Seja $y = f(x)$ uma função. Em muitas aplicações a variável independente x está sujeita à pequenas variações e é necessário encontrar a correspondente mudança na variável dependente y. Se x varia de x_1 a x_2, o acréscimo em x é frequentemente denotado por Δx, ou seja,

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

O número Δx é também chamado um incremento de x. Note que $x_2 = x_1 + \Delta x$. Similarmente, Δy denota a mudança na variável dependente y, ou seja,

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1).$$



A notação de acréscimos pode ser usada na definição de derivada de uma função:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Assim, a derivada da função f, quando existir, é o limite da razão entre o acréscimo Δy da variável dependente y e o acréscimo Δx da variável independente x, quando Δx tende a zero. Geometricamente, isto nos diz que para Δx muito pequeno, o coeficiente angular $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ da reta secante determinada por $P(x, f(x))$ e $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ é muito próximo da inclinação da reta tangente em P. Podemos então escrever:

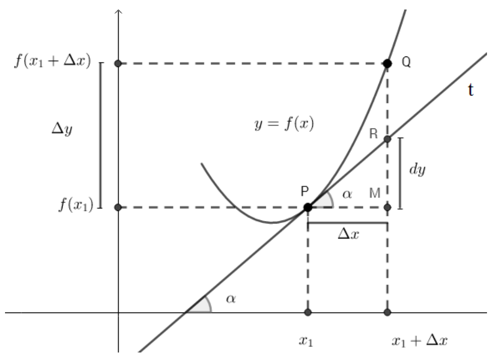
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{se} \quad \Delta x \approx 0.$$

Definição 4.1. Sejam $y = f(x)$ uma função diferenciável e Δx um acréscimo de x. Então,

(i) a diferencial dx da variável independente x é dada por $dx = \Delta x$,

(ii) a diferencial dy da variável dependente y é dada por $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$.

Faremos a seguir a interpretação geométrica de dy e dx. Para isso, consideremos a figura a seguir onde está representado o gráfico de uma função derivável $y = f(x)$.



A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P = (x_1, f(x_1))$ é

$$y = t(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

e, portanto, a imagem de $x_1 + \Delta x$ pela função t (cujo gráfico é a reta tangente a f em P) é

$$y_1 = t(x_1 + \Delta x) = f'(x_1)(x_1 + \Delta x - x_1) + f(x_1) = f'(x_1)\Delta x + f(x_1).$$

Então, segue da definição que

$$dy = f'(x_1)dx = f'(x_1)\Delta x = y_1 - f(x_1) = t(x_1 + \Delta x) - t(x_1) = \overline{RM},$$

ou seja, dy é a variação em y quando x varia de x_1 a $x_1 + \Delta x$ na reta tangente enquanto $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ é a variação real em y quando x varia de x_1 a $x_1 + \Delta x$. Observe que, quando Δx torna-se muito pequeno, o mesmo ocorre com a diferença $\Delta y - dy$. Donde concluímos que em problemas práticos, podemos considerar $dy \approx \Delta y$ ou

$$dy \approx f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy, \tag{4.1}$$

desde que o Δx considerado seja pequeno.

Observação 4.2. A equação (4.1) é chamada *aproximação linear* para $f(x+\Delta x)$ porque, como vimos anteriormente, podemos aproximar o valor de $f(x+\Delta x)$ usando o ponto $(x+\Delta x, f(x)+dy)$ da reta tangente no lugar de usar o ponto $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ do gráfico de f.

Exemplo 4.3. Se $y = 2x^2 - 6x + 5 = f(x)$, calcule o acréscimo Δy e a diferencial dy para $x = 3$ e $\Delta x = 0,01$.

Solução: Por defnição $\Delta y = f(3 + 0,01) - f(3)$. Então

$$\Delta y = 2(3 + 0,01)^2 - 6(3 + 0,01) + 5 - 5 = 18,1202 - 18,06 = 0,0602$$

e

$$dy = f'(3)\Delta x = [4(3) - 6]0,01 = 0,06$$

Exemplo 4.4. Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{65,5}$ usando diferenciais.

Solução: Observe que 64 é o número mais perto de 65, 5 que tem raiz cúbica exata. Então, tomando $\Delta x = 65,5 - 64 = 1,5$, podemos fazer uma aproximação linear para $f(64 + 1,5)$, usando $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Pela equação (4.1) temos que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{65,5} &= f(64+\Delta x) \approx f(64) + dy \\ &= f(64) + f'(64)\Delta x = \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}\Delta x = 4 + \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}1,5 = 4 + \frac{1}{48}1,5 = 4,03125.\end{aligned}$$

4.2 Derivada como taxa de variação instantânea

O limite usado para a definição de derivada de uma função num ponto surge em diversas aplicações; uma das mais familiares é a determinção da velocidade de um móvel. Suponha que um objeto se desloca ao longo de uma reta e que conhecemos sua posição $s = s(t)$ em função do tempo. O deslocamento do objeto no intervalo de t_1 a $t_1 + \Delta t$ é:

$$\Delta s = s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)$$

e sua velocidade média neste intervalo é:

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{s(t_1+\Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Para encontrar a velocidade do corpo no exato instante t_1, calculamos o limite da velocidade média no intervalo de t_1 a $t_1 + \Delta t$, com Δt tendendo a zero. Assim, a velocidade do objeto no instante t_1, denotada por $v(t_1)$, é por definição:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1+\Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} = s'(t_1).$$

Logo, a velocidade é a taxa de varição instantânea da função deslocamento. Estendemos essas definições para uma função qualquer $y = f(x)$.

Definição 4.5. Seja $y = f(x)$ uma função (lembramos aqui que, por simplicidade, estamos omitindo o domínio e o contradomínio da função f):

(i) A taxa de variação média de $y = f(x)$ por unidade de variação de x (quando x varia) no intervalo $[x_1, x_1 + \Delta x]$ é:

$$y_m = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

(ii) A taxa de variação instântanea de $y = f(x)$ por unidade de variação de x quando (instante) $x = x_1$ é:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1),$$

desde que o limite exista.

Exemplo 4.6. De um balão a 150m acima do solo, deixa-se cair um saco de areia. Desprezando-se a resitência do ar, a distância $s(t)$ do solo ao saco de areia em queda, após t segundos, é dada por

$$s(t) = -4,9t^2 + 150.$$

(a) Determine a velocidade média do saco de areia no intervalo de $t = 0$ a $t = 2$ segundos.

Solução:

$$v_m = \frac{s(2) - s(0)}{2} = \frac{(-4,9.2^2 + 150) - (4,9.0^2 + 150)}{2} = -9,8\,\text{m/s}.$$

(b) A velocidade do saco de areia quando $t = 2$.

Solução:

$$v(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{\Delta t} = s'(2) = (-9,8) \cdot 2 = -19,6\,\text{m/s}.$$

Exemplo 4.7. Uma cidade A é atingida por uma epidemia. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela doença depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por

$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}.$$

(a) Qual a taxa de expansão da epidemia no tempo $t = 4$?

Solução: Temos que

$$f'(t) = 64 - t^2$$

é a taxa de varição de f no instante t. Assim, a taxa de expansão (f' positiva) da epidemia no tempo $t = 4$ é $f'(4) = 64 - 16 = 48$ pessoas/dia.

(b) Qual a taxa de expansão da epidemia no tempo $t = 8$?

Solução: A taxa de expansão da epidemia no tempo $t = 8$ é $f'(8) = 64 - 64 = 0$ pessoas/dia.

(c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no $5^{\underline{o}}$ dia?

Solução: O número de pessoas atingidas pela epidemia no $5^{\underline{o}}$ dia é igual ao número de pessoas infectadas até o $5^{\underline{o}}$ dia menos o número de pessoas infectadas até o $4^{\underline{o}}$, ou seja,

$$f(5) - f(4) = (64 \times 5 - \frac{5^3}{3}) - (64 \times 4 - \frac{4^3}{3}) = 64 - \frac{125 - 64}{3} = 43,66666\cdots \approx 44$$

Observe que, como vimos anteriormente nos acréscimos e diferenciais,

$$\Delta f = f(5) - f(4) \approx f'(4)\Delta t = f'(4)(5 - 4) = f'(4) = 48,$$

ou seja, a taxa de variação no quarto dia é aproximadamente o número de pessoas infectadas no $5^{\underline{o}}$ dia.

4.3 Taxas Relacionadas

Em muitas situações consideramos duas variáveis x e y como funções de uma terceira variável t. Se x e y estão relacionadas por uma equação suas derivadas (ou taxas de variação) também estão e por isso são chamadas taxas relacionadas.

Exemplo 4.8. Um quadrado de lado l está se expandindo segundo a equação $l = 2+t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determinar a taxa de variação da área desse quadrado no tempo $t = 2$.

Solução: A área de um quadrado é dada, em função do lado l, por $A = l^2$. Como $l = l(t)$ varia com o tempo, a área A também varia e, usando a regra da cadeia,

$$\frac{dA}{dt} = 2l\frac{dl}{dt} \Rightarrow A'(t) = 2l(t)l'(t) \Rightarrow A'(2) = 2l(2).l'(2) \Rightarrow A'(2) = 2.(2 + 2^2).4 = 48.$$

Exemplo 4.9. O raio de uma circunferência cresce à razão de 21 cm/s. Qual a taxa de crescimento do comprimento da circunferência em relação ao tempo?

Solução: O comprimento de uma circunferência de raio r é dada $C = 2\pi r$. Como $r = r(t)$ varia com o tempo, C também varia e

$$\frac{dC}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}.$$

Mas, sendo $\frac{dr}{dt} = 21$ cm/s temos que

$$\frac{dC}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt} = 2\pi 21 = 42\pi \text{ cm/s}.$$

Exemplo 4.10. Um ponto $P = (x, y)$ se move ao longo do gráfico de $y = \frac{1}{x}$. Se a abscissa varia à razão de 4 unidades por segundo, qual é a taxa de variação da ordenada quando a abscissa é $x = 1/10$?

Solução: Se a relação entre as variáveis x e y é $y = \frac{1}{x}$ e $x = x(t)$ e $y = y(t)$, então

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(1/10)^2}.4 = -400 \text{ u/s}.$$

Exemplo 4.11. (Questão da 2ª prova de 2017/1) Uma partícula desloca-se ao longo do gráfico de $y = \text{tg}x$, restrito ao intervalo $(0, \pi/2)$, de modo que sua coordenada y (medida em metros) aumenta a uma taxa constante de 10 m/s. A que taxa (em m/s) a coordenada x do ponto varia, quando $y = \sqrt{3}$?

1ª **Solução:** A relação entre as coordenadas x e y da partícula é $y = \text{tg}\, x$ sendo que x e y variam com o tempo. Então

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 10 = \sec^2 x\frac{dx}{dt}.$$

Assim, para determinarmos $\frac{dx}{dt}$ quando $y = \sqrt{3}$ m, devemos achar o valor de $\sec^2 x$ quando $\sqrt{3} = \text{tg}\, x$. Usando a relação $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$ teremos que $\sec^2 x = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$. Logo,

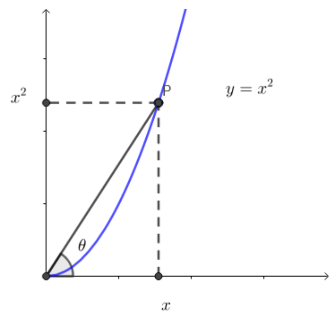
$$10 = 4\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{5}{2} \text{ m/ s}.$$

2ª **Solução:** Podemos usar também que se $y = \text{tg}\, x$, então $x = \text{arctg}\, y$. Usando a regra da cadeia para derivar a última equação, já que x e y são funções de t, temos

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{1+(\sqrt{3})^2}\right)10 = \frac{5}{2} \text{ m/ s}.$$

Exemplo 4.12. (Questão da 2ª prova de 2016/1) Uma partícula desloca-se ao longo da parábola $y = x^2$, no primeiro quadrante, de modo que sua coordenada x (medida em metros) aumenta a uma taxa constante de 10 m/s. A que taxa o ângulo de inclinação θ da reta que liga a partícula à origem varia, quando $x = 3$?

Solução:



Podemos ver na figura acima que a relação entre as coordenadas x e y da partícula e o ângulo θ é

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} = x.$$

Sabendo que x (e y) varia com o tempo e usando a regra da cadeia temos

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = 10.$$

Para determinarmos $\dfrac{d\theta}{dt}$ quando $x = 3$ m, devemos achar o valor de $\sec^2\theta$ quando o ponto tiver coordenadas $(3, 3^2)$. Nesse ponto, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{9}{3} = 3$. Novamente, usamos a relação $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ e temos que $\sec^2\theta = 1 + (3)^2 = 10$ o que implica

$$10 = 10\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 1\,\text{rad/s}.$$

Exemplo 4.13. (Questão da 3ª prova de 2014/2) Seja L o comprimento da diagonal de um retângulo, cujos lados medem x e y, e suponha que x e y variam com o tempo. Se x aumenta a uma taxa constante de $0,5$ cm/s e y está decrescendo a uma taxa de $0,25$ cm/s, com que rapidez a diagonal está variando quando $x = 3$ cm e $y = 4$ cm?

a) Crescendo a uma taxa de $0,5$ cm/s.

b) Decrescendo a uma taxa de $0,5$ cm/s.

c) Crescendo a uma taxa de $0,1$ cm/s.

d) Decrescendo a uma taxa de $0,1$ cm/s.

e) Crescendo a uma taxa de $0,25$ cm/s.

Solução: A relação entre a diagonal L do retângulo e os lados x e y é $L^2 = x^2 + y^2$ onde x e y variam com o tempo. Então, pela regra da cadeia,

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow L\frac{dL}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

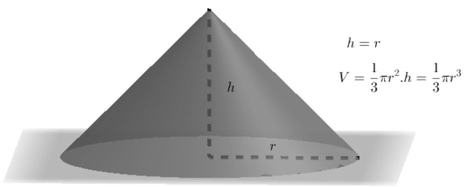
Assim, para determinarmos $\dfrac{dL}{dt}$ no instante em que $x = 3$ cm e $y = 4$ cm, devemos achar o valor de L nesse instante.
Como $L^2 = x^2 + y^2$, temos que $L = 5$ quando $x = 3$ e $y = 4$. Logo,

$$5\frac{dL}{dt} = 3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} \Rightarrow 5\frac{dL}{dt} = 3(0,5) + 4(-0,25) = 1,5 - 1 = 0,5 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0,1\,\text{cm/s},$$

ou seja, L está crescendo a uma taxa de $0,1$ cm/s.

Exemplo 4.14. Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume de areia cresce a uma taxa de 10 m^3/h, a que razão (taxa) aumenta o raio da base quando a altura do monte é de 4 m?

Solução:



Se o volume do cone é $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ e $h = r$, então $V = \dfrac{1}{3}\pi r^3$ e

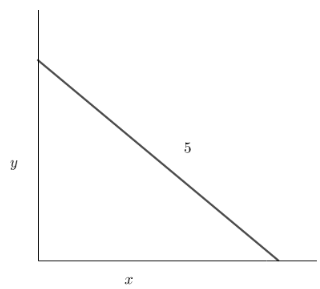
$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Se $\dfrac{dV}{dt} = 10$ m^3/h, no instante em que $r = 4$ temos

$$10 = \pi 4^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{5}{8\pi}\ \text{m/h}.$$

Exemplo 4.15. Uma escada de 5m está apoiada a uma parede vertical. Num dado instante, o pé da escada está a 3m da base da parede da qual se afasta à razão de 1m/s. Com que velocidade se move o topo da escada ao longo da parede neste instante?

Solução:



As distâncias do pé e do topo da escada à base da parede, nu m instante t, são representadas na figura acima por x e y, respectivamente. Então, $25 = x^2 + y^2$ e x e y variam com o tempo. No instante em que $x = 3$, temos $\dfrac{dx}{dt} = 1$ m/s. Como as taxas de variação de x e y estão relacionadas pela equação

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt},$$

temos que quando $x = 3$, $y = \sqrt{25 - 3^2} = 4$ e

$$0 = 3(1) + 4\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4} = -0,75\,\text{m/s}.$$

Observe que $\dfrac{dy}{dt} = -0,75$ m/s significa que y está decrescendo à razão de $0,75$ m/s no instante em que $x = 3$.

4.4 Limites indeterminados e as Regras de L'Hospital

Nessa seção, vamos ver como derivadas podem ser úteis no cálculo de alguns limites indeterminados. Vamos começar com limites tipo $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\dfrac{0}{0}$.

Regras de L'Hospital. Sejam f, g funções deriváveis num intervalo aberto I contendo a (exceto possivelmente no próprio ponto a), com $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I. Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Se $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é $\pm\infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação 4.16. A Regra de L'Hospital vale ainda trocando $x \to a$ por $x \to a^-$, $x \to a^+$ e $x \to \pm\infty$, sendo, nesse último caso, necessário trocar a hipótese f, g funções deriváveis em I por f, g funções deriváveis em todo x suficientemente grande.

Note que a Regra de L'Hospital fornece uma ferramenta poderosa para calcular alguns limites, mas é importante sempre verificar *se as hipóteses do teorema são satisfeitas*, e não querer usá-la para calcular qualquer limite. Vamos ver exemplos.

Exemplo 4.17. O limite fundamental trigonométrico $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ pode ser obtido rapidamente usando a Regra de L'Hospital, já que é um limite do tipo $0/0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Exemplo 4.18. O limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$ é do tipo $0/0$. Podemos então aplicar a Regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} \underset{\substack{\uparrow \\ e^0 = 1}}{=} 2.$$

Exemplo 4.19. O limite $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ é do tipo $0/0$. Podemos então aplicar a Regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 + x - 6)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \lim_{x\to 2} \frac{2x + 1}{2x - 3} = \frac{2\cdot 2 + 1}{2\cdot 2 - 3} = 5.$$

Exemplo 4.20. O limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$ é do tipo $0/0$. Podemos então aplicar a Regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} \underset{\substack{\uparrow \\ e^0 = 1 \text{ e } \cos 0 = 1}}{=} 1.$$

Exemplo 4.21. O limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ é do tipo ∞/∞. Podemos então aplicar a Regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Às vezes, é necessário usar a Regra de L'Hospital mais de uma vez no cálculo do mesmo limite.

