

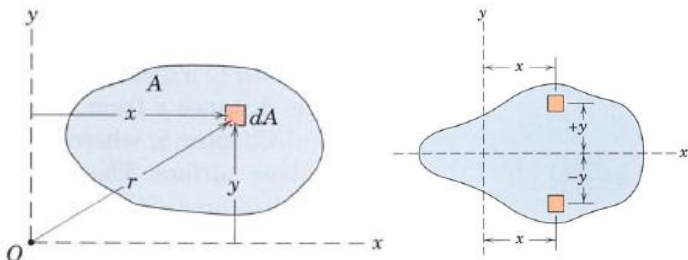
# Programa

- 2 Propriedades Geométricas de Áreas Planas
  - Centróide
  - Momentos de Inércia
  - Teorema dos Eixos Paralelos



# Introdução

- Momentos de área com relação a um eixo e a um ponto

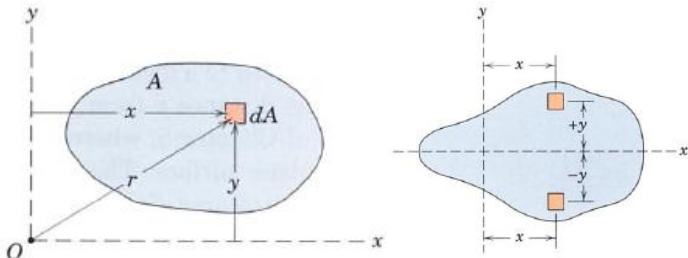


- Momento de área de primeira ordem –  $Q$

- $Q_x = \int_A y \, dA$  (Momento de área com relação ao eixo  $x$ )
- $Q_y = \int_A x \, dA$  (Momento de área com relação ao eixo  $y$ )

# Introdução

- Momentos de área com relação a um eixo e a um ponto

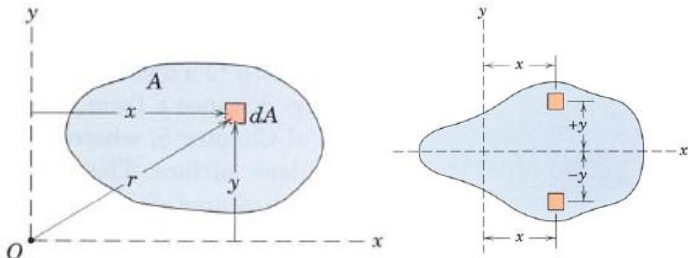


- Momento de área de segunda ordem –  $I, J$

- $I_x = \int_A y^2 dA$  (Momento de inércia com relação ao eixo  $x$ )
- $I_y = \int_A x^2 dA$  (Momento de inércia com relação ao eixo  $y$ )

# Introdução

- Momentos de área com relação a um eixo e a um ponto

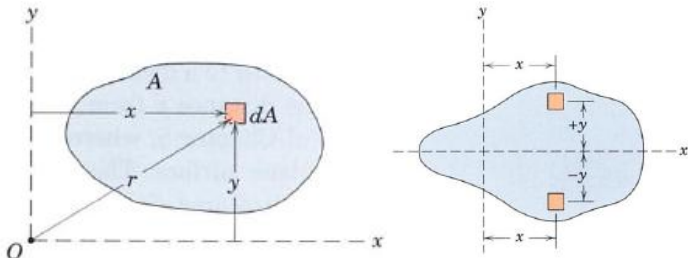


- Momento de área de segunda ordem –  $J$

- $J_O = \int_A x^2 + y^2 dA = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$  (Momento de inércia polar)

# Introdução

- Momentos de área com relação a um eixo e a um ponto



- Momento de área de segunda ordem –  $I_{xy}$

- $I_{xy} = \int_A xy \, dA$  (Produto de inércia)

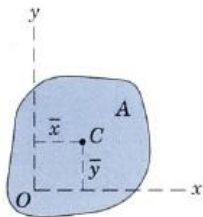
# Programa

- 2 Propriedades Geométricas de Áreas Planas
  - Centroide
  - Momentos de Inércia
  - Teorema dos Eixos Paralelos

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Definição de Centroide

- O centroide  $C(\bar{x}, \bar{y})$  de uma área plana é o ponto que define seu centro geométrico.
- Para determinar matematicamente a localização dos centroides usamos o método dos momentos



$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int_A x \, dA}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int_A y \, dA}{A}$$

- As fórmulas que definem o centroide de uma área plana dependem somente de sua geometria.
- A localização do centroide independe dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ .

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Relação entre Centroide e Centro de Gravidade

- O centroide  $C(\bar{x}, \bar{y})$  de uma área plana é o ponto que define seu centro geométrico.

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}, \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

- O centro de gravidade  $G(x_G, y_G)$  considera uma função de peso específico  $\gamma(x, y)$ .

$$x_G = \frac{\int_A \gamma x dA}{\int_A \gamma dA}, \quad y_G = \frac{\int_A \gamma y dA}{\int_A \gamma dA}$$

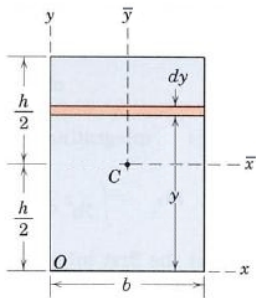
- **Temos  $C \equiv G$  quando  $\gamma(x, y)$  é constante.**



# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Centroide de uma Área Retangular

- O eixo  $x$  coincide com a base do retângulo
- Faixa diferencial  $dA = b \, dy$



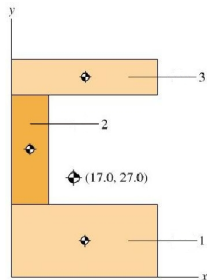
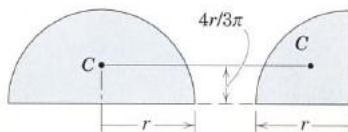
$$\begin{aligned}
 A\bar{y} &= \int y \, dA \\
 \frac{b}{h}\bar{y} &= \int_0^h yb \, dy \\
 &= \frac{bh^2}{2} \\
 \bar{y} &= \frac{h}{2}
 \end{aligned}$$

- Este resultado é válido para os dois outros lados do retângulo, considerando-se uma nova base e altura correspondente.

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Observações

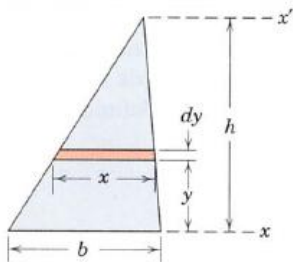
- O centroide de algumas áreas podem ser parcial ou completamente especificados por meio de condições de simetria.
- Se um corpo possui um eixo de simetria, centroide localiza-se sobre este eixo.
- Em alguns casos, o centroide encontra-se em um ponto que não se localiza no objeto.



# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Centroide de uma Área Triangular

- O eixo  $x$  coincide com a base do triângulo
- Faixa diferencial  $dA = x dy$
- Por semelhança de triângulos  $x/(h-y) = b/h \Rightarrow dA = \frac{(h-y)b}{h} dy$



$$\begin{aligned}
 A\bar{y} &= \int y dA \\
 \frac{bh}{2}\bar{y} &= \int_0^h y \frac{(h-y)}{h} b dy \\
 &= \frac{bh^2}{6} \\
 \bar{y} &= \frac{h}{3}
 \end{aligned}$$

- Este resultado é válido para os dois outros lados do triângulo, considerando-se uma nova base e altura correspondente.

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Centroides de Áreas Compostas

- Áreas feitas de várias partes ou formas diferentes são chamadas **áreas compostas**.
- O centroide de uma área composta pode ser determinada a partir dos **centroides** e das **áreas** partes individuais.
- Para uma área que pode dividida em  $n$  partes

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

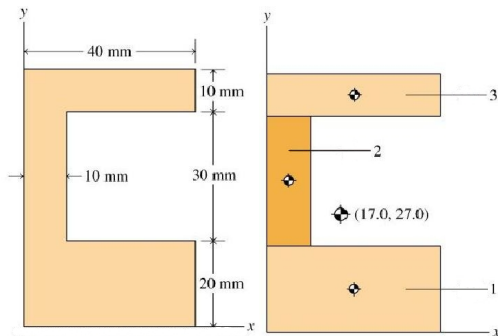
- Para uma área que exige integração

$$\bar{x} = \frac{\int_A x_c dA}{\int_A dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int_A y_c dA}{\int_A dA},$$

- $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas da área diferencial  $dA$ .

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Centroides de Áreas Compostas

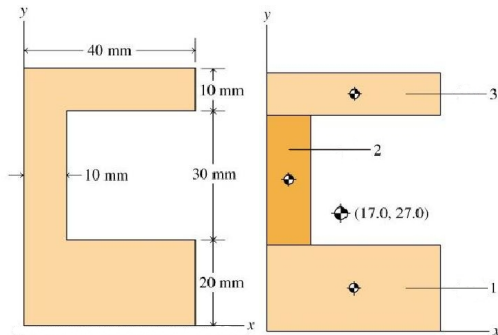


$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Centroides de Áreas Compostas

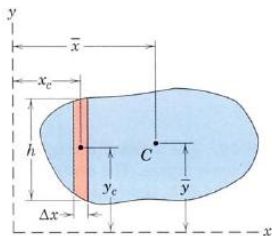


$$\bar{x} = \frac{20(20)(40) + 5(10)(30) + 20(10)(40)}{(20)(40) + (10)(30) + (10)(40)} = 17 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{10(20)(40) + 35(10)(30) + 55(10)(40)}{(20)(40) + (10)(30) + (10)(40)} = 27 \text{ mm}$$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

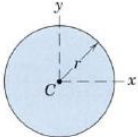
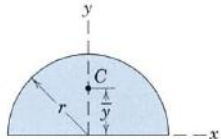
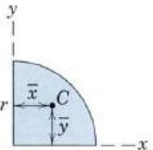
## Centroides de Áreas Compostas



$$\bar{x} = \frac{\int_A x_c dA}{\int_A dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int_A y_c dA}{\int_A dA},$$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

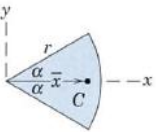
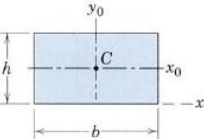
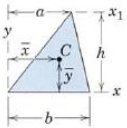
## Tabela de Centroides de Áreas Planas

Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$
	—	—
	—	$\frac{4r}{3\pi}$
	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$



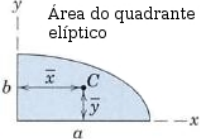
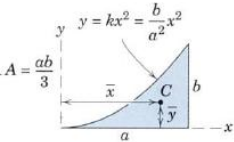
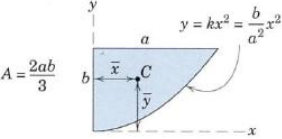
# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Tabela de Centroides de Áreas Planas

Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$
	$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	—
	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$
	$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

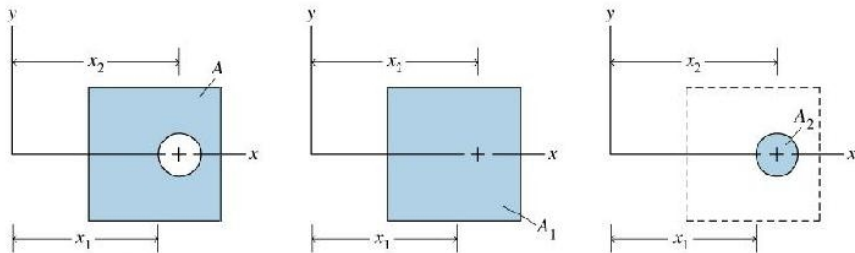
## Tabela de Centroides de Áreas Planas

Figura	$\bar{x}$	$\bar{y}$
<p>Área do quadrante elíptico</p> 	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$
 <p><math>A = \frac{ab}{3}</math></p> <p><math>y = kx^2 = \frac{b}{a^2}x^2</math></p>	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3b}{10}$
 <p><math>A = \frac{2ab}{3}</math></p> <p><math>y = kx^2 = \frac{b}{a^2}x^2</math></p>	$\frac{3a}{8}$	$\frac{3b}{5}$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Exemplo 1

- Os momentos dos furos ou cavidades são subtraídos



$$A\bar{x} = A_1x_1 - A_2x_2$$

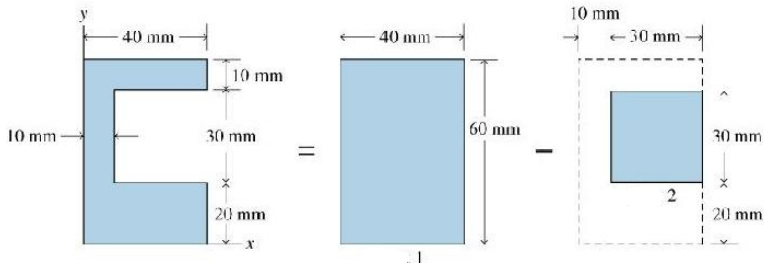
$$A = A_1 - A_2$$

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 - A_2x_2}{A}$$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Exemplo 1

- Os momentos dos furos ou cavidades são subtraídos



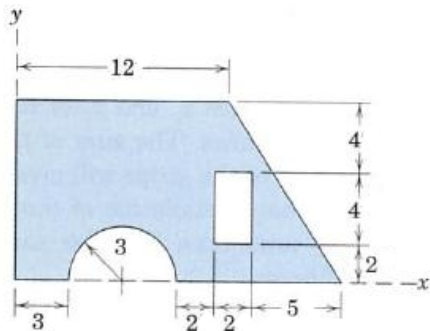
$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A} = \frac{(40)(60)20 - (30)(30)25}{2400 - 900} = 17 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A} = \frac{(40)(60)30 - (30)(30)35}{1500} = 27 \text{ cm}$$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Exemplo 2

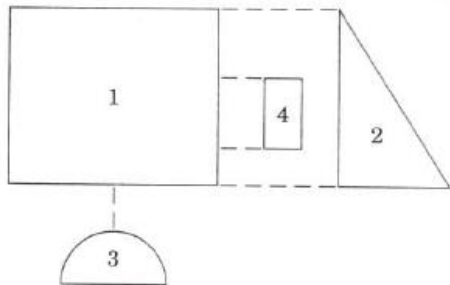
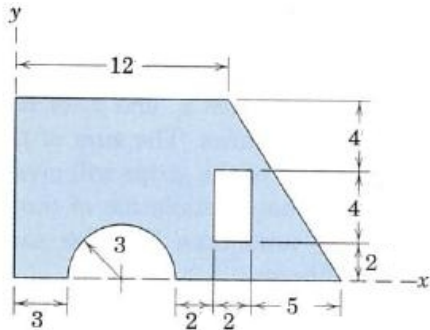
- Determine o centroide da figura abaixo (dimensões em cm)



# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Exemplo 2

- Determine o centroide da figura abaixo (dimensões em cm)

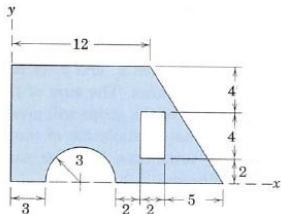


# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Exemplo 2

- Arranjar as informações em uma tabela.

