

MAC-015 Resistência dos Materiais – Unidade 01

Engenharia Elétrica
Engenharia de Produção
Engenharia Sanitária e Ambiental

Leonardo Goliatt, Michèle Farage, Alexandre Cury

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional
Universidade Federal de Juiz de Fora









Departamento de Mecânica
Aplicada e Computacional



Universidade Federal de Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia

versão 16.04

Bibliografia

-  RC Hibbeler; Estática: Mecânica para Engenharia, 10 ed, Pearson, 2006
-  RC Hibbeler; Resistência dos Materiais, 5 ed, Pearson, 2008
-  FP Beer, ER Johnston; Resistência dos Materiais, 2 ed, Makron, 1989
-  SP Timoshenko; Resistência dos Materiais, LTC, 1957
-  FP Beer, ER Johnston; Mecânica Vetorial para Engenheiros, McGraw-Hill, 1978
-  JM Gere; Mecânica dos Materiais, Thomson, 2003

Avaliações

- As avaliações consistem em três provas
 - P1 – [verificar plano da disciplina] (100 pontos)
 - P2 – [verificar plano da disciplina] (100 pontos)
 - P3 – [verificar plano da disciplina] (100 pontos)
- Nota Final: $NF = \frac{1}{3}(P1 + P2 + P3)$
- Critério de aprovação: $NF \geq 60$
- Segunda chamada – será aplicada conforme determina o RAG

Atendimento

- Atendimento

E-mail leonardo.goliatt@ufjf.edu.br

Local MAC – Depto Mecânica Aplicada e Computacional

Sala 4117

Horário A definir

Conteúdo

Esta disciplina apresenta os conceitos básicos de

- Mecânica
- Análise Estrutural
- Resistência dos Materiais

Programa

- 1 Equilíbrio de Corpos Rígidos
 - Princípios Gerais
 - Forças, Vetores e Operações Vetoriais
 - Equilíbrio do Ponto Material
 - Equilíbrio do Corpo Rígido
 - Sistemas Estruturais Simples



Programa

- 1 Equilíbrio de Corpos Rígidos
 - Princípios Gerais
 - Forças, Vetores e Operações Vetoriais
 - Equilíbrio do Ponto Material
 - Equilíbrio do Corpo Rígido
 - Sistemas Estruturais Simples

Definição de Mecânica

Mecânica é o ramo das ciências físicas que trata do estado de repouso ou movimento de corpos sujeitos à ação de forças, sendo subdividida em:

- **Mecânica dos corpos rígidos;**
- Mecânica dos corpos deformáveis e
- Mecânica dos fluidos.

Definição de Mecânica

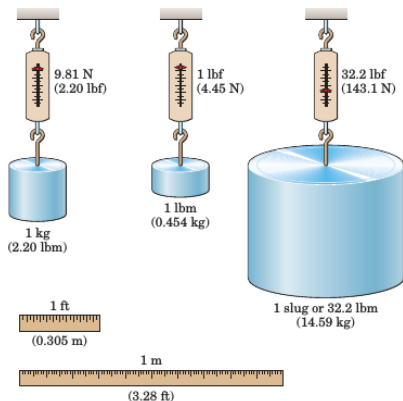
- Mecânica dos corpos rígidos;
 - **Estática**
 - Dinâmica
- A Estática trata do equilíbrio dos corpos.
- Um corpo em equilíbrio encontra-se em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Conceitos Fundamentais

- Grandezas Fundamentais
- Idealizações
- Leis de Newton

Grandezas Básicas

- As quatro grandezas físicas fundamentais:
 - **comprimento** – descreve posição e dimensões de um corpo no espaço;
 - **massa** – caracteriza um corpo e o compara com outro corpo;
 - **tempo** – sucessão de eventos;
 - **força** – ação de um corpo sobre outro.



Idealizações

- Idealizações são formas simplificadas de representar fenômenos e entes físicos.
- Idealizações comumente empregadas
 - partícula ou ponto material;
 - corpo rígido;
 - força concentrada.

Idealizações

- **Ponto material**
 - Possui massa, mas tem dimensões desprezíveis
 - A Terra pode ser modelada como um ponto material para estudar seu *movimento orbital*.
- **Corpo rígido (em oposição a corpo deformável)**
 - Combinação de um grande número de partículas, que permanecem a mesma distância entre si antes e depois de aplicado um carregamento.
 - Como resultado, as propriedades do material podem ser desprezadas.
- **Força concentrada**
 - Efeito de uma carga atuando em um único ponto do corpo.
 - Uma carga pode ser considerada concentrada desde que a área de contato com o corpo seja pequena.
 - Exemplo: contato de uma roda com o terreno.

Idealizações

- Ponto material
 - Possui massa, mas tem dimensões desprezíveis
 - A Terra pode ser modelada como um ponto material para estudar seu *movimento orbital*.
- Corpo rígido (em oposição a corpo deformável)
 - Combinação de um grande número de partículas, que permanecem a mesma distância entre si antes e depois de aplicado um carregamento.
 - Como resultado, as propriedades do material podem ser desprezadas.
- Força concentrada
 - Efeito de uma carga atuando em um único ponto do corpo.
 - Uma carga pode ser considerada concentrada desde que a área de contato com o corpo seja pequena.
 - Exemplo: contato de uma roda com o terreno.

Idealizações

- Ponto material
 - Possui massa, mas tem dimensões desprezíveis
 - A Terra pode ser modelada como um ponto material para estudar seu *movimento orbital*.
- Corpo rígido (em oposição a corpo deformável)
 - Combinação de um grande número de partículas, que permanecem a mesma distância entre si antes e depois de aplicado um carregamento.
 - Como resultado, as propriedades do material podem ser desprezadas.
- Força concentrada
 - Efeito de uma carga atuando em um único ponto do corpo.
 - Uma carga pode ser considerada concentrada desde que a área de contato com o corpo seja pequena.
 - Exemplo: contato de uma roda com o terreno.

Leis do Movimento de Newton

Primeira Lei: Um ponto material inicialmente em repouso ou movendo-se em linha reta e velocidade constante permanece nesse estado desde que não seja submetido a uma força.

Segunda Lei: Um corpo de massa m sob a ação de uma força \vec{F} sofre uma aceleração \vec{a} de mesma direção e sentido de \vec{F} , que é descrita pela relação:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Terceira Lei: A toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade e direção e de sentido contrário.

Leis do Movimento de Newton

Primeira Lei: Um ponto material inicialmente em repouso ou movendo-se em linha reta e velocidade constante permanece nesse estado desde que não seja submetido a uma força.

Segunda Lei: Um corpo de massa m sob a ação de uma força \vec{F} sofre uma aceleração \vec{a} de mesma direção e sentido de \vec{F} , que é descrita pela relação:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Terceira Lei: A toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade e direção e de sentido contrário.

Leis do Movimento de Newton

Primeira Lei: Um ponto material inicialmente em repouso ou movendo-se em linha reta e velocidade constante permanece nesse estado desde que não seja submetido a uma força.

Segunda Lei: Um corpo de massa m sob a ação de uma força \vec{F} sofre uma aceleração \vec{a} de mesma direção e sentido de \vec{F} , que é descrita pela relação:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Terceira Lei: A toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade e direção e de sentido contrário.

Unidades de Medida

- Usaremos o Sistema Internacional (SI), sempre que possível.

- Unidades básicas (SI)

	Nome	Símbolo
comprimento	metro	m
tempo	segundo	s
massa	quilograma	kg

- Unidades derivadas (SI)

	Nome	Símbolo
força	newton	$N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

Prefixos

- Os prefixos G, M, k, m, μ , n são usados para expressar quantidades grandes e pequenas.

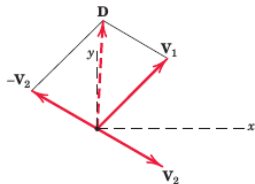
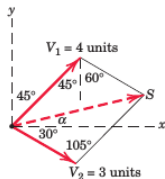
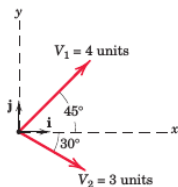
Múltiplo	Forma Exponencial	Prefixo	Símbolo
1 000 000 000	10^{+9}	giga	G
1 000 000	10^{+6}	mega	M
1 000	10^{+3}	kilo	k
0.001	10^{-3}	mili	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Programa

- 1 Equilíbrio de Corpos Rígidos
 - Princípios Gerais
 - **Forças, Vetores e Operações Vetoriais**
 - Equilíbrio do Ponto Material
 - Equilíbrio do Corpo Rígido
 - Sistemas Estruturais Simples

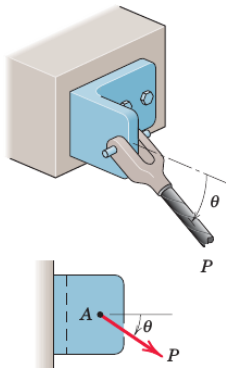
Escalares e Vetores

- As grandezas físicas são representadas (aqui) como:
 - ESCALARES e VETORES
- Escalar – possui magnitude: massa, volume, comprimento. . .
 - Regra da adição: aritmética simples
- Vetor – possui intensidade, direção e sentido: força, momento, posição
 - Regra da adição: lei do paralelogramo.