Exemplo 4.22. O limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$ é do tipo $0/0$. Podemos então aplicar a Regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^x + e^{-x} - 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)'}{(e^x + e^{-x} - 2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Continuamos com } 0/0. \text{ Regra de L'Hospital novamente.}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(e^x - e^{-x})'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{e^x + e^{-x}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Exemplo 4.23. O limite $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^3 + 4x}$ é do tipo ∞/∞. Podemos então aplicar a Regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^3 + 4x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x^3 + 4x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 4}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Continuamos com } \infty/\infty. \text{ Regra de L'Hospital novamente.}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(3x^2 + 4)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Continuamos com } \infty/\infty. \text{ Regra de L'Hospital novamente.}}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty.$$

Outros tipos de indeterminações, $\infty.0$, 1^∞, ∞^0, podem ser resolvidas usando a Regra de L'Hospital, porém é necessário "reescrever" os limites com atenção às hipóteses da regra.

Exemplo 4.24. O limite $\lim\limits_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(1/x)$ é do tipo $\infty \cdot 0$, porém, podemos reescrevê-lo como

$$\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(1/x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x}$$

Esse novo limite é do tipo $0/0$, donde podemos aplicar a Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\operatorname{sen}(1/x))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(1/x)(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \cos(1/x) = 1.$$

Exemplo 4.25. O limite $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x^2+x} + \dfrac{1}{\cos x - 1}\right)$ é do tipo $\infty-\infty$, mas podemos reescrevê-lo como

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{\cos x - 1}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{\cos x - 1 + (x^2+x)}{(x^2+x)(\cos x - 1)}$$

que é um limite do tipo $0/0$. Então, podemos usar a Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cos x - 1 + (x^2+x)}{(x^2+x)(\cos x - 1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{(\cos x - 1 + x^2 + x)'}{((x^2+x)(\cos x - 1))'}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-\operatorname{sen} x + 2x + 1}{(2x+1)(\cos x - 1) - (x^2+x)\operatorname{sen} x} = -\infty.$$

Exemplo 4.26. O limite $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x$ é do tipo $\infty-\infty$, no entanto, usando a definição das funções $\operatorname{cossec} x$ e $\operatorname{cotg} x$, podemos reescrevê-lo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} \operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x &= \lim_{x\to0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to0} \operatorname{tg} x = 0.\end{aligned}$$

Indeterminações do tipo $1^{+\infty}$ e ∞^0 também podem ser calculadas usando L'Hospital.

Exemplo 4.27. Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$, notemos que

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^x} = e^{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}.$$

Como a função exponencial é contínua, temos então que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}.$$

Assim, para calcular o limite desejado, podemos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ e, em seguida, usar a função exponencial. Veja que esse limite é do tipo $+\infty\cdot 0$, mas pode ser reescrito como

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1/x}$$

que é do tipo $0/0$. Podemos então usar L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{1/x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)'}{(1/x)'} \underset{\substack{\uparrow \\ \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln x - \ln(x-1)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1.$$

Concluimos então que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} = e^1 = e.$$

Exemplo 4.28. Vamos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$. Começamos, como no exemplo anterior:

$$x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = e^{\ln x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}} = e^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}\cdot \ln x}.$$

Assim, usando a continuidade da exponencial, devemos calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 2}{1+\ln x}\cdot\ln x = \ln 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+\ln x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \ln 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(1+\ln x)'} = \ln 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/x} = \ln 2.$$

Por fim, lembramos que devemos usar a exponencial, donde a solução é

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = e^{\ln 2} = 2.$$

Exemplo 4.29. (2017-1) O limite $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ do tipo $+\infty^0$ e pode ser resolvido de forma semelhante:

$$(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left((e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{(1/x)\,\ln(e^x+x)} = e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}}.$$

Usando a continuidade da exponencial, temos

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)}.$$

Dessa forma, devemos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$. Esse limite é do tipo ∞/∞, donde podemos usar a Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(e^x+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)'}{(e^x+x)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de L'Hospital}}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Portanto

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)} = e^1 = e.$$

4.5 Crescimento e Decrescimento

Na seção 1.3, vimos a noção de crescimento e descrescimento de funções (definição 1.20). Vimos ainda que se a regra que ajuda a definir f não é tão simples como no exemplo 1.21, o trabalho de encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento pode ser complicado. Mas, se f é derivável então o seguinte teorema nos ajuda muito.

Teorema 4.30. *Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b).*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.*
3. *Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é constante em $[a, b]$.*

A prova deste teorema será dada mais à frente. Por enquanto, vamos usá-lo em alguns exemplos.

Exemplo 4.31. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 12$ função polinomial, portanto, contínua. Vamos encontrar os intervalos onde f é crescente ou decrescente. Para isso consideraremos o sinal de sua derivada $f'(x) = x^2 - 9$ que é descrito na tabela abaixo.

		-3		3	
$x^2 - 9$	$+++$	-3	$---$	3	$+++$

Como $f'(x) > 0$ nos intervalos $(-\infty, -3)$ e $(3, +\infty)$, temos, pelo teorema 4.30, que f é crescente nos intervalos $(\infty, -3]$ e $[3, +\infty)$. Como $f'(x) < 0$ no intervalo $(-3, 3)$, temos, pelo teorema 4.30, que f é decrescente no intervalo $[-3, 3]$. Veja Figura 4.1.

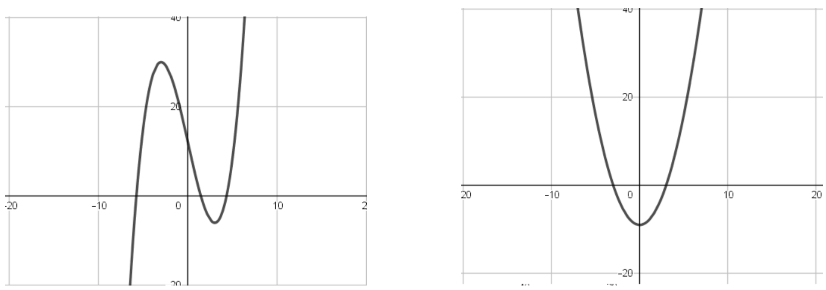


Figura 4.1: À esquerda, o gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 12$ e à direita, o gráfico da derivada $f'(x) = x^2 - 9$.

Exemplo 4.32. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x \leq -1 \\ x^3, & -1 < x \leq 1 \\ -x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

É fácil verificar que f é contínua. No intervalo $(-\infty, -1]$, f é constante, $f(x) = -1$. No intervalo aberto $(-1, 1)$, $f(x) = x^3$ é derivável com derivada $f'(x) = 3x^2$. Observe que $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ e $f'(0) = 0$. Segue que f é crescente nos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Ou seja, f é crescente em $[-1, 1]$. Finalmente, no intervalo $(1, +\infty)$ temos $f(x) = -x + 2$ com $f'(x) = -1$. Logo, f é decrescente em $[1, +\infty)$.

Exemplo 4.33. Vamos demonstrar que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função exponencial $f(x) = a^x$ então f é crescente em toda reta se $a > 1$ e decrescente em toda reta se $a < 1$. Vejamos, a derivada de f é $f'(x) = a^x \ln a$. Recordando que $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tratemos os dois casos possíveis.

- Se $0 < a < 1$ então $\ln a < 0$. Logo, $f'(x) = a^x \ln a < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Donde, pelo teorema 4.30, f é decrescente em toda reta $\mathbb{R}$.

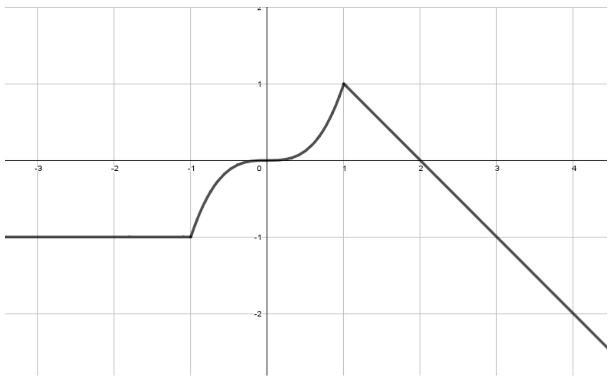


Figura 4.2: Gráfico da função do Exemplo 4.32

- Se $a > 1$ então $\ln a > 0$. Logo, $f'(x) = a^x \ln a > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Donde, pelo teorema 4.30, f é crescente em toda reta $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.34. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(3 - x^2)$. Sua derivada é $f'(x) = e^x(-x^2 - 2x + 3)$. Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de f' depende apenas da expressão $-x^2 - 2x + 3$ cujo estudo do sinal é ilustrado na tabela abaixo.

		-3		1	
$-x^2 - 2x + 3$	$- - -$	-3	$+ + +$	1	$- - -$

Vemos que $f'(x) < 0$ nos intervalos $(-\infty, -3)$ e $(1, +\infty)$. Assim, $f(x)$ é decrescente nos intervalos $(-\infty, -3]$ e $[1, +\infty)$. Vemos também que $f'(x) > 0$ no intervalo $(-3, 1)$. Assim, $f(x)$ é crescente no intervalo $[-3, 1]$.

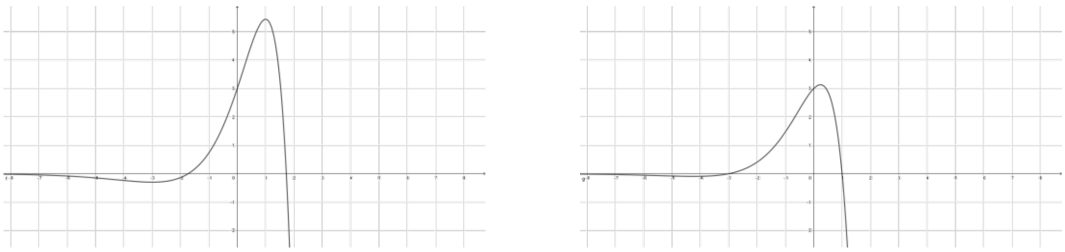


Figura 4.3: À esquerda, o gráfico de $f(x) = e^x(3 - x^2)$ e à direita, o gráfico da derivada $f'(x)$.

Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio

Veremos agora os resultados que nos levam ao importante Teorema 4.30 que acabamos de usar.

Teorema 4.35 (**Teorema de Rolle**). *Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = k$ então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Tratemos dois casos. Se f é constante em $[a, b]$, isto é $f(x) = k$, para todo $x \in (a, b)$, temos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Assim, claramente existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Agora, suponhamos que f não seja constante. Como f é contínua em $[a, b]$, segue pelo Teorema 4.53 (mais à frente), que f atinge seu valor máximo M e seu valor mínimo m em pontos de $[a, b]$. Se ambos valores fossem atingidos nos extremos do intervalo, então, como $f(a) = f(b)$, teríamos $M = m$ e, assim, f seria constante. Logo, f atingirá seu máximo ou seu mínimo em um ponto $c \in (a, b)$. Como f é derivável em (a, b), pelo teorema 4.37 à frente, concluímos que $f'(c) = 0$. $\square$

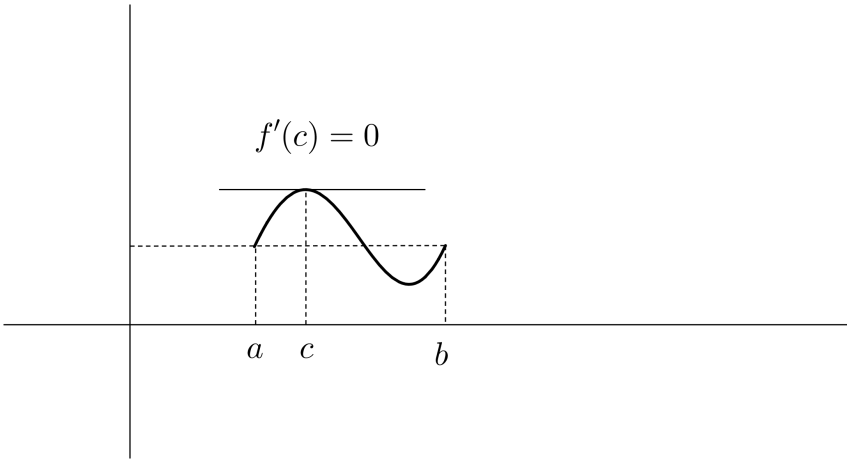


Figura 4.4: Teorema de Rolle.

Uma generalização do teorema acima é o seguinte teorema.

Teorema 4.36 (Teorema do Valor Médio). *Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Demonstração. A reta secante passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é o gráfico da função

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Comparando esta reta com o gráfico de $f(x)$ vemos que para cada $x \in [a, b]$ temos

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

Como $f(x)$ é derivável em (a, b), $h(x)$ também o é. Note também que $h(a) = h(b) = 0$. Portanto, a função h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, donde existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Mas,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad 0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou seja, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

□

Vamos dar a prova do Teorema 4.30 usando o Teorema do Valor Médio.

Prova do Teorema 4.30: Consideremos uma função f definida em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Vamos mostrar que se $f'(x) > 0$ para todo ponto $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$ para quaisquer $x_1 < x_2$ em $[a, b]$. Consideremos então dois pontos quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Observe que as hipóteses do teorema do valor médio valem para f restrita ao intervalo $[x_1, x_2]$. Assim, existirá um $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ou, de forma equivalente,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora, como supomos $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ temos $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$ temos $x_2 - x_1 > 0$. Assim, temos $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Logo $f(x_1) < f(x_2)$.

Argumentando da mesma forma, você pode demonstrar os dois outros itens do teorema. Faça este exercício!

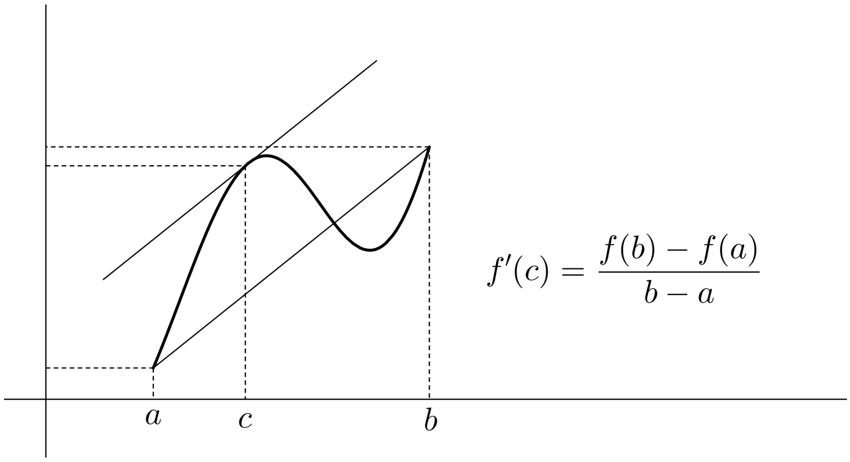


Figura 4.5: Teorema do Valor Médio.

4.6 Encontrando os extremos de uma função

Vamos ver alguns fatos que nos ajudam a localizar os extremos de uma função. O primeiro é o seguinte teorema.

Teorema 4.37. *Se f é uma função derivável em (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ é um ponto de máximo ou mínimo local então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Vamos fazer a prova para o caso em que x_0 é um ponto de mínimo local para uma função derivável f (a prova, supondo x_0 um ponto de máximo local é análoga). Consideremos as derivadas laterais

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad e \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como x_0 é um mínimo local, temos que $f(x) \geq f(x_0)$ ou, equivalentemente, $f(x) - f(x_0) \geq 0$ para pontos x suficientemente próximos de x_0. Assim, se $x > x_0$ é próximo o suficiente de x_0 temos $x - x_0 > 0$ e $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Donde, $f'_+(x_0) \geq 0$. Por outro lado, se $x < x_0$ é próximo o suficiente de x_0 então $x - x_0 < 0$ e $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Logo, $f'_-(x_0) \leq 0$. Agora, como $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, devemos ter $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$. Assim, $f'(x_0) = 0$. □

Portanto, quando buscamos os extremos de uma função **em um intervalo aberto onde a função é derivável**, devemos procurar por pontos onde a derivada se anula. No entanto, pontos de máximo ou mínimo local podem ocorrer em pontos onde f não é derivável ou ainda em pontos que não estejam em intervalos abertos onde f seja derivável (extremidades de intervalos, por exemplo). Vejamos alguns destes casos:

Exemplo 4.38. A função por partes estudada no exemplo 4.32 possui um máximo global no ponto $x = 1$ e mínimo local em $x = -1$, pontos onde não é derivável.

Exemplo 4.39. A função $f(x) = |x|$ possui um mínimo global em $x = 0$ onde não é derivável.

Exemplo 4.40. A função $g : [1, 4] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ possui um mínimo global em $x = 1$ e máximo global em $x = 4$ onde é derivável, mas a derivada não se anula (perceba que não existem intervalos abertos onde g é derivável contendo esses pontos, que são extremidades do domínio).

Em resumo, os candidatos a máximos/mínimos locais de uma função podem ser os seguintes pontos (do domínio da função):

(a) Pontos onde a derivada se anula e que estejam em intervalos abertos onde a função é derivável.

(b) Pontos onde a função não é derivável.

(c) Extremidades do domínio (por exemplo: se o domínio é um intervalo $(a, b]$, a extremidade b - pertencente ao domínio - pode ser máx/mín local sem se enquadrar nos dois casos anteriores).

Os pontos onde a derivada se anula ou onde ela não existe (casos (a) ou (b) acima) recebem um nome especial.

Definição 4.41. Dizemos que um ponto x_0 no domínio de f é um **ponto crítico** de f se $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.

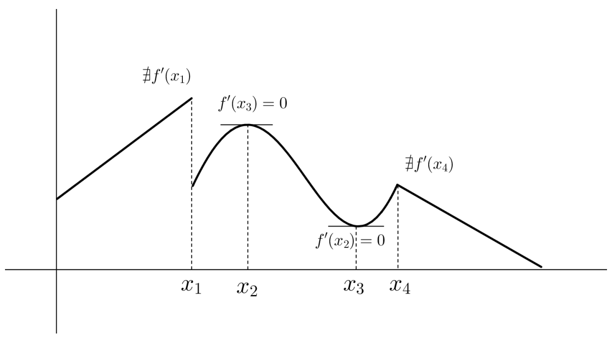


Figura 4.6: Pontos críticos.

É importante observar que nem todo ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 4.42. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ tem derivada $f'(x) = 3x^2$ e um único ponto crítico: $x = 0$. No entanto, $x = 0$ não é ponto de máximo ou mínimo de f. Para mostrar isso, observemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (0 + \infty)$. Isso implica que f é crescente em $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$. Logo, para todo $x_1 < 0$ temos $f(x_1) < f(0)$. Assim, $x = 0$ não pode ser um ponto de mínimo. Por outro lado se $x_2 > 0$ então $f(0) < f(x_2)$. Donde, $x = 0$ não pode ser um ponto de máximo.

