

MAC-015 Resistência dos Materiais – Unidade 03

Engenharia Elétrica
Engenharia de Produção
Engenharia Sanitária e Ambiental

Leonardo Goliatt, Michèle Farage, Alexandre Cury

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional
Universidade Federal de Juiz de Fora



Departamento de Mecânica
Aplicada e Computacional



Universidade Federal de Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia

versão 16.04

Programa

- 1 Forças Internas em Barras
 - Definição dos Esforços
 - Diagramas de Esforços
 - Relação entre Carregamentos e Esforços



Forças Internas em Barras

Introdução

As forças que atuam nos corpos podem ser classificadas em :

- 1 Forças Externas: representam a ação de outros corpos sobre o corpo em questão. Causam o movimento ou asseguram o equilíbrio do corpo.
- 2 Forças Internas: são as forças que mantêm unidas os pontos que formam o corpo rígido.

Forças Internas em Barras

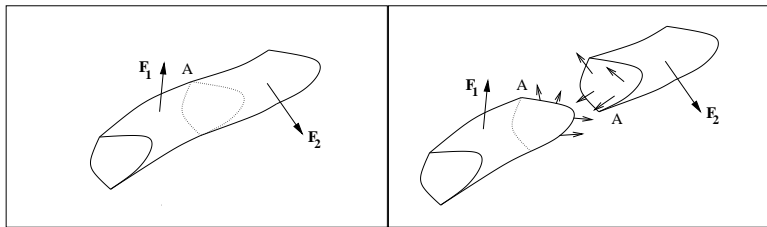
Introdução

As forças que atuam nos corpos podem ser classificadas em :

- 1 Forças Externas: representam a ação de outros corpos sobre o corpo em questão. Causam o movimento ou asseguram o equilíbrio do corpo.
- 2 Forças Internas: são as forças que mantêm unidas os pontos que formam o corpo rígido.

Forças Internas em Barras

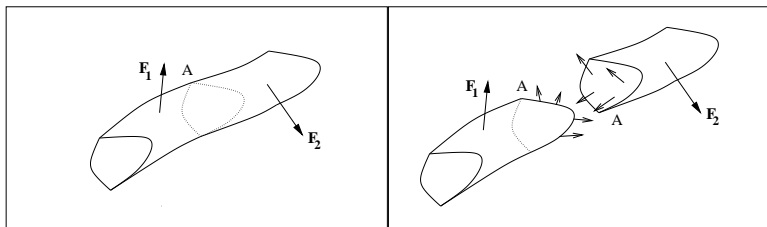
Introdução



- As forças internas surgem entre todas as partículas contíguas do corpo submetido à ação de uma carga externa.
- Em uma seção transversal, as forças internas são a resultante das forças distribuídas, que são produzidas devido as forças externas.
- Estas forças se distribuem de forma complexa na seção transversal.
- Devem ser tais que se cumpram as condições de equilíbrio de qualquer das partes do corpo em questão.

Forças Internas em Barras

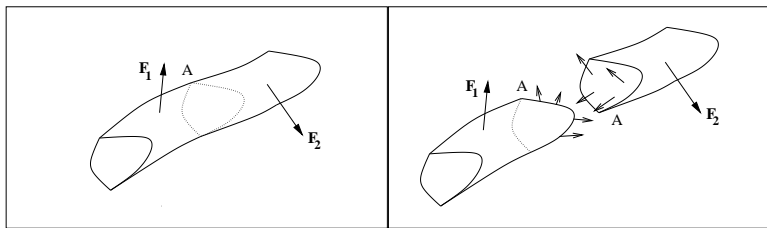
Introdução



- As forças internas surgem entre todas as partículas contíguas do corpo submetido à ação de uma carga externa.
- Em uma seção transversal, as forças internas são a resultante das forças distribuídas, que são produzidas devido as forças externas.
- Estas forças se distribuem de forma complexa na seção transversal.
- Devem ser tais que se cumpram as condições de equilíbrio de qualquer das partes do corpo em questão.