Escalares e Vetores

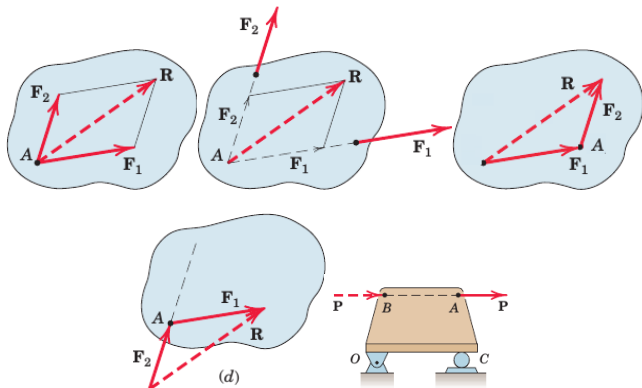
- Graficamente, um vetor é representado por uma flecha:
 - a intensidade é o comprimento da flecha;
 - a direção é definida pelo ângulo entre o eixo de referência e a linha de ação da flecha;
 - o sentido é representado pela ponta da flecha.



Escalares e Vetores

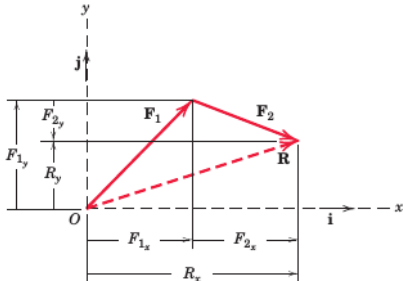
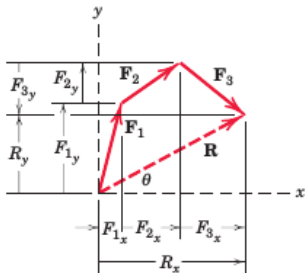
- Princípio da transmissibilidade

- O efeito de uma força não é alterado quando esta é aplicada em diferentes pontos do corpo, desde que esta seja aplicada ao longo da mesma **linha de ação**.



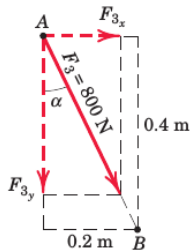
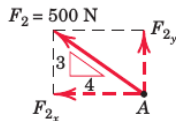
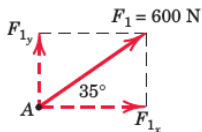
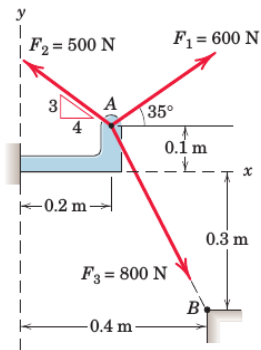
Escalares e Vetores

- Matematicamente, escrevemos um vetor usando a notação cartesiana
- Por simplicidade, usaremos a notação $\vec{F} = (F_x, F_y)$
- A intensidade $|F|$ do vetor \vec{F} é o escalar $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$
- São válidas as operações usuais com vetores
 - 1 Decomposição de cada vetor nas direções x e y
 - 2 Soma de todas as componentes em cada direção;
 - 3 Cálculo da magnitude e da direção do vetor resultante $\vec{F} = (\sum F_x, \sum F_y)$



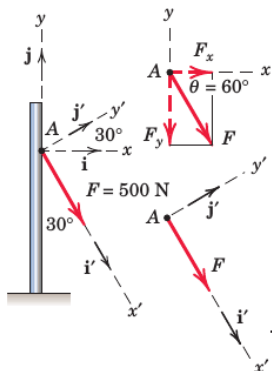
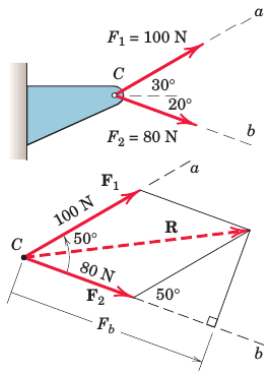
Escalares e Vetores

- Exemplo da decomposição de forças e cálculo da resultante



Escalares e Vetores

- Exemplo da decomposição de forças e cálculo da resultante



Programa

- 1 Equilíbrio de Corpos Rígidos
 - Princípios Gerais
 - Forças, Vetores e Operações Vetoriais
 - **Equilíbrio do Ponto Material**
 - Equilíbrio do Corpo Rígido
 - Sistemas Estruturais Simples

Conceito de equilíbrio de um ponto material

- Um ponto material se encontra em equilíbrio (estático) se a resultante de forças que agem sobre ele for nula.
- Da Segunda Lei de Newton (para um ponto em repouso ou em velocidade constante)

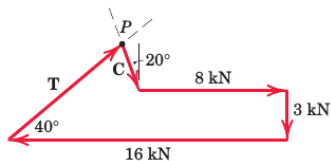
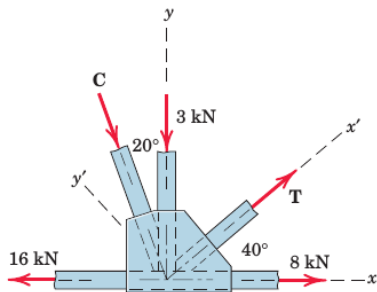
$$\sum \vec{F} = \sum m\vec{a} = 0$$

- Condição necessária e suficiente:

$$\sum \vec{F} = (\sum F_x, \sum F_y) = (0, 0)$$

Conceito de equilíbrio de um ponto material (2D)

- Determine a magnitude das forças C e T na junção metálica abaixo.

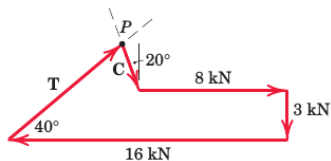
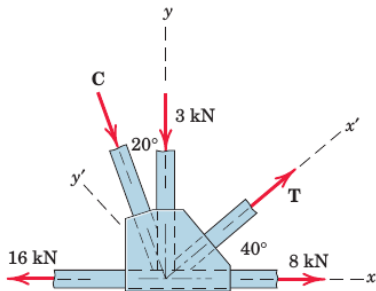


$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 = 8 + T \cos 40 + C \sin 20 - 16 \Rightarrow 0.766T + 0.342C = 8 \\ \sum F_y &= 0 = T \sin 40 - C \cos 20 - 3 \Rightarrow 0.643T - 0.940C = 3 \end{aligned}$$

$$T = 9.09 \text{ kN}; C = 3.03 \text{ kN}$$

Conceito de equilíbrio de um ponto material (2D)

- Determine a magnitude das forças C e T na junção metálica abaixo.

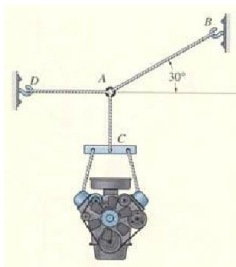


$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 = 8 + T \cos 40 + C \sin 20 - 16 \Rightarrow 0.766T + 0.342C = 8 \\ \sum F_y &= 0 = T \sin 40 - C \cos 20 - 3 \Rightarrow 0.643T - 0.940C = 3 \end{aligned}$$

$$T = 9.09 \text{ kN}; C = 3.03 \text{ kN}$$

Diagrama de corpo livre

- Exemplo: determine a força nos cabos abaixo.
 - A massa do motor é $m=250$ kg.
 - $P=250$ (kg) \cdot $9,81$ (m/s^2) = $2452,5$ N = $2,452$ kN.



- Para determinar as forças que agem nos cabos:
 - desenhar um diagrama de corpo livre e
 - aplicar as equações de equilíbrio.

Diagrama de corpo livre

- Diagrama de corpo livre:

- É um desenho que representa todas as forças externas que agem sobre um ponto material.
- Auxilia a montagem das equações de equilíbrio usadas para determinação das incógnitas de um problema – em geral, forças e ângulos.

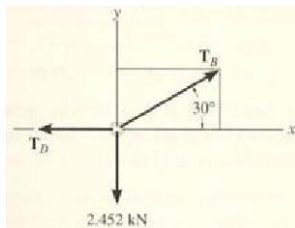
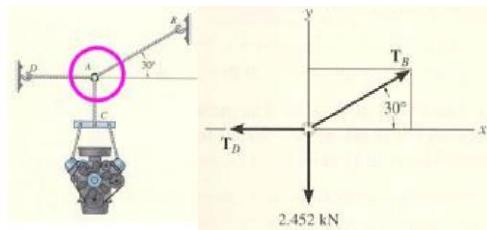


Diagrama de corpo livre

- Diagrama de corpo livre:

- 1 Isolar o ponto
- 2 Representar as forças que agem sobre o ponto (ativas e reativas)
- 3 Identificar todas as forças conhecidas e as incógnitas do problema.