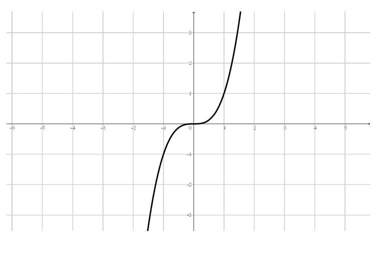


Figura 4.7: Gráfico de $f(x) = x^3$.

Exemplo 4.43. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

Esta função tem um único ponto crítico $x = 1$ que corresponde ao único ponto onde f não é derivável. Novamente, apesar de ser um ponto crítico, $x = 1$ não é ponto de máximo ou mínimo para f. Como no exemplo anterior, para mostrar isso basta ver que f é uma função crescente. Verifique este fato!

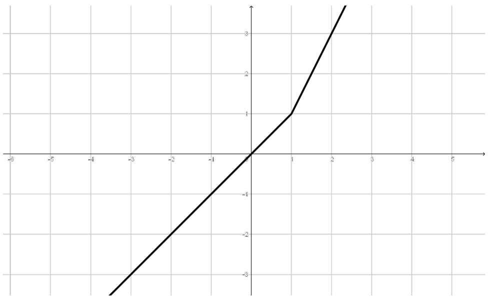


Figura 4.8: Gráfico da função do Exemplo 4.43.

Classificando pontos críticos

Os pontos críticos de uma função f são candidatos para seus extremos locais ou globais. Para decidir se um ponto crítico é um mínimo, um máximo ou nenhum dos dois, precisaremos de algumas ferramentas que serão estudadas a seguir.

Teorema 4.44 (Teste da Derivada Primeira). *Seja $f(x)$ uma função contínua com um ponto crítico x_0. Suponha que f seja derivável em um intervalo (a, x_0), à esquerda de x_0, e em um intervalo (x_0, b), à direita de x_0.*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, x_0)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, b)$, então f possui um máximo local em x_0.*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, x_0)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, b)$, então f possui um mínimo local em x_0.*
3. *Se $f'(x)$ possui o mesmo sinal em (a, x_0) e (x_0, b), então f não possui extremo local em x_0.*

Demonstração. Provemos o item 1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, x_0)$ temos, pelo Teorema 4.30, que f é crescente no intervalo $(a, x_0]$, ou seja, $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (a, x_0]$. Agora, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (x_0, b)$ então, novamente pelo Teorema 4.30, f é decrescente no intervalo $[x_0, b)$, logo $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in [x_0, b)$. Assim, $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (a, b) = (a, x_0] \cup [x_0, b)$ e x_0 é um ponto de máximo local para f. A prova dos itens 2 e 3 é deixada como exercício. $\square$

Exemplo 4.45. Considere a função $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$. Vamos usar o teorema acima para encontrar os extremos locais de f. Temos

$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x)^2}$$

Note que o denominador $(x^2 - x)^2$ se anula para $x = 0$ e $x = 1$, mas estes pontos estão fora do domínio de f, donde a derivada existe para todo $x \in \mathrm{D}(f)$. Note que $f'(x) = 0$ somente para $x = \dfrac{1}{2}$. Portando $x = \dfrac{1}{2}$ é o único ponto crítico de f. Vamos estudar o sinal de $f'(x)$ para verificar se este ponto é um máximo ou um mínimo. Observe que $(x^2 - x)^2 > 0$ para $x \in (0, 1)$. Logo, o sinal de f' depende apenas do termo $1 - 2x$ que é positivo para $x \in (0, \frac{1}{2})$ e negativo para $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Portanto, $f'(x) > 0$ no intervalo $(0, \frac{1}{2})$ e $f'(x) < 0$ no intervalo $(\frac{1}{2}, 0)$. Logo, pelo teste da derivada primeira, $x = \frac{1}{2}$ é um ponto de máximo local para f.

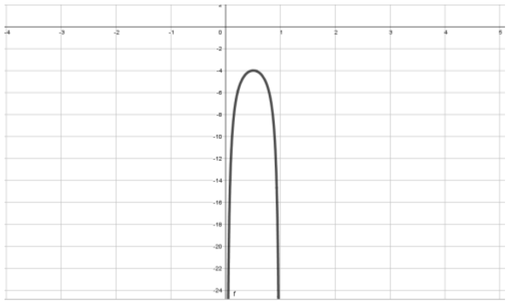


Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Exemplo 4.46. Vamos verificar se existem extremos locais para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Primeiro, vamos verificar se f possui pontos críticos. Sabemos que f é derivável em todo ponto $x \neq 0$ com $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ nestes pontos. Mas, f não é derivável em $x = 0$ (verifique isso!). Note que $f'(x) > 0$ para todos os pontos $x \neq 0$. Logo, não existem pontos satisfazendo $f'(x) = 0$. Assim, o único ponto crítico de f é $x = 0$. Vemos que $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Assim, o teste da derivada primeira nos diz que $x = 0$ não é máximo nem mínimo local da função f.

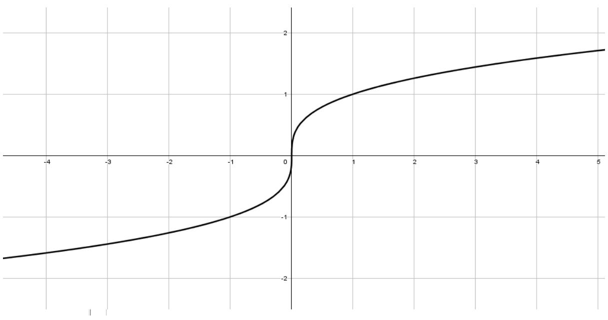


Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Se a função f é duas vezes diferenciável em um ponto crítico x_0 então podemos usar o seguinte teorema para classificar este ponto.

Teorema 4.47 (Teste da Derivada Segunda). *Seja f uma função derivável duas vezes em um intervalo (a, b). Considere ponto $x_0 \in (a, b)$.*

1. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ então f tem um mínimo relativo em x_0.*

2. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ então f tem um máximo relativo em x_0.*

3. *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ então o teste é inconclusivo, ou seja, f pode ter um máximo relativo um mínimo relativa ou nenhum dos dois em x_0.*

Demonstração. Vamos provar o item 1 deixando a prova dos demais itens como exercício. Vamos supor, para simplificar, que f'' é contínua no intervalo (a, b). Consideremos $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Como f'' é contínua em (a, b), temos que $f''(x) > 0$ para um intervalo

(a', b') contendo x_0. Isto implica que f' é crescente em (a', b'). Considerando que $f'(x_0) = 0$, temos que $f'(x) < 0$ para $x \in (a, x_0)$ e $f'(x) > 0$ para $x \in (x_0, b)$. Assim, pelo Teorema 4.44, x_0 é um ponto de mínimo para f. $\square$

Vamos aplicar o teste da derivada segunda em alguns exemplos.

Exemplo 4.48. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. Como f é derivável em todo $\mathbb{R}$, seus pontos críticos, se exisitirem, devem satisfazer $f'(x) = 0$. Como $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, temos $f'(x) = 0$ somente para $x = 0$. Para decidir se este ponto crítico é um máximo ou um mínimo, aplicaremos o teste da derivada segunda. Observemos que $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$. Logo, $f''(0) = -2$ e, pelo teorema 4.47, temos que $x = 0$ é um ponto de máximo local para f.

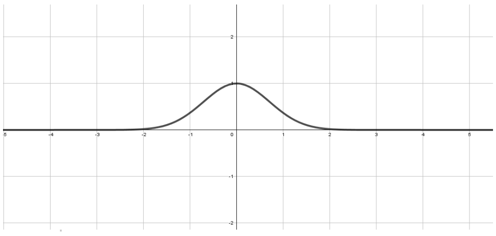


Figura 4.9: Gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$

Exemplo 4.49. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$.

As derivadas primeira e segunda de $f(x)$ são

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad e \quad f''(x) = 12x^2 - 4$$

Observe que $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x + 1)(x - 1)$. Portanto, $f'(x) = 0$ para $x \in \{0, 1, -1\}$. Estes são os únicos pontos críticos de f. Agora, observemos que

$$f''(0) = -4 < 0, \quad f''(1) = 8 > 0, \quad e \quad f''(-1) = 8 > 0.$$

Assim, pelo teste da derivada segunda temos que 0 é um ponto de máximo local para f enquanto 1 e -1 são pontos de mínimos locais.

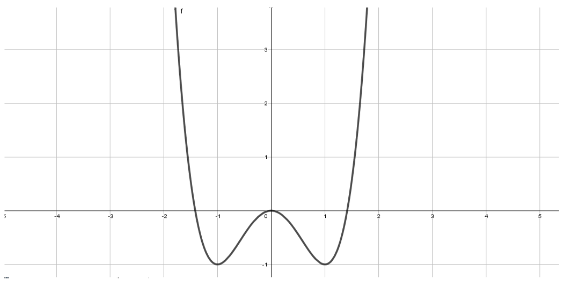


Gráfico da função $f(x) = x^4 - 2x^2$

Exemplo 4.50. Considere $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$. As derivadas f' e f'' são

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3} \quad e \quad f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

Temos $f'(x) = 0$ se e só se $x = 0$. Logo, o único ponto crítico de f é $x = 0$. Observando que $f''(0) = 2 > 0$, temos que $x = 0$ é um ponto de mínimo local para f.

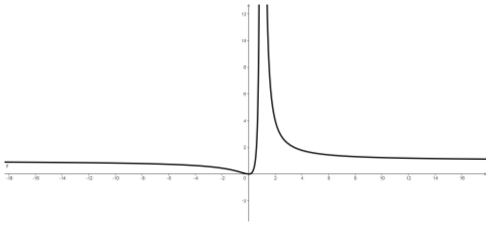


Figura 4.10: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

Quando o teste da derivada segunda é inconclusivo, precisamos recorrer ao teste da deriva primeira. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.51. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - x^4$.

Derivando, obtemos:

$$f'(x) = 6x^5 - 4x^3 = 2x^3(3x^2 - 2) \quad e \quad f''(x) = 30x^4 - 12x^2$$

Os pontos críticos de f são $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Temos $f''(x_2) = f''(x_3) = \frac{16}{3} > 0$. Portanto, x_2 e x_3 são pontos de mínimo locais. Mas, $f''(x_1) = 0$ e o neste caso o teste da derivada segunda é inconclusivo. Tentemos então classificar x_1 considerando o teste da derivada primeira. Estudando o sinal de $f'(x)$ vemos que $f'(x) > 0$ no intervalo $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ e $f'(x) < 0$ no intervalo $(0, \sqrt{\frac{2}{3}})$. Assim, pelo teste da derivada primeira, o ponto $x_1 = 0$ é um ponto de máximo local para f.

Exemplo 4.52. Encontremos os extremos de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ cujas derivadas são

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) \quad e \quad f''(x) = 36x^2 - 24x$$

Os pontos críticos de f são $x = 0$ e $x = 1$. Como $f''(1) = 12 > 0$, $x = 1$ é um ponto de mínimo local. Como $f''(0) = 0$, não podemos decidir pelo teste da derivada segunda se 0 é um extremo local. Tentemos o teste da derivada primeira. Estudando o sinal de $f'(x) = 12x^2(x-1)$ vemos que $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, -1)$. Como $f'(x)$ tem o mesmo sinal em um intervalo aberto a esquerda de $x = 0$ e em um intervalo aberto à direita de $x = 0$, temos, pelo teste da derivada primeira que $x = 0$ não é ponto de extremo local para f.

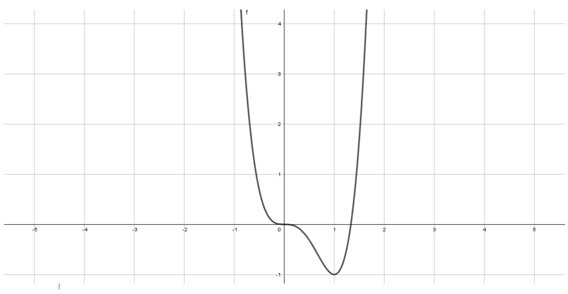


Gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

4.7 Encontrando o extremos globais de uma função

Nesta seção estudaremos estratégias para encontrar os extremos globais de um função contínua. Trataremos separadamente dois casos. Estudaremos primeiro funções contínuas em intervalos fechados e depois funções contínuas em intervalos abertos.

Extremos globais em intervalos fechados

Vamos descrever uma estratégia para encontrar os extremos globais de uma função contínua restrita a um intervalo fechado. Nossa principal ferramenta é o seguinte teorema.

Teorema 4.53. *Se f é uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$ então f possui pelo menos um máximo absoluto e pelo menos um mínimo absoluto em $[a, b]$.*

Se f satisfaz as hipóteses do teorema, ou seja é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então os candidatos a pontos de máximo ou mínimo globais de f são os extremos de intervalo, $x = a$ e $x = b$, e os pontos críticos de f no interior de (a, b). Assim, uma estratégia para encontrar os extremos absolutos de f consiste nos seguintes passos:

1. Encontrar os pontos críticos de f no interior de (a, b).
2. Encontrar os valores de f nos pontos críticos e nos extremos a e b
3. O maior valor encontrado no passo anterior é o máximo absoluto de f e o menor valor é o mínimo absoluto de f.

Vamos aplicar esta estatégia nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.54. Vamos encontrar os extremos globais da função $f(x) = x^3 - 3x + 2$ que é contínua no intervalo fechado $[-2, 3]$.

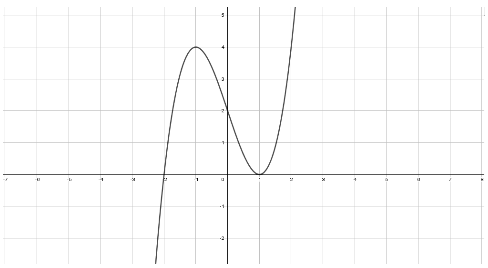


Figura 4.11: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Primeiro observemos que a derivada de f é:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

portanto os pontos críticos no interior do intervalo são $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Observemos que $f(-1) = 4$ e $f(1) = 0$ e nos extremos são $f(-2) = 0$ e $f(3) = 20$. Assim, o máximo absoluto de f é 20 e ocorre para $x = 3$; e o mínimo absoluto de f é 0 e ocorre nos pontos $x = -2$ e $x = 1$.

Exemplo 4.55. Vamos encontrar os extremos globais de $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ no intervalo $[-6, 10]$. Derivando vemos que

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}, \quad x \neq 2\,,$$

o que significa que não há valores de $x \in (-6, 10)$ para os quais $f'(x) = 0$. No entanto, f possui um ponto de não diferenciabilidade em $x = 2$ (verifique que as derivadas laterais de $f'_+(2)$ e $f'_-(2)$ não existem). Assim, o único ponto crítico de f no interior do intervalo é $x = 2$. Temos

$$f(-6) = (-6-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^2} = 4, \quad f(2) = (2-2)^{\frac{2}{3}} = 0 \quad \text{e} \quad f(10) = (10-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$$

Portanto o valor máximo absoluto de f no intervalo é 4 correndo nos pontos $x = -6$ e $x = 10$ e o valor mínimo absoluto de f é 0 ocorrendo no ponto $x = 2$.

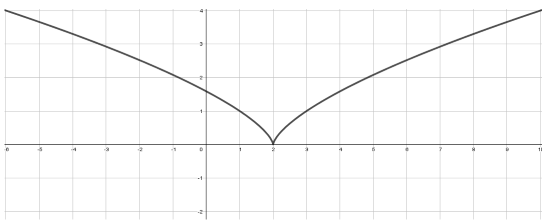


Gráfico da função $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-6, 10]$

Exemplo 4.56. Vamos encontrar os extremos globais de $f(x) = x^2 + 4x + 4$ no intervalo $[0, 1]$. Observe que $f'(x) = 2x + 4$. Logo, $f'(x) = 0$ se e só se $x = -2$. Observe que $-2 \notin [0, 1]$. Portanto, f não possui pontos críticos no interior do intervalo $[0, 1]$. Assim, os extremos de f devem ocorrer nos extremos do intervalo. Temos $f(0) = 4$ e $f(1) = 9$, donde o máximo global de f é 9 e ocorre no ponto $x = 1$ e o mínimo global de f é 4 e ocorre no ponto $x = 0$.

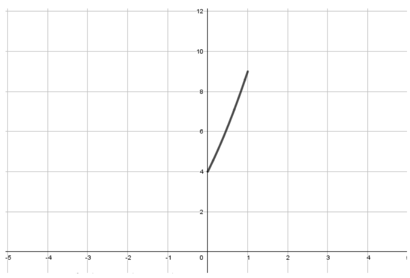


Figura 4.12: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $x \in [0, 1]$

Exemplo 4.57. Vamos encontrar os extremos globais de $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ no intervalo $[-2, 5/2]$. Derivando obtemos:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 6(x-2)(x-3)$$

Portanto, $f'(x) = 0$ para $x = 2$ e $x = 3$. No entanto, nos interessam apenas os pontos críticos de f que estejam no interior do intervalo, ou seja em $(-2, 5/2)$. Como $x = 3$ está fora deste intervalo, devemos considerar apenas o ponto $x = 2$. Calculando $f(x)$ no ponto crítico e nos extremo do intervalo obtemos:

$$f(2) = 28, \quad f(-2) = -148, \quad e \quad f(5/2) = 55/2$$

Logo, restrita ao intervalo $[-2, 5/2]$, a função f tem valor máximo de 28 ocorrendo no ponto $x = 2$ e valor mínimo -148 ocorrendo no ponto $x = -2$.