Parte	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$\bar{x}$ (cm)	$\bar{y}$ (cm)	$\bar{x}A$ (cm <sup>3</sup> )	$\bar{y}A$ (cm <sup>3</sup> )
1	120.00	6	5	720	600
2	30.00	14	10/3	420	100
3	-14.14	6	1.273	-84.3	-18
4	-8.00	12	4	-96	-32
Totais	127.9			959	650



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{959}{127.9} = 7.50 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{650}{127.9} = 5.08 \text{ cm}$$

# Programa

## 2 Propriedades Geométricas de Áreas Planas

- Centróide
- **Momentos de Inércia**
- Teorema dos Eixos Paralelos



# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

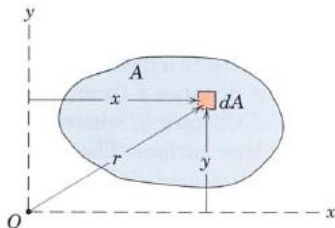
## Considerações

- Os momentos de inércia  $I_x$  e  $I_y$  são grandezas positivas

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad J_O = I_x + I_y$$

- O produto de inércia  $I_{xy}$  podem assumir valores positivos e negativos

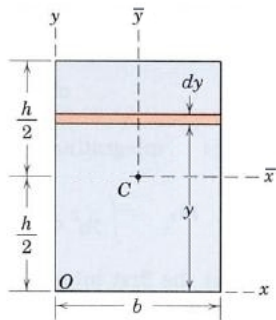
$$I_{xy} = \int_A xy dA$$



# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Momentos de Inércia de Áreas Simples – Retângulo

Eixos horizontais, faixa diferencial  $dA = b \, dy$



$$I_x = \int y^2 \, dA = \int_0^h b y^2 \, dy = \frac{b h^3}{3}$$

$$I_{\bar{x}} = \int y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{+h/2} b y^2 \, dy = \frac{b h^3}{12}$$

Eixos verticais, faixa diferencial  $dA = h \, dx$

$$I_y = \int x^2 \, dA = \int_0^b h x^2 \, dx = \frac{h b^3}{3}$$

$$I_{\bar{y}} = \int x^2 \, dA = \int_{-b/2}^{+b/2} h x^2 \, dx = \frac{h b^3}{12}$$

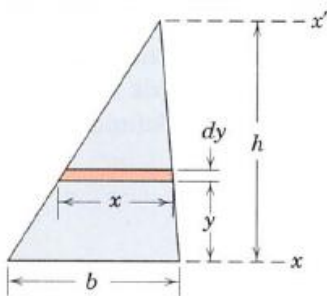
# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Momentos de Inércia de Áreas Simples – Retângulo

- Algumas considerações:
  - Os momentos de inércia variam de acordo com o eixo considerado.
  - A unidade dos momentos de inércia é (comprimento)<sup>4</sup>.
  - Unidades usuais: mm<sup>4</sup>, cm<sup>4</sup>, m<sup>4</sup>.

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Momentos de Inércia de Áreas Simples – Triângulo



Eixos horizontal (base do triângulo), faixa diferencial  $dA = x dy = \frac{b(h-y)}{h} dy$

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int y^2 dA &&= \\
 &= \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy &&= \\
 &= \frac{bh^3}{12}
 \end{aligned}$$

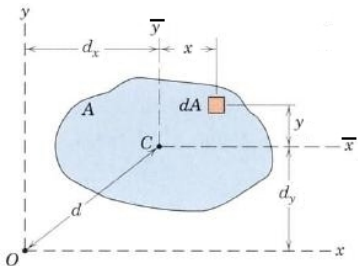
# Programa

- 2 Propriedades Geométricas de Áreas Planas
  - Centróide
  - Momentos de Inércia
  - Teorema dos Eixos Paralelos

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Teorema dos Eixos Paralelos

- Considere momento de inércia  $I_x$  com relação a  $Ox \parallel C\bar{x}$ .
- O ponto  $C$  é o centroide da área plana.
- $C\bar{x}$  e  $C\bar{y}$  são seus eixos centroidais.



$$\begin{aligned}
 I_x &= \int (d_y + y)^2 dA \\
 &= d_y^2 \int dA + 2d_y \int y dA + \int y^2 dA \\
 &= d_y^2 A + 2d_y (\bar{y}A) + \bar{I}_x \\
 &= d_y^2 A + \bar{I}_x \quad (\bar{y} = 0)
 \end{aligned}$$

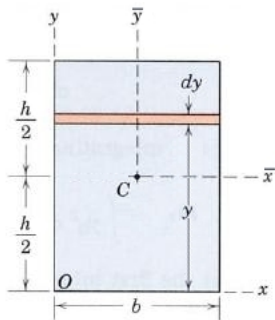
$$I_x = \bar{I}_x + d_y^2 A$$

$$I_y = \bar{I}_y + d_x^2 A$$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Teorema dos Eixos Paralelos

- Momento de inércia com relação ao eixo centroidal  $C\bar{x}$ , paralelo ao eixo da base.



$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$d_y = \frac{h}{2}$$

$$\bar{I}_x = ?$$

$$I_x = \bar{I}_x + d_y^2 A$$

$$\bar{I}_x = I_x - d_y^2 A$$

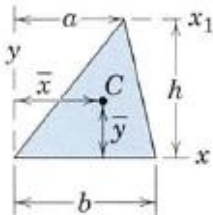
$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^2}{4}(bh)$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$

# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Teorema dos Eixos Paralelos

- Momento de inércia com relação ao eixo centroidal  $C\bar{x}$ , paralelo ao eixo da base  $Ox$ .
- $I_x$  já foi previamente calculado.



$$I_x = bh^3/12$$

$$d_y = \frac{h}{3}$$

$$\bar{I}_x = ?$$

$$I_x = \bar{I}_x + d_y^2 A$$

$$\bar{I}_x = I_x - d_y^2 A$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2}$$

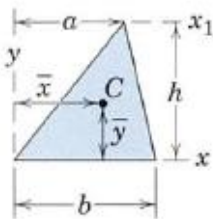
$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$$



# Propriedades Geométricas de Áreas Planas

## Teorema dos Eixos Paralelos

- Momento de inércia com relação ao eixo superior  $x_1$ , paralelo ao eixo centroidal  $C\bar{x}$  e situado a uma distância  $\frac{2h}{3}$  deste eixo.
- $\bar{I}_x$  já foi previamente calculado.



$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$d_y = \frac{2h}{3}$$

$$I_{x_1} = ?$$

$$I_{x_1} = \bar{I}_x + d_y^2 A$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2}$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$$

# Programa

- 3 Tensões na Flexão
  - Flexão de um elemento de eixo reto
  - Fórmula da Flexão



# Programa

- 3 Tensões na Flexão
  - Flexão de um elemento de eixo reto
  - Fórmula da Flexão

# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

- Discutiremos as tensões que surgem em elementos de eixo reto submetidos à flexão
- Discussão ficará limitada a elementos com área da seção transversal simétrica com relação a um eixo
- O momento fletor é aplicado perpendicularmente a um eixo de simetria

# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

- As peças longas, quando submetidas à flexão, apresentam tensões normais elevadas.
- Por exemplo, para se quebrar um lápis, com as mãos, é mais eficiente
  - tracioná-lo,
  - comprimi-lo,
  - torcê-lo,
  - cisalhá-lo ou
  - flexioná-lo?
- Neste caso, jamais se cogitaria tracioná-lo, comprimi-lo, torcê-lo ou cisalhá-lo;
- Um momento fletor de pequeno valor seria suficiente para produzir tensões de ruptura no material.

# Tensões na Flexão

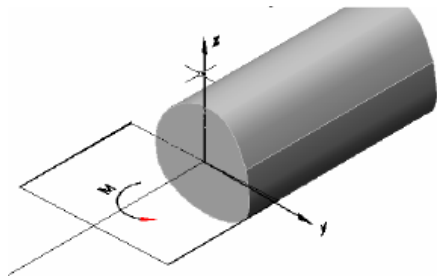
## Flexão de um elemento de eixo reto

- Tipos de flexão (de acordo com os esforços atuantes)
  - Pura (somente momento fletor)
  - Simples (momento fletor e cortante)
  - Composta (momento fletor e esforço normal)

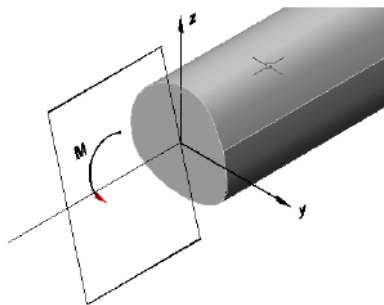
# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

- Tipos de flexão (de acordo com os momentos fletores)
  - **Normal ou reta:** Quando o plano do momento contém um dos eixos centrais de inércia da seção.
  - **Oblíqua:** Quando nenhum dos eixos centrais de inércia da seção está contidos no plano do momento.



Flexão Normal.

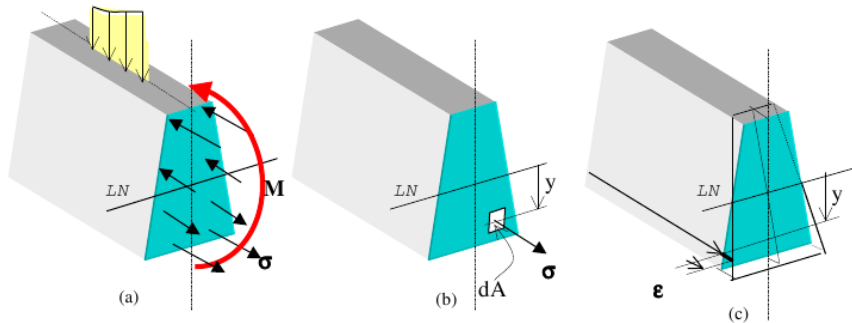


Flexão Oblíqua

# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

- Flexão reta

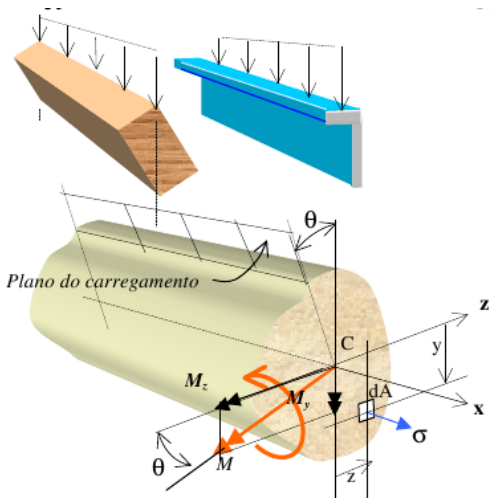




# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

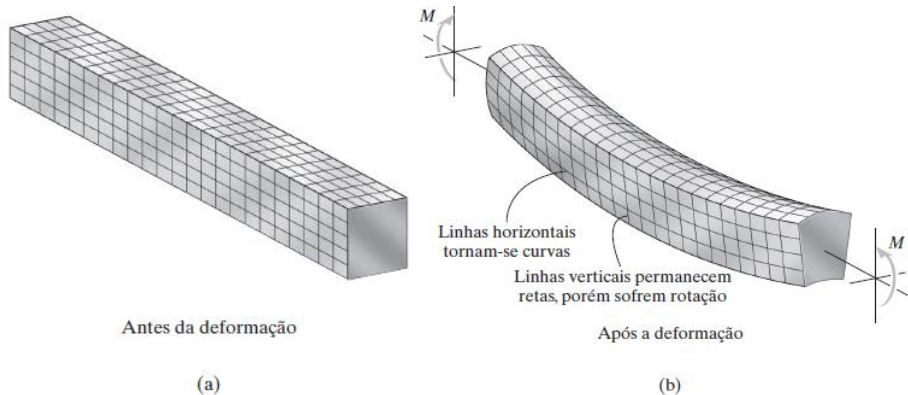
- Flexão oblíqua



# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

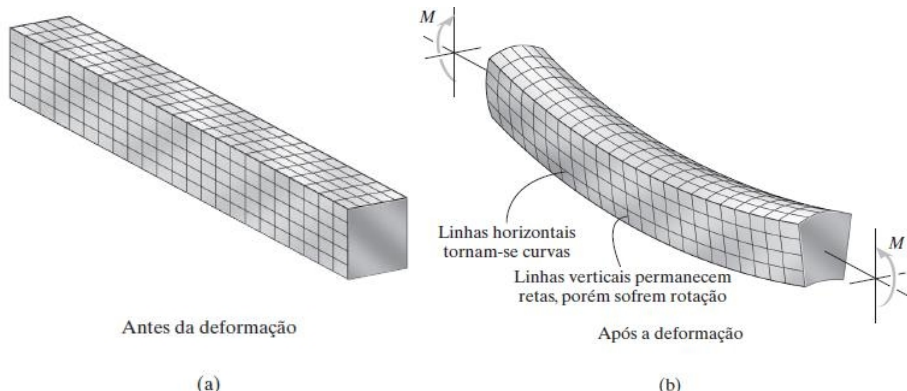
- O momento flexiona a barra
- As retas longitudinais tornam-se curvas
- As retas transversais permanecem retas, mas sofrem rotação



# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

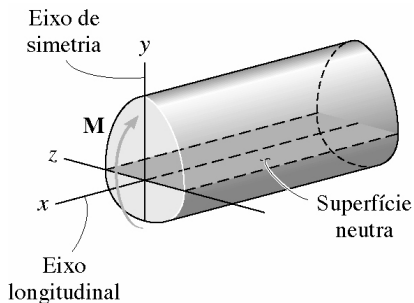
- A seção transversal de uma viga reta permanece plana quando a viga se deforma por flexão.
- Isso provoca uma tensão de tração de um lado da viga e uma tensão de compressão do outro lado.