Forças Internas em Barras

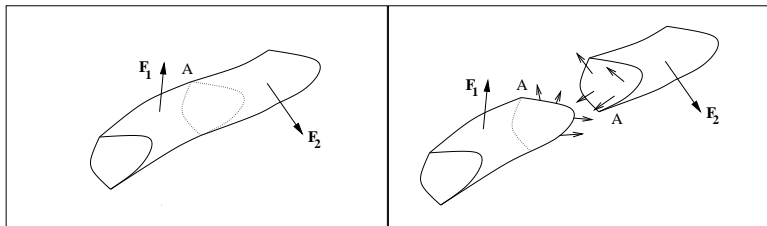
Introdução



- As forças internas surgem entre todas as partículas contíguas do corpo submetido à ação de uma carga externa.
- Em uma seção transversal, as forças internas são a resultante das forças distribuídas, que são produzidas devido as forças externas.
- Estas forças se distribuem de forma complexa na seção transversal.
- Devem ser tais que se cumpram as condições de equilíbrio de qualquer das partes do corpo em questão.

Forças Internas em Barras

Introdução



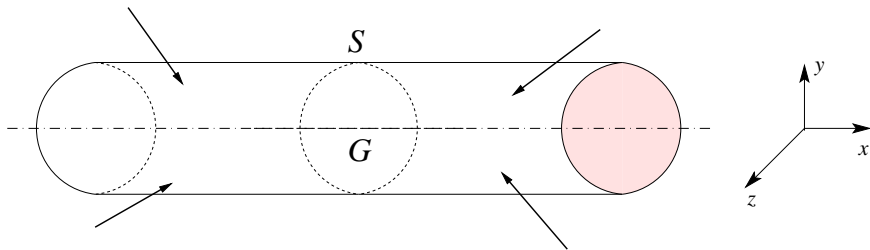
- As forças internas surgem entre todas as partículas contíguas do corpo submetido à ação de uma carga externa.
- Em uma seção transversal, as forças internas são a resultante das forças distribuídas, que são produzidas devido as forças externas.
- Estas forças se distribuem de forma complexa na seção transversal.
- Devem ser tais que se cumpram as condições de equilíbrio de qualquer das partes do corpo em questão.

Programa

- 1 Forças Internas em Barras
 - Definição dos Esforços
 - Diagramas de Esforços
 - Relação entre Carregamentos e Esforços

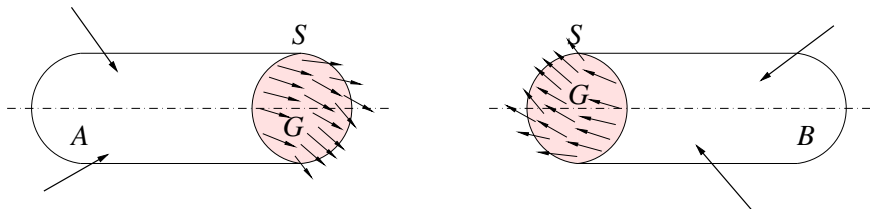
Definição dos Esforços

- Vamos considerar um corpo em equilíbrio submetido a um conjunto de forças, ativas e reativas.
- Seja uma seção qualquer S , submetida a um conjunto de forças em equilíbrio, que separa um corpo em duas partes A e B .



Definição dos Esforços

- Vamos considerar um corpo em equilíbrio submetido a um conjunto de forças, ativas e reativas.
- Seja uma seção qualquer S , submetida a um conjunto de forças em equilíbrio, que separa um corpo em duas partes A e B .

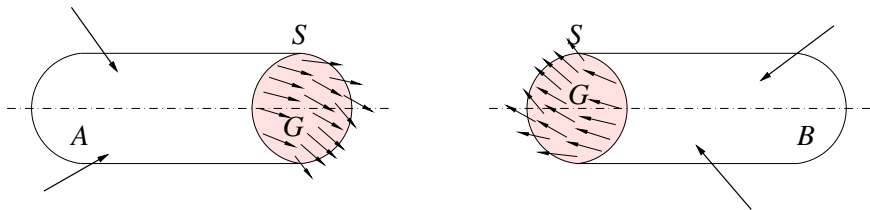


Definição dos Esforços

- Analisando o equilíbrio das partes A e B , tem-se que

$$\boxed{\text{Forças em } A} \Leftarrow \text{equilibram} \Rightarrow \boxed{\text{Forças em } B}$$

- As ações exercidas pela parte A sobre a parte B equilibram as forças externas que atuam na parte B .
- Fazendo-se a redução deste sistema de forças interiores ao centroide G da seção S por intermédio das forças externas que atuam na parte B obtém-se as resultantes \mathbf{F}_R e \mathbf{M}_R .