O Teorema 4.53 tem duas hipóteses: a função f deve deve ser contínua no intervalo e este intervalo deve ser fechado. Se qualquer uma destas hipóteses não é atendida, os extremos globais podem não exisitr. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.58. Conisdere a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{1-x}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Esta função está definida em um intervalo fechado. Porém, é descontínua em $x = 1$. Seu gráfico é ilustrado na figura 4.13. Vemos que f possui um máximo global 1 ocorrendo no ponto $x = 1$. No entanto, ela não possui mínimo global. Isto porque decresce ilimitadamente quando x se aproxima de 1 pela direita, ou seja, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

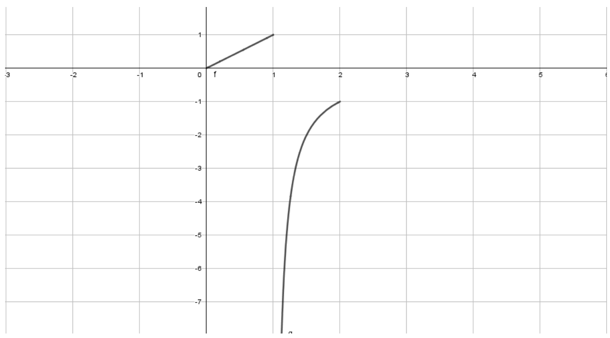


Figura 4.13: Gráfico da função $f(x)$ do exemplo 4.58

Exemplo 4.59. Considere $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$. Esta função é contínua, mas está definida em um intervalo aberto. Seu gráfico é ilustrado na figura 4.14. Vemos que f possui máximo global $-\frac{1}{4}$ ocorrendo no ponto $x = 0$. Mas, f não possui mínimo global. Isto porque decresce ilimitadamente quando x se aproxima de 2 pela esquerda ou x se aproxima de -2 pela direita. Ou seja, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

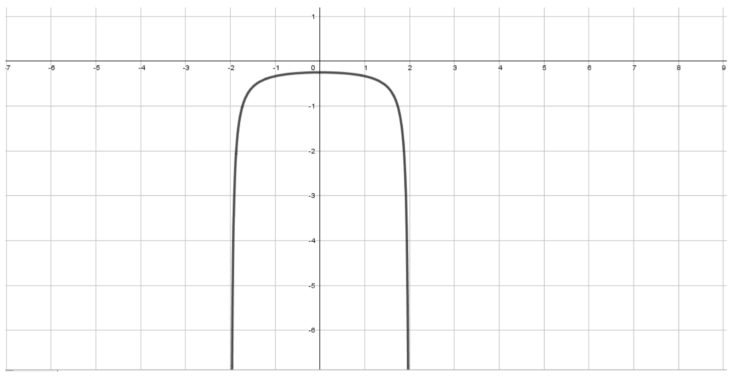


Figura 4.14: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $x \in (-2, 2)$.

Extremos globais em intervalos abertos

Nessa seção, veremos como proceder para estudar os extremos globais de uma função contínua definida em intervalos abertos. Uma ferramenta útil neste estudo é o seguinte teorema.

Teorema 4.60. *Seja f uma função derivável em um intervalo aberto (a, b). Suponha que f tenha um único ponto crítico $x_0 \in (a, b)$. Então*

- *Se x_0 for um ponto de mínimo local então é também um mínimo global para f em (a, b).*
- *Se x_0 for um ponto de máximo local então é também um máximo global para f em (a, b).*

Exemplo 4.61. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ tem um único ponto crítico em $x = 0$ e este é um ponto de máximo local. Pelo teorema 4.60, podemos concluir que $x = 0$ é de fato um máximo global.

Exemplo 4.62. Considere $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$. A derivada desta função é $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ e a derivada segunda $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Portanto, f possui um único ponto crítico $x = 1$ e, como $f''(1) = -1 < 0$, temos que este é um ponto de máximo local. Assim, $x = 1$ é o único ponto crítico de f e é um máximo local. Portanto, pelo Teorema 4.60, temos que $x = 1$ é um máximo global para f.

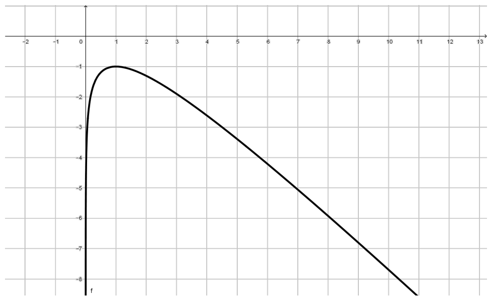


Figura 4.15: Gráfico da função $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$

No caso em que f está definida em um intervalo aberto e possui mais de um ponto crítico, não podemos usar o teorema acima. Nestes casos, pode ser que f não possua extremos globais. Vamos ver um exemplo.

Exemplo 4.63. Vamos estudar a existência de extremos globais para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x + 5$. Derivando obtemos $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$. Assim, a função tem dois pontos críticos $x = 2$ e $x = -2$. Para classificar estes pontos podemos considerar a derivada segunda $f''(x) = 6x$. Observe que $f''(-2) = -12 < 0$ e $f''(2) = 12 > 0$. Logo, -2 é um ponto de máximo local e 2 é um ponto de mínimo local. A questão é saber se estes pontos são extremos globais.

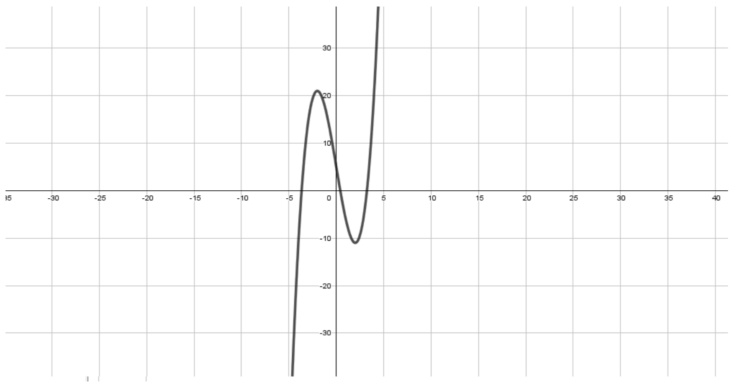


Figura 4.16: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 12x + 5$

Uma boa estratégia para resolver este problema é considerar os limites de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$. Observemos que:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 12x + 5 = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} x^3 - 12x + 5 = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, a função $f(x)$ decresce ilimitadamente quando $x \to -\infty$. Isso nos garante que existirá algum x_1 tal que $f(x_1) < f(2)$. Portanto, 2 não pode ser um mínimo global para $f(x)$. Por outro lado, como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, temos que existirá um x_2 tal que $f(x_2) > f(-2)$. Logo, -2 não é um ponto de máximo global para $f(x)$. Concluímos que a função f não possui extremos globais.

Um teorema útil para garantir a existência ou não de extremos globais para funções contínuas em intervalos abertos é o seguinte.

Teorema 4.64. *Seja f uma função contínua em um intervalo (a, b).*

1. *Se $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ então f possui ao menos um mínimo global em (a, b).*

2. *Se* $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ *então* $f(x)$ *possui ao menos um máximo global em* (a,b).

3. *Se* $\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ *então* $f(x)$ *não possui extremo global em* (a,b).

4. *Se* $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ *então* $f(x)$ *não possui extremo global em* (a,b).

Observação 4.65. O teorema acima também vale trocando (a,b) por $(-\infty,+\infty)$, $(a,+\infty)$ ou $(-\infty,b)$. Nestes outros casos devemos trocar $x\to a^-$ por $x\to-\infty$ e $x\to b^+$ por $x\to+\infty$ quando for apropriado.

Exemplo 4.66. Existem extremos globais para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2$? Vejamos, já sabemos, do exemplo 4.49, que f possui dois pontos de mínimo locais dados por 1 e -1 e um ponto de máximo local dado por $x=0$. Observemos que

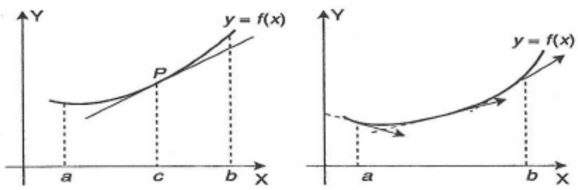
$$\lim_{x\to-\infty} x^4-2x^2=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} x^4-2x^2=+\infty$$

Argumentando como no exemplo anterior vemos que $x=0$ não pode ser um ponto de máximo global para f. Agora, como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, temos, pelo teorema 4.64, que f possui ao menos um ponto de mínimo global. Afirmamos que estes pontos são exatamente 1 e -1.

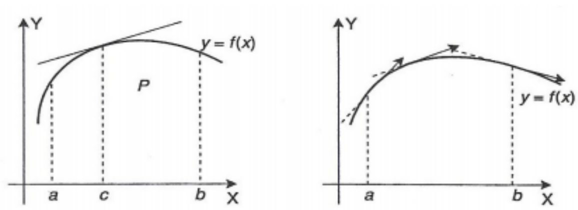
A função f restrita ao intervalo aberto $(0,+\infty)$ é derivável neste intervalo e possui um único ponto crítico $x=1$ que é um ponto de mínimo local. Aplicando o Teorema 4.60 temos que $x=1$ é um mínimo global para f em $(0,+\infty)$. Analogamente, f restrita a $(-\infty,0)$ é derivável e possui um único ponto de mínimo local $x=-1$. Aplicando novamente o Teorema 4.60, concluímos que $x=-1$ é um ponto de mínimo global para f restrita a $(-\infty,0)$. Para concluir, $f(x)\geq f(1)=-1$ para todo $x\in(0,+\infty)$ e $f(x)\geq f(-1)=-1$ para todo $x\in(-\infty,0)$. Logo, $f(x)>-1$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Ou seja, os pontos $x=-1$ e $x=1$ são pontos de mínimo globais para esta função.

4.8 Concavidades e pontos de inflexão

Definição 4.67. Dizemos que o gráfico de uma função f é *côncavo para cima no intervalo* $[a,b]$ ou que f é côncava para cima em $[a,b]$, se $f'(x)$ é crescente neste intervalo. Geometricamente, o gráfico de f está acima da reta tangente à curva nos pontos de abscissa no intervalo (a,b) e a reta tangente à curva gira no sentido anti-horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.



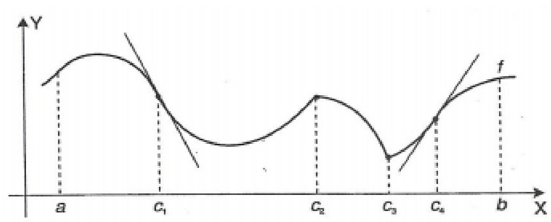
Definição 4.68. Dizemos que o gráfico de uma função f é *côncavo para baixo no intervalo* $[a,b]$ ou que f é côncava para baixo se $f'(x)$ é decrescente neste intervalo. Geometricamente, o gráfico de f está abaixo da reta tangente à curva nos pontos de abscissa no intervalo (a,b) e a reta tangente à curva gira no sentido horário à medida que avançamos sobre a curva da esquerda para a direita.



Definição 4.69. Um ponto $P = (c, f(c))$ do gráfico de uma função f é chamado *ponto de inflexão* se f é contínua em c e se existir um intervalo (a, b) contendo c tal que uma das seguintes situações ocorra:

a) f é côncava para cima em $(a, c]$ e côncava para baixo em $[c, b)$;

b) f é côncava para baixo em $(a, c]$ e côncava para cima em $[c, b)$.



Exemplo 4.70. No gráfico acima, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3, c_4 são pontos de inflexão. Observe que c_2 e c_3 são abscissas de pontos extremos locais de f e que f não é derivável nestes pontos. Existem as derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$ e, nos pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de f.

Teorema 4.71. *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável pelo menos duas vezes em (a, b).*

a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em $[a, b]$.

b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em $[a, b]$.

Demonstração. Temos que $f''(x)$ é a derivada de $f'(x)$. Assim:

a) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ temos que $f'(x)$ é crescente no intervalo (a, b) (pelo Teorema 4.30). Logo, f é côncava para cima em $[a, b]$.

b) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ temos que $f'(x)$ é decrescente em $[a, b]$ (pelo Teorema 4.30). Assim, f é côncava para baixo em (a, b).

$\square$

Exemplo 4.72. Seja $f(x) = (x-1)^3$. Temos que $f''(x) = 6(x-1)$. Como $f''(x) > 0$ se $x > 1$ e $f''(x) < 0$ se $x < 1$, então f é côncava para cima se $x > 1$ e côncava para baixo se $x < 1$. Além disso, $x = 1$ é o único ponto de inflexão de f. A tabela a seguir apresenta o estudo de sinal da derivada segunda de f e o estudo da concavidade do gráfico de f.

		1	
$x-1$	$----$	1	$++++$
$f''(x) = 6(x-1)$	$----$	1	$++++$
Concavidade de f	$\frown$	inf	$\smile$

Exemplo 4.73. Seja $f(x) = \dfrac{x^4}{6} - x^2$. Temos que $f''(x) = 2x^2 - 2 = 2(x^2-1)$. Assim, o sinal de $f''(x)$ depende do sinal de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$:

		-1		1	
$x-1$	$---$		$---$	1	$+++$
$x+1$	$---$	-1	$+++$		$+++$
$f''(x) = 2(x^2-1)$	$+++$	-1	$---$	1	$+++$
Concavidade de f	$\smile$	inf	$\frown$	inf	$\smile$

Portanto, f é côncava para cima em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-1,1)$, sendo $x=-1$ e $x=1$ as abscissas de seus pontos de inflexão.

Exemplo 4.74. Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. Temos que $f''(x) = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$. Vamos fazer o estudo de sinal de f'':

		-1		1	
$6x^2+2$	$+++$		$+++$		$+++$
$x-1$	$---$		$---$	1	$+++$
$x+1$	$---$	-1	$+++$		$+++$
$f''(x)$	$+++$		$---$		$+++$
Concavidade de f	$\smile$		$\frown$		$\smile$

Portanto, f é côncava para cima em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e côncava para baixo em $(-1,1)$. Nesse caso, $x=-1$ e $x=1$ não são abscissas de pontos de inflexão, pois não pertencem ao domínio de f.

4.9 Esboço de gráficos

Utilizando os resultados das seções anteriores, elaboramos um roteiro para esboçar gráficos de funções. Dada $y=f(x)$, esboçamos seu gráfico considerando o seguinte:

1. Domínio de $y=f(x)$.
2. Pontos de interseção com os eixos, se possível.
3. Pontos críticos de $y=f(x)$, isto é, onde $f'(x)=0$ ou não existe.
4. Intervalos de crescimento e decrescimento, usando o Teorema 4.30.

5. Máximos e mínimos relativos, usando o Teorema 4.44 ou o Teorema 4.47.
6. Concavidade e pontos de inflexão, usando o Teorema 4.71.
7. Assíntotas horizontais, verticais e inclinadas, se existirem.

Para as assíntotas, lembramos que, como visto no capítulo 3:

Definição 4.75. A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f se pelo menos uma das afirmações a seguir é verdadeira:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f se pelo menos uma das afirmações a seguir é verdadeira:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Além disso, o gráfico de f pode ter assíntotas inclinadas:

Definição 4.76. A reta $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assíntota inclinada de $y = f(x)$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Observação 4.77. Podemos ver que $y = f(x)$ tem assíntota inclinada $y = ax + b$ se e somente se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \;\text{ e }\; \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \;\text{ ou }\; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \;\text{ e }\; \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = b$$

Vamos ver um exemplo de cálculo das assíntotas de uma função.

Exemplo 4.78. Consideramos a função $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$. Primeiro, temos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{x} = \pm\infty,$$

donde concluímos que f não tem assíntotas horizontais. Ainda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + 1}{x} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2 + 1}{x} = -\infty$$

donde $x = 0$ (isto é, o eixo y) é uma assíntota vertical de f.

Não há outras assíntotas verticais pois se $c \neq 0$, então

$$\lim_{x\to c} \frac{2x^2 + 1}{x} = \frac{2c^2 + 1}{c} \in \mathbb{R}.$$

Por fim, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$ é tal que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 1}{x} - 2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Assim, o gráfico de f tem uma assíntota inclinada $y = 2x$. Vemos que os limites são os mesmos quando $x \to -\infty$, o que significa que a função f se aproxima de $y = 2x$ tanto quando $x \to +\infty$ quanto quando $x \to -\infty$. A seguir vemos o gráfico dessa função com sua assíntota vertical, o eixo y, e sua assíntota inclinada $y = 2x$.

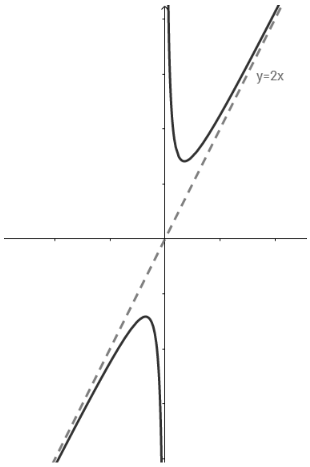


Figura 4.17: Gráfico de $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$.

Agora, vamos ver exemplos de esboços de gráficos usando os passos 1 a 7 listados acima.

Exemplo 4.79. Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$ seguindo os passos.

1. Como a função é polinomial, seu domínio é $\mathbb{R}$.

2. Se $x = 0$, então $y = 2$, isto é, a função passa em $(0, 2)$. Como o polinômio tem grau 4, não vamos encontrar seus zeros.

3. A derivada de f é $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2$, cujo domínio também é $\mathbb{R}$. Assim, os únicos pontos críticos de f são tais que $f'(x) = 0$, isto é, tais que $12x(x-1)^2 = 0$, ou seja $x = 0$ e $x = 1$. Esses são nossos candidatos a extremos relativos.

4. Como vimos no item anterior $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2$. Fazendo o estudo de sinal:

		0		1	
x	$---$	0	$+++$		$+++$
$(x-1)^2$	$+++$		$+++$	1	$+++$
$f'(x)$	$---$	0	$+++$	1	$+++$
Comportamento de f	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

Obtemos f decrescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty)$.

5. Pelo critério da derivada primeira, temos que

$$f'(x) < 0 \text{ se } x < 0 \text{ e } f'(x) > 0 \text{ se } x > 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é um ponto de mínimo local.}$$

$$f'(x) > 0 \text{ se } x < 1 \text{ e } f'(x) > 0 \text{ se } x > 1 \Rightarrow x = 1 \text{ não é um ponto de mínimo nem de máximo local.}$$

6. A derivada segunda de $f(x)$ é

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1)\,,$$

cujo domínio é $\mathbb{R}$ e

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/3 \text{ ou } x = 1$$

Fazendo o estudo de sinal da derivada segunda, temos:

		1/3		1	
$3x-1$	$---$	1/3	$+++$		$+++$
$x-1$	$---$		$---$	1	$+++$
$f''(x)$	$+++$	1/3	$---$	1	$+++$
Concavidade de f	$\smile$	inf	$\frown$	inf	$\smile$

Concluimos que f tem concavidade para cima em $(-\infty, 1/3] \cup [1, +\infty)$ e concavidade para baixo em $[1/3, 1]$. Além disso, os pontos de abscissas $x = 1/3$ e $x = 1$ são pontos de inflexão.

7. Temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ pois é polinomial}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Portanto, o gráfico de f não possui assíntotas verticais nem horizontais. f também não possui assíntotas inclinadas pois

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2}{x} = \pm\infty$$

Utilizando essas propriedades, podemos esboçar o gráfico de $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$:

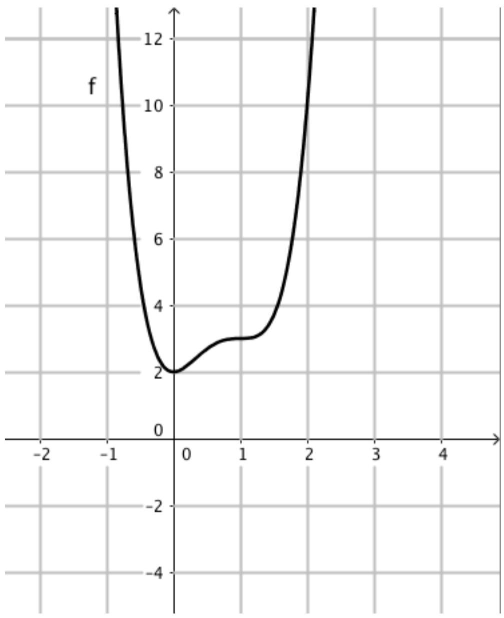


Gráfico de $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$.