# Tensões na Flexão

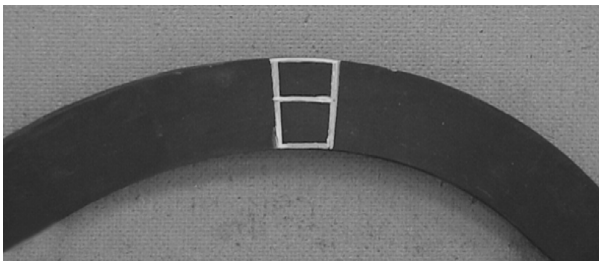
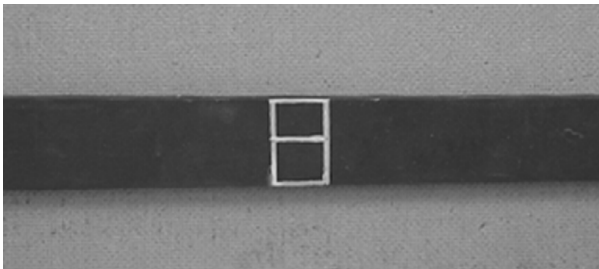
## Flexão de um elemento de eixo reto

- O momento (positivo) faz o material na parte inferior esticar-se e na parte superior comprimir-se
- Entre as duas regiões há a superfície neutra, onde as fibras não sofrem alteração de comprimento



# Tensões na Flexão

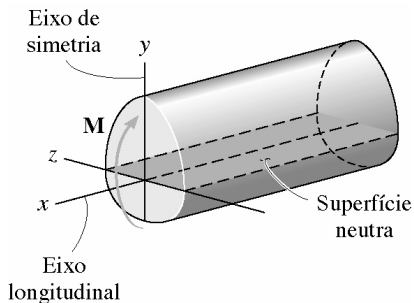
## Flexão de um elemento de eixo reto



# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

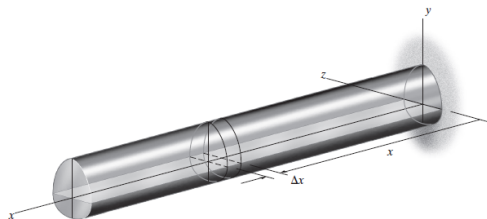
- Com base nessas observações fazemos as hipóteses:
  - O eixo longitudinal não sofre alteração de comprimento (eixo neutro – EN)
  - As seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao EN
  - Qualquer deformação no plano da seção transversal será desprezada



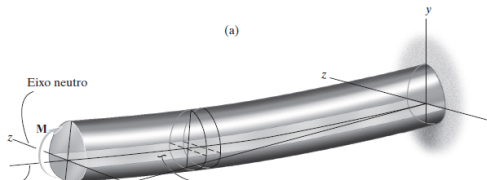
# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

- Determinação da deformação longitudinal
  - $\varepsilon$  varia de zero no eixo neutro até seu máximo nas extremidades
  - A lei de Hooke se aplica quando o material é homogêneo
  - O eixo neutro passa pelo centroide da área da seção transversal.

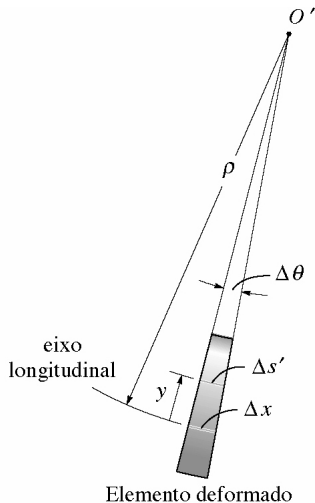
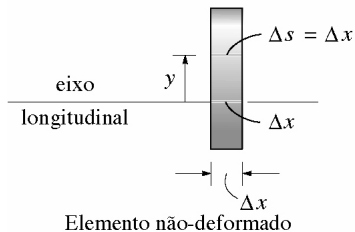


(a)



# Tensões na Flexão

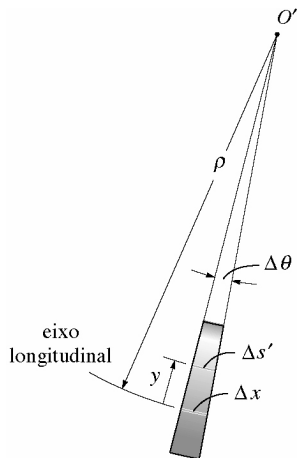
## Flexão de um elemento de eixo reto





# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto



Elemento deformado

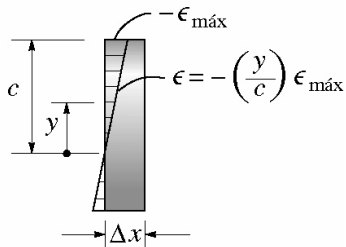
$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - (\rho)\Delta\theta}{\rho\Delta\theta} \\
 &= -\frac{y}{\rho}
 \end{aligned}$$

# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

- O resultado mostra que a deformação normal varia linearmente
- Temos então a relação linear

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{max}} = \frac{-y/\rho}{c/\rho} \Rightarrow \epsilon = -\frac{y}{c} \epsilon_{max}$$

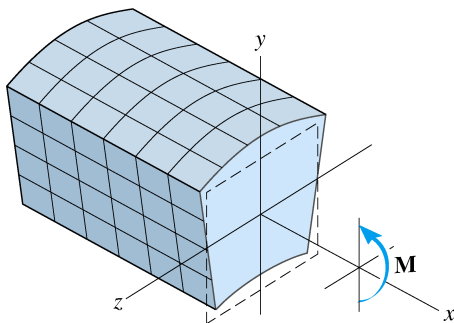


Distribuição da deformação normal

# Tensões na Flexão

## Flexão de um elemento de eixo reto

- Esta deformação depende apenas das hipóteses estabelecidas em relação a deformação
- O modelo não considera deformações no plano da seção



# Programa

- 3 Tensões na Flexão
  - Flexão de um elemento de eixo reto
  - **Fórmula da Flexão**

# Tensões na Flexão

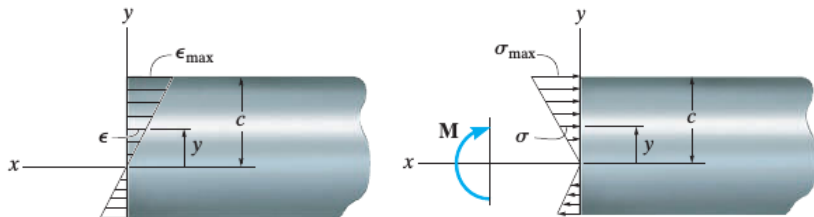
## Fórmula da Flexão

- Considerando um material homogêneo e linear elástico, vale a lei de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon$$

- Uma variação linear da deformação provoca uma variação linear da tensão normal

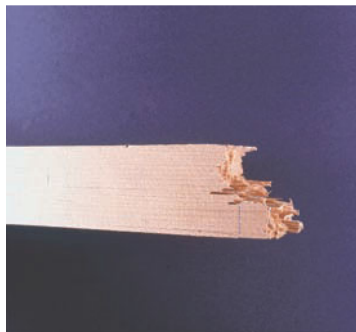
$$\varepsilon = -\frac{y}{c}\varepsilon_{max} \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{max}$$



# Tensões na Flexão

## Fórmula da Flexão

- Este espécime de madeira falhou por flexão: suas fibras foram esmagadas na parte superior e rasgadas na sua parte inferior.



# Tensões na Flexão

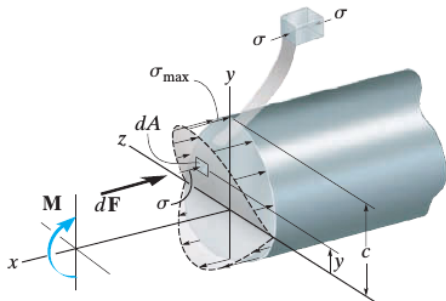
## Fórmula da Flexão

- Vamos agora determinar uma expressão para a tensão normal ao longo da seção

# Tensões na Flexão

## Fórmula da Flexão

- O momento resultante na seção transversal é igual ao momento produzido pela distribuição linear da tensão normal em torno do eixo neutro.





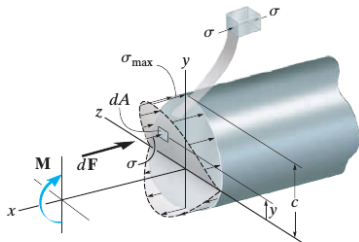
# Tensões na Flexão

## Fórmula da Flexão

- Para determinar a linha neutra, fazemos

$$\sum F_x = 0 = \int_A dF = \int_A \sigma dA = \int_A -\frac{y}{c} \sigma_{max} dA = -\frac{\sigma_{max}}{c} \int_A y dA$$

$$0 = \int_A y dA \Rightarrow \text{(O eixo neutro passa deve passar pelo centroide)}$$



# Tensões na Flexão

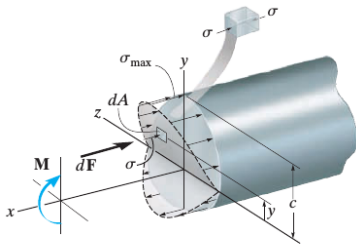
## Fórmula da Flexão

- Para determinar a tensão normal

$$M = \int_A y dF = \int_A y \sigma dA = \int_A y \frac{-y}{c} \sigma_{max} dA = \frac{-\sigma_{max}}{c} \int_A y^2 dA$$

$$\sigma_{max} = -\frac{Mc}{I} \Rightarrow \|\sigma_{max}\| = +\frac{Mc}{I}$$

- Observar
  - sinal do momento fletor ( $\pm M$ )
  - posição da fibra analisada  
(+  $\uparrow$ )



# Tensões na Flexão

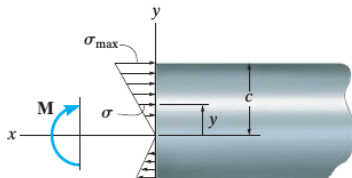
## Fórmula da Flexão

- Por semelhança de triângulos,

$$\frac{\sigma_{max}}{c} = -\frac{\sigma}{y}$$

- E temos a fórmula da flexão

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$



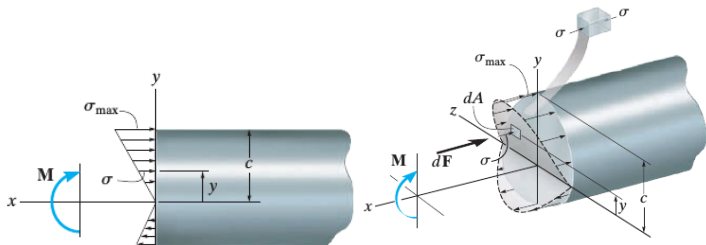
- Para evitar confusão com os sinais de  $M$  e  $y$ , podemos usar

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

- e lembrar que  $+M$  traciona a fibra inferior,
- e  $-M$  traciona a fibra superior.

# Tensões na Flexão

## Fórmula da Flexão

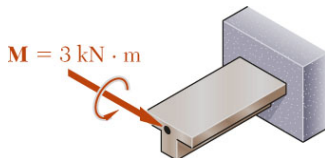


- $\sigma = \frac{My}{I}$  (expressão alternativa)
  - $\sigma$  = tensão normal no membro
  - $M$  = momento interno
  - $I$  = momento de inércia
  - $y$  = distância perpendicular do eixo neutro até a fibra

# Fórmula da Flexão

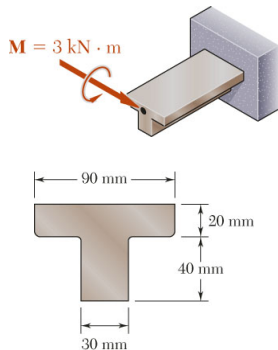
## Exemplos

A peça de máquina de ferro fundido é solicitada por um momento  $\mathbf{M} = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . Sabendo-se que o módulo de elasticidade  $E = 165 \text{ GPa}$ , determine (a) as tensões máximas de tração e compressão, (b) o raio de curvatura.



# Fórmula da Flexão

## Exemplos



- Baseado na geometria da seção transversal, calcular a localização do centróide e momento de inércia.
- Aplicar a fórmula da flexão elástica para encontrar as tensões máximas de tração e compressão.

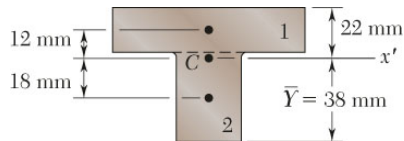
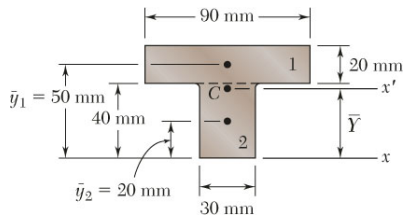
$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

- Calcular a curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

# Fórmula da Flexão

## Exemplos



- O momento fletor máximo (negativo) vale 3 kNm.
- Com relação a extremidade inferior, a LN encontra-se a 38 mm

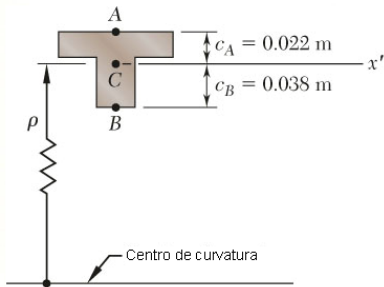
$$\bar{Y} = \frac{20(90)50 + 40(30)20}{1800 + 1200} = 38 \text{ mm}$$

- Momento de inércia em relação a LN

$$\begin{aligned} I_{LN} &= \frac{90(20)^3}{12} + 1800(12)^2 + \\ &\quad \frac{30(40)^3}{12} + 1200(18)^2 \\ &= 868(10^3) \text{ mm}^4 = \\ &= 868(10^{-9}) \text{ m}^4 \end{aligned}$$

# Fórmula da Flexão

## Exemplos



- Aplicar a fórmula da flexão elástica para encontrar as tensões máximas de tração e compressão.