Equações de Equilíbrio

- Se a partícula A está em equilíbrio, então a força resultante em A é nula:

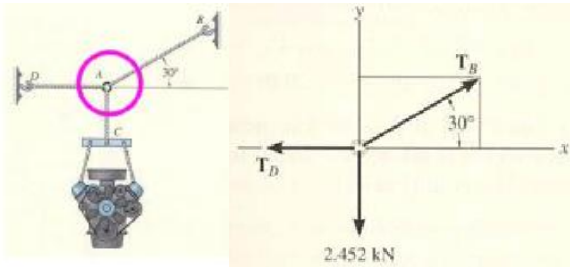
$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{AD} = 0$$

- Forma vetorial:

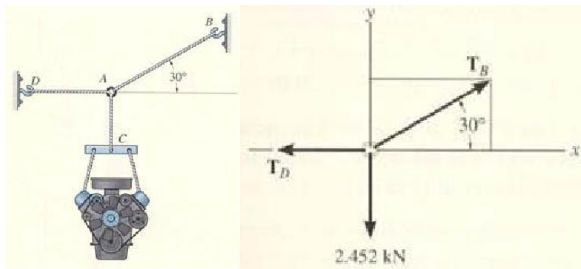
$$\vec{F} = \left(\sum F_x, \sum F_y \right) = (0, 0)$$

- Forma escalar:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$



Exemplo



- Sistema de equações

$$\begin{aligned} \rightarrow \oplus \quad \sum F_x &= 0 = T_B \cos 30 - T_D \\ \uparrow \oplus \quad \sum F_y &= 0 = T_B \sin 30 - 2,452 \end{aligned}$$

- Solução

$$T_B = 4,90 \text{ kN}$$

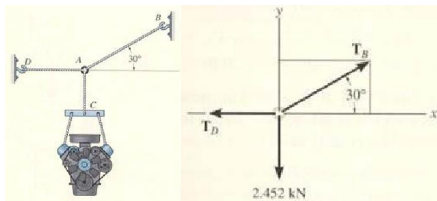
$$T_D = 4,25 \text{ kN}$$

Exemplo

- Para o equilíbrio de um ponto material, temos disponíveis duas equações:

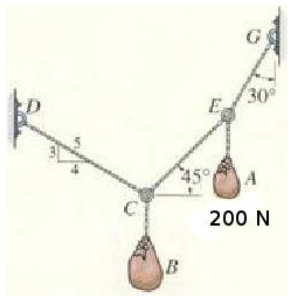
$$\begin{aligned} \rightarrow \oplus \quad \sum F_x &= 0 \\ \uparrow \oplus \quad \sum F_y &= 0 \end{aligned}$$

- O que permite encontrar, para cada ponto, até **duas** incógnitas.
- Forças concorrentes.



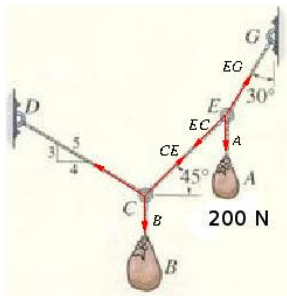
Exemplo

- Dado o sistema em equilíbrio, determinar o peso do saco B sabendo que o saco A pesa 200N .



Exemplo

- Dado o sistema em equilíbrio, determinar o peso do saco B sabendo que o saco A pesa 200N.



Forças horizontais em E :

$$F_{EG} \cos 60 - F_{EC} \cos 45 = 0$$

$$F_{EG}(1/2) - F_{EC}(\sqrt{2}/2) = 0 \Rightarrow \frac{F_{EG}}{\sqrt{2}} = F_{EC}$$

Forças verticais em E :

$$-200 + F_{EG} \sin 60 - F_{EC} \sin 45 = 0$$

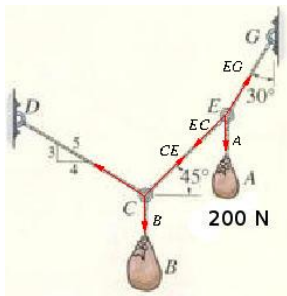
$$-200 + F_{EG}(\sqrt{3}/2) - F_{EC}(\sqrt{2}/2) = 0$$

$$-200 + F_{EG}(\sqrt{3}/2) - \frac{F_{EG}}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}/2) = 0 \Rightarrow$$

$$F_{EG} = 546.41 \text{ N} \Rightarrow F_{EC} = 386.37 \text{ N}$$

Exemplo

- Dado o sistema em equilíbrio, determinar o peso do saco B sabendo que o saco A pesa 200N.



Forças horizontais em C:

$$\begin{aligned}
 F_{EC} &= F_{CE} \\
 F_{CE} \cos 45 - F_{CD} \frac{4}{5} &= 0 \\
 F_{CE} \sqrt{2}/2 - F_{CD} \frac{4}{5} &= 0 \Rightarrow \\
 F_{CD} &= 341.51 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Forças verticais em C:

$$\begin{aligned}
 F_{CE} \operatorname{sen} 45 + F_{CD} \frac{3}{5} - P_B &= 0 \Rightarrow \\
 P_B &= 478.11 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Programa

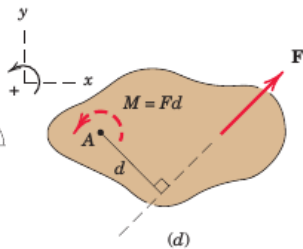
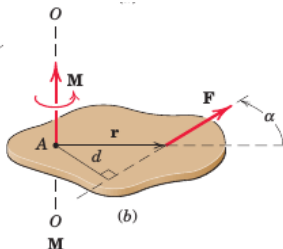
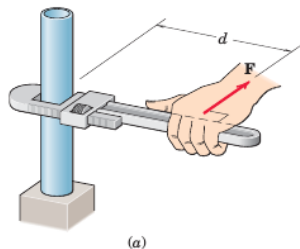
- 1 Equilíbrio de Corpos Rígidos
 - Princípios Gerais
 - Forças, Vetores e Operações Vetoriais
 - Equilíbrio do Ponto Material
 - Equilíbrio do Corpo Rígido
 - Sistemas Estruturais Simples

Conceitos Fundamentais

- Momento de uma força
- Sistema equivalente

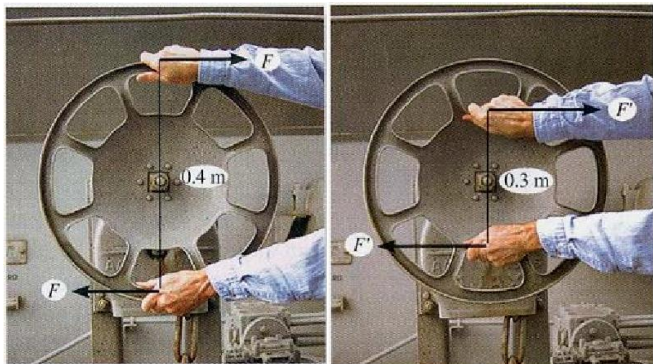
Momento de uma Força

- Uma força produz um efeito de giro em torno de um ponto que não se localiza em sua linha de ação.



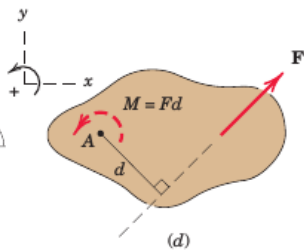
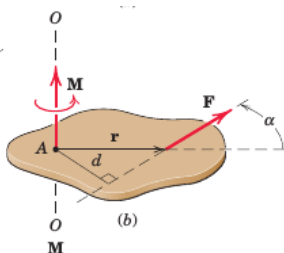
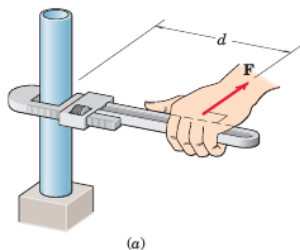
Momento de uma Força

- O momento de uma força em relação a um ponto (eixo) fornece a medida da tendência de rotação provocada pela força em torno do ponto (eixo).