Exemplo 4.80. (2017-1) Vamos esboçar o gráfico da função

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

seguindo os passos.

1. O domínio de f é $\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. Temos que $x = 0$ se e somente se $y = 0$, isto é, a função passa na origem e não intercepta os eixos em nenhum outro ponto.

3. A derivada de f é

$$f'(x) = \frac{(2x)' \cdot (x^2 - 1) - (2x) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

cujo domínio também é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Assim, os únicos pontos críticos de f seriam os tais que $f'(x) = 0$. Como $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que f não tem pontos críticos.

4. Como vimos no item anterior $f'(x) = \dfrac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$. Notamos que $-2(x^2 + 1) < 0$ e $(x^2 - 1)^2 > 0$ para todos $x \neq -1, 1$, isto é:

		-1		1	
$-2(x^2 + 1)$	$---$		$---$		$---$
$(x^2 - 1)^2$	$+++$	-1	$+++$	1	$+++$
$f'(x)$	$---$		$---$		$---$
Comportamento de f	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$

Obtemos f decrescente em $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

5. Como a função é sempre decrescente, então não há extremos locais (nem globais).

6. A derivada segunda de $f(x)$ é

$$f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

cujo domínio ainda é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Vamos fazer o estudo de sinal da segunda derivada:

		-1		0		1	
$4x$	$---$		$---$	0	$+++$		$+++$
$x^2 + 3$	$+++$		$+++$		$+++$		$+++$
$(x^2 - 1)^3$	$+++$	-1	$---$		$---$	1	$+++$
$f''(x)$	$---$		$+++$	0	$---$		$+++$
Concavidade de f	$\frown$		$\smile$	inf	$\frown$		$\smile$

Concluimos que f tem concavidade para cima em $(-1, 0] \cup (1, +\infty)$ e concavidade para baixo em $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$. Além disso, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão. Não há mais pontos de inflexão pois $x = -1$ e $x = 1$ não estão no domínio de f.

7. Usando L'Hospital temos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Assim, $y = 0$ (isto é, o eixo x) é a única assíntota horizontal do gráfico de f. Além disso,

$$\lim_{x\to\pm 1} (x^2-1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm 1} 2x = \pm 2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\pm 1} f(x) = \pm\infty.$$

Mais precisamente, usando o estudo de sinal de $f(x)$,

		-1		0		1	
$2x$	$---$		$---$	0	$+++$		$+++$
(x^2-1)	$+++$	-1	$---$		$---$	1	$+++$
$2x/(x^2-1)$	$---$		$+++$	0	$---$		$+++$

temos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{x^2-1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x^2-1} = +\infty$$

Então, $x = -1$ e $x = 1$ são as assíntotas verticais do gráfico de f. Mas esse gráfico não possui assíntotas inclinadas pois

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^3-x} = 0$$

Utilizando essas propriedades, podemos esboçar o gráfico de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$:

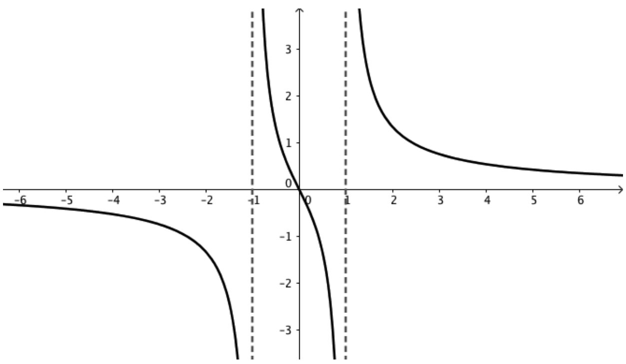
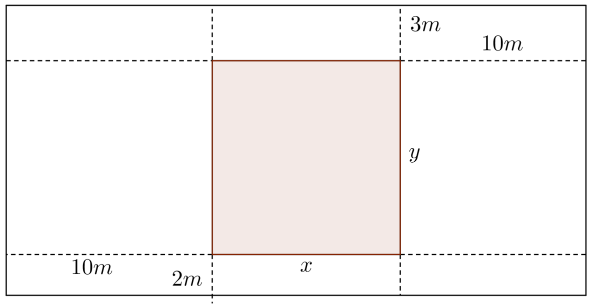


Figura 4.18: Gráfico de $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$.

4.10 Problemas de Maximização e Minimização

Nesta seção, aplicaremos as ferramentas estudadas até aqui para resolver problemas cujas as soluções são obtidas encontrando valores máximos ou mínimos de uma função. O primeiro passo para solucionar este tipo de problema é escrever precisamente qual a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser de uma ou mais variáveis. Quando a função é de mais de uma variável, devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra. Com a função bem definida, devemos identificar um intervalo apropriado para a variável independente e então proceder as rotinas matemáticas para encontrar máximos ou mínimos vista em seções anteriores. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.81. Um galpão retangular de área 14.400 m^2 deve ser construído em um lote retangular com recuos de 2 metros na frente, 3 metros atrás e 10 metros de cada lado como ilustrado na figura abaixo. Encontre as dimensões do lote de área mínima no qual possa ser construído o galpão.



Solução: Se $x > 0$ e $y > 0$ são as dimensões do galpão de área $14.400m^2$ então:

$$x.y = 14.400, \quad \text{logo} \quad y = \frac{14.400}{x}.$$

As dimensões do lote devem ser $a = x + 20$ e $b = y + 5 = \dfrac{14.400}{x} + 5$. Portanto, a área do lote é dada em função de x pela função

$$f(x) = (x + 20)\left(\frac{14.400}{x} + 5\right) = \frac{288.000}{x} + 5x + 14.500 \quad \text{com} \quad x \in (0, +\infty).$$

Note que não há restrições sobre o valor de $x > 0$, por isso consideramos $x \in (0, +\infty)$. Para resolver o problema vamos encontrar o mínimo global desta função. Note que f é duas vezes derivável intervalo $(0, +\infty)$. Suas derivadas, primeira e segunda, são:

$$f'(x) = -\frac{288.000}{x^2} + 5 \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{576.000}{x^3}$$

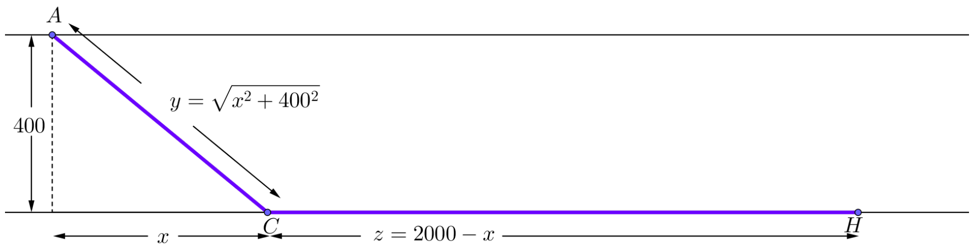
Observe que

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{288.000}{5} = 57600 \quad \Leftrightarrow \quad x = 240$$

Logo, $x = 240$ é o único ponto crítico de f. Como $f''(240) = \dfrac{576.000}{240^3} > 0$, temos, pelo teste da derivada segunda, que este é um ponto onde f assume um mínimo local. Recorde que se f é derivável em um intervalo aberto e possui um único ponto de extremo local neste intervalo, então este ponto é de fato um extremo global para f no intervalo. Considerendo esta fato, concluímos que em $x = 240$ a função atinge seu mínimo global. As dimensões do lote pocurado são:

$$a = 240 + 20 = 260m \quad \text{e} \quad b = \frac{14.400}{240} + 5 = 65m$$

Exemplo 4.82. Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada num ponto A à margem de um rio de $400\,m$ de largura a um conjunto habitacional situado em um ponto H na outra margem do rio, $2000\,m$ abaixo da central de abastecimento. O custo da obra através do rio é de $R\$\,500,00$ por metro, enquanto, em terra, custa $R\$\,300,00$ por metro. Qual á a forma mais econômica de se instalar a rede de água?



Solução: A forma mais racional de construir a rede é construir um trecho em linha reta, através do rio, ligando o ponto A a um ponto C na outra margem do rio e então construir outro trecho, em linha reta, por terra, ligando o ponto C ao ponto H. Se y é o comprimento, em metros, do trecho lingando A a C e z é o comprimento, em metros, do trecho ligando C a H então o custo total da obra, em reais, é:

$$500.y + 300.z$$

Se o ponto C se encontra $x \in [0, 2000]$ metros abaixo da central de abastecimento então temos

$$z = 2000 - x \quad \text{e} \quad y = \sqrt{x^2 + 400^2}$$

e o custo da obra obra é dado em função de x por:

$$f(x) = 500\sqrt{x^2 + 400^2} + 300(2000 - x) \quad \text{com} \quad x \in [0, 2000].$$

Para resolver o problema devemos encontrar o valor mínimo global de f. Como esta função é contínua e definida em intervalo fechado, temos garantida a existência de um mínimo global em $[0, 2000]$. Para encontrar este mínimo, basta considerar os valores de f nos extremos do intervalo e nos pontos críticos do interior do intervalo. Observemos que

$$f'(x) = 500\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 400^2}}\right) - 300 = 100\left(\frac{5x}{\sqrt{x^2 + 400^2}} - 3\right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5x = 3\sqrt{x^2 + 400^2} \\ &\Rightarrow \quad 25x^2 = 9x^2 + 9 \times 400^2 \\ &\Rightarrow \quad 16x^2 = 9 \times 400^2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = \frac{9 \times 400^2}{16} \\ &\Rightarrow \quad x = \pm 300 \end{aligned}$$

Assim, f tem um ponto crítico $x = 300$ no interior de $[0, 2000]$. Observando que :

$$f(0) = 800.000, \quad f(300) = 760.000, \quad e \quad f(2000) = 200.000\sqrt{26} \approx 1.019.803$$

concluímos que f atinge seu mínimo em $x = 300$, portanto o menor custo da obra é obtido quando o ponto C está 300 metros abaixo do ponto A.

Exemplo 4.83. Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja $24\,m^3$. O material da base vai custar $R\$\,3,00$ por metro m^2 e o material dos lados $R\$\,4,00$ por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

Solução: Se $x > 0$ é o lado da base quadrada da caixa e y sua altura então seu volume é $yx^2 = 24$. Assim, $y = \frac{24}{x^2}$. A base da caixa é um quadrado de lado x, portanto de área x^2. Os lados da caixa são 4 retângulos de dimensões x e y. Portanto, a área total dos lados é $4xy = 4x\left(\frac{24}{x^2}\right) = \frac{96}{x}$. Assim, o custo total da construção é dado por:

$$f(x) = 3.x^2 + \frac{384}{x} \quad \text{com} \quad x \in (0, +\infty)$$

Para resolver o problema, devemos encontrar o mínimo global desta função. Para tanto, observemos f tem as seguintes derivadas.

$$f'(x) = 6x - \frac{384}{x^2} \quad e \quad f''(x) = 6 + \frac{768}{x^3}$$

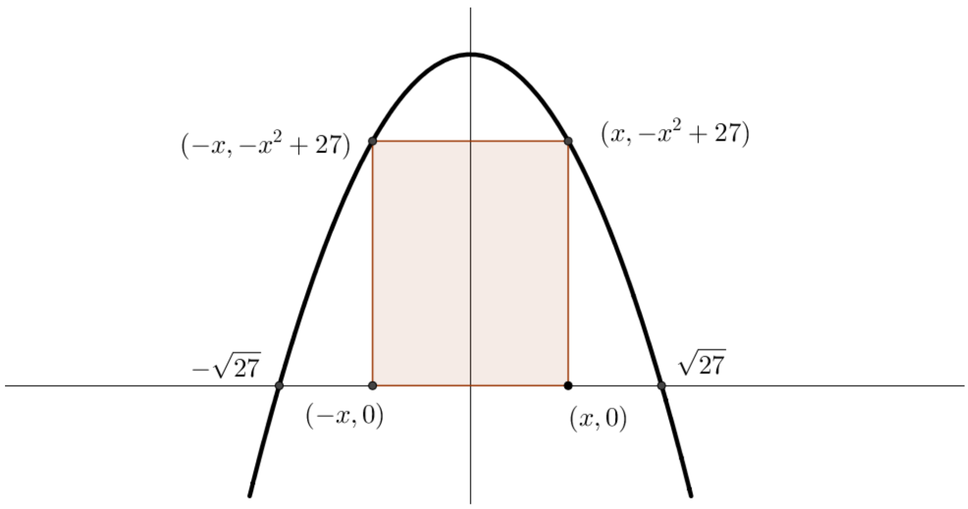
Assim,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = \frac{384}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = \frac{384}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Logo, f tem um único ponto crítico, $x = 4$, e como $f''(4) = 6 + \dfrac{768}{64} = 18 > 0$, temos que este ponto é um ponto de mínimo local. Como f é derivável em $(0, +\infty)$ tendo $x = 4$ como seu único ponto crítico, concluímos que f atinge seu mínimo global em $x = 4$. Assim, as dimensões da caixa correspondentes ao custo mínimo são $x = 4$ e $y = \frac{24}{4^2} = \frac{3}{2}$ metros.

Exemplo 4.84. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 27 - x^2$.

Solução: Um retângulo como descrito no enunciado é ilustrado na figura abaixo. Sua base está sobre o eixo das abscissas, o lado oposto é um segmento horizontal com extremos na parábola. Isso, implica que o retângulo deve ser simétrico ao eixo das ordenadas. Se um dos vértices da base é o ponto $(x, 0)$ com $x > 0$ então o outro vértice é o ponto $(-x, 0)$. Os demais vértices, sobre a parábola, são os pontos $(x, -x^2 + 27)$ e $(-x, -x^2 + 27)$.



A cada $x \in (0, \sqrt{27})$ corresponde um retângulo de base $2x$, altura $-x^2 + 27$ e, portanto, área

$$f(x) = 2x(-x^2 + 27) = -2x^3 + 54x$$

Resolveremos o problema encontrando o máximo global desta função. Para tanto, observemos que

$$f'(x) = -6x^2 + 54 \quad \text{e} \quad f''(x) = -12x$$

Assim,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 = 54 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{54}{6} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-3, 3\}$$

Como estamos trabalhando no intervalo $(0, \sqrt{27})$, nos interessa apenas que $x = 3$ é ponto crítico de $f(x)$. Além disso, temos que $f''(3) = -36$, logo $x = 3$ é um ponto de máximo local. Finalmente, como este é o único ponto crítico de f no intervalo $(0, \sqrt{27})$, concluímos que f atinge seu máximo global em $x = 3$. Assim sendo, o retângulo de área a máxima são tem base igual a $2.3 = 6$ e altura $-3^2 + 27 = 18$.

4.11 Aproximações via Polinômios de Taylor - A Fórmula de Taylor

Recordando

Quando estudamos acréscimos e diferenciais, vimos que se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $x \in X$, ou seja, se existe $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, então a variação da função $y = f(x)$, dada por $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, pode ser aproximada por $f'(x) \cdot \Delta x$ quando Δx está próximo de 0:

$$\Delta y \;=\; f(x + \Delta x) - f(x) \;\approx\; f'(x) \cdot \Delta x \;=\; dy \quad \text{quando} \quad \Delta x \to 0$$

Isto é o mesmo que

$$f(x + \Delta x) \;\approx\; f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \;.$$

Geometricamente:

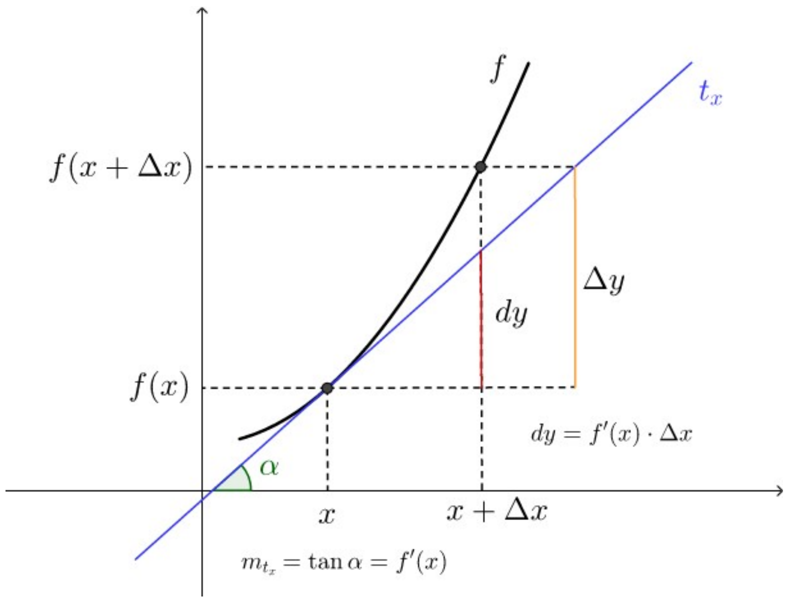


Figura 4.19: Aproximação de $f(x + \Delta x)$ por $f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$

A ideia é aproximar o gráfico de f por uma reta numa vizinhança em torno de x. A reta que melhor cumpre esse papel é a **reta tangente ao gráfico de f em** $(x, f(x))$, cujo coeficiente angular é $f'(x)$. Quando fazemos essa aproximação, cometemos um erro $r = r(\Delta x)$.

Quanto menor é $|\Delta x|$, ou seja, quanto mais próximos estão Δx e 0, melhor a aproximação obtida e menor é o erro cometido.

Pergunta: Podemos melhorar este processo e obter aproximações cada vez melhores?

Resposta: SIM ! (sob certas condições)

Um passo adiante

Se $f : I$ (intervalo aberto) $\to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável em um ponto $x \in I$ então, se $x + \Delta x \in I$, temos

$$f(x+\Delta x) \;\approx\; f(x) + f'(x)\cdot \Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\cdot (\Delta x)^2 \quad (\Delta x \text{ pequeno})$$

Da mesma forma que antes, quanto menor $|\Delta x|$, melhor é a aproximação.