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = +\frac{3000(0.022)}{868(10^{-9})} = +76.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{Mc_B}{I} = -\frac{3000(0.038)}{868(10^{-9})} = -131.3 \text{ MPa}$$

- Calcular a curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3000}{165(10^{+9})868(10^{-9})}$$

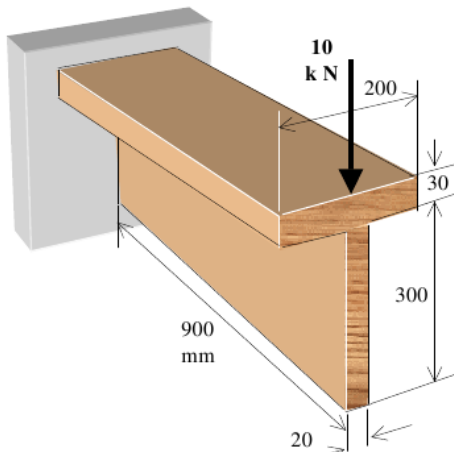
$$\frac{1}{\rho} = 20.95(10^{-3}) \Rightarrow \rho = 47.7 \text{ m}$$



# Fórmula da Flexão

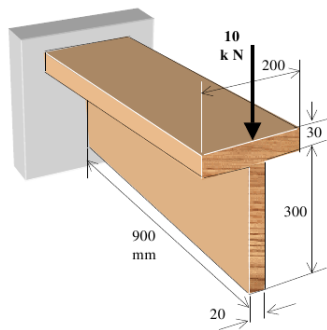
## Exemplos

- Determine para a viga abaixo: (a) a tensão máxima de tração (b) a tensão máxima de compressão



# Fórmula da Flexão

## Exemplos



- O momento fletor máximo (negativo) vale  $10(0.9) = 9 \text{ kNm}$ .
- Com relação a extremidade inferior, a LN encontra-se a 232.5 mm

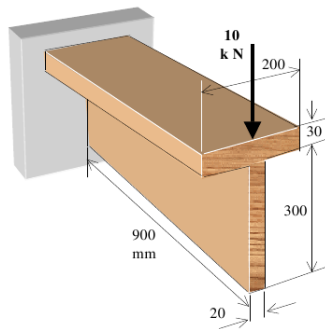
$$y_{LN} = \frac{200(30)315 + 20(300)150}{200(30) + 20(300)} = 232.5 \text{ mm}$$

- Momento de inércia em relação a LN

$$\begin{aligned} I_{LN} &= \frac{200(30)^3}{12} + (200)(30)(315 - 232.5)^2 + \\ &\quad \frac{20(300)^3}{12} + (20)(300)(150 - 232.5)^2 \\ &= 127.1(10^6) \text{ mm}^4 = \\ &= 127.1(10^{-6}) \text{ m}^4 \end{aligned}$$

# Fórmula da Flexão

## Exemplos



- A tensão de tração máxima ocorre no topo e vale

$$\sigma_t = \frac{9000}{127.1(10^{-6})}(0.330 - 0.2325)$$

$$\sigma_t = 6.9 \text{ MPa}$$

- A tensão de compressão máxima ocorre na base e vale

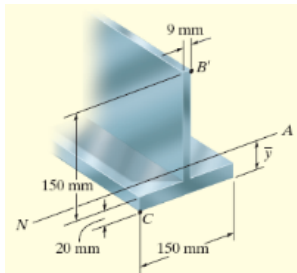
$$\sigma_c = -\frac{9000}{127.1(10^{-6})}(0.2325)$$

$$\sigma_c = -16.5 \text{ MPa}$$

# Fórmula da Flexão

## Exemplos

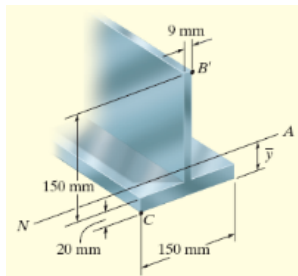
Se o perfil abaixo for submetido a um momento fletor positivo  $M = 2 \text{ kNm}$ , determine a tensão normal nos pontos  $B$  e  $C$ .



# Fórmula da Flexão

## Exemplos

Se o perfil abaixo for submetido a um momento fletor positivo  $M = 2 \text{ kNm}$ , determine a tensão normal nos pontos  $B$  e  $C$ .



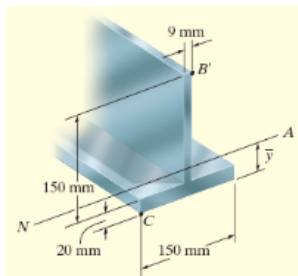
A localização do centroide (linha neutra) é

$$y_{LN} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{(0.01)(0.02)(0.15) + (0.095)(0.009)(0.150)}{(0.02)(0.15) + (0.009)(0.150)} = 0.03638 \text{ m}$$

# Fórmula da Flexão

## Exemplos

Se o perfil abaixo for submetido a um momento fletor positivo  $M = 2 \text{ kNm}$ , determine a tensão normal nos pontos  $B$  e  $C$ .



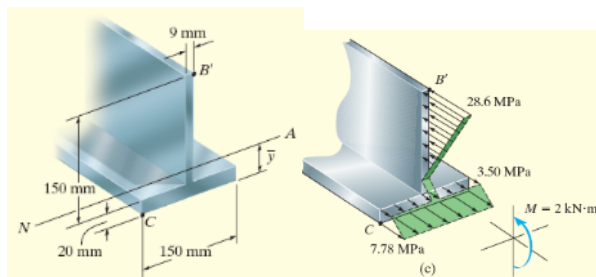
Portanto, o momento de inércia em torno do eixo neutro é

$$I_{LN} = \frac{0.15(0.02)^3}{12} + (0.15)(0.02)(0.03638 - 0.01)^2 + \frac{0.09(0.15)^3}{12} + (0.09)(0.15)(0.095 - 0.03638)^2 = 9.358(10^{-6}) \text{ m}^4$$

# Fórmula da Flexão

## Exemplos

Se o perfil abaixo for submetido a um momento fletor positivo  $M = 2 \text{ kNm}$ , determine a tensão normal nos pontos  $B$  e  $C$ .



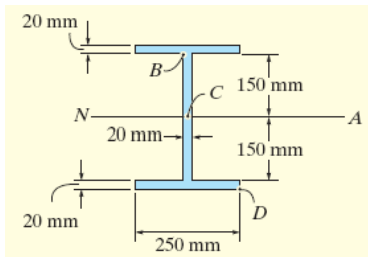
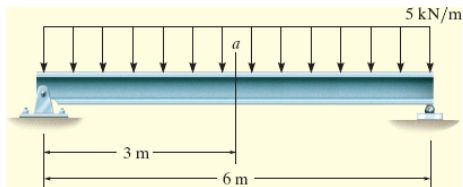
Aplicando a fórmula da flexão, a tensão normal em  $B'$  e  $C$  é

$$\sigma_{B'} = \frac{2(0.17 - 0.03638)}{9.358(10^{-6})} = 28.60 \text{ Mpa}, \quad \sigma_C = \frac{2(0.03638)}{9.358(10^{-6})} = 7.78 \text{ Mpa}$$

# Fórmula da Flexão

## Exemplos

A viga simplesmente apoiada tem a área de seção transversal mostrada na figura abaixo. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e represente a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.

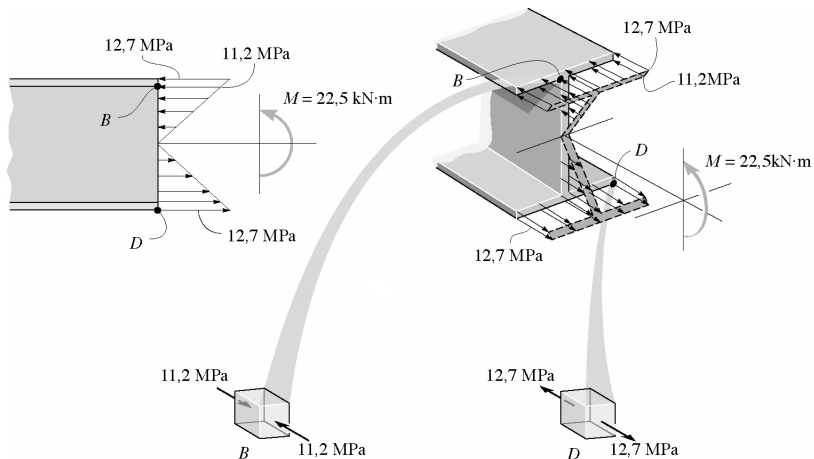




# Fórmula da Flexão

## Exemplos

### Solução:



# Programa

- 2 Torção
  - Introdução
  - Deformação por Torção de um Eixo Circular
  - A Fórmula da Torção
  - Ângulo de Torção
  - Transmissão de Potência
  - Problemas Estaticamente Indeterminados



# Programa

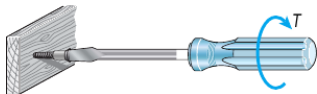
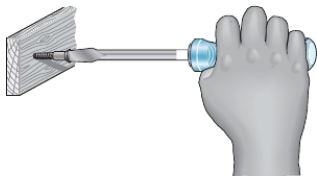
## 2 Torção

- **Introdução**
- Deformação por Torção de um Eixo Circular
- A Fórmula da Torção
- Ângulo de Torção
- Transmissão de Potência
- Problemas Estaticamente Indeterminados

# Torção

## Introdução

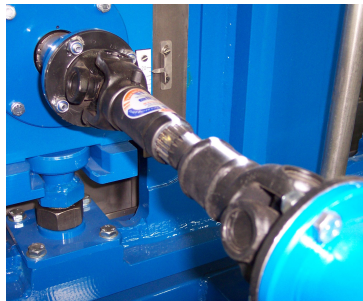
- Estudaremos os efeitos da aplicação de esforços torcionais em um elementos lineares longos, com eixos maciços e eixos vazados.



# Torção

## Introdução

- Estudaremos os efeitos da aplicação de esforços torcionais em um elementos lineares longos, com eixos maciços e eixos vazados.

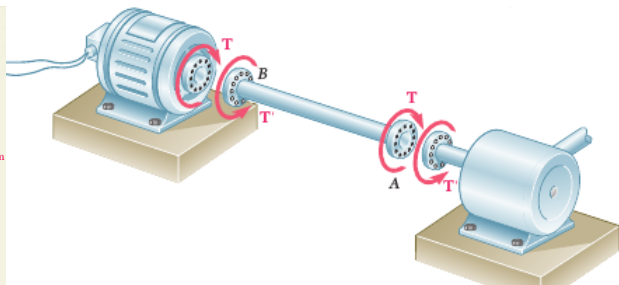
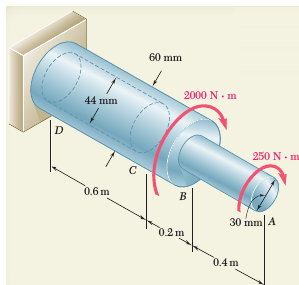
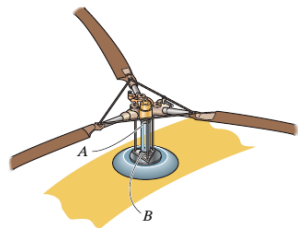


# Torção

## Introdução

- Problemas analisados

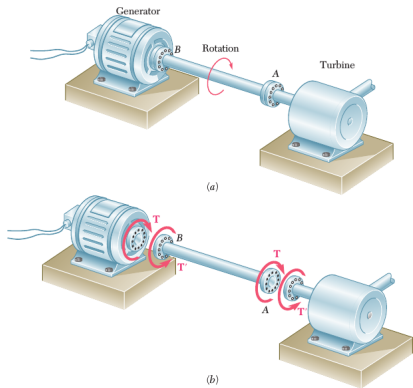
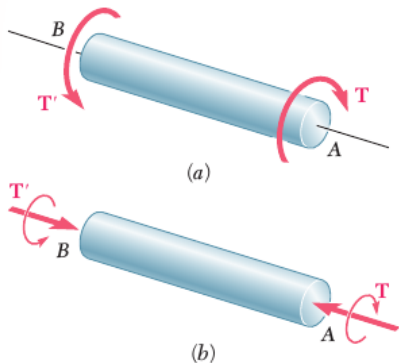
- distribuição de tensões nas seções transversais
- determinação do “ângulo de torção”
- eixos de transmissão de potência



# Torção

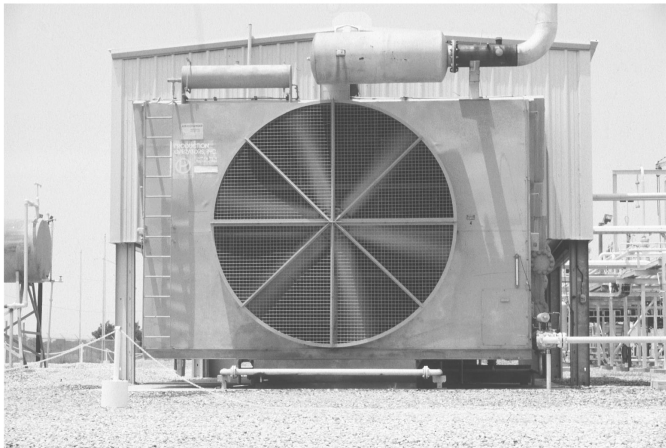
## Introdução

- Torque (ou momento de torção) é um momento que tende a torcer um elemento em torno de seu eixo longitudinal.



# Torção

## Introdução



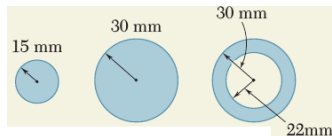
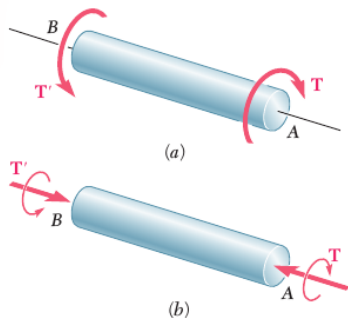
O esforço de torção desenvolvido no eixo de acionamento do ventilador depende da potência de saída do motor.