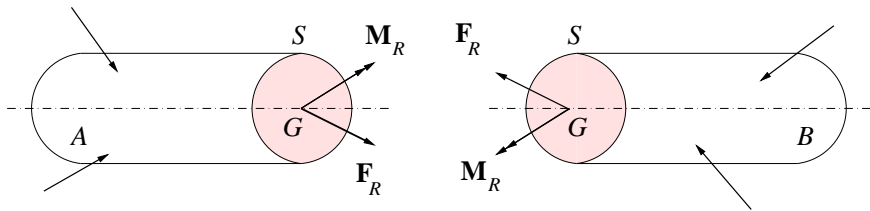


Definição dos Esforços

- Analisando o equilíbrio das partes A e B , tem-se que

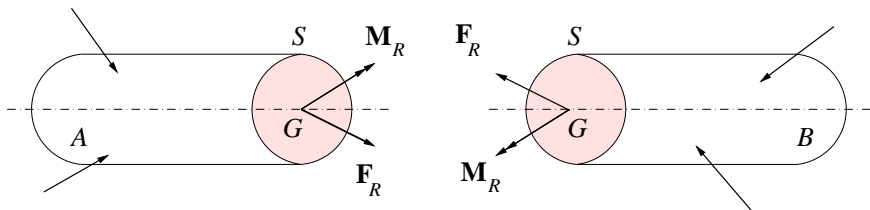
$$\boxed{\text{Forças em } A} \Leftarrow \text{equilibram} \Rightarrow \boxed{\text{Forças em } B}$$

- As ações exercidas pela parte A sobre a parte B equilibram as forças externas que atuam na parte B .
- Fazendo-se a redução deste sistema de forças interiores ao centroide G da seção S por intermédio das forças externas que atuam na parte B obtém-se as resultantes \mathbf{F}_R e \mathbf{M}_R .



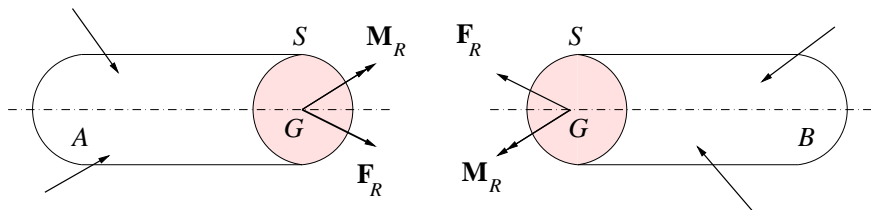
Definição dos Esforços

- Entende-se por esforço em uma seção como a redução das forças e momentos ao centroide da seção.
- O par de forças e momentos opostos são os esforços internos na seção S .



Definição dos Esforços

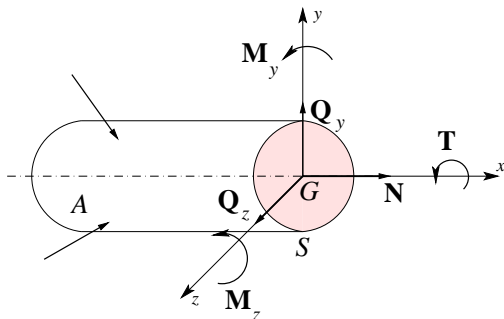
- A força \mathbf{F}_R que atua na parte esquerda é a resultante das forças exteriores que ficam à direita.
- O momento \mathbf{M}_R que atua na parte esquerda é o momento resultante das forças exteriores que ficam à direita.
- **O conjunto de forças estaticamente equivalente é ação de uma parte do corpo sobre a outra, através da seção que as separa, é o esforço na seção.**



Definição dos Esforços

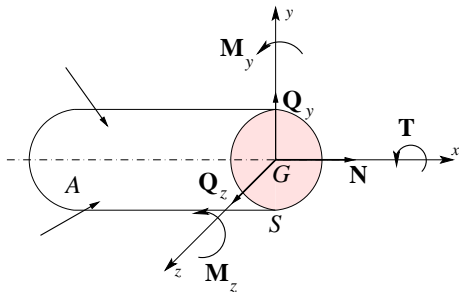
- Decompondo segundo os eixos coordenados as resultantes \mathbf{F}_R e $-\mathbf{F}_R$ e os momentos \mathbf{M}_R e $-\mathbf{M}_R$ em componentes normais e tangenciais, obtém-se os esforços simples.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = \mathbf{N} + \mathbf{Q}_y + \mathbf{Q}_z \\ \mathbf{M}_R &= \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z = \mathbf{T} + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z\end{aligned}$$