Porém, desta vez estamos aproximando f (em torno de x) por um polinômio do 2^o grau, ou seja, geometricamente, o gráfico de f é aproximado por um arco de parábola e a expectativa é que isto funcione melhor como aproximação do que uma reta:

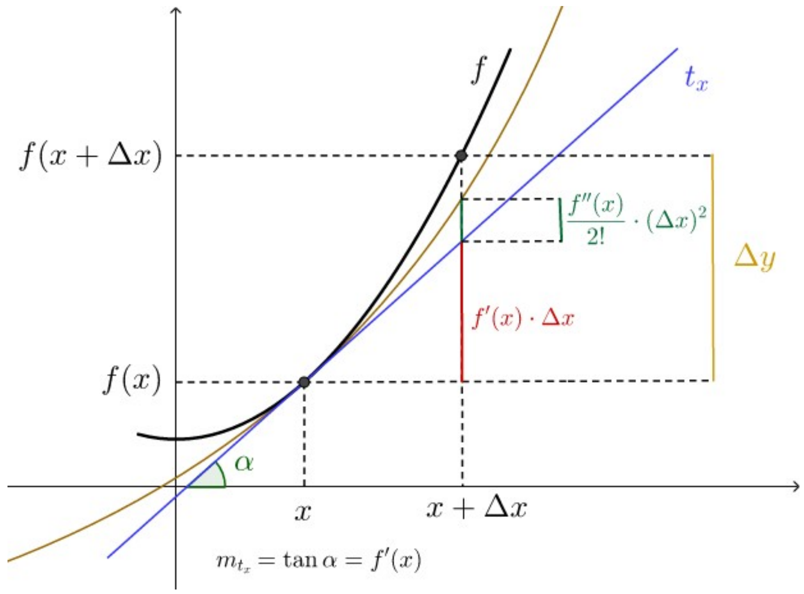


Figura 4.20: Aproximação de $f(x+\Delta x)$ por $f(x) + f'(x)\cdot \Delta x + \dfrac{f''(x)}{2!}\cdot (\Delta x)^2$

Generalizando

Se $f : I$ (intervalo aberto) $\to \mathbb{R}$ é $n-$vezes derivável em um ponto $x \in I$ então, se $x+\Delta x \in I$, temos:

$$f(x+\Delta x) \;\approx\; f(x) + f'(x)\cdot \Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\cdot (\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\cdot (\Delta x)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\cdot (\Delta x)^n$$

e quanto menor $|\Delta x|$, melhor é a aproximação.

Observação 4.85. Como o ponto $x \in I$, onde a função é $n-$vezes derivável, está fixo e Δx varia ($\Delta x \to 0$), vamos adotar uma NOVA NOTAÇÃO:

$f : I \to \mathbb{R}$ $n-$vezes derivável em um ponto $a \in I$. Se $a+h \in I$, temos:

$$f(a+h) \;\approx\; f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{f''(a)}{2!}\cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\cdot h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot h^n$$

e quanto menor $|h|$, melhor é a aproximação.

Observação 4.86. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é $n-$vezes derivável em um ponto $a \in I$, definimos o POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM n DA FUNÇÃO f NO PONTO a:

$$P_{n,f(a)}(h) \;=\; a_0 + a_1 \cdot h + a_2 \cdot h^2 + \ldots + a_n \cdot h^n$$

sendo $a_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$, $a_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}, \ldots, a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, ou seja,

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Neste caso temos:

$$f(a+h) \;\approx\; P_{n,f(a)}(h)$$

Exemplo 4.87. $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n = 5$:

$$e^h \;=\; f(0+h) \;\approx\; f(0) + f'(0) \cdot h + \frac{f''(0)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot h^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} \cdot h^5 \;\therefore$$

$$\therefore\; e^h \;\approx\; 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!}\,.$$

Exemplo 4.88. $g(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $n = 7$:

$$\operatorname{sen} h \;=\; g(0+h) \;\approx\; g(0) + g'(0) \cdot h + \frac{g''(0)}{2!} \cdot h^2 + \ldots + \frac{g^{(6)}(0)}{6!} \cdot h^6 + \frac{g^{(7)}(0)}{7!} \cdot h^7 \;\therefore$$

$$\therefore\; \operatorname{sen} h \;\approx\; h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!}\,.$$

Buscando estimativas: A Fórmula de Taylor

Teorema 4.89. *(Fórmula de Taylor) Se uma função f é $n+1$ vezes derivável em um intervalo aberto I contendo $x = a$ então, se $a + h \in I$, temos:*

$$f(a+h) \;=\; f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}$$

com $z = z(n,h)$ entre a e $a + h$.

- Continuamos tendo $f(a+h) \;\approx\; P_{n,f(a)}(h)$ quando h está próximo de 0.

- $R_n(h) = \dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}$ é o erro cometido na aproximação $f(a+h) \;\approx\; P_{n,f(a)}(h)$ (quanto menor $|h|$, menor o erro).

- A Fórmula de Taylor nos permite, além de aproximar $f(a+h)$ por $P_{n,f(a)}(h)$, tentar obter estimativas para o erro cometido.

Exemplo 4.90. Vamos usar o Polinômio de Taylor de ordem 7 da função seno em torno de $a = 0$ para aproximar $\operatorname{sen}(1/2)$ e vamos usar a Fórmula de Taylor para obter uma estimativa do erro cometido nessa aproximação:

Usando $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$ e $n = 7$, já vimos que $\operatorname{sen}(h) \approx h - \dfrac{h^3}{3!} + \dfrac{h^5}{5!} - \dfrac{h^7}{7!}$.

Teremos então (tomando $h = 1/2$):

$$\operatorname{sen}(1/2) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{5!2^5} - \frac{1}{7!2^7} = 0,4794255332341269841269841...$$

Pela Fórmula de Taylor, o erro cometido com a aproximação acima é

$$R_7(1/2) = \frac{f^{(8)}(z)}{8!} \cdot (1/2)^8 = \frac{\operatorname{sen} z}{8!2^8}, \text{ com } z \in (0, 1/2) .$$

E temos: $|R_7(1/2)| = \dfrac{|\operatorname{sen} z|}{8!2^8} \leq \dfrac{1}{8!2^8} < 9,68812004 \cdot 10^{-8} = 0,0000000968812004$

Isto significa que o a diferença entre o valor exato do $\operatorname{sen}(1/2)$ e o valor aproximado pelo Polinômio de Taylor só deve aparecer a partir da oitava casa decimal !!! (De fato, usando uma calculadora, obtemos $\operatorname{sen}(1/2) = 0,479425538604203...$!!!)

Indo um pouco mais além: A Série de Taylor:

Uma função $f : I$ (intervalo aberto) $\to \mathbb{R}$ é chamada ANALÍTICA quando para cada $a \in I$ admite o desenvolvimento em Série de Taylor numa vizinhança em torno de a:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \dots$$

Quando $a+h$ está próximo de a (o quanto, depende de f e sua Série) a soma à direita, chamada a SÉRIE DE TAYLOR DE f EM TORNO DE a converge para o valor (exato de) $f(a+h)$, ou seja, se aproxima tanto quanto desejarmos de $f(a+h)$.

Observação 4.91.

1. Uma função analítica pode ser derivada tantas vezes quanto desejarmos.
2. As funções clássicas $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $e^x, \operatorname{sen} x, \cos x, \ln x$ são todas analíticas.

Exemplo 4.92. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ em torno de $a = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R}) .$$

Exemplo 4.93. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $a = 0$.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R}) .$$

4.12 Exercícios

1. (2009-2) Considerando $\ln 2 \approx 0,6931$, use diferenciais para aproximar $\ln 2,01$.
2. (2010-1) Usando diferenciais, o valor aproximado para $\sqrt{20}$ é:

a) $4,47$ b) $4,48$ c) $4,49$ d) $4,50$ e) $4,51$

3. A medida do lado de um cubo é encontrada como sendo igual a $15cm$, com possibilidade de erro de $0,01cm$. Use diferencial para encontrar o erro aproximado no cálculo de:

   a) Volume do cubo. b) Área de uma face.

4. Usando diferencial, mostre que:

   a) $\operatorname{sen} x \approx x$ para x próximo de zero; b) $\operatorname{tg}(0,1) \approx 0,1$

5. O raio de uma bola foi medido obtendo-se $10cm$.

   a) Se a possibilidade de erro máximo nessa medida for de $0,1cm$, dê uma aproximação para o erro máximo no cálculo do volume desta bola.
   b) Com que precisão deve ter sido medido o raio da bola para que o cálculo do volume tenha erro máximo, aproximadamente, igual a $1cm^3$?

6. Uma pedra é jogada em um lago provocando uma onda circular de raio r, o qual varia com o tempo a uma taxa constante de $3cm/s$. A taxa de variação, com o tempo, em cm^2/s, da área do círculo limitado pela onda, no instante em que o raio vale $20cm$ é:

   a) 120π b) 6π c) 12π d) 60π e) 150π

7. (2009-2) O lucro L de uma empresa (em reais) com a venda de x unidades de um produto pode ser modelado pela equação $L(x) = 500x - \dfrac{x^2}{4}$. As vendas estão aumentando à taxa de dez unidades por dia. Determine a taxa devariação do lucro, em reais por dia, no momento em que a empresa acabou de vender 500 unidades.

8. (2015-1) Uma bola de neve derrete de forma que a área da sua superfície decresce a uma taxa de $1cm^2/min$. A taxa segundo a qual o diâmetro decresce, em cm/min, quando este está em 10cm é:

   a) $\dfrac{1}{20\pi}$ b) $\dfrac{1}{40\pi}$ c) $\dfrac{1}{10\pi}$ d) 20π e) 40π

9. (2014-1) O volume de um cubo está aumentando à taxa de $2cm^3/s$. Com que taxa, em cm^2/s, estará variando a área de uma de suas faces, quando sua aresta tiver $20cm$?

   a) 15 b) $\dfrac{1}{15}$ c) 600 d) $\dfrac{1}{600}$ e) 300

10. (2013-1) Aquecendo uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de $0,01cm/min$. Qual é a taxa, em cm^2/min, à qual a área de uma das faces da chapa varia quando o diâmetro é $30cm$?

    a) $0,075\pi$ b) $0,15\pi$ c) $0,3\pi$ d) $0,6\pi$ e) $1,2\pi$

11. (2011-1) Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de $6m$ de raio da base e $12m$ de altura. No tempo $t = 0$, a água começa a fluir no tanque à razão de $9m^3/h$. Com que velocidade, em m/h, o nível da água sobe?

a) $0,2/\pi$ b) $0,25/\pi$ c) $0,35/\pi$ d) $0,4/\pi$ e) $0,5/\pi$

12. (2017-1) A base e as diagonais de um retângulo estão aumentando à taxas de $0,5\,$cm/s e $1\,$cm/s respectivamente. Com que velocidade, em cm/s, aumenta a altura do retângulo nos momentos em que a base mede o dobro da altura?

    a) $\sqrt{5}-1$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}+1$ d) $3/4$ e) 4

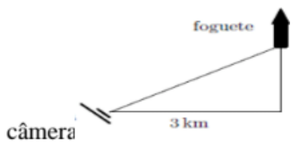
13. (2013-2) Um tanque em forma de cone com o vértice para baixo mede 12 m de altura e tem no topo um diâmetro de 12 m. Bombeia-se água à taxa de $4m^3/min$. Qual é a taxa, em m/min, com que o nível da água sobe quando a água tem 2 m de profundidade?

    a) $\dfrac{1}{\pi}$ b) $\dfrac{4}{\pi}$ c) $\dfrac{1}{4\pi}$ d) $\dfrac{1}{8\pi}$ e) $\dfrac{8}{\pi}$

14. (2012-2) As coordenadas de uma partícula em um plano xy são funções deriváveis do tempo t, com $\dfrac{dx}{dt} = 10m/s$ e $\dfrac{dy}{dt} = 5m/s$. A que taxa a distância entre a partícula e a origem varia, quando esta passa pelo ponto $(3,-4)$?

    a) $1m/s$ b) $2m/s$ c) $5m/s$ d) $10m/s$ e) $15m/s$

15. (2011-2) Na figura abaixo, uma câmera registra o momento em que um foguete é lançado. Sabendo que a velocidade do foguete é $850km/h$, a taxa de variação da distância entre a câmera e o foguete em relação ao tempo, em km/h, quando o foguete estiver a $4km$ de altura, é



    a) 170 b) 212, 5 c) 500 d) 680 e) 854, 01

16. (2010-2) Pela ruptura de um tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo cuja área cresce a uma taxa constante de $6m^2/h$. Com que rapidez estará variando o raio da mancha crescente quando a área for de $9m^2$?

17. Calcule os limites abaixo, **usando** a Regra de L'Hospital.

    a) (2015-1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

    b) (2015-1) $\lim\limits_{x\to +\infty} (xe^{1/x} - x)$

    c) (2015-1) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$

    d) (2016-1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x) - 1}{e^{2x} - 1}$

    e) (2016-1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

    f) (2016-2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

    g) (2016-2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}\right)$

    h) (2016-2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x + x^2)^{1/x}$

    i) (2017-1) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{\operatorname{sen}^2(x-1)}$

    j) (2010-1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

k) (2010-1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

l) (2010-1) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (x-\pi/2)\cdot \operatorname{tg} x$

m) (2010-1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

n) (2013-2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x}$

o) (2013-2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}^2 x)}{\ln x}$

p) (2014-2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2e^x}{\operatorname{sen}^2(3x)}$

q) (2014-2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{1/x}$

r) (2014-2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cossec} x - \dfrac{1}{x}\right)$

18. (2016-2) A soma dos valores de a e b para os quais a função dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tem um extremo relativo no ponto $(-2, 1)$ é:

a) 0 b) 6 c) 3 d) 2 e) -2

19. Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ com $x \in [0, 2\pi]$.

20. Encontre os valores de $p \in \mathbb{N}$ para os quais $f(x) = x^p$ seja uma função crescente em $\mathbb{R}$.

21. Em cada item encontre, se existirem, os extremos locais da função dada

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

(b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x(\ln x)^2$.

(c) $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}, f(x) = \tan x$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^3 - 1)(e^x - 1)$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(g) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \le 1 \\ -3x+4, & x > 1 \end{cases}$$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \le 2 \\ -x^2+8, & x > 2 \end{cases}$

22. Em cada item encontre os extremos globais da função.

(a) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\pi/4, \pi/4]$

(b) $f(x) = 3^x$, $x \in [0, 1]$

23. Em cada item estude a existência de máximos e mínimos globais da função.

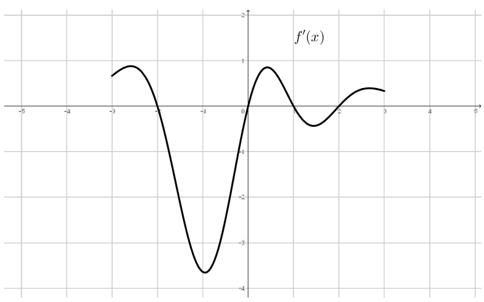
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 - 5x^3$.

(b) $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^3 - 1)(e^x - 1)$

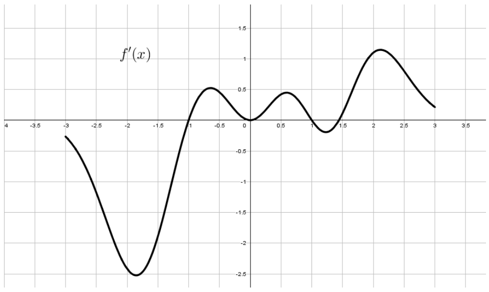
24. Na figura a seguir temos um gráfico da derivada de uma função $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$.



É correto afirmar que:

(a) f não possui máximos locais.
(b) f possui três máximos locais.
(c) f possui exatamente um mínimo local
(d) f possui dois pontos de máximo.
(e) f não possui mínimos locais.

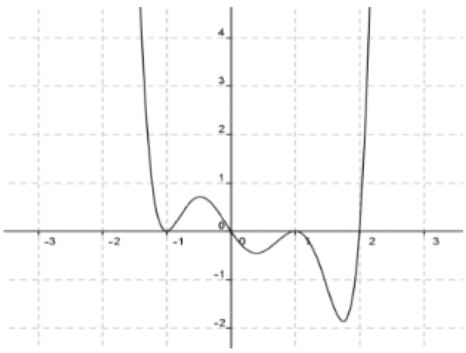
25. Na figura abaixo temos um gráfico da derivada de uma função $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$.



É correto afirmar que:

(a) f possui dois mínimos e um máximo.
(b) f possui dois mínimos e dois máximos.
(c) f três mínimos e um máximo.
(d) f três máximos e um mínimo.
(e) f possui três máximos e dois mínimos.

26. (2011-1) Parte do gráfico da derivada primeira f' de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está representada abaixo.



Marque a alternativa INCORRETA:

(a) A função f é crescente no intervalo $(-1, 0)$.
(b) A função f é decrescente no intervalo $(1, 2)$.
(c) A função f possui mínimo relativo (local) em $x = -1$.
(d) A função f possui mínimo relativo (local) em $x = 2$.
(e) A função f possui máximo relativo (local) em $x = 0$.

27. (2016-1) Sabendo que $x = 2$ é um ponto de mínimo local da função

$$f(x) = ax - b\ln(1 + x^2),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde a e b são constantes, é **CORRETO** afirmar que:

(a) $5a = 4b$ (b) $5a = 2b$ (c) $a = 2b$ (d) $2a = b$ (e) $a = 4b$

28. Encontre, caso existam, os extremos absolutos nos seguintes intervalos:

i) $[-1, 5]$ ii) $(-1, 5)$ iii) $\mathbb{R}$ iv) $[-1, 3)$ v) $(-1, 3]$ vi) $(-1, 3)$

para cada uma das funções dadas abaixo.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & \text{se } x \leq 3 \\ x^3 - 48x + 117, & \text{se } x > 3 \end{cases}$ (b) $f(x)x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

29. Em cada item a seguir, determine: o domínio, as interseções com os eixos (se possível), os pontos críticos, os intervalos de crescimento e decrescimento, os extremos locais e globais, os intervalos de concavidade, os pontos de inflexão, as assíntotas de f. Em seguida, esboce o gráfico de f.

a) $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + 2$

b) $f(x) = \dfrac{3 - 4x}{2x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \dfrac{5x^2 + 2}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

i) $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{2e^x}{x + 2}$

l) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

30. Dada a função $y = x^3 - 2mx^2 + n^2x + 3$, calcule m e n de modo que $x = 0$ seja abscissa de um extremo relativo e $x = 2$ seja a abscissa de um ponto de inflexão do gráfico dessa função. Para esses valores de m e n, determine:

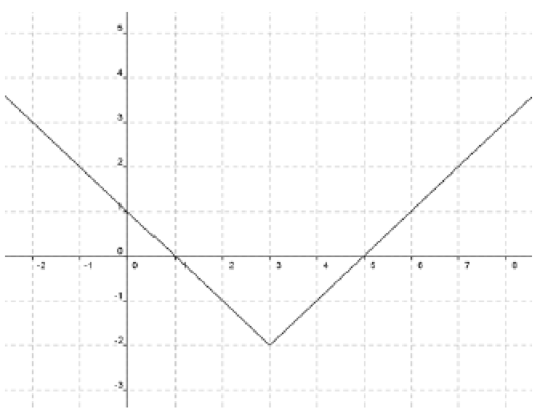
a) intervalos de crescimento ou decrescimento da função;

b) os extremos relativos da função;

c) os pontos de inflexão do gráfico da função;

d) um esboço do gráfico.