# Torção

## Introdução

- Delimitação do estudo:
  - **Barras sujeitas à torção pura:** Somente o efeito do momento torsor (torque), sendo os demais esforços simples nulos.
  - Barras de eixo reto e seção transversal **circular** (cheia) ou **anular** (coroa circular). Essas barras são comumente denominadas de **eixos**.
  - Eixos sujeitos à momento **torsor constante**.

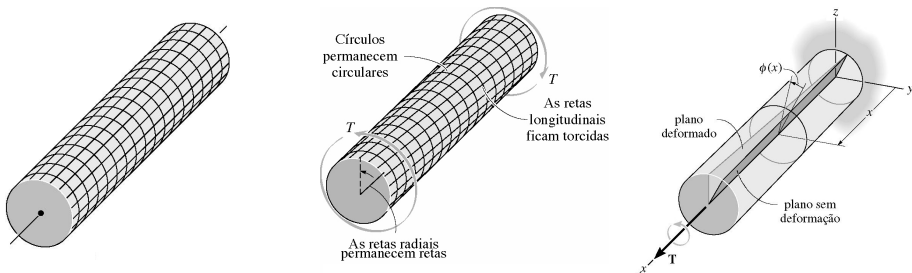


# Torção

## Introdução

### ● Hipóteses:

- **Linearidade** entre deformações angulares e tensões tangenciais
- Pequenas deformações: as seções permanecem **planas e perpendiculares ao eixo**, com forma e **dimensões conservadas**.
- As deformações são deslocamentos angulares (ângulos de torção), em torno do eixo- $x$  (eixo da barra), de uma seção em relação a outra.
- Se o ângulo de rotação for pequeno, o comprimento e o raio do eixo permanecerão inalterados.

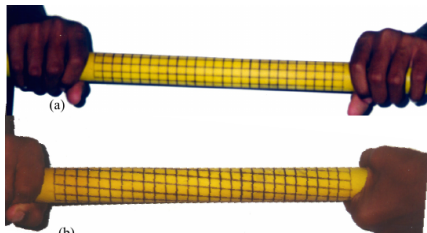


# Torção

## Introdução

- Hipóteses:

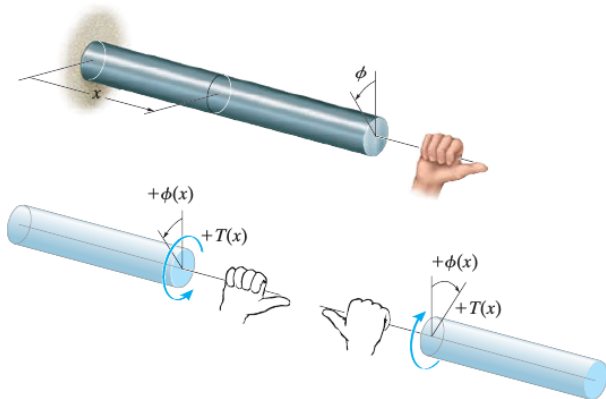
- **Linearidade** entre deformações angulares e tensões tangenciais
- Pequenas deformações: as seções permanecem **planas e perpendiculares ao eixo**, com forma e **dimensões conservadas**.
- As deformações são deslocamentos angulares (ângulos de torção), em torno do eixo- $x$  (eixo da barra), de uma seção em relação a outra.
- Se o ângulo de rotação for pequeno, o comprimento e o raio do eixo permanecerão inalterados.



# Torção

## Introdução

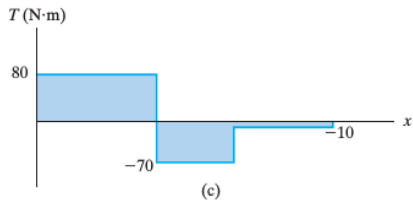
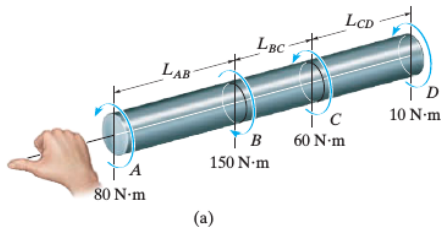
- A convenção de sinal para  $T$  é determinada pela regra da mão direita.
- Os diagramas são similares aos de esforço normal.



# Torção

## Introdução

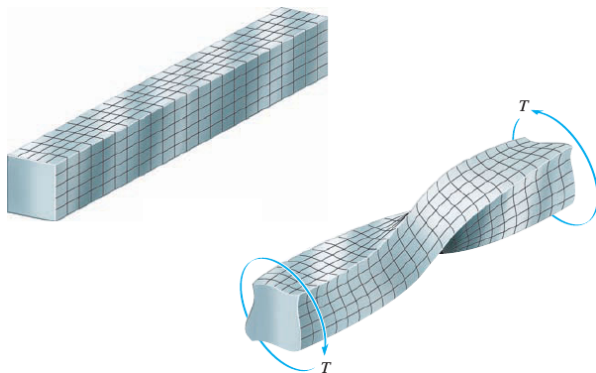
- A convenção de sinal para  $T$  é determinada pela regra da mão direita.
- Os diagramas são similares aos de esforço normal.



# Torção

## Introdução

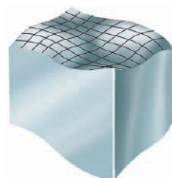
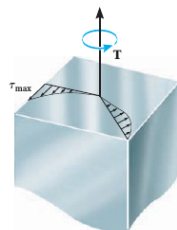
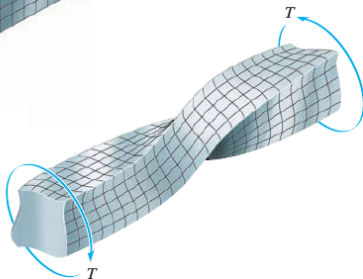
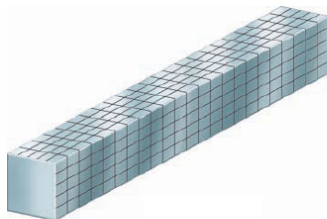
- Torção de eixos não circulares não serão tratados neste curso.
- As seções não permanecem planas (sofrem empenamento).



# Torção

## Introdução

- Torção de eixos não circulares não serão tratados neste curso.
- As seções não permanecem planas (sofrem empenamento).



# Programa

## 2 Torção

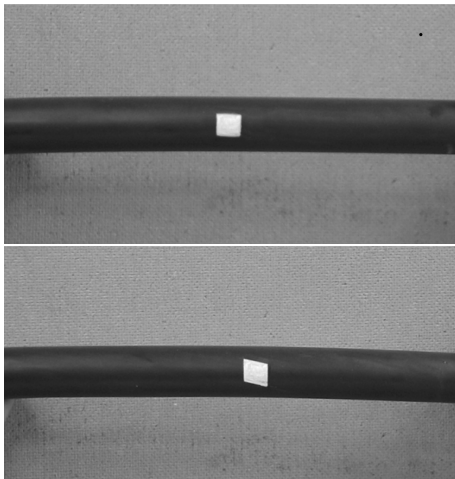
- Introdução
- **Deformação por Torção de um Eixo Circular**
- A Fórmula da Torção
- Ângulo de Torção
- Transmissão de Potência
- Problemas Estaticamente Indeterminados



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

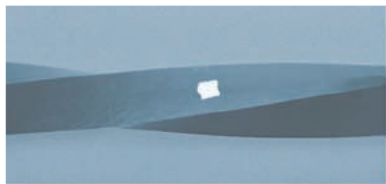
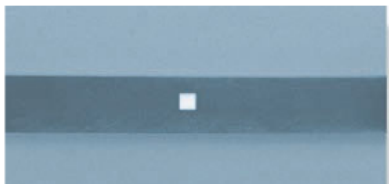
- Observe a deformação do elemento indicado abaixo



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Observe a diferença na deformação para a seção transversal quadrada

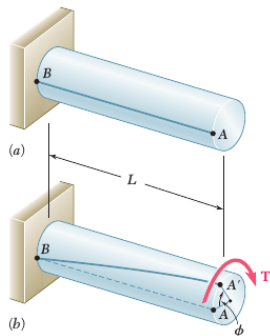


- Vamos agora determinar um modelo matemático para a deformação de um eixo circular

# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

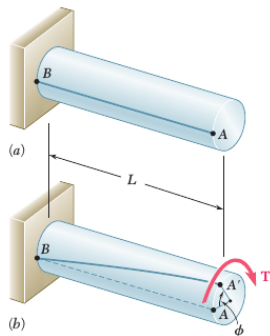
- Considere um torque externo  $T$  aplicado em um eixo fixo em uma de suas extremidades.
- O torque aplicado provoca uma rotação de um ângulo de torção  $\phi$  na extremidade livre.
- Se o torque  $T$  não for muito grande, observamos
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional a  $T$
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao comprimento  $L$ .
- Observamos que para seções circulares permanecem planas após a deformação.
- O mesmo não acontece para outras seções.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

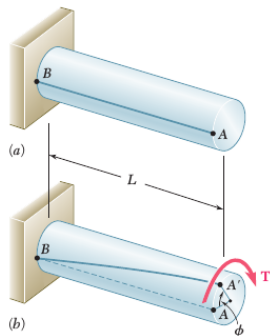
- Considere um torque externo  $T$  aplicado em um eixo fixo em uma de suas extremidades.
- O torque aplicado provoca uma rotação de um ângulo de torção  $\phi$  na extremidade livre.
- Se o torque  $T$  não for muito grande, observamos
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional a  $T$
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao comprimento  $L$ .
- Observamos que para seções circulares permanecem planas após a deformação.
- O mesmo não acontece para outras seções.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

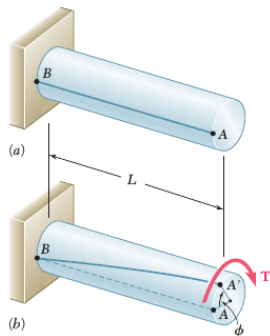
- Considere um torque externo  $\mathbf{T}$  aplicado em um eixo fixo em uma de suas extremidades.
- O torque aplicado provoca uma rotação de um ângulo de torção  $\phi$  na extremidade livre.
- Se o torque  $\mathbf{T}$  não for muito grande, observamos
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional a  $\mathbf{T}$
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao comprimento  $L$
- Observamos que para seções circulares permanecem planas após a deformação.
- O mesmo não acontece para outras seções.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

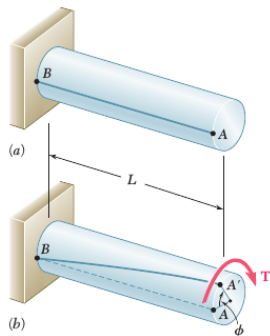
- Considere um torque externo  $\mathbf{T}$  aplicado em um eixo fixo em uma de suas extremidades.
- O torque aplicado provoca uma rotação de um ângulo de torção  $\phi$  na extremidade livre.
- Se o torque  $\mathbf{T}$  não for muito grande, observamos
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional a  $\mathbf{T}$
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao comprimento  $L$
- Observamos que para seções circulares permanecem planas após a deformação.
- O mesmo não acontece para outras seções.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

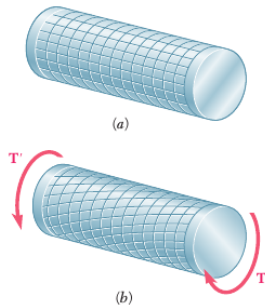
- Considere um torque externo  $\mathbf{T}$  aplicado em um eixo fixo em uma de suas extremidades.
- O torque aplicado provoca uma rotação de um ângulo de torção  $\phi$  na extremidade livre.
- Se o torque  $\mathbf{T}$  não for muito grande, observamos
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional a  $\mathbf{T}$
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao comprimento  $L$
- Observamos que para seções circulares permanecem planas após a deformação.
- O mesmo não acontece para outras seções.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Considere um torque externo  $\mathbf{T}$  aplicado em um eixo fixo em uma de suas extremidades.
- O torque aplicado provoca uma rotação de um ângulo de torção  $\phi$  na extremidade livre.
- Se o torque  $\mathbf{T}$  não for muito grande, observamos
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional a  $\mathbf{T}$
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao comprimento  $L$
- Observamos que para seções circulares permanecem planas após a deformação.
- O mesmo não acontece para outras seções.