Definição dos Esforços

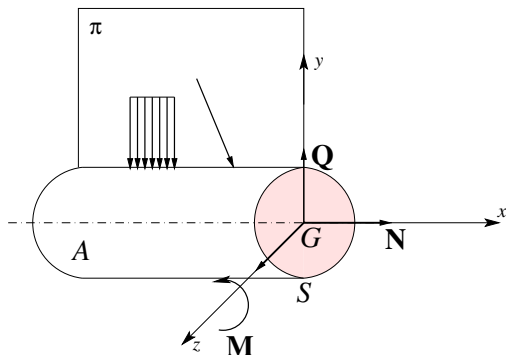
- N é o esforço normal ou axial.
- Q_y é o esforço cortante segundo o eixo y .
- Q_z é o esforço cortante segundo o eixo z .



- T é o momento torsor ou momento de torção.
- M_y é o momento cortante e segundo o eixo y .
- M_z é o momento cortante segundo o eixo z .

Definição dos Esforços

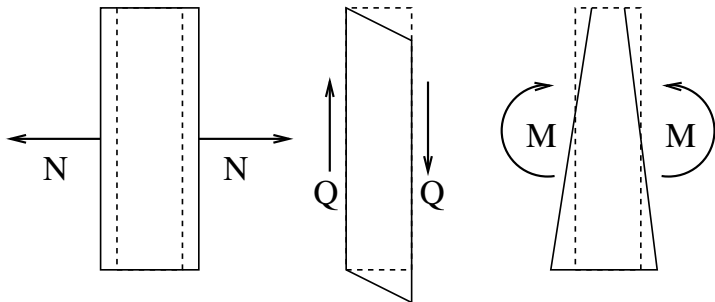
- Para o caso de vigas, o carregamento é coplanar e atua perpendicularmente ao seu eixo
- Consideraremos somente:
 - Esforço Normal – **N**
 - Esforço Cortante – **Q**
 - Momento Fletor – **M**



Definição dos Esforços

Efeitos Causados pelos Esforços Simples

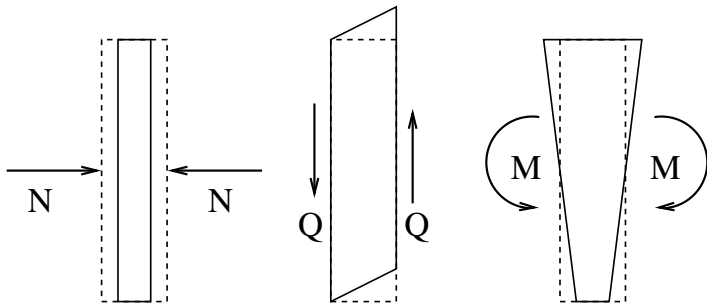
- Componente **N** – aproximar (esforço de compressão), ou afastar (esforço de tração), seções imediatamente próximas.
- Componente **Q** – provoca o o deslizamento relativo entre seções paralelas devido é forças paralelas (em sentido oposto).
- Componente **M** – tende a fazer com que a seção gire em torno de um eixo localizado no seu próprio plano.



Definição dos Esforços

Efeitos Causados pelos Esforços Simples

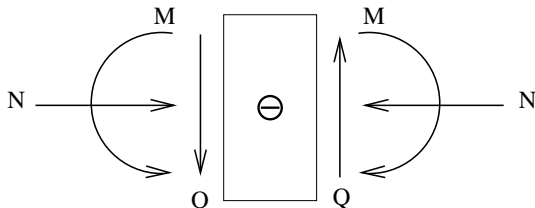
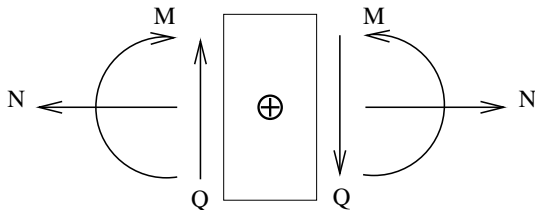
- Componente **N** – aproximar (esforço de compressão), ou afastar (esforço de tração), seções imediatamente próximas.
- Componente **Q** – provoca o o deslizamento relativo entre seções paralelas devido é forças paralelas (em sentido oposto).
- Componente **M** – tende a fazer com que a seção gire em torno de um eixo localizado no seu próprio plano.