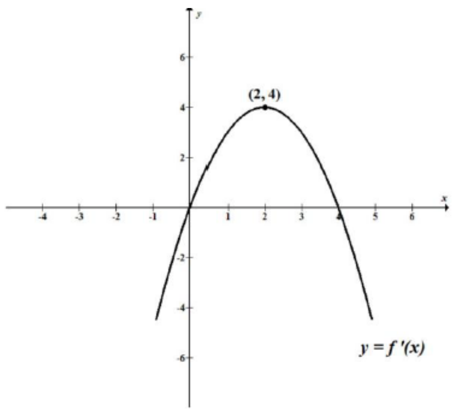
31. (2014-1) O gráfico da derivada da função f está representado abaixo.



Marque a alternativa que apresenta o intervalo onde a função f é decrescente e côncava para cima ao mesmo tempo.

a) $(-\infty, 1)$ b) $(1, 3)$ c) $(3, 5)$ d) $(-\infty, 3)$ e) $(5, +\infty)$

32. (2013-2) O gráfico da derivada da função f está representado abaixo.



Marque a alternativa que apresenta intervalos onde a função f é crescente e côncava para baixo ao mesmo tempo.

a) $(-\infty, 2)$ c) $(2, 4)$ e) $(0, 2)$
b) $(0, 4)$ d) $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

33. (2011-2) Considere as seguintes afirmativas sobre uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida no intervalo fechado $[a, b]$.

I) Existe um número $c \in [a, b]$ em que a função f assume máximo absoluto (global).

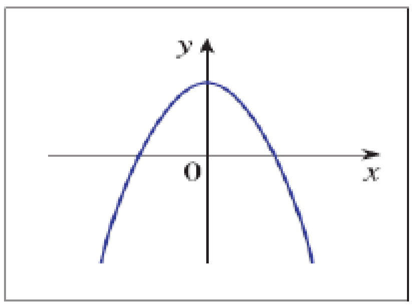
II) Se $c \in (a, b)$ é tal que $f'(c) = 0$, então a função f assume extremo relativo (local) em c.

III) Se $c \in (a, b)$ é tal que $f''(c) = 0$, então f possui ponto de inflexão em c.

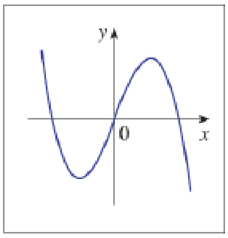
Marque a alternativa CORRETA:

a) Todas as afirmativas são verdadeiras. d) Apenas a afirmativa II é falsa.
b) Todas as afirmativas são falsas.
c) Apenas a afirmativa I é verdadeira. e) Apenas a afirmativa III é falsa.

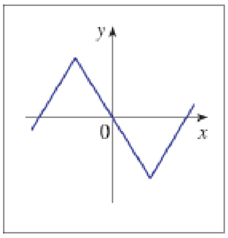
34. (2011-2) O gráfico da derivada primeira f' de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está representado abaixo.



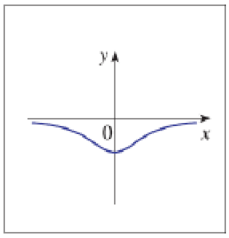
A alternativa que melhor representa o gráfico da função f é:



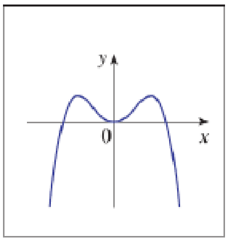
(a)



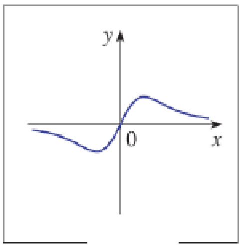
(b)



(c)

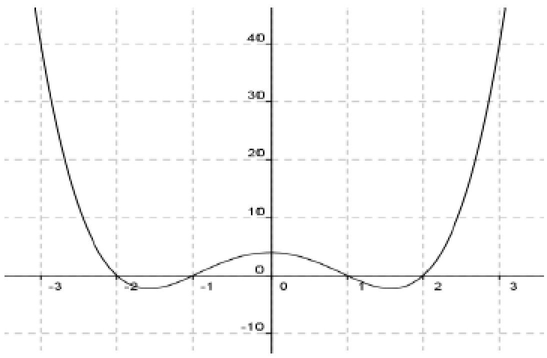


(d)



(e)

35. (2010-2) Parte do gráfico da derivada segunda f'' de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está representado abaixo.



Considere as seguintes afirmações:

I) O gráfico da função f apresenta quatro pontos de inflexão no intervalo $[-3, 3]$.

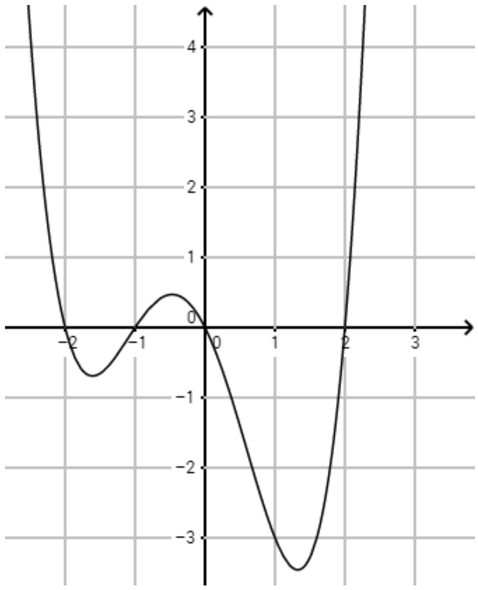
II) A função f tem concavidade voltada para baixo no intervalo $(-1, 1)$.

III) A função f tem concavidade voltada para cima no intervalo $(-3, -2)$ e no intervalo $(2, 3)$.

Marque a alternativa CORRETA:

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Todas as afirmações são falsas.
c) Apenas a afirmação I é falsa.
d) Apenas a afirmação II é falsa.
e) Apenas a afirmação III é falsa.

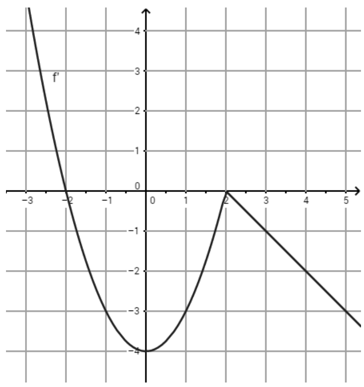
36. (2017-1) A figura abaixo representa o gráfico da **derivada** f' de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Sobre o comportamento da função f no intervalo $(0, 2)$, é INCORRETO afirmar que:

a) f tem um ponto de inflexão.
b) f é decrescente.
c) f tem concavidade para cima.
d) f não tem ponto de mínimo local.
e) f não é constante.

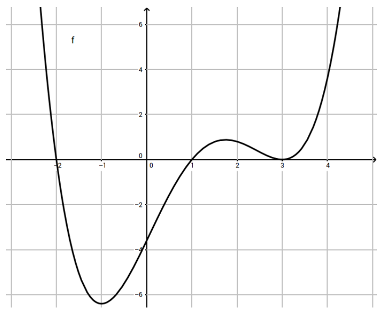
37. (2017-1) O gráfico a seguir representa a **derivada** f' de uma função contínua e derivável.



Sobre a função f restrita ao intervalo $(-3, 5)$ é **correto** afirmar que:

a) Tem mínimo local em $x = 0$, máximo local em $x = 2$ e ponto de inflexão em $x = 2$.
b) Tem máximo local em $x = -2$, pontos de inflexão apenas em $x = 2$ e não tem mínimo local.
c) Tem mínimo local em $x = 0$, máximo local em $x = 2$ e não tem ponto de inflexão.
d) Tem máximo local em $x = -2$, pontos de inflexão em $x = 0$ e $x = 2$ e não tem mínimo local.
e) Tem mínimo local em $x = -2$, pontos de inflexão em $x = 0$ e $x = 2$ e não tem máximo local.

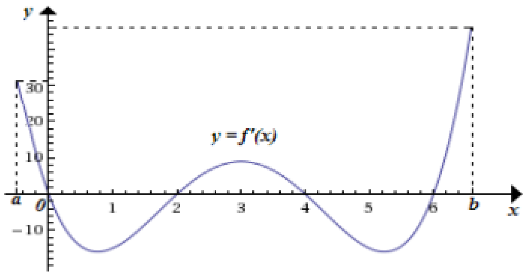
38. (2016-2) A figura abaixo representa o gráfico de uma função f derivável até segunda ordem.



Marque a alternativa que apresenta um intervalo onde tanto f' quanto f'' são positivas:

a) $(3, 4)$ b) $(-2, 1)$ c) $(1, 3)$ d) $(1, 4)$ e) $(-2, 3)$

39. (2010-1) O gráfico da derivada primeira f' de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ está mostrado abaixo.



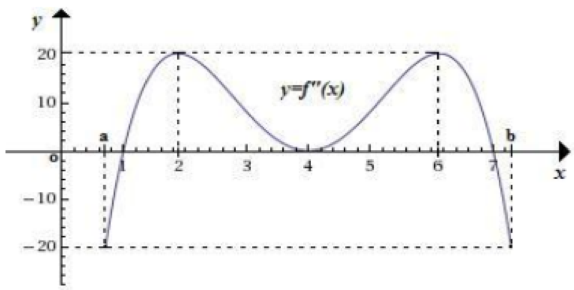
Considere as seguintes afirmações:

I. A função f tem mínimos relativos em $x = 0$ e $x = 4$.
II. A função f tem máximos relativos em $x = 2$ e $x = 6$.
III. A função f é crescente no intervalo $[2, 4]$.
IV. A função f é decrescente no conjunto $[0, 2] \cup [4, 6]$.

Podemos afirmar que:

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) As afirmações I e II são verdadeiras e as afirmações III e IV são falsas.
c) As afirmações I, III e IV são verdadeiras e a afirmação II é falsa.
d) As afirmações III e IV são verdadeiras e as afirmações I e II são falsas.
e) A afirmação IV é verdadeira e as afirmações I, II e III são falsas.

40. (2010-1) O gráfico da derivada segunda f'' de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ está mostrado abaixo.



Considere as seguintes afirmações:

I. Os pontos $(1, f(1))$ e $(7, f(7))$ são pontos de inflexão do gráfico da função f.

II. O ponto $(4, f(4))$ é ponto de inflexão do gráfico da função f.

III. A função f tem concavidade voltada para cima no intervalo $(1, 7)$.

IV. A função f tem concavidade voltada para baixo no conjunto $(1, 2) \cup (6, 7)$.

Podemos afirmar que:

a) As afirmações III e IV são verdadeiras e as afirmações I e II são falsas.

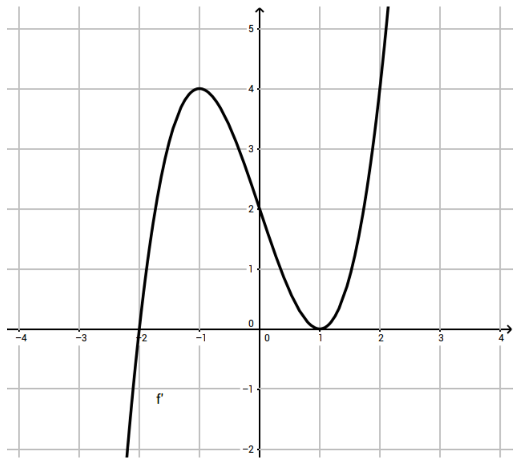
b) As afirmações I e II são verdadeiras e as afirmações III e IV são falsas.

c) As afirmações I e III são verdadeiras e as afirmações II e IV são falsas.

d) As afirmações II e IV são verdadeiras e as afirmações I e III são falsas.

e) As afirmações II e III são verdadeiras e as afirmações I e IV são falsas.

41. (2016-2) A figura abaixo representa o gráfico da derivada f' de uma função f.



Responda **Verdadeiro (V)** ou **Falso (F)** para cada uma das seguintes afirmações. Justifique sua resposta.

( ) A função f tem um mínimo local em $x = -2$ e não tem máximo local.

( ) A reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ tem coeficiente angular positivo.

( ) A função f tem um ponto de inflexão em $x = -1$.

( ) No intervalo $(-2, 1)$ a função f é crescente e côncava para baixo.

As questões de números 41 a 47 referem-se à função f definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x} + 1$.

42. A primeira derivada da função f é:

a) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ c) $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1)}{x^2}$ e) $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x}$ d) $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

43. A segunda derivada da função f é:

a) $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^4}$ c) $f''(x) = \dfrac{e^x}{x^4}$ e) $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2-2x-2)}{x^4}$

b) $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$ d) $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2+2x-2)}{x^3}$

44. Sobre o crescimento e decrescimento da função f, podemos afirmar que:

   a) f é decrescente no intervalo $(-\infty, 1)$ e crescente no intervalo $[1, +\infty)$.

   b) f é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e crescente no intervalo $(0, +\infty)$.

   c) f é decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$ e crescente no intervalo $[1, +\infty)$.

   d) f é crescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$ e decrescente no intervalo $[1, +\infty)$.

   e) f é crescente no intervalo $(-\infty, 1)$ e decrescente no intervalo $[1, +\infty)$.

45. Sobre a concavidade da função f, podemos afirmar que:

   a) f é côncava para cima no intervalo $(-\infty, 0)$ e côncava para baixo no intervalo $(0, +\infty)$.

   b) f é côncava para cima no intervalo $(0, +\infty)$ e côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$.

   c) f é côncava para cima no intervalo $[1, +\infty)$ e côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$.

   d) f é côncava para cima no intervalo $(-\infty, 1)$ e côncava para baixo no intervalo $(1, +\infty)$.

   e) f é côncava para cima no intervalo $(1, +\infty)$ e côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$.

46. Sobre máximos e mínimos (locais) e pontos de inflexão da função f, podemos afirmar que:

   a) f possui mínimo local em $x = 1$, ponto de inflexão em $x = 0$ e não possui máximo local.

   b) f possui mínimo local em $x = 1$ e não possui máximo local nem ponto de inflexão.

   c) f possui máximo local em $x = 1$, ponto de inflexão em $x = 0$ e não possui mínimo local.

   d) f possui máximo local em $x = 1$ e não possui mínimo local nem ponto de inflexão.

   e) f não possui máximo local, mínimo local nem ponto de inflexão.

47. Sobre as assíntotas de f, é correto afirmar que:

   a) f não possui assíntotas verticais nem horizontais.

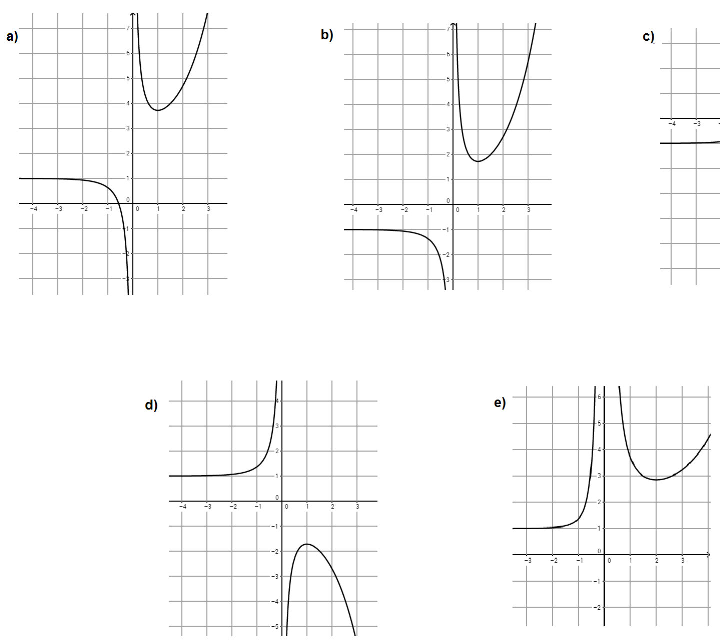
   b) f possui uma assíntota vertical em $x = 0$ e não possui assíntotas horizontais.

   c) f possui uma assíntota horizontal em $y = 1$ e não possui assíntotas verticais.

   d) f possui uma assíntota horizontal em $y = 1$ e uma assíntota vertical em $x = 0$.

   e) f possui uma assíntota vertical em $x = 0$ e uma assíntota horizontal em $y = -1$.

48. O gráfico que melhor representa a função f é:



49. Um banco oferece juros anual $\ell(t)$, em %, dependendo do tempo t, em anos, que o investidor esteja disposto a manter o investimento. Se $\ell(t) = \dfrac{106t}{t^2+16}$, determine quantos anos deve manter o investimento para ter lucro máximo.

50. O custo para produzir x unidades de um certo produto é dado por

$$C(x) = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 30x + 25$$

Determine o lucro máximo na venda do produto por 10 reais a unidade.

51. Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

52. Um recipiente sem tampa em forma de paralelepípedo reto tem duas faces laterais opostas quadradas e volume igual a $972cm^3$. A soma das dimensões da base para que o mesmo tenha área de superfície mínima é:

(a) 18 cm (b) 21 cm (c) 24 cm (d) 30 cm (e) 33 cm

53. Um terreno retangular deve ser cercado da seguinte maneira: dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa 3 reais o metro, enquanto os dois lados restantes recebem uma cerca padrão de 2 reais o metro. Qual é o perímetro do terreno de maior área que pode ser cercado com 6000 reais?

(a) 1000 m (b) 1250 m (c) 2500 m (d) 93750 m (e) 375000 m

54. Um jardim retangular de $98m^2$ de área deve ser protegido contra animais. Se um lado do jardim já está protegido por uma parede de celeiro, qual deve ser o menor comprimento da cerca para os outros lados?

(a) 14 m (b) 21 m (c) 28 m (d) 35 m (e) 42 m

55. Uma área retangular em uma fazenda tem um de seus lados delimitado por um rio e os outros três lados delimitados por uma cerca de comprimento total igual a 800 m. Qual o maior valor possível que essa área pode ter?