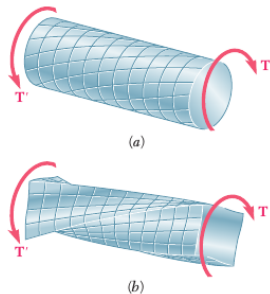




# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

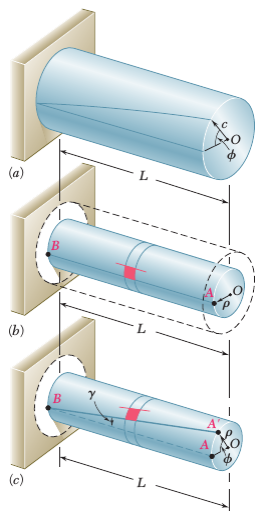
- Considere um torque externo  $\mathbf{T}$  aplicado em um eixo fixo em uma de suas extremidades.
- O torque aplicado provoca uma rotação de um ângulo de torção  $\phi$  na extremidade livre.
- Se o torque  $\mathbf{T}$  não for muito grande, observamos
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional a  $\mathbf{T}$
  - O ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao comprimento  $L$
- Observamos que para seções circulares permanecem planas após a deformação.
- O mesmo não acontece para outras seções.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

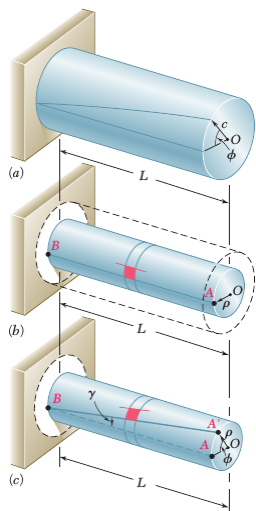
- Vamos determinar as deformações no eixo ao lado que sofreu uma rotação relativa  $\phi$  em suas extremidades.
- Considere o cilindro interno com raio  $\rho$ .
- Vamos considerar também o elementos quadrilateral formado duas duas seções adjacentes e duas linhas paralelas.
- Após a aplicação de  $T$ , o elemento se deforma.
- A deformação por cisalhamento  $\gamma$  é medida pela mudança do ângulo formado pelas arestas do elemento.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

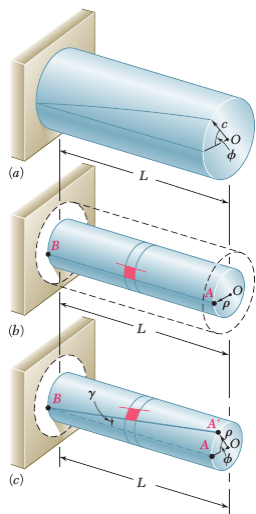
- Vamos determinar as deformações no eixo ao lado que sofreu uma rotação relativa  $\phi$  em suas extremidades.
- Considere o cilindro interno com raio  $\rho$ .
- Vamos considerar também o elementos quadrilateral formado duas duas seções adjacentes e duas linhas paralelas.
- Após a aplicação de  $\mathbf{T}$ , o elemento se deforma.
- A deformação por cisalhamento  $\gamma$  é medida pela mudança do ângulo formado pelas arestas do elemento.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

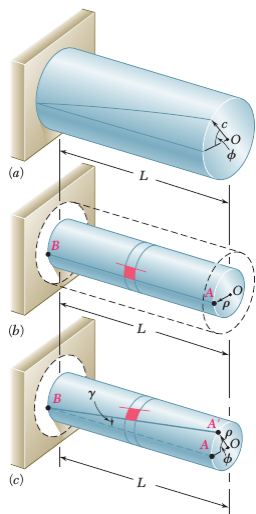
- Vamos determinar as deformações no eixo ao lado que sofreu uma rotação relativa  $\phi$  em suas extremidades.
- Considere o cilindro interno com raio  $\rho$ .
- Vamos considerar também o elementos quadrilateral formado duas duas seções adjacentes e duas linhas paralelas.
- Após a aplicação de  $\mathbf{T}$ , o elemento se deforma.
- A deformação por cisalhamento  $\gamma$  é medida pela mudança do ângulo formado pelas arestas do elemento.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

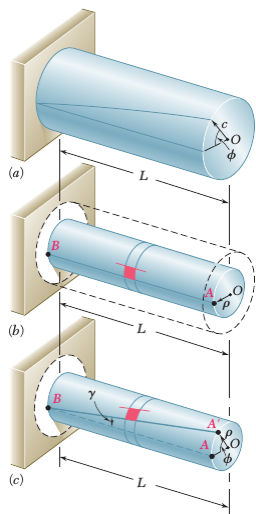
- Vamos determinar as deformações no eixo ao lado que sofreu uma rotação relativa  $\phi$  em suas extremidades.
- Considere o cilindro interno com raio  $\rho$ .
- Vamos considerar também o elementos quadrilateral formado duas duas seções adjacentes e duas linhas paralelas.
- Após a aplicação de  $\mathbf{T}$ , o elemento se deforma.
- A deformação por cisalhamento  $\gamma$  é medida pela mudança do ângulo formado pelas arestas do elemento.



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Vamos determinar as deformações no eixo ao lado que sofreu uma rotação relativa  $\phi$  em suas extremidades.
- Considere o cilindro interno com raio  $\rho$ .
- Vamos considerar também o elementos quadrilateral formado duas duas seções adjacentes e duas linhas paralelas.
- Após a aplicação de  $\mathbf{T}$ , o elemento se deforma.
- A deformação por cisalhamento  $\gamma$  é medida pela mudança do ângulo formado pelas arestas do elemento.



# Torção

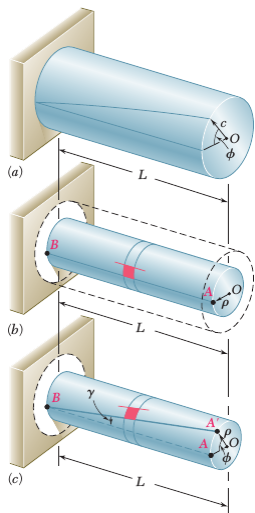
## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Uma vez que as seções não se distorcem, dois lados do elemento permanecem inalterados.
- A deformação  $\gamma$  é igual ao ângulo formado pelas linhas  $AB$  e  $A'B'$ .
- Observamos então o modelo linear para

$$AA' = L\gamma = \rho\phi \Rightarrow \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

- Na superfície da do eixo, onde  $\rho = c$ ,  $\gamma = \gamma_{max}$

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \frac{\phi}{L} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{max}}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$



# Torção

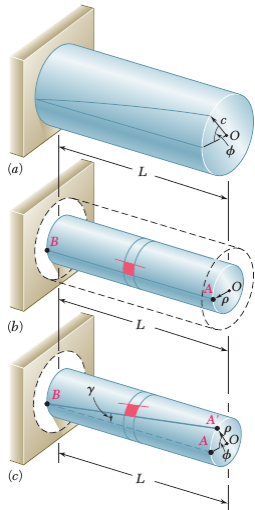
## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Uma vez que as seções não se distorcem, dois lados do elemento permanecem inalterados.
- A deformação  $\gamma$  é igual ao ângulo formado pelas linhas  $AB$  e  $A'B$ .
- Observamos então o modelo linear para

$$AA' = L\gamma = \rho\phi \Rightarrow \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

- Na superfície da do eixo, onde  $\rho = c$ ,  $\gamma = \gamma_{max}$

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \frac{\phi}{L} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{max}}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$





# Torção

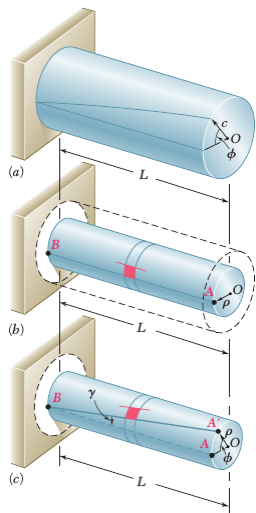
## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Uma vez que as seções não se distorcem, dois lados do elemento permanecem inalterados.
- A deformação  $\gamma$  é igual ao ângulo formado pelas linhas  $AB$  e  $A'B$ .
- Observamos então o modelo linear para

$$AA' = L\gamma = \rho\phi \Rightarrow \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

- Na superfície da do eixo, onde  $\rho = c$ ,  $\gamma = \gamma_{max}$

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \frac{\phi}{L} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{max}}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$



# Torção

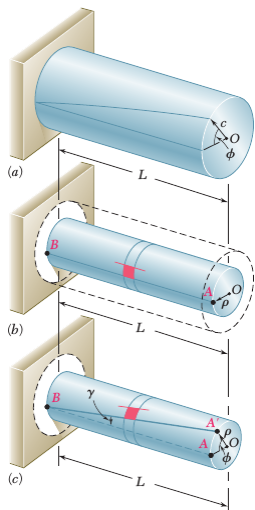
## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Uma vez que as seções não se distorcem, dois lados do elemento permanecem inalterados.
- A deformação  $\gamma$  é igual ao ângulo formado pelas linhas  $AB$  e  $A'B$ .
- Observamos então o modelo linear para

$$AA' = L\gamma = \rho\phi \Rightarrow \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

- Na superfície da do eixo, onde  $\rho = c$ ,  $\gamma = \gamma_{max}$

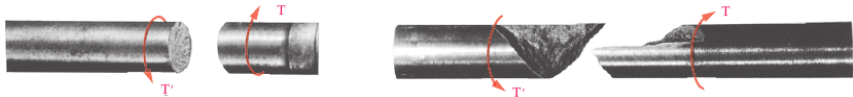
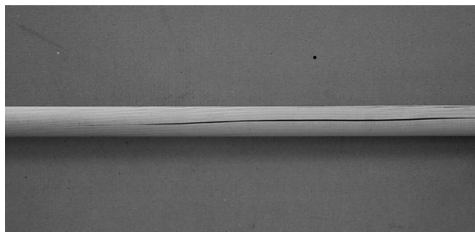
$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \frac{\phi}{L} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{max}}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Ruptura por torção de materiais frágeis e dúcteis



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Ruptura por torção de materiais frágeis e dúcteis



# Torção

## Deformação por Torção de um Eixo Circular

- Ruptura por torção de materiais frágeis e dúcteis



Este eixo de acionamento tubular de um caminhão foi submetido a um torque excessivo, resultando em falha causada por escoamento do material.

# Programa

## 2 Torção

- Introdução
- Deformação por Torção de um Eixo Circular
- **A Fórmula da Torção**
- Ângulo de Torção
- Transmissão de Potência
- Problemas Estaticamente Indeterminados

# Torção

## A Fórmula da Torção

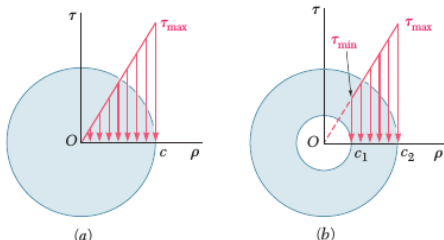
- Se o material for linear elástico, então a lei de Hooke se aplica.

$$\tau = G\gamma$$

- Uma variação linear na deformação por cisalhamento resulta em uma variação linear na tensão de cisalhamento correspondente

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{max} \Rightarrow G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{max} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}}$$

- $\tau$ : tensão de cisalhamento
- $G$ : módulo de elasticidade ao cisalhamento
- $c$ : raio externo do eixo
- $\rho$ : distância intermediária



# Torção

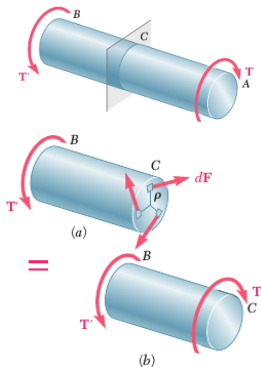
## A Fórmula da Torção

- Considere um eixo  $AB$  submetido a um torque  $\mathbf{T}$ , e uma seção em  $C$ .
- O diagrama de corpo livre da porção  $BC$  inclui o torque  $\mathbf{T}$  e as forças de cisalhamento  $f\mathbf{F}$ .
- Seja  $\rho$  a distância do elemento  $d\mathbf{F}$  até o eixo e  $\tau = \frac{d\mathbf{F}}{dA}$  a tensão tangencial no ponto.
- Para haver equilíbrio da porção  $BC$ , temos:

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA) = \int \rho \frac{\rho}{c} \tau_{max} dA$$

- Daí temos

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} J}{c} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$





# Torção

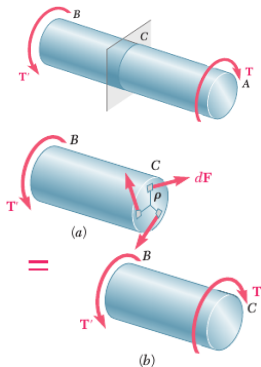
## A Fórmula da Torção

- Considere um eixo  $AB$  submetido a um torque  $\mathbf{T}$ , e uma seção em  $C$ .
- O diagrama de corpo livre da porção  $BC$  inclui o torque  $\mathbf{T}$  e as forças de cisalhamento  $f\mathbf{F}$ .
- Seja  $\rho$  a distância do elemento  $dF$  até o eixo e  $\tau = \frac{dF}{dA}$  a tensão tangencial no ponto.
- Para haver equilíbrio da porção  $BC$ , temos:

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA) = \int \rho \frac{\rho}{c} \tau_{max} dA$$

- Daí temos

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} J}{c} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$



# Torção

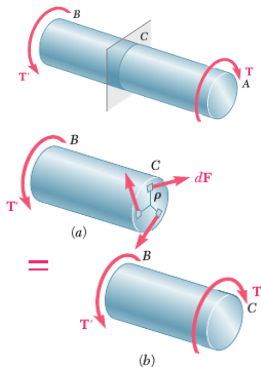
## A Fórmula da Torção

- Considere um eixo  $AB$  submetido a um torque  $\mathbf{T}$ , e uma seção em  $C$ .
- O diagrama de corpo livre da porção  $BC$  inclui o torque  $\mathbf{T}$  e as forças de cisalhamento  $f\mathbf{F}$ .
- Seja  $\rho$  a distância do elemento  $d\mathbf{F}$  até o eixo e  $\tau = \frac{dF}{dA}$  a tensão tangencial no ponto.
- Para haver equilíbrio da porção  $BC$ , temos:

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA) = \int \rho \frac{\rho}{c} \tau_{max} dA$$

- Daí temos

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} J}{c} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$



# Torção

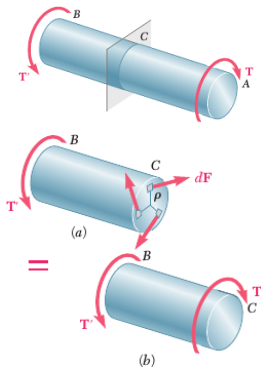
## A Fórmula da Torção

- Considere um eixo  $AB$  submetido a um torque  $\mathbf{T}$ , e uma seção em  $C$ .
- O diagrama de corpo livre da porção  $BC$  inclui o torque  $\mathbf{T}$  e as forças de cisalhamento  $f\mathbf{F}$ .
- Seja  $\rho$  a distância do elemento  $d\mathbf{F}$  até o eixo e  $\tau = \frac{dF}{dA}$  a tensão tangencial no ponto.
- Para haver equilíbrio da porção  $BC$ , temos:

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA) = \int \rho \frac{\rho}{c} \tau_{max} dA$$

- Daí temos

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} J}{c} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$



# Torção

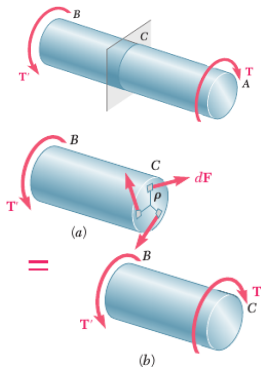
## A Fórmula da Torção

- Considere um eixo  $AB$  submetido a um torque  $\mathbf{T}$ , e uma seção em  $C$ .
- O diagrama de corpo livre da porção  $BC$  inclui o torque  $\mathbf{T}$  e as forças de cisalhamento  $f\mathbf{F}$ .
- Seja  $\rho$  a distância do elemento  $d\mathbf{F}$  até o eixo e  $\tau = \frac{dF}{dA}$  a tensão tangencial no ponto.
- Para haver equilíbrio da porção  $BC$ , temos:

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA) = \int \rho \frac{\rho}{c} \tau_{max} dA$$

- Daí temos

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int \rho^2 dA \Rightarrow T = \frac{\tau_{max} J}{c} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$



# Torção

## A Fórmula da Torção

- Substituindo  $\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$  em  $\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$  expressamos a tensão de cisalhamento em função da distância  $\rho$  até o eixo da barra:

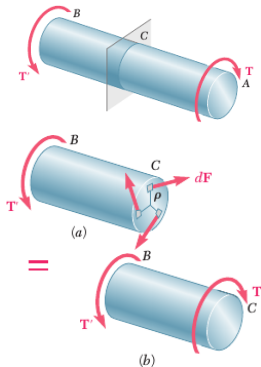
$$\tau = \frac{\rho}{c} \frac{Tc}{J} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}}$$

- Onde  $J$  é o momento de inércia polar para seções circulares

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

- Para seções circulares vazadas

$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)$$



# Torção

## A Fórmula da Torção

- Substituindo  $\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$  em  $\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$  expressamos a tensão de cisalhamento em função da distância  $\rho$  até o eixo da barra:

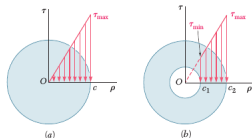
$$\tau = \frac{\rho}{c} \frac{Tc}{J} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}}$$

- Onde  $J$  é o momento de inércia polar para seções circulares

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

- Para seções circulares vazadas

$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)$$



# Torção

## A Fórmula da Torção

- Substituindo  $\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$  em  $\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{max}$  expressamos a tensão de cisalhamento em função da distância  $\rho$  até o eixo da barra:

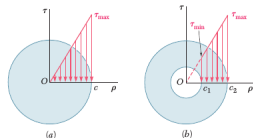
$$\tau = \frac{\rho}{c} \frac{Tc}{J} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T\rho}{J}}$$

- Onde  $J$  é o momento de inércia polar para seções circulares

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

- Para seções circulares vazadas

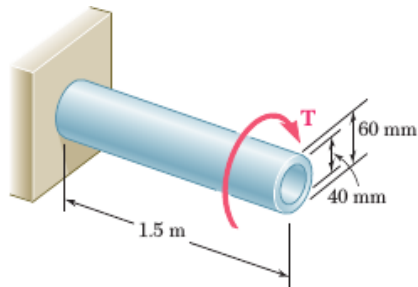
$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4)$$



# Torção

## A Fórmula da Torção

Considere o eixo mostrado. Qual o maior torque que pode ser aplicada se a tensão de cisalhamento máxima é de 120 MPa.

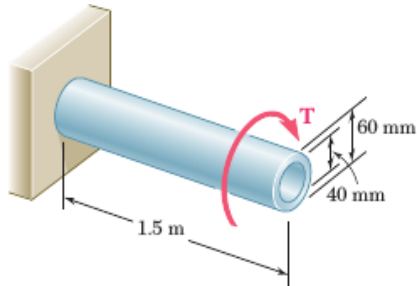




# Torção

## A Fórmula da Torção

Considere o eixo mostrado. Qual o maior torque que pode ser aplicada se a tensão de cisalhamento máxima é de 120 MPa.



Usando a fórmula da torção temos

$$T = \frac{J\tau_{max}}{c}$$

$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)$ , chegamos em

$$T = \frac{\frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)\tau_{max}}{c}$$

Substituindo os valores,

$$T = \frac{\frac{\pi}{2}((0.03)^4 - (0.02)^4)120(10^6)}{(0.03)}$$

E temos  $T = 4084 \text{ Nm}$ .

# Programa

## 2 Torção

- Introdução
- Deformação por Torção de um Eixo Circular
- A Fórmula da Torção
- **Ângulo de Torção**
- Transmissão de Potência
- Problemas Estaticamente Indeterminados

# Torção

## Ângulo de Torção

- O ângulo de torção  $\phi$  e a deformação por cisalhamento máxima  $\gamma_{max}$  estão relacionados por

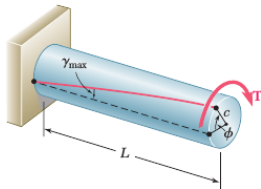
$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$$

- Pela lei de Hooke, temos  $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{Tc}{JG} = \frac{Tc}{GJ}$$

- Daí chegamos em

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \frac{c\phi}{L} = \frac{Tc}{GJ} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$



# Torção

## Ângulo de Torção

- O ângulo de torção  $\phi$  e a deformação por cisalhamento máxima  $\gamma_{max}$  estão relacionados por

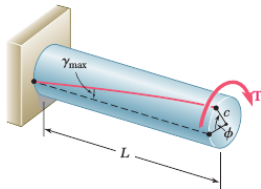
$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$$

- Pela lei de Hooke, temos  $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{Tc}{JG} = \frac{Tc}{GJ}$$

- Daí chegamos em

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \frac{c\phi}{L} = \frac{Tc}{GJ} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$



# Torção

## Ângulo de Torção

- O ângulo de torção  $\phi$  e a deformação por cisalhamento máxima  $\gamma_{max}$  estão relacionados por

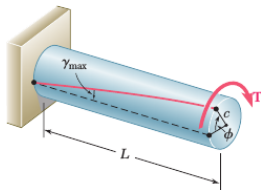
$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$$

- Pela lei de Hooke, temos  $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{Tc}{JG} = \frac{Tc}{GJ}$$

- Daí chegamos em

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \Rightarrow \frac{c\phi}{L} = \frac{Tc}{GJ} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$



# Torção

## Ângulo de Torção

- Para um eixo prismático, o ângulo de torção é proporcional ao seu comprimento

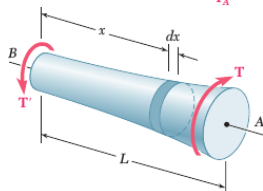
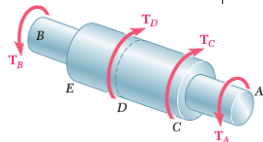
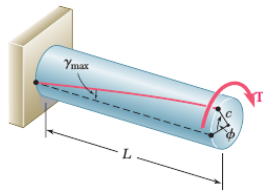
$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

- Se o eixo for composto por partes, temos

$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

- No caso de um eixo com seção transversal circular variável, usamos um elemento diferencial

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx \Rightarrow \phi = \int \frac{T}{GJ} dx$$



# Torção

## Ângulo de Torção

- Para um eixo prismático, o ângulo de torção é proporcional ao seu comprimento

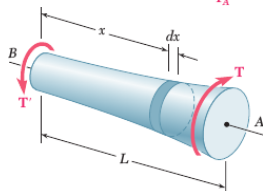
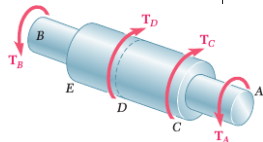
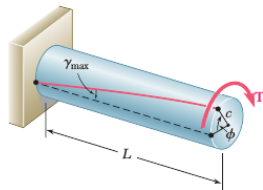
$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

- Se o eixo for composto por partes, temos

$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

- No caso de um eixo com seção transversal circular variável, usamos um elemento diferencial

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx \Rightarrow \phi = \int \frac{T}{GJ} dx$$



# Torção

## Ângulo de Torção

- Para um eixo prismático, o ângulo de torção é proporcional ao seu comprimento

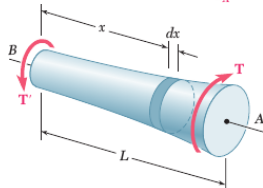
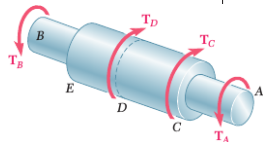
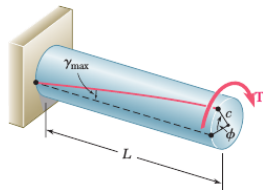
$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

- Se o eixo for composto por partes, temos

$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

- No caso de um eixo com seção transversal circular variável, usamos um elemento diferencial

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx \Rightarrow \phi = \int \frac{T}{GJ} dx$$

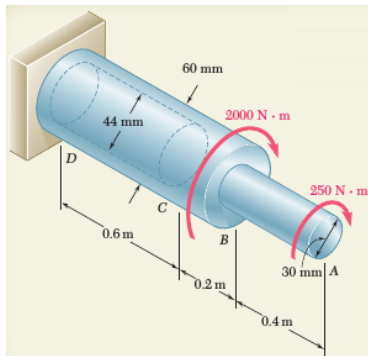




# Torção

## Ângulo de Torção

Considere o eixo horizontal  $AD$ . Uma perfuração com diâmetro 44 mm foi feita no trecho  $CD$ . Sabendo que o eixo é feito de aço ( $G = 77 \text{ GPa}$ ), determine o ângulo de torção na extremidade  $A$ .

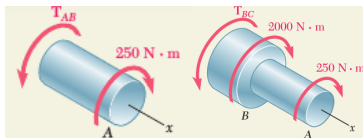
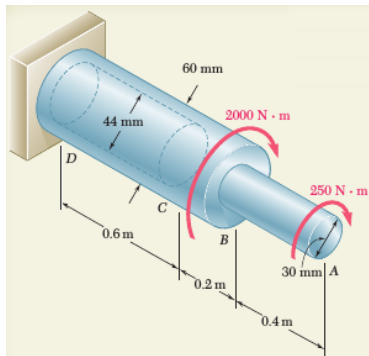


# Torção

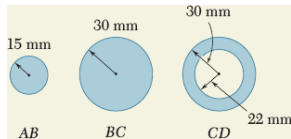
## Ângulo de Torção

Considere o eixo horizontal  $AD$ . Uma perfuração com diâmetro 44 mm foi feita no trecho  $CD$ . Sabendo que o eixo é feito de aço ( $G = 77 \text{ GPa}$ ), determine o ângulo de torção na extremidade  $A$ .

- O eixo é composto de três trechos:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ .
- Os diagramas de corpo livre são mostrados abaixo.



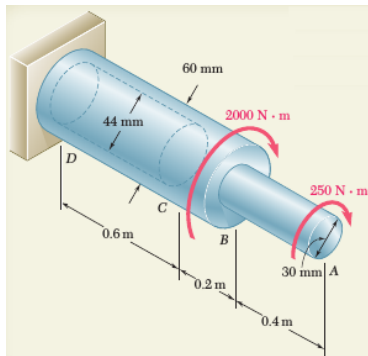
- Cada trecho possui um diâmetro



# Torção

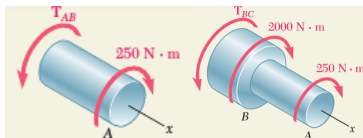
## Ângulo de Torção

Considere o eixo horizontal  $AD$ . Uma perfuração com diâmetro 44 mm foi feita no trecho  $CD$ . Sabendo que o eixo é feito de aço ( $G = 77$  GPa), determine o ângulo de torção na extremidade  $A$ .



Do equilíbrio, temos que

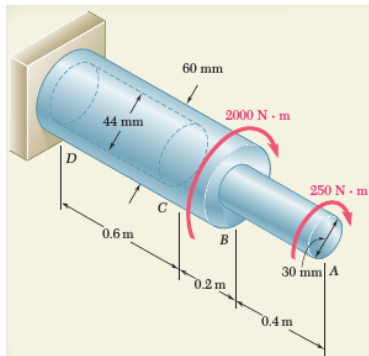
- $T_{AB} = 250$  N·m
- $T_{CD} = T_{BC} = 2250$  N·m.



# Torção

## Ângulo de Torção

Considere o eixo horizontal  $AD$ . Uma perfuração com diâmetro 44 mm foi feita no trecho  $CD$ . Sabendo que o eixo é feito de aço ( $G = 77 \text{ GPa}$ ), determine o ângulo de torção na extremidade  $A$ .

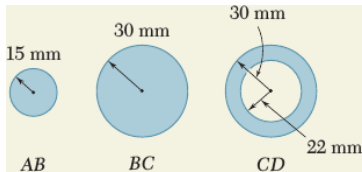


Os momentos de inércia polar ficam:

- $J_{AB} = \frac{\pi}{2}(0.015)^4 = 0.0795(10^{-6}) \text{ m}^4$

- $J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0.030)^4 = 1.272(10^{-6}) \text{ m}^4$

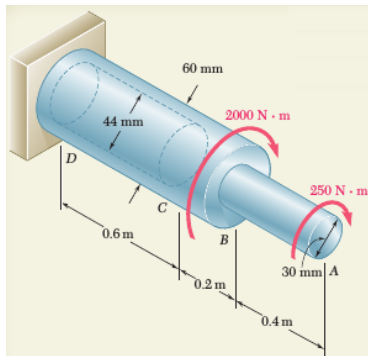
- $J_{CD} = \frac{\pi}{2}[(0.030)^4 - (0.022)^4] = 0.904(10^{-6}) \text{ m}^4$



# Torção

## Ângulo de Torção

Considere o eixo horizontal  $AD$ . Uma perfuração com diâmetro 44 mm foi feita no trecho  $CD$ . Sabendo que o eixo é feito de aço ( $G = 77 \text{ GPa}$ ), determine o ângulo de torção na extremidade  $A$ .



O ângulo de torção fica:

$$\begin{aligned}
 \phi_A &= \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i} \\
 &= \sum \frac{T_{AB} L_{AB}}{G_{AB} J_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{G_{BC} J_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{G_{CD} J_{CD}} \\
 &= \frac{250(0.4)}{77(10^9)0.0795(10^{-6})} + \frac{2250(0.2)}{77(10^9)1.272(10^{-6})} + \frac{2250(0.6)}{77(10^9)0.904(10^{-6})} \\
 &= 0.0430 \text{ rad} \\
 &= 0.0430 \frac{360}{2\pi} \text{ rad} \\
 &= 2.31^\circ
 \end{aligned}$$

# Programa

## 2 Torção

- Introdução
- Deformação por Torção de um Eixo Circular
- A Fórmula da Torção
- Ângulo de Torção
- **Transmissão de Potência**
- Problemas Estaticamente Indeterminados

# Torção

## Transmissão de Potência

- Potência: trabalho realizado por unidade de tempo

$$P = \frac{dW}{dt}$$

- O trabalho realizado por um eixo rotativo é o produto do torque aplicado pelo ângulo de rotação



# Torção

## Transmissão de Potência

- Se durante um instante de tempo  $dt$ , o torque  $T$  fizer o eixo girar de um ângulo  $d\theta$ , temos

$$dW = Td\theta \Rightarrow P = T \frac{d\theta}{dt}$$

- Para um eixo rotativo com torque, a potência é

$$P = T\omega, \text{ onde } \omega = d\theta/dt \text{ é a velocidade angular do eixo}$$

- No SI, a potência é expressa em watts. quando o torque é medido em Nm e  $\omega$  é medido em rad/s.