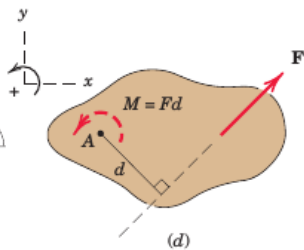
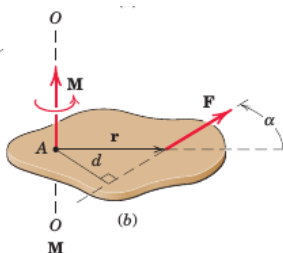
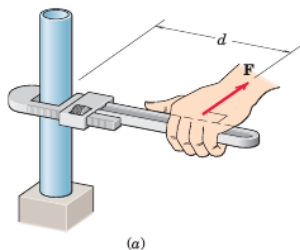
Formulação Vetorial e Escalar

- O vetor-momento é uma grandeza **vetorial** dada por $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- \mathbf{M} é o momento em relação a A , e sua intensidade é M
- \mathbf{F} é a força (vetor) e \mathbf{r} o vetor posição
- O vetor posição \mathbf{r} liga A a qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F} .
- Sua intensidade é $M = Fd$
- d é o braço de alavanca, distância \perp do ponto A até a linha de ação de \mathbf{F} .



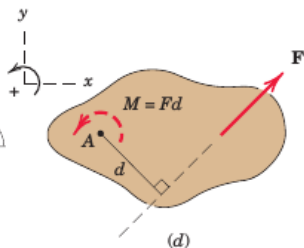
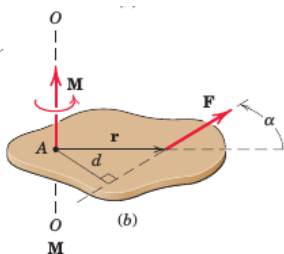
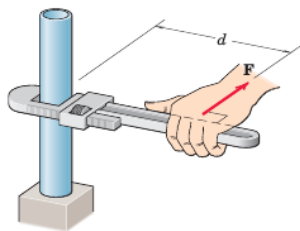
Formulação Vetorial e Escalar

- O vetor-momento é uma grandeza **vetorial** dada por $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- \mathbf{M} é o momento em relação a A , e sua intensidade é M
- \mathbf{F} é a força (vetor) e \mathbf{r} o vetor posição
- O vetor posição \mathbf{r} liga A a qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F} .
- Sua **intensidade** é $M = Fd$
- d é o braço de alavanca, distância \perp do ponto A até a linha de ação de \mathbf{F} .



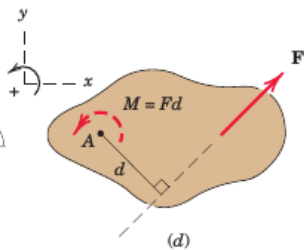
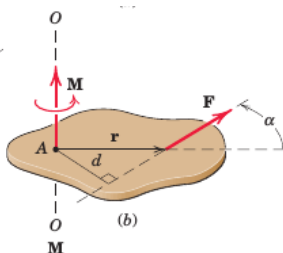
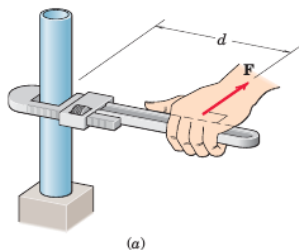
Formulação Vetorial e Escalar

- O vetor-momento é uma grandeza **vetorial** dada por $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- \mathbf{M} é o momento em relação a A , e sua intensidade é M
- \mathbf{F} é a força (vetor) e \mathbf{r} o vetor posição
- O vetor posição \mathbf{r} liga A a qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F} .
- Sua **intensidade** é $M = Fd$
- d é o braço de alavanca, distância \perp do ponto A até a linha de ação de \mathbf{F} .



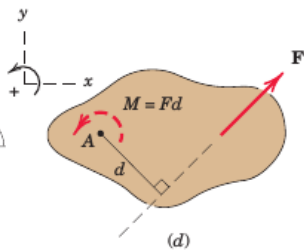
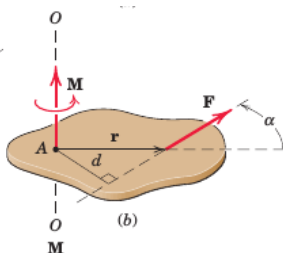
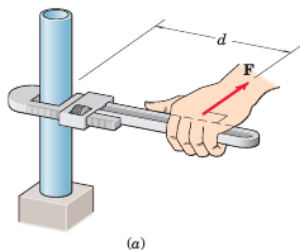
Formulação Vetorial e Escalar

- O vetor-momento é uma grandeza **vetorial** dada por $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- \mathbf{M} é o momento em relação a A , e sua intensidade é M
- \mathbf{F} é a força (vetor) e \mathbf{r} o vetor posição
- O vetor posição \mathbf{r} liga A a qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F} .
- Sua **intensidade** é $M = Fd$
- d é o braço de alavanca, distância \perp do ponto A até a linha de ação de \mathbf{F} .



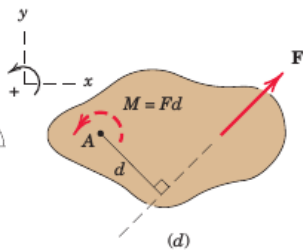
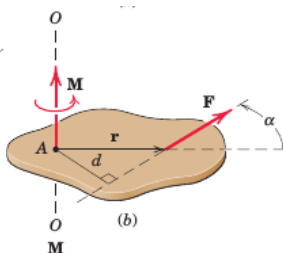
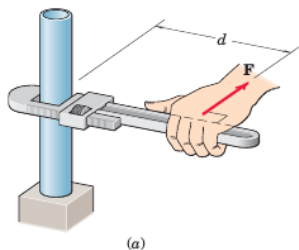
Formulação Vetorial e Escalar

- O vetor-momento é uma grandeza **vetorial** dada por $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- \mathbf{M} é o momento em relação a A , e sua intensidade é M
- \mathbf{F} é a força (vetor) e \mathbf{r} o vetor posição
- O vetor posição \mathbf{r} liga A a qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F} .
- Sua **intensidade** é $M = Fd$
- d é o braço de alavanca, distância \perp do ponto A até a linha de ação de \mathbf{F} .



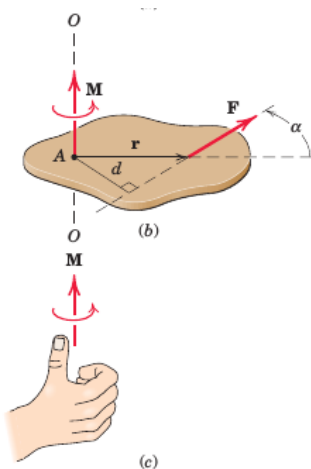
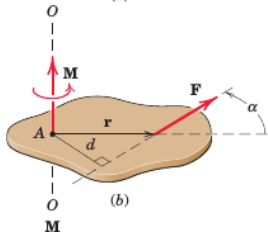
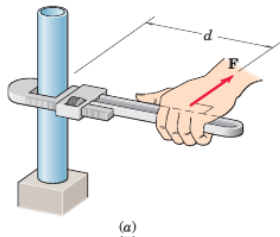
Formulação Vetorial e Escalar

- O vetor-momento é uma grandeza **vetorial** dada por $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- \mathbf{M} é o momento em relação a A , e sua intensidade é M
- \mathbf{F} é a força (vetor) e \mathbf{r} o vetor posição
- O vetor posição \mathbf{r} liga A a qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F} .
- Sua **intensidade** é $M = Fd$
- d é o braço de alavanca, distância \perp do ponto A até a linha de ação de \mathbf{F} .



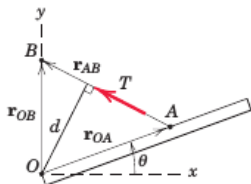
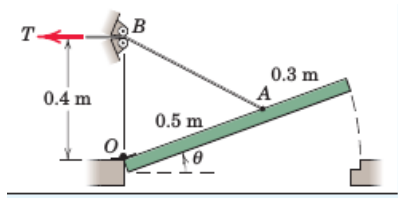
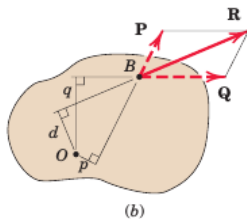
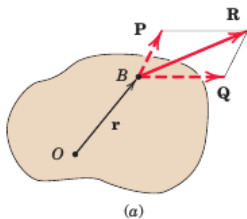
Formulação Vetorial e Escalar

- A direção e sentido são dados pela regra da mão direita



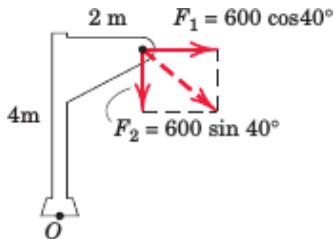
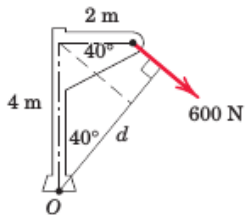
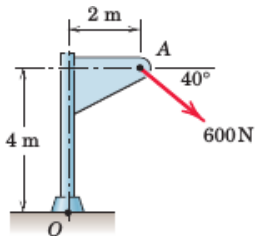
Exemplo

- Alguns casos:



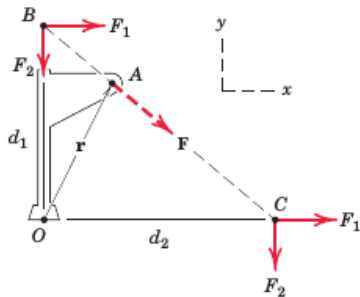
Exemplo

- Alguns casos:



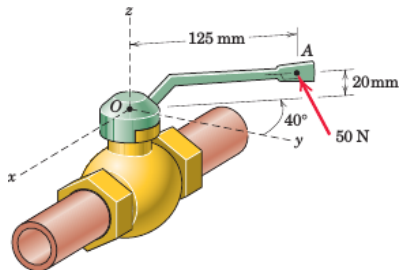
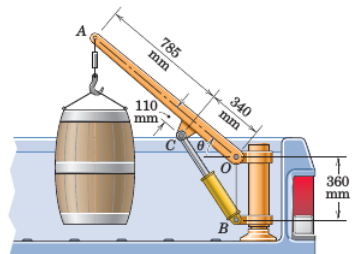
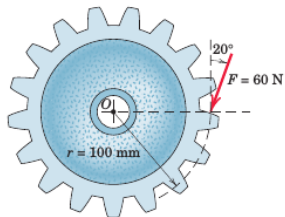
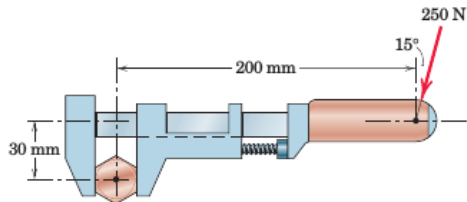
Exemplo

- Alguns casos:



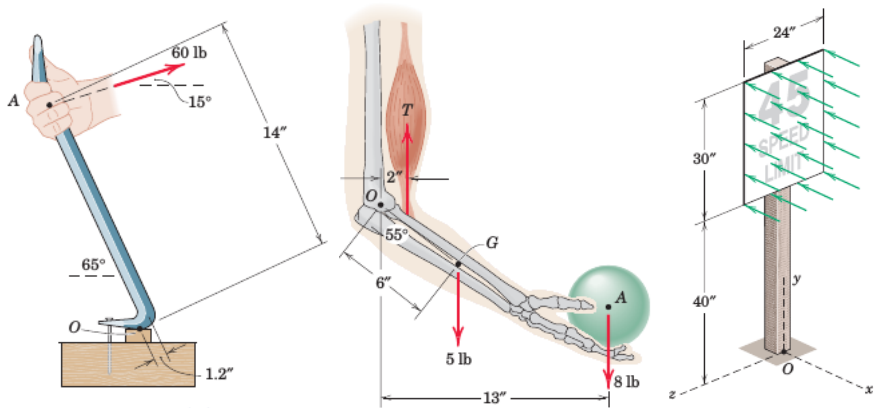
Exemplo

- Alguns casos:



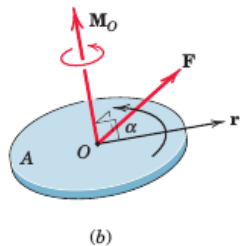
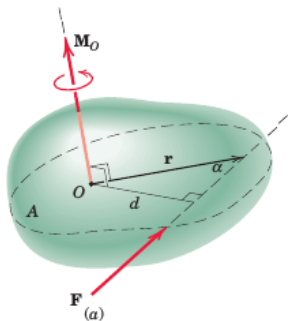
Exemplo

- Alguns casos:



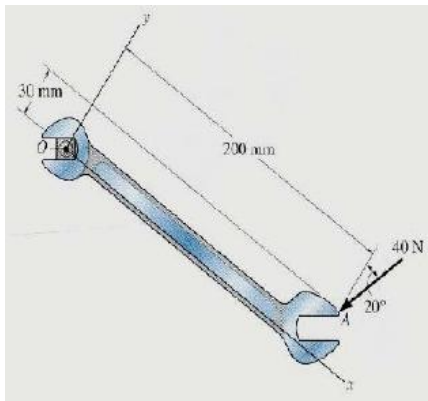
Exemplo

- Alguns casos:



Exemplo

- Calcular o momento com relação ao ponto O .



+ \odot

$M_O =$

$-(40 \cos 20)200 \text{ kNmm}$

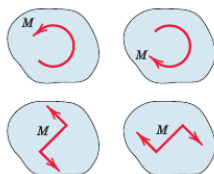
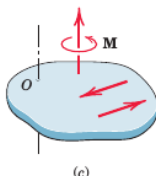
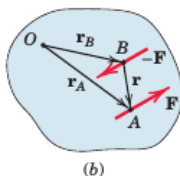
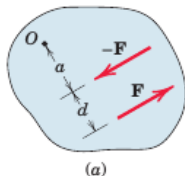
$+(40 \sin 20)30 \text{ kNmm}$

$= -7107 \text{ kNmm}$

Binário ou Conjugado

- Um binário são duas forças paralelas não colineares, que têm mesma intensidade mas sentidos opostos.
- O efeito de um binário é: a força resultante nula e a intensidade do momento

$$M_O = Fd$$



Binário ou Conjugado

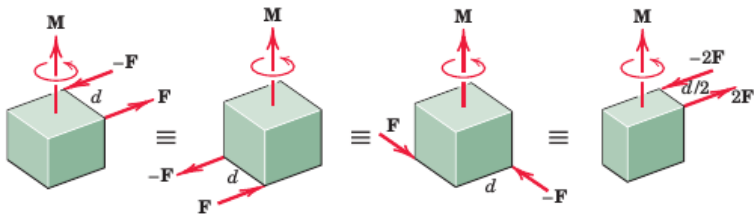
- Um binário são duas forças paralelas não colineares, que têm mesma intensidade mas sentidos opostos.
- O efeito de um binário é: a força resultante nula e a intensidade do momento

$$M_O = Fd$$

Binário ou Conjugado

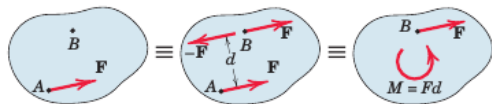
- Um binário são duas forças paralelas não colineares, que têm mesma intensidade mas sentidos opostos.
- O efeito de um binário é: a força resultante nula e a intensidade do momento

$$M_O = Fd$$



Sistema Equivalente

- Uma força aplicada sobre um corpo tem a capacidade de provocar:
 - translação;
 - rotação.
- Ideia: reduzir um sistema de forças e momentos a uma única força e um único momento.

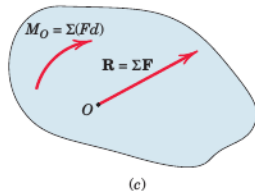
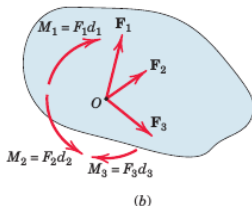
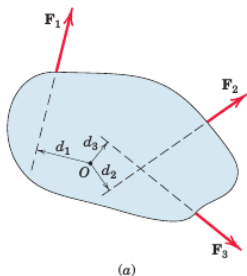


Sistema Equivalente

- Quando várias forças e momentos agem em conjunto sobre um corpo, é mais fácil compreender o efeito resultante se o sistema for representado por uma única força e um único momento aplicados em um determinado ponto, gerando o mesmo efeito externo.

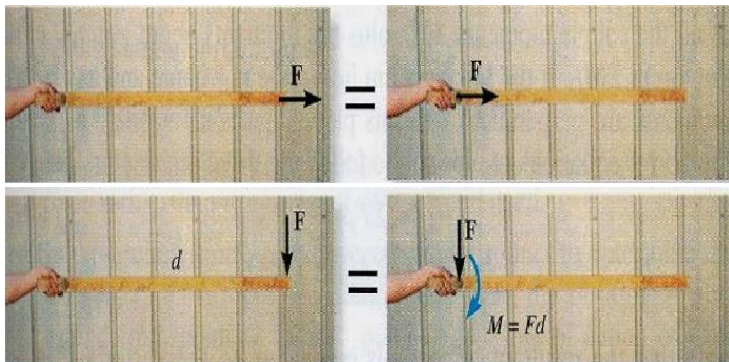
$$F_R = \sum F$$

$$M_R = \sum M_O$$



Sistema Equivalente

- Qual é o efeito do sistema de cargas que age na barra sobre a mão que a segura na extremidade esquerda?

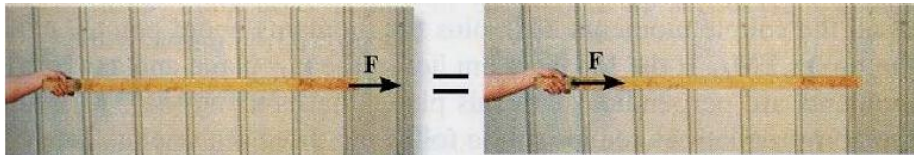


Deslocamento de Forças

- Deslocamento ao longo da linha de ação.
- O efeito externo não se altera –mas há variação de efeitos internos.