(a) 20000 m^2 (b) 40000 m^2 (c) 50000 m^2 (d) 60000 m^2 (e) 80000 m^2

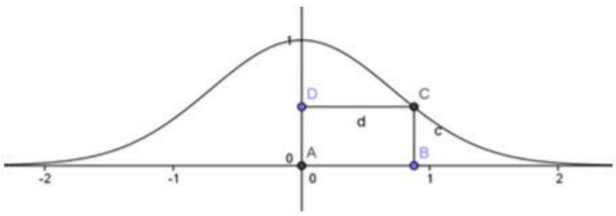
56. O volume máximo possível de uma lata cilíndrica, sem tampa, que pode ser feita com 27π cm^2 de metal é:

(a) $9\,\pi\,cm^3$ (b) $18\,\pi\,cm^3$ (c) $27\,\pi\,cm^3$ (d) $58\,\pi\,cm^3$ (e) $81\,\pi\,cm^3$

57. Qual é a maior área possível de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 5 cm?

(a) 5 cm^2 (b) 6 cm^2 (c) 6,25 cm^2 (d) 12 cm^2 (e) 12,5 cm^2

58. Para cada $x > 0$, considere o retângulo R com vértices nos pontos $A = (0, 0)$, $B = (x, 0)$, $C = (x, e^{-x^2})$ e $D = (0, e^{-x^2})$, conforme figura a seguir.



Determine x para que a área do retângulo R seja máxima.

59. Obtenha o Polinômio de Taylor de ordem n das funções dadas abaixo para aproximá-las nas vizinhanças dos pontos a dados:

(a) $c(x) = \cos x$, $n = 7$, $a = 0$.
(b) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 4$, $n = 3$, $a = 1$.
(c) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 4$, $n = 5$, $a = 1$.
(d) $u(x) = e^x$, $n = 6$, $a = 0$.
(e) $l(x) = \ln x$, $n = 4$, $a = 1$.

60. Seja $p_{n,f(a)}(h)$ o Polinômio de Taylor de ordem n da função n-vezes derivável f em torno de um ponto a. Calcule as derivadas de ordem 0 a n do polinômio p no ponto $h = 0$.

61. Utilize o Polinômio de Taylor de ordem n para aproximar os valores abaixo. Depois use a Fórmula de Taylor para estimar o erro cometido com sua aproximação e com isso obtenha o número de casas decimais exatas da aproximação. Por último, calcule o valor exato (use uma calculadora) e compare com as estimativas anteriores:

(a) $\cos(1/3)$, $n = 5$.
(b) $\sqrt{e} = e^{1/2}$, $n = 6$.

62. Obtenha a Série de Taylor de $f(x) = \ln x$ em torno do ponto $a = 1$, conseguindo assim uma série de potências de h que represente $\ln(1+h)$. Admitindo a convergência com $h = 1$, obtenha uma soma de frações que seja igual a $\ln 2$.

63. Obtenha a Série de Taylor de $c(x) = \cos x$ em torno do ponto $a = 0$, conseguindo assim uma série de potências de h que represente $\cos h$. SEM SE PREOCUPAR COM QUESTÕES DE CONVERGÊNCIA e usando as Séries de Taylor de $u(x) = e^x$ e $s(x) = \operatorname{sen} x$ (veja os exemplos)...

    (a) ... obtenha os limites: Trigonométrico Fundamental e Exponencial Fundamental.

    (b) ... obtenha uma soma de frações que seja igual a $e = e^1$.

    (c) ... obtenha as derivadas de e^x, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

    (d) ... calcule $\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, usando que $i^2 = -1$.

4.13 Respostas dos Exercícios

1. $0,6981$
2. d)
3. (a) 6,75 cm^3 (b) 0,3 cm^2
4. *
5. a) $\approx 40\pi cm^3$ b) $\approx 0,0025/\pi$
6. a)
7. 2500 reais/dia
8. a)
9. b)
10. b)
11. b)
12. a)
13. b)
14. b)
15. d)
16. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$
17. (a) 1 (b) 1 (c) -1/8 (d) 0 (e) $\sqrt{e}$ (f) 0 (g) 0 (h) e (i) $+\infty$ (j) 1/6 (k) $+\infty$ (l) -1 (m) 1 (n) 1 (o) 2 (p) 1/9 (q) 1 (r) 0
18. a)
19. $f(x) = \operatorname{sen} x$ é crescente em $[0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$ e decrescente em $[\pi/2, 3\pi/2]$.
    $g(x) = \cos x$ é decrescente em $[0, \pi]$ e crescente em $[\pi, 2\pi]$.
20. p ímpar
21. (a) $x = 0$ (min)
    (b) $x = 1$ (min) e $x = e^{-2}$ (max)
    (c) Não existem.
    (d) $x \approx 0,7$ (min)
    (e) $x = -1$ (min) e $x = 1$ (max)
    (f) $x = 0$ (min)
    (g) Não existem.
    (h) $x = 2$ (max)
22. (a) $= -\pi/4$ (min) e $x = \pi/4$ (max)
    (b) $x = 0$ (min) e $x = 1$ (max)
23. (a) Não existem.
    (b) Não existem.
    (c) $x = 0$ (min)
    (d) $x \approx 0,7$ (min)
24. (d)
25. (a)
26. (c)
27. (a)
28. (a) i) $x = 4$ (min) e $x = 5$ (max)
    ii) $x = 4$ (min)
    iii) $x = 4$ (min)
    iv) $x = 1$ (min) e $x = -1$ (max)
    v) $x = 1$ (min) e $x = 3$ (max)
    vi) $x = 1$ (min)

    (b) i) $x = -1$ (min) e $x = 5$ (max)
    ii) Não existem.
    iii) Não existem.
    iv) $x = -1$ (min) e $x = 1$ (max)
    v) $x = 1$ (max)
    vi) $x = 1$ (max)
29. (a) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
    Interseções c. eixos: não há
    Crescente em: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
    Decrescente em: $[-2, 0) \cup (0, 2]$
    Pontos Críticos: {-2,2}
    Max Local: em $x = -2$
    Min Local em $x = 2$
    Côncava p/ baixo em: $(-\infty, 0)$
    Côncava p/ cima em: $(0, +\infty)$
    P. de Inflexão: não há
    Max Global: não há
    Min Global: não há
    Assíntota Vertical: $x = 0$
    Assíntota Horizontal: não há
    Assíntota Inclinada: $y = 2x + 2$.

    (b) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
    Interseções c. eixos: $\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$ e $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$
    Crescente em: não há
    Decrescente em: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
    Pontos Críticos: não há
    Max Local: não há
    Min Local: não há
    Côncava p/ baixo em: $(-\infty, -1)$
    Côncava p/ cima em: $(-1, +\infty)$
    P. de Inflexão: não há
    Max Global: não há
    Min Global: não há
    Assín Vertical: $x = -1$
    Assín Horizontal: $y = -2$
    Assín Inclinada: não há.

    (c) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
    Interseções c. eixos:$(1, 0)$
    Crescente em: $(0, 2]$
    Decrescente em: $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$
    Pontos Críticos:x=2
    Max Local: em $x = 2$;
    Min Local: não há
    Côncava p/ baixo em: $(-\infty, 3)$

Côncava p/ cima em: $(3, +\infty)$
P. de Inflexão: $\left(3, \dfrac{2}{9}\right)$
Max Global: em $x = 2$
Min Global: não há
Assíntota Vertical: $x = 0$
Assíntota Horizontal: $y = 0$
Assíntota Inclinada: não há.

(d) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
Interseções c. eixos:$(0, 1)$
Crescente em: $(0, +\infty)$.
Decrescente em: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
Pontos Críticos: $x = 0$
Max Local: não há
Min Local: em $x = 0$
Côncava p/ baixo em: $(-\infty, -1)$
Côncava p/ cima em: $(-1, +\infty)$
P. de Inflexão: não há
Max Global: não há
Min Global: não há
Assíntota Vertical: $x = -1$
Assíntota Horizontal: $y = 0$
Assíntota Inclinada: não há.

(e) Domínio: $\mathbb{R}$
Interseções c. eixos:$(0, 0)$
Pontos Críticos: $x = 1$
Crescente em: $(-\infty, 1)$
Decrescente em: $(1, +\infty)$
Max Local: em $x = 1$
Min Local: não há
Max Global: em $x = 1$
Min Global: não há
Côncava p/ baixo em: $(-\infty, 2]$
Côncava p/ cima em: $[2, +\infty)$
P. de Inflexão: $\left(2, 2e^{-2}\right)$
Assíntota Vertical: não há
Assíntota Horizontal: $y = 0$
Assíntota Inclinada: não há.

(f) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$
Interseções c. eixos:$(0, 0)$
Pontos Críticos: não há
Crescente em: não há
Decrescente em: $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$
Max Local: não há
Min Local: não há
Max Global: não há
Min Global: não há
Côncava p/ baixo em: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
Côncava p/ cima em: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
P. de Inflexão: $(0, 0)$
Assíntota Vertical: $x = -1$ e $x = 1$
Assíntota Horizontal: $y = 0$
Assíntota Inclinada: não há.

(g) Domínio: $\mathbb{R}$
Interseções c. eixos:$(0, 2)$
Pontos Críticos: $x = 0$
Crescente em: $[0, +\infty)$
Decrescente em: $(-\infty, 0]$
Max Local: não há
Min Local: em $x = 0$
Max Global: não há
Min Global: em $x = 0$
Côncava p/ baixo: $(-\infty, -\sqrt{1/3}] \cup [\sqrt{1/3}, +\infty)$
Côncava p/ cima em: $[-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}]$
P. de Inflexão: $\left(-\sqrt{1/3}, \dfrac{11}{4}\right)$ e $\left(\sqrt{1/3}, \dfrac{11}{4}\right)$
Assíntota Vertical: não há
Assíntota Horizontal: $y = 5$
Assíntota Inclinada: não há.

(h) Domínio: $\mathbb{R}$
Interseções c. eixos:$(0, 1)$, $(\pm 1, 0)$
Pontos Críticos: $x = 0$
Crescente em: $(-\infty, 0]$
Decrescente em: $[0, +\infty)$
Max Local: em $x = 0$
Min Local: não há
Max Global: em $x = 0$
Min Global: em $x = 0$
Côncava p/ baixo em: $[-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}]$
Côncava p/ cima em: $\mathbb{R}\backslash[-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}]$
P. de Inflexão: $\left(-\sqrt{1/3}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(\sqrt{1/3}, \dfrac{1}{2}\right)$
Assíntota Vertical: não há
Assíntota Horizontal: $y = -1$
Assíntota Inclinada: não há.

(i) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$
Interseções c. eixos:$\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$, $(\pm 3, 0)$
Pontos Críticos: $x = 0$
Crescente em: $[0, 2) \cup (2, +\infty)$
Decrescente em: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0]$
Max Local: não há
Min Local: em $x = 0$
Max Global: não há
Min Global: não há
Côncava p/ baixo em: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
Côncava p/ cima em: $(-2, 2)$
P. de Inflexão: não há
Assíntota Vertical: $x = -2$ e $x = 2$
Assíntota Horizontal: $y = 2$
Assíntota Inclinada: não há.

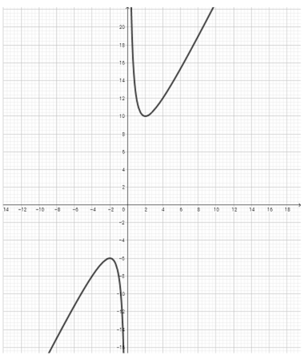
(j) Domínio: $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$
Interseções c. eixos:$(0, 0)$
Pontos Críticos: $x = 0$
Decrescente em: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
Crescente em: $(0, 2) \cup (2, +\infty)$
Max Local: não há
Min Local: em $x = 0$
Max Global: não há

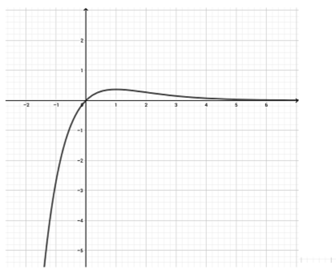
Min Global: não há
Côncava p/ baixo em: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
Côncava p/ cima em: $(-2, 2)$
P. de Inflexão: não há
Assíntota Vertical; $x = -2$ e $x = 2$
Assíntota Horizontal: $y = -1$
Assíntota Inclinada: não há.

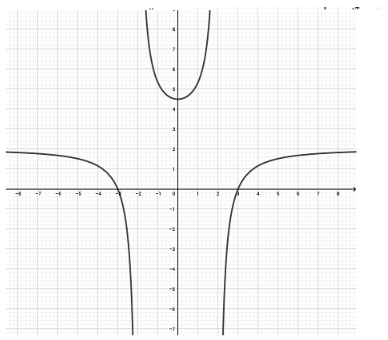
(k) Domínio: $\mathbb{R} \backslash \{-2\}$
Interseções c. eixos:$(0, 1)$
Pontos Críticos: $x = -1$
Crescente em: $[-1, +\infty)$
Decrescente em: $(-\infty, -2) \cup (-2, -1]$
Max Local não há
Min Local: em $x = -1$
Max Global: não há;
Min Global: não há
Côncava p/ baixo em: $(-\infty, -2)$
Côncava p/ cima em: $(-2, +\infty)$
P. de Inflexão: não há
Assíntota Vertical: $x = -2$
Assíntota Horizontal: $y = 0$
Assíntota Inclinada: não há.

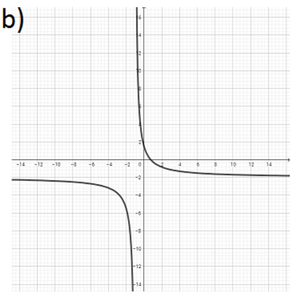
(l) Domínio: $\mathbb{R} \backslash \{0\}$
Interseções c. eixos: não há
Pontos Críticos: $x \in \{-1, 1\}$
Crescente em: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
Decrescente em: $[-1, 0) \cup (0, 1]$
Max Local: em $x = -1$
Min Local: em $x = 1$
Max Global: não há
Min Global: não há
Côncava p/ baixo em: $(-\infty, 0)$
Côncava p/ cima em: $(0, +\infty)$
P. de Inflexão: não há
Assíntota Vertical: $x = 0$
Assíntota Horizontal: não há
Assíntota Inclinada: y=x.

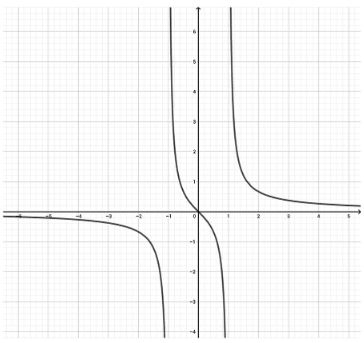
Os gráficos das funções do exercício 28 estão a seguir:

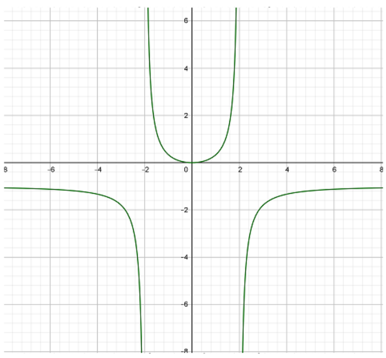
a)


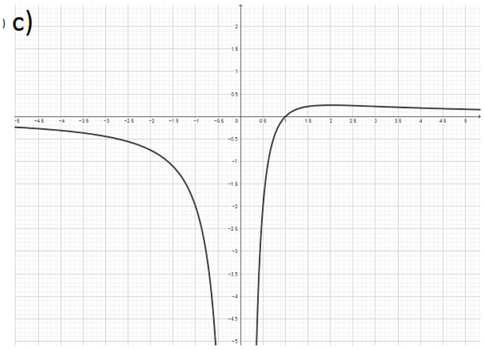
e)


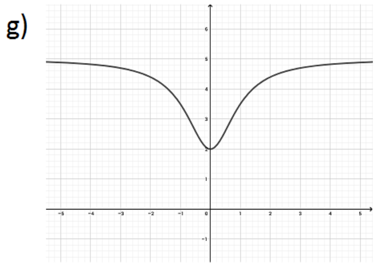
i)


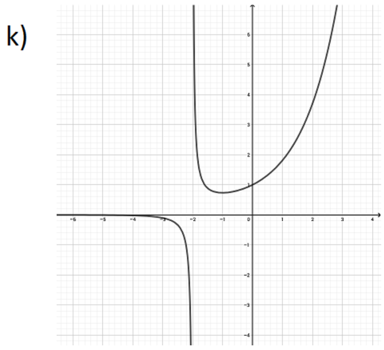
b)


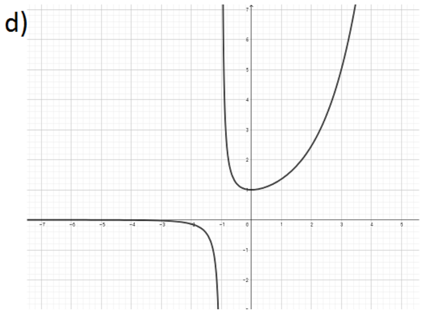
f)


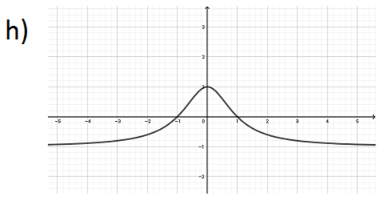
j)


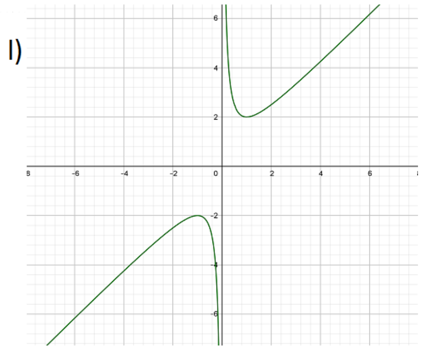






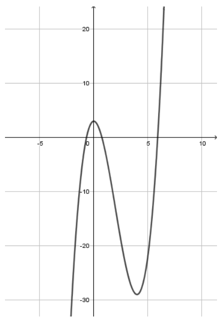






30. $m = 3$ e $n = 0$

    (a) Crescente em $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ e decrescente em [0,4].
    (b) Máximo local em $x = 0$ e mínimo local em $x = 4$.
    (c) Ponto de inflexão $(2, -13)$.
    (d) Um esboço do gráfico:



31. c) 32. c) 33. c) 34. a) 35. d) 36. c) 37. d) 38. a) 39. d) 40. c)

41. V F V F

42. a) 45. b) 48. a) 51. 35 54. c) 57. c)

43. b) 46. b) 49. $t = 4$ 52. b) 55. e)

44. c) 47. d) 50. $x = 10$ 53. c) 56. c) 58. $\frac{\sqrt{2}}{2}$