# Torção

## Transmissão de Potência

- Em alguns casos, é dada a frequência de rotação do eixo, expressa em Hz (hertz)
- Como 1 ciclo= $2\pi$ rad  $\Rightarrow \omega = 2\pi f$ , a equação para a potência é

$$P = (2\pi f)T$$

- Para o projeto do eixo, o parâmetro de projeto ou parâmetro geométrico é

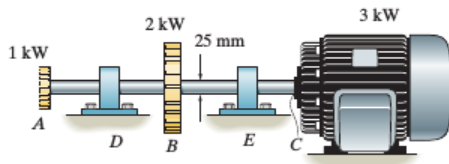
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}},$$

- onde  $\tau_{adm}$  é a tensão máxima de cisalhamento, que depende do material usado.

# Torção

## Transmissão de Potência

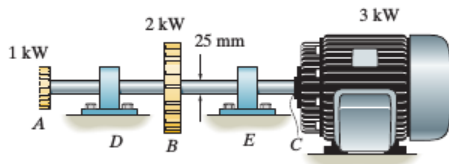
O eixo sólido  $AC$  do motor mostrado tem diâmetro de 25 mm, e está conectado a um motor em  $C$  que transmite uma potência de 3 kW quando gira a 50 Hz. Se as engrenagens em  $A$  e  $B$  removem 1 kW e 2 kW respectivamente, determine a tensão máxima de cisalhamento em  $AB$  e  $BC$ . Os mancais em  $D$  e  $E$  são livres de atrito.



# Torção

## Transmissão de Potência

O eixo sólido  $AC$  do motor mostrado tem diâmetro de 25 mm, e está conectado a um motor em  $C$  que transmite uma potência de 3 kW quando gira a 50 Hz. Se as engrenagens em  $A$  e  $B$  removem 1 kW e 2 kW respectivamente, determine a tensão máxima de cisalhamento em  $AB$  e  $BC$ . Os mancais em  $D$  e  $E$  são livres de atrito.



Os torques em  $A$  e  $C$  ficam:

- $T_C = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f} = \frac{3000}{50(2\pi)} = 9.546 \text{ Nm}$
- $T_A = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f} = \frac{1000}{50(2\pi)} = 3.183 \text{ Nm}$

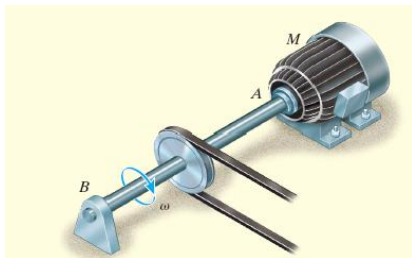
Com isso, temos:

- $\tau_{AB} = \frac{T_A}{J} c = \frac{3.183(0.0125)}{\frac{\pi}{2}(0.0125)^4} = 1.04 \text{ MPa}$
- $\tau_{BC} = \frac{T_C}{J} c = \frac{9.546(0.0125)}{\frac{\pi}{2}(0.0125)^4} = 3.11 \text{ MPa}$

# Torção

## Transmissão de Potência

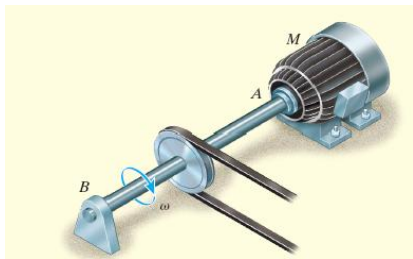
Um eixo maciço de aço  $AB$  será usado para transmitir 90 kW do motor  $M$  ao qual está acoplado. Se o eixo girar a  $\omega = 240$  rpm e o aço tiver uma tensão de cisalhamento admissível  $\tau_{adm} = 50$  MPa, determine o diâmetro exigido para o eixo com precisão de mm. O mancal em  $B$  é livre de atrito.



# Torção

## Transmissão de Potência

Um eixo maciço de aço  $AB$  será usado para transmitir 90 kW do motor  $M$  ao qual está acoplado. Se o eixo girar a  $\omega = 240$  rpm e o aço tiver uma tensão de cisalhamento admissível  $\tau_{adm} = 50$  MPa, determine o diâmetro exigido para o eixo com precisão de mm. O mancal em  $B$  é livre de atrito.



Os torques em  $A$  e  $C$  ficam:

- $\omega = 240 \frac{\text{rev}}{\text{min}} 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 25.133 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $T_{max} = \frac{P}{\omega} = \frac{90000}{25.133} = 3581 \text{ Nm}$

Com isso, temos:

- $\tau_{max} = \frac{T_{max}c}{J}$
- $50(10^6) = \frac{3581c}{\frac{\pi}{2}c^4}$
- $c^3 = \frac{3581}{\frac{\pi}{2}50(10^6)} \Rightarrow c = 36 \text{ mm}$

# Programa

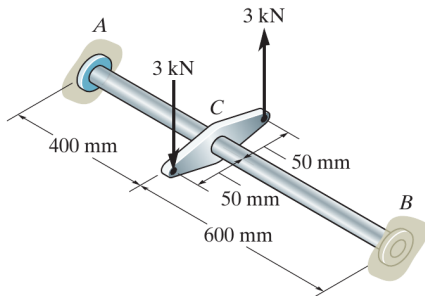
## 2 Torção

- Introdução
- Deformação por Torção de um Eixo Circular
- A Fórmula da Torção
- Ângulo de Torção
- Transmissão de Potência
- **Problemas Estaticamente Indeterminados**

# Torção

## Problemas Estaticamente Indeterminados

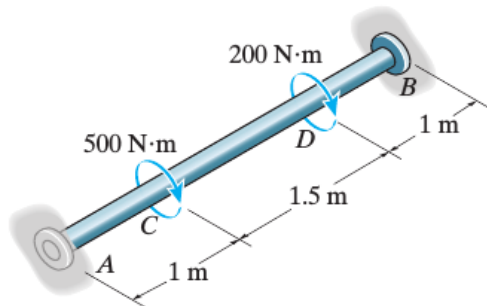
- Em algumas situações os torques internos em elementos de estruturas ou máquinas não podem ser determinados diretamente usando somente as equações da estática.
- Como consequência, não é possível determinar o diagrama de corpo livre.



# Torção

## Problemas Estaticamente Indeterminados

- Nesses casos, as equações de equilíbrio devem ser complementadas com relações envolvendo as deformações obtidas a partir da geometria do problema.
- Esses problemas são chamados de problemas estaticamente indeterminados.

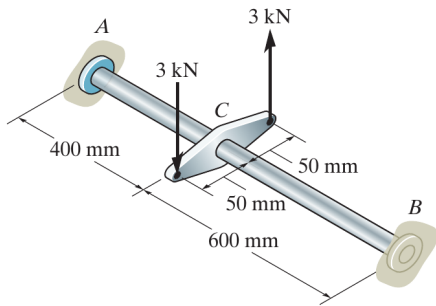




# Torção

## Problemas Estaticamente Indeterminados

Um eixo de aço ( $G = 75 \text{ GPa}$ ) tem diâmetro de 40 mm e está fixo em suas extremidades. Determine as tensões máximas nos trechos AC e CB.



$$\text{Equilíbrio: } T_{AC} + T_{CB} - 3000(0.1) = 0$$

$$\text{Compatibilidade: } \phi_{C/A} = \phi_{C/B}$$

$$\frac{T_{AC}(400)}{GJ} = \frac{T_{CB}(600)}{GJ} \Rightarrow T_{AC} = 1.5T_{CB}$$

Retornando o equilíbrio:

$$1.5T_{CB} + T_{CB} = 300$$

$$T_{CB} = 120 \text{ Nm}; \quad T_{AC} = 180 \text{ Nm}$$

Tensões:

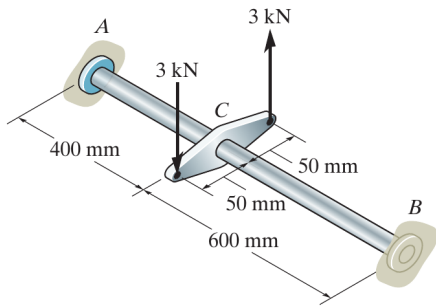
$$\tau_{AC,max} = \frac{T_{AC}c}{J} = \frac{180(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 14.30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CB,max} = \frac{T_{CB}c}{J} = \frac{120(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 9.55 \text{ MPa}$$

# Torção

## Problemas Estaticamente Indeterminados

Um eixo de aço ( $G = 75 \text{ GPa}$ ) tem diâmetro de 40 mm e está fixo em suas extremidades. Determine as tensões máximas nos trechos AC e CB.



$$\text{Equilíbrio: } T_{AC} + T_{CB} - 3000(0.1) = 0$$

$$\text{Compatibilidade: } \phi_{C/A} = \phi_{C/B}$$

$$\frac{T_{AC}(400)}{GJ} = \frac{T_{CB}(600)}{GJ} \Rightarrow T_{AC} = 1.5T_{CB}$$

Retornando o equilíbrio:

$$1.5T_{CB} + T_{CB} = 300$$

$$T_{CB} = 120 \text{ Nm}; \quad T_{AC} = 180 \text{ Nm}$$

Tensões:

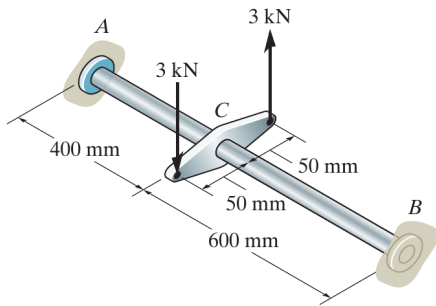
$$\tau_{AC,max} = \frac{T_{AC}c}{J} = \frac{180(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 14.30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CB,max} = \frac{T_{CB}c}{J} = \frac{120(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 9.55 \text{ MPa}$$

# Torção

## Problemas Estaticamente Indeterminados

Um eixo de aço ( $G = 75 \text{ GPa}$ ) tem diâmetro de 40 mm e está fixo em suas extremidades. Determine as tensões máximas nos trechos AC e CB.



$$\text{Equilíbrio: } T_{AC} + T_{CB} - 3000(0.1) = 0$$

$$\text{Compatibilidade: } \phi_{C/A} = \phi_{C/B}$$

$$\frac{T_{AC}(400)}{GJ} = \frac{T_{CB}(600)}{GJ} \Rightarrow T_{AC} = 1.5T_{CB}$$

Retornando o equilíbrio:

$$1.5T_{CB} + T_{CB} = 300$$

$$T_{CB} = 120 \text{ Nm}; \quad T_{AC} = 180 \text{ Nm}$$

Tensões:

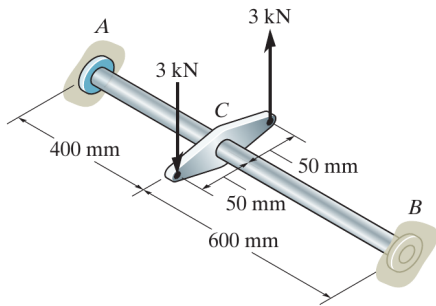
$$\tau_{AC,max} = \frac{T_{AC}c}{J} = \frac{180(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 14.30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CB,max} = \frac{T_{CB}c}{J} = \frac{120(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 9.55 \text{ MPa}$$

# Torção

## Problemas Estaticamente Indeterminados

Um eixo de aço ( $G = 75 \text{ GPa}$ ) tem diâmetro de 40 mm e está fixo em suas extremidades. Determine as tensões máximas nos trechos AC e CB.



$$\text{Equilíbrio: } T_{AC} + T_{CB} - 3000(0.1) = 0$$

$$\text{Compatibilidade: } \phi_{C/A} = \phi_{C/B}$$

$$\frac{T_{AC}(400)}{GJ} = \frac{T_{CB}(600)}{GJ} \Rightarrow T_{AC} = 1.5T_{CB}$$

Retornando o equilíbrio:

$$1.5T_{CB} + T_{CB} = 300$$

$$T_{CB} = 120 \text{ Nm}; \quad T_{AC} = 180 \text{ Nm}$$

Tensões:

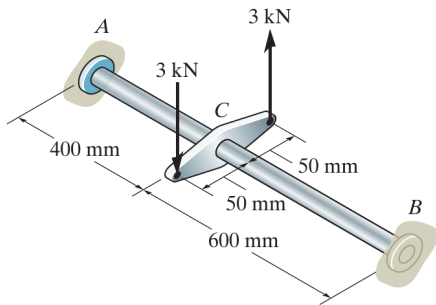
$$\tau_{AC,max} = \frac{T_{AC}c}{J} = \frac{180(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 14.30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CB,max} = \frac{T_{CB}c}{J} = \frac{120(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 9.55 \text{ MPa}$$

# Torção

## Problemas Estaticamente Indeterminados

Um eixo de aço ( $G = 75 \text{ GPa}$ ) tem diâmetro de 40 mm e está fixo em suas extremidades. Determine as tensões máximas nos trechos AC e CB.



$$\text{Equilíbrio: } T_{AC} + T_{CB} - 3000(0.1) = 0$$

$$\text{Compatibilidade: } \phi_{C/A} = \phi_{C/B}$$

$$\frac{T_{AC}(400)}{GJ} = \frac{T_{CB}(600)}{GJ} \Rightarrow T_{AC} = 1.5T_{CB}$$

Retornando o equilíbrio:

$$1.5T_{CB} + T_{CB} = 300$$

$$T_{CB} = 120 \text{ Nm}; \quad T_{AC} = 180 \text{ Nm}$$

Tensões:

$$\tau_{AC,max} = \frac{T_{AC}c}{J} = \frac{180(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 14.30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CB,max} = \frac{T_{CB}c}{J} = \frac{120(0.02)}{(\pi/2)0.02^4} = 9.55 \text{ MPa}$$