Definição dos Esforços

Convenção de Sinais

- Vamos convencionar os sinais de **N**, **Q** e **M** da seguinte forma:



Programa

- 1 Forças Internas em Barras
 - Definição dos Esforços
 - Diagramas de Esforços
 - Relação entre Carregamentos e Esforços

Diagramas de Esforços

- Elementos longos e retos que suportam cargas perpendiculares a seu eixo longitudinal são denominados vigas.
- Vigas são classificadas de acordo com o modo como são apoiadas.



Viga simplesmente apoiada



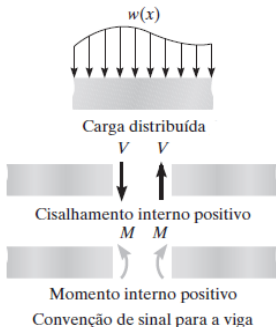
Viga em balanço



Viga apoiada com uma extremidade em balanço

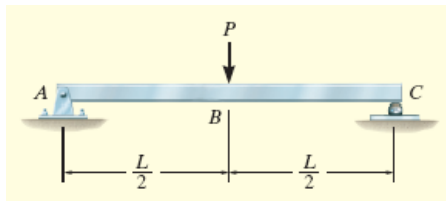
Diagramas de Esforços

- As funções de cisalhamento (cortante) e momento podem ser representadas em gráficos denominados diagramas de esforço cortante (V ou Q) e momento fletor (M).
- Direções positivas indicam que o cortante provoca uma rotação em sentido horário e o fletor traciona a parte de baixo da seção.



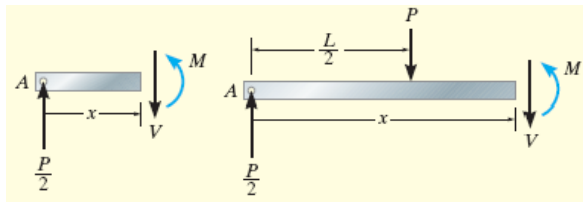
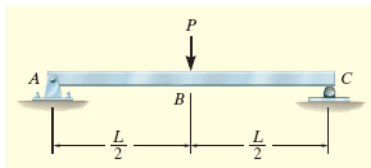
Diagramas de Esforços

- Represente graficamente os diagramas de esforço cortante e momento fletor para a viga dada.



Diagramas de Esforços

- Processo de solução: Equilíbrio de das porções antes e depois da carga.
 - Calcular as reações e fazer os diagramas de corpo livre
 - Desenhar os esforços com os sentidos positivos
 - Equacionar os esforços visando o equilíbrio de cada porção

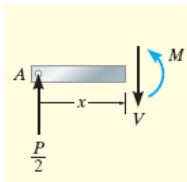


Diagramas de Esforços

Solução:

- O diagrama de corpo livre do segmento esquerdo + equilíbrio:

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0 &\Rightarrow V = P/2 \\ + \curvearrowright \sum M_A = 0 &\Rightarrow M = Px/2 \end{aligned}$$



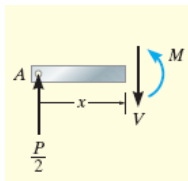
Diagramas de Esforços

Solução:

- O diagrama de corpo livre do segmento esquerdo + equilíbrio:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = P/2$$

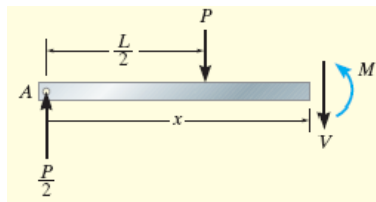
$$+\curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow M = Px/2$$



- Segmento esquerdo estende-se até a distância x na região BC.

$$P/2 - P - V = 0 \Rightarrow V = -P/2$$

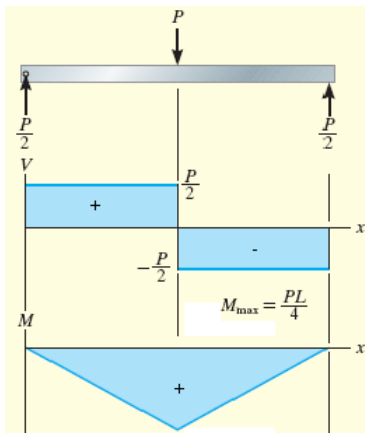
$$M + P(x - \frac{L}{2}) - \frac{Px}{2} \Rightarrow M = \frac{P(L-x)}{2}$$



Diagramas de Esforços

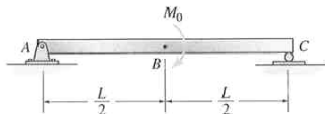
Solução:

- Esboçar os diagramas (observar o sentido + dos momentos!)