Deslocamento de Forças

- Deslocamento ao longo da linha de ação.
- O efeito externo não se altera –mas há variação de efeitos internos.

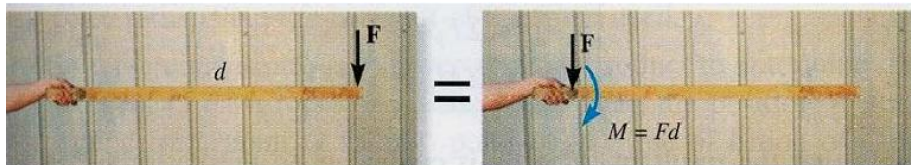


Deslocamento de Forças

- Deslocamento fora da linha de ação.
- Para que se mantenha o efeito externo, é necessário aplicar no ponto em questão uma força e um momento.

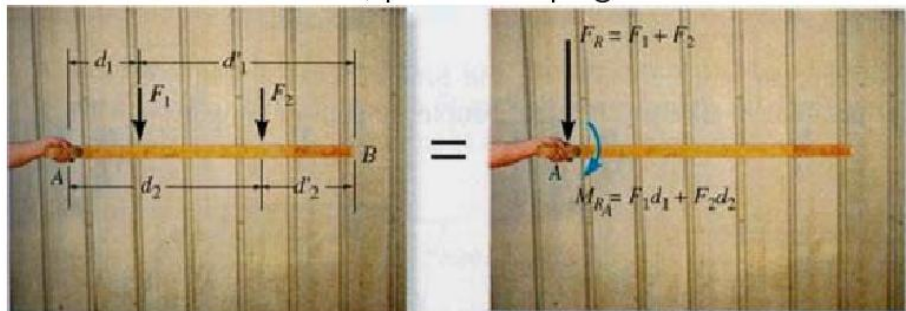
Deslocamento de Forças

- Deslocamento fora da linha de ação.
- Para que se mantenha o efeito externo, é necessário aplicar no ponto em questão uma força e um momento.



Sistema Equivalente

- Caso bidimensional

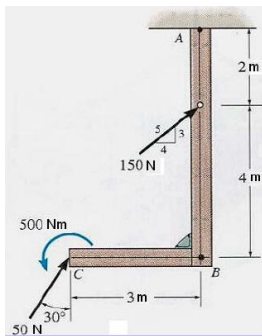


$$F_R = \sum F$$

$$M_R = \sum M_A$$

Exemplo

- Dado o sistema coplanar de forças e momentos, determinar a força e o momento equivalentes atuando no ponto A.



$$\rightarrow \sum F_x = 50 \sin 30 + \frac{4}{5} 150$$

$$\uparrow \sum F_y = 50 \cos 30 + \frac{3}{5} 150$$

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_A &= 500 - 50 \cos 30 \cdot 3 \\ &+ 50 \sin 30 \cdot 6 + 2 \cdot \frac{4}{5} 150 \end{aligned}$$

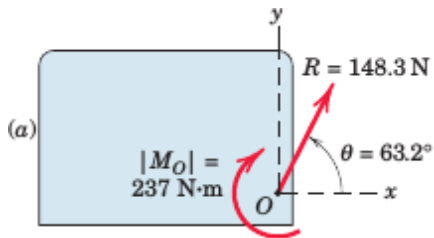
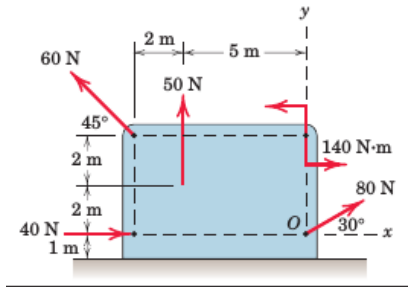
$$R_x = \sum F_x = \rightarrow 145.0 \text{ N}$$

$$R_y = \sum F_y = \uparrow 133.3 \text{ N}$$

$$M_R = \sum M_A = \circlearrowleft 760.1 \text{ Nm}$$

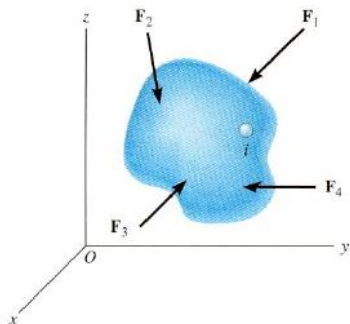
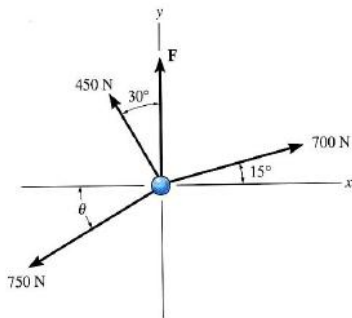
Exemplo

- Redução do sistema de forças ao ponto O



Condições de Equilíbrio para o Corpo Rígido

- As forças em um corpo rígido, de modo geral não são concorrentes em um ponto, e podem causar **rotação** e **translação** do corpo.

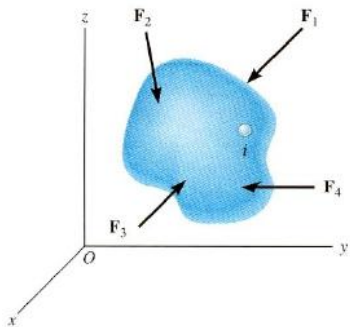


Condições de Equilíbrio para o Corpo Rígido

- Para que um corpo rígido esteja em equilíbrio, a força resultante e o momento resultante devem ser **nulos**.
- Equações de Equilíbrio:

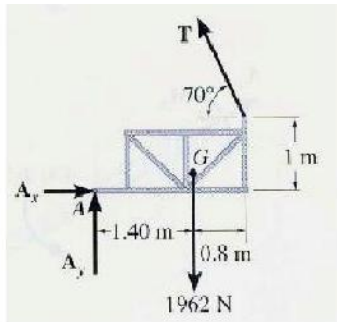
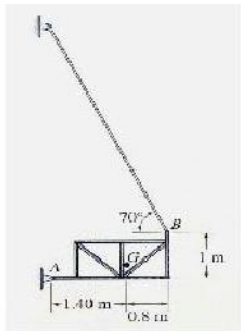
$$F_R = \sum F = 0$$

$$M_R = \sum M_A = 0$$



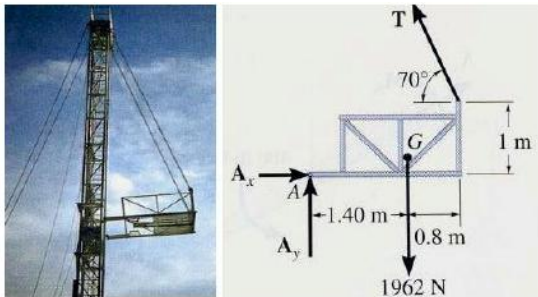
Processo de Solução de Problemas de Equilíbrio

- Dado um **sistema físico real**, adota-se um **modelo idealizado**, e desenha-se o **diagrama de corpo livre**, com **todas as forças** que agem no sistema.
- As incógnitas são determinadas através das **equações de equilíbrio**.



Processo de Solução de Problemas de Equilíbrio

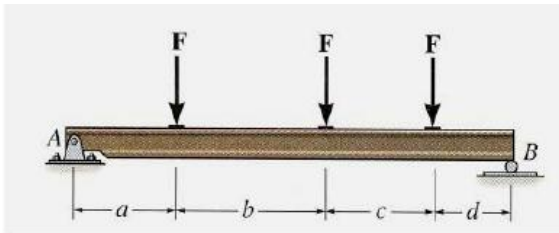
- Modelo idealizado:



- Em 2D, temos disponíveis 3 equações de equilíbrio
 - 2 equações para translações ($\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$)
 - 1 equação para rotação ($\sum M_P = 0$, P um ponto qualquer)
- As incógnitas aparecem em função dos **apoios**, que impedem **rotação** e translação do **corpo**.

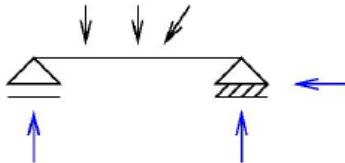
Modelo Idealizado

- Exemplo de modelo idealizado

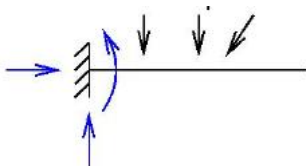


Apoios

- Os apoios podem impedir **translações** e **rotações** de um corpo em determinadas direções.
- Se uma **translação** é impedida, então o apoio exerce uma **força** sobre o corpo (na direção impedida).

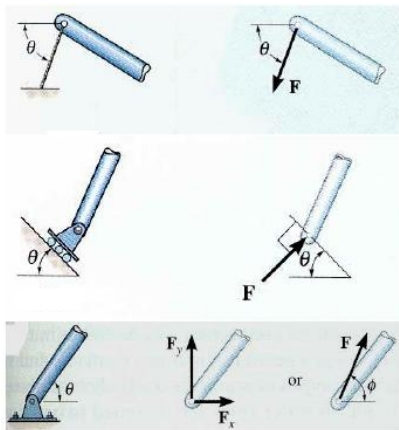


- Se uma **rotação** é impedida, então o apoio exerce um **momento** sobre o corpo.



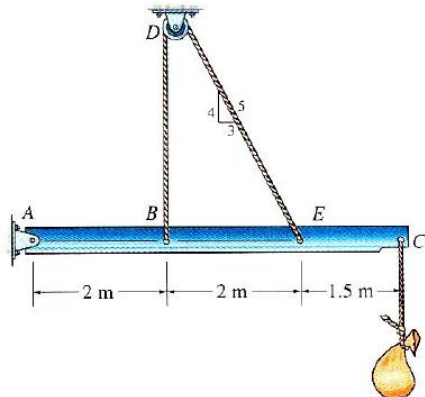
Exemplos de Apoios em Sistemas Planos

- Apoios em sistemas planos



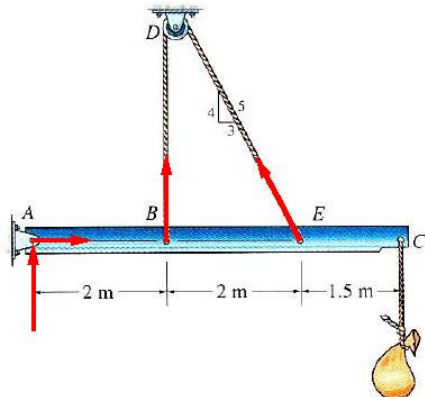
Exemplo

- Quantas incógnitas há no sistema abaixo?



Exemplo

- Quantas incógnitas há no sistema abaixo?



Equilíbrio de Corpos Rígidos em 2D

- Considere-se um corpo submetido a um sistema de forças contido no plano xy .
- Na condição de equilíbrio, o somatório das forças e o somatório dos momentos que agem sobre o corpo é zero.
- Em duas dimensões, esta condição pode ser representada pelas equações escalares:

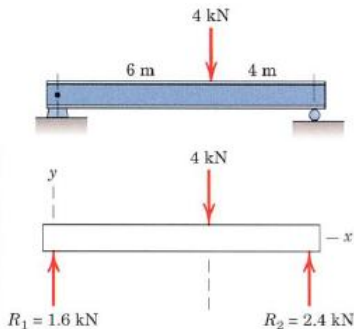
$$F_x = 0$$

$$F_y = 0$$

$$M_z = 0$$

Exemplo

- Calcule as reações de apoio da viga abaixo:



- Equilíbrio de momentos:

$$\circlearrowleft \oplus \sum M_A = 0 =$$

$$+10(R_2) - 6(4) \Rightarrow R_2 = 2.4 \text{ kN}$$

- Equilíbrio de forças verticais:

$$\uparrow \oplus \sum F_y = 0 = R_1 + R_2 - 4 \Rightarrow$$

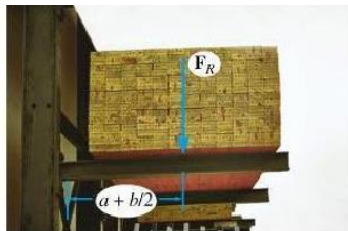
$$R_1 = 1.6 \text{ kN}$$

- Equilíbrio de forças horizontais:

?

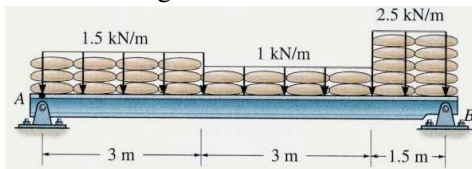
Carregamentos distribuídos

- Cargas provocadas por
 - Ventos
 - Líquidos
 - Peso próprio
- Um exemplo de carregamento distribuído é o peso próprio de elementos estruturais, que pode ser representado por uma carga concentrada que cause o mesmo efeito externo sobre a estrutura.

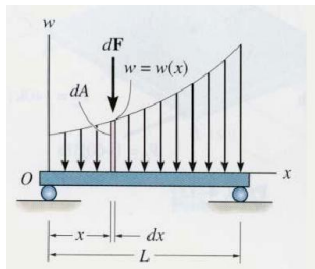


Carregamentos distribuídos

- O caso mais comum é o carregamento uniforme.

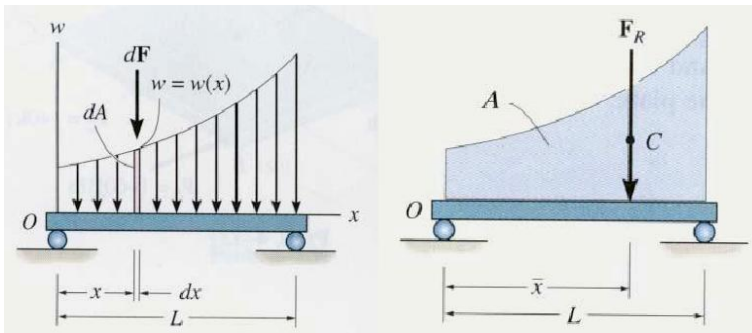


- Para casos gerais, w é uma função de x , tendo unidade força/comprimento.



Resultante de um carregamento distribuído

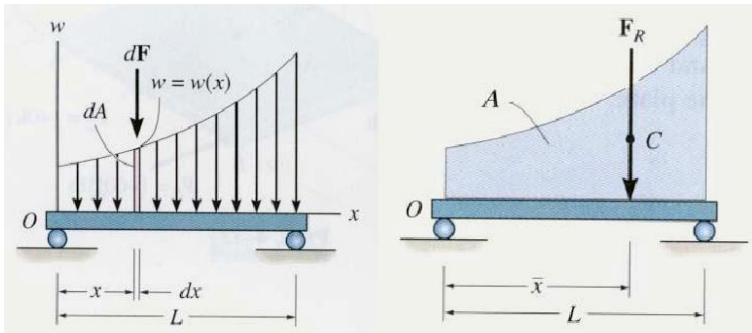
- Considerando um elemento infinitesimal dx



- A intensidade da força dF em dx é: $dF = w(x)dx$.
- A força resultante na barra é: $F_R = \int_L w(x)dx = \int_A dA = A$.
- A é a área limitada pela função e a barra.

Resultante de um carregamento distribuído

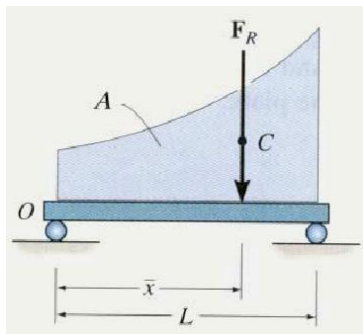
- F_R deve provocar em O o mesmo momento que $w(x)$.



$$\int_L x \cdot dF = \bar{x} F_R \Rightarrow \int_L x \cdot w(x) dx = \bar{x} \int_L w(x) dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int_L x \cdot w(x) dx}{\int_L w(x) dx}$$

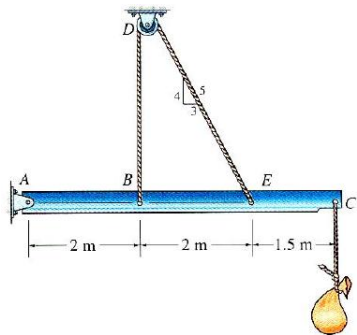
Resultante de um carregamento distribuído

- \bar{x} é a abscissa do centroide (centro geométrico) da área delimitada por $w(x)$.



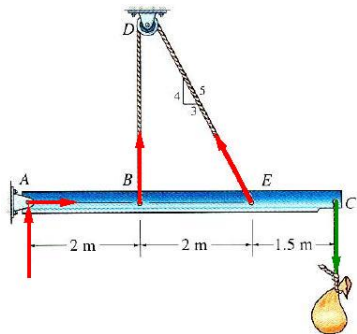
Exemplo 1

- Determine as reações de apoio e a força no cabo sabendo que a carga no saco pesa 2500 N.



Exemplo 1

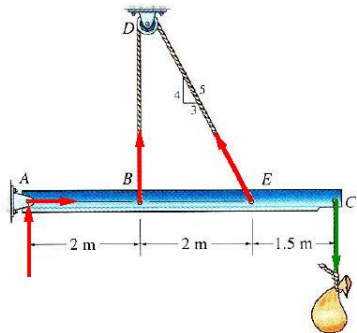
- Determine as reações de apoio e a força no cabo sabendo que a carga no saco pesa 2500 N.



- Arbitramos as incógnitas do problema: A_x , A_y , T (vermelho).

Exemplo 1

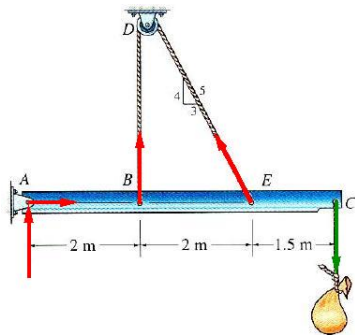
- Determine as reações de apoio e a força no cabo sabendo que a carga no saco pesa 2500 N.



$$\circlearrowleft \oplus \sum M_A = 0 = +T \cdot 2 + \frac{4}{5}T \cdot 4 - 2500 \cdot 5.5 \Rightarrow T = 2.64 \text{ kN}$$

Exemplo 1

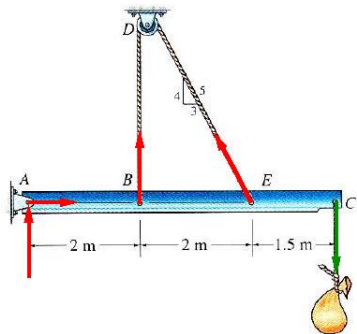
- Determine as reações de apoio e a força no cabo sabendo que a carga no saco pesa 2500 N.



$$\rightarrow \oplus \quad \sum F_x = 0 = +A_x - \frac{3}{5}T \quad \Rightarrow A_x = 1.59 \text{ kN}$$

Exemplo 1

- Determine as reações de apoio e a força no cabo sabendo que a carga no saco pesa 2500 N.



$$\uparrow \oplus \quad \sum F_y = 0 = +A_y + T + \frac{4}{5}T - 2500 \Rightarrow A_y = -2.26 \text{ kN}$$

Exemplo 1

- Sistema de equações:

$$\circlearrowleft \oplus \quad \sum M_A = 0 = 2T + 4\frac{4}{5}T - 2500 \cdot 5.5 \quad \Rightarrow T = +2.64 \text{ kN}$$

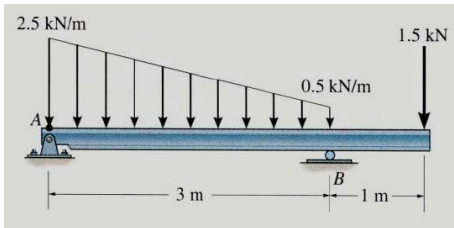
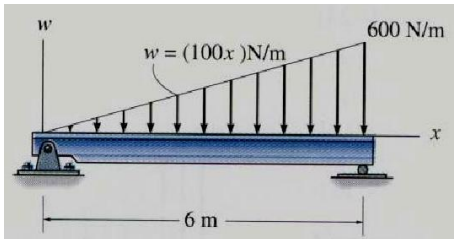
$$\rightarrow \oplus \quad \sum F_x = 0 = A_x - \frac{3}{5}T \quad \Rightarrow A_x = +1.59 \text{ kN}$$

$$\uparrow \oplus \quad \sum F_y = 0 = A_y + T + \frac{4}{5}T - 2500 \quad \Rightarrow A_y = -2.26 \text{ kN}$$

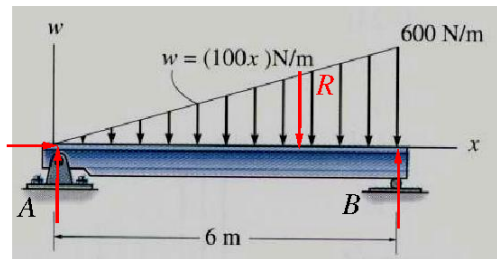
- Os sinais positivos em A_x e T indicam que os sentidos arbitrados estão corretos.
 - A força T traciona o cabo.
- O sinal negativo de A_y indica que escolhemos o sentido oposto na figura.
 - $A_y = (\downarrow)2.26 \text{ kN}$

Exemplos 2 e 3

- Determine as reações de apoio para os problemas abaixo.



Exemplo 2



- Força resultante:

$$R = \int_0^6 100x \, dx = 1800 \text{ N}$$

- Posição da resultante:

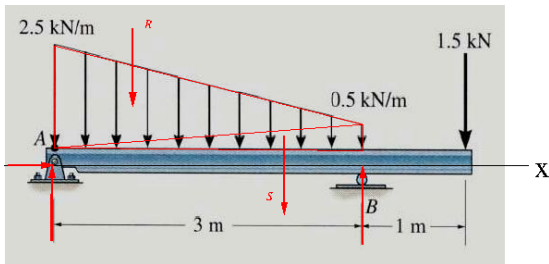
$$\bar{x} = \frac{\int_0^6 x(100x) \, dx}{\int_0^6 100x \, dx} = 4 \text{ m}$$

- Equilíbrio:

$$\begin{aligned} \rightarrow \oplus \quad 0 &= A_x \\ \uparrow \oplus \quad 0 &= A_y + B_y - 1800 \\ \circlearrowleft \oplus \quad 0 &= 6B_y - 4(1800) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \text{ N} \\ A_y &= 600 \text{ N} \\ B_y &= 1200 \text{ N} \end{aligned}$$

Exemplo 3



- Força resultante 1: $R = 3(2.5)/2 = 3.75 \text{ kN}$ em $\bar{x}_R = 1 \text{ m}$
- Força resultante 2: $S = 3(0.5)/2 = 0.75 \text{ kN}$ em $\bar{x}_S = 2 \text{ m}$
- Equilíbrio:

$$0 = A_x \quad \Rightarrow A_x = 0 \text{ kN}$$

$$0 = 3B_y - 1(3.75) - 2(0.75) - 4(1.5) \quad \Rightarrow B_y = 3.75 \text{ kN} \Rightarrow (\uparrow)$$

$$0 = A_y + B_y - 3.75 - 0.75 - 1.5 \quad \Rightarrow A_y = 2.25 \text{ kN}$$

Programa

- 1 Equilíbrio de Corpos Rígidos
 - Princípios Gerais
 - Forças, Vetores e Operações Vetoriais
 - Equilíbrio do Ponto Material
 - Equilíbrio do Corpo Rígido
 - **Sistemas Estruturais Simples**

Estruturas

- Estruturas se compõem de uma ou mais peças, ligadas entre si e ao meio exterior de modo a formar um conjunto estável.
- Conjunto estável
 - Conjunto capaz de receber solicitações externas, absorvê-las internamente e transmiti-las a seus apoios, onde as solicitações externas encontrarão seu sistema estático equilibrante.

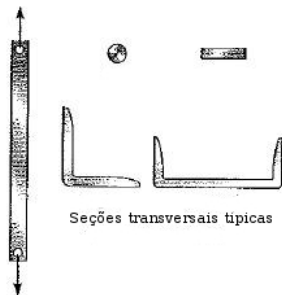
Estruturas

- As peças estruturais possuem, evidentemente, três dimensões. Três casos podem ocorrer:
 - 1 duas dimensões pequenas em relação a terceira (barras);
 - 2 uma dimensão pequena em relação às outras duas (placas e chapas);
 - 3 as três dimensões são consideráveis (blocos).

Durante este curso estudaremos **elementos de barra**.

Estruturas Idealizadas

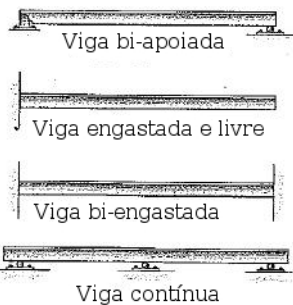
- Estruturas compostas por barras:
 - Vigas
 - Colunas
 - Treliças
 - Quadros



Elemento submetido à tração

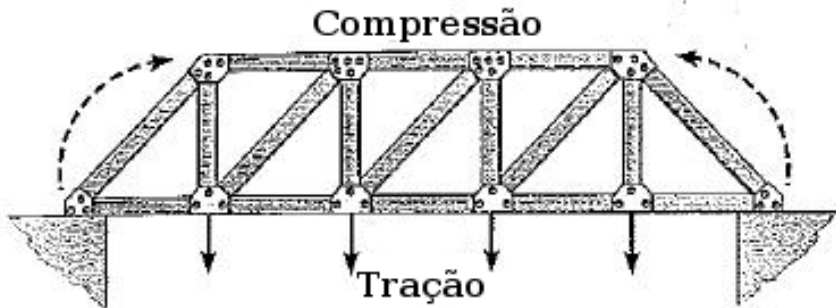
Estruturas Idealizadas

- Estruturas compostas por barras:
 - Vigas
 - Colunas
 - Treliças
 - Quadros