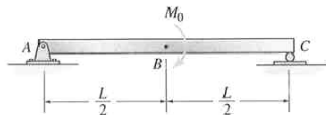
Diagramas de Esforços

- Determine os diagramas para a viga abaixo:

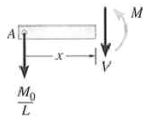


Diagramas de Esforços

- Determine os diagramas para a viga abaixo:



- Equacionando os esforços:



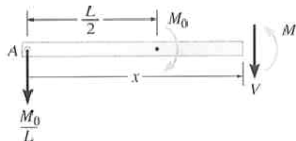
$$A_y = -\frac{M_0}{L}; \quad B_y = \frac{M_0}{L} \quad (\text{Reações de apoio})$$

$$(AB) \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{M_0}{L}$$

$$(AB) \curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow M = -\frac{M_0}{L}x$$

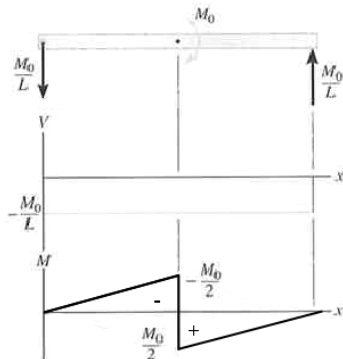
$$(BC) \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{M_0}{L}$$

$$(BC) \curvearrowright \sum M_A = 0 \Rightarrow M = M_0 - \frac{M_0}{L}x$$



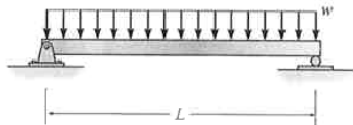
Diagramas de Esforços

- Os diagramas ficam:



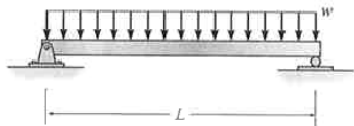
Diagramas de Esforços

- Determine os diagramas para a viga abaixo:

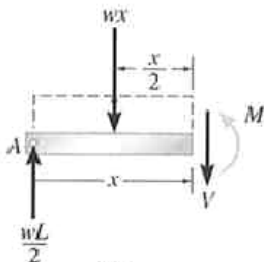


Diagramas de Esforços

- Determine os diagramas para a viga abaixo:



- Equacionando os esforços:



$$A_y = +\frac{wL}{2} \text{ (Reação de apoio)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 = +\frac{wL}{2} - wx - V \Rightarrow$$

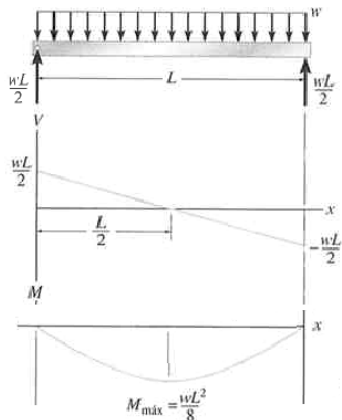
$$V = wL/2 - wx$$

$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 = -\frac{wL}{2}x + (wx)\frac{x}{2} + M \Rightarrow$$

$$M = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

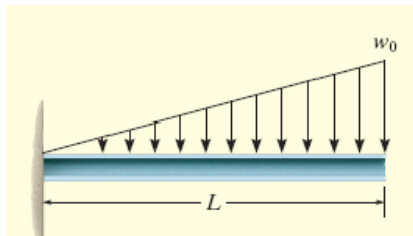
Diagramas de Esforços

- Os diagramas ficam:



Diagramas de Esforços

- Represente graficamente os diagramas de esforço cortante e momento fletor para a viga dada.



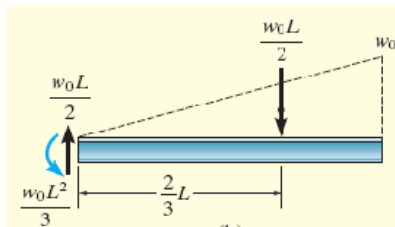
Diagramas de Esforços

Solução:

- A carga distribuída é substituída por sua força resultante.
- A intensidade da carga triangular na seção é determinada por cálculo proporcional:

$$R = w_0 L / 2 \text{ (área do triângulo)}$$

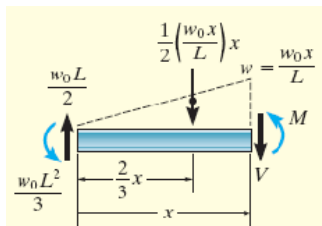
$$\frac{w(x)}{x} = \frac{w_0}{L} \Rightarrow w(x) = \frac{w_0}{L} x$$



Diagramas de Esforços

Solução:

- As expressões dos esforços ficam:

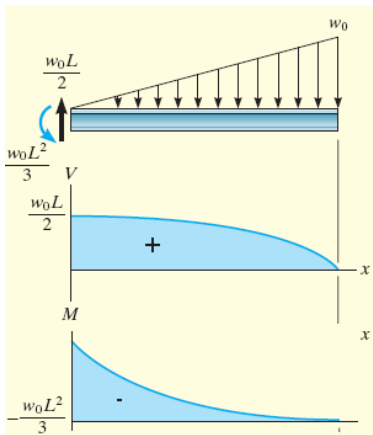


$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &= \frac{w_0 L}{2} - \frac{1}{2} \frac{w_0 x}{L} x - V \\ \sum M_A = 0 &= \frac{w_0 L^2}{3} - \frac{w_0 L}{2} x + \frac{1}{2} \frac{w_0 x}{L} x \frac{x}{3} + M \\ V &= \frac{w_0}{2L} (L^2 - x^2) \\ M &= \frac{w_0}{6L} (-2L^3 + 3L^2 x - x^3) \end{aligned}$$

Diagramas de Esforços

Solução:

- Esboçar os diagramas (observar o sentido + dos momentos!)

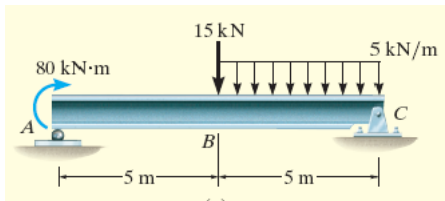


Programa

- 1 **Forças Internas em Barras**
 - Definição dos Esforços
 - Diagramas de Esforços
 - **Relação entre Carregamentos e Esforços**

Relação entre Carregamentos e Esforços

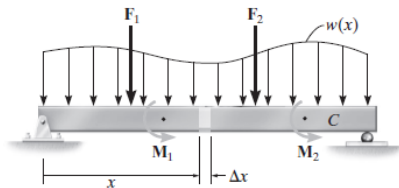
- Nos casos onde a viga está sujeita a varias cargas determinar V e M pode ser cansativo.



- Vamos discutir relações diferenciais entre os esforços e carregamentos para auxiliar a construir os diagramas
- Essas relações proporcionam obter rapidamente os diagramas de esforço cortante e momento fletor

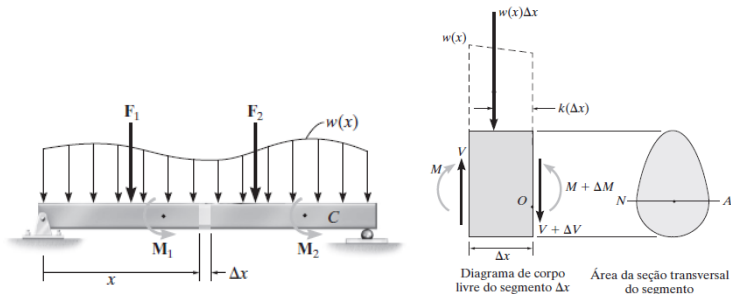
Relação entre Carregamentos e Esforços

- Vamos considerar três casos:
 - 1 Cargas distribuídas
 - 2 Forças concentradas
 - 3 Momentos concentrados

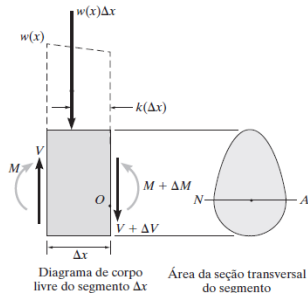


Relação entre Carregamentos e Esforços

- Vamos considerar primeiro o carregament distribuído
- Vamos separar segmento de comprimento Δx
- Os resultados abaixo **não se aplicam em pontos de carga concentrada** ou de **momentos concentrados**



Relação entre Carregamentos e Esforços



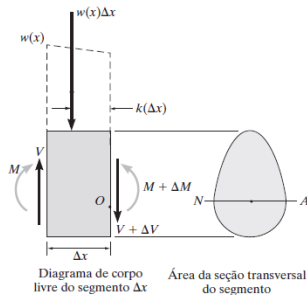
$$\sum F_y = 0 = V - w(x)\Delta x - (V + \Delta V) \Rightarrow$$

$$\Delta V = -w(x)\Delta x$$

$$\sum M_O = 0 = -V\Delta x - M + w(x)\Delta x[k\Delta x] + (M + \Delta M) \Rightarrow$$

$$\Delta M = V\Delta x - w(x)k(\Delta x)^2$$

Relação entre Carregamentos e Esforços



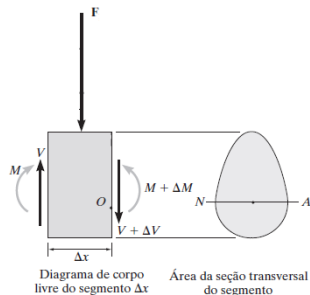
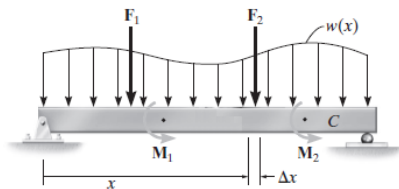
- Dividindo por Δx e tomando limite $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta V = -w(x)\Delta x \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -w(x)$$

$$\Delta M = V\Delta x - w(x)k(\Delta x)^2 \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$

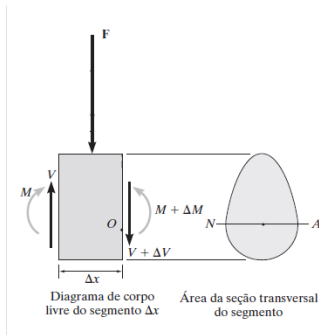
Relação entre Carregamentos e Esforços

- Vamos analisar o caso de cargas concentradas
- Vamos tomar um segmento de comprimento Δx que contém a carga concentrada



Relação entre Carregamentos e Esforços

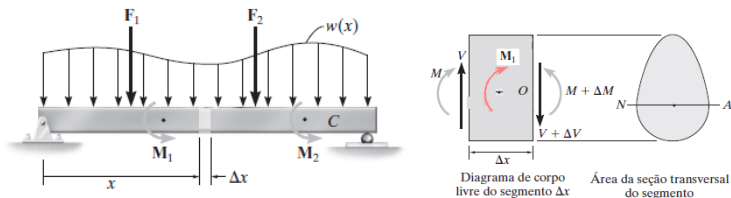
- Fazendo o equilíbrio do segmento selecionado



$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &= V - F - (V + \Delta V) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta V = -F \end{aligned}$$

Relação entre Carregamentos e Esforços

- Tomando o caso de um momento concentrado



$$\sum M_O = 0 = M + \Delta M - M_0 - V\Delta x - M \Rightarrow \Delta M = M_1$$

Relação entre Carregamentos e Esforços

- Relações entre esforços e carregamentos

$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

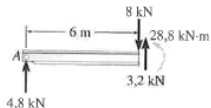
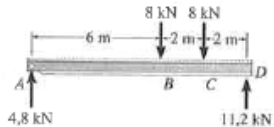
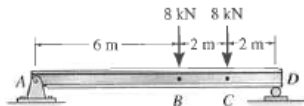
$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\Delta V = -F$$

$$\Delta M = M_1$$

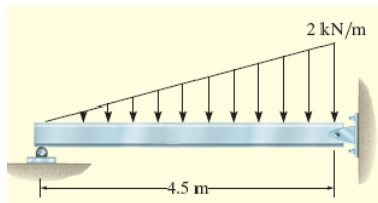
Relação entre Carregamentos e Esforços

- Represente graficamente os diagramas de esforço cortante e momento fletor para a viga abaixo.



Relação entre Carregamentos e Esforços

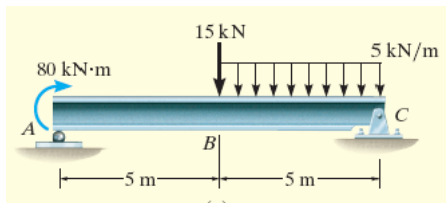
- Represente graficamente os diagramas de esforço cortante e momento fletor para a viga abaixo¹.



¹Solução em sala de aula

Relação entre Carregamentos e Esforços

- Represente graficamente os diagramas de esforço cortante e momento fletor para a viga dada².



²Solução em sala de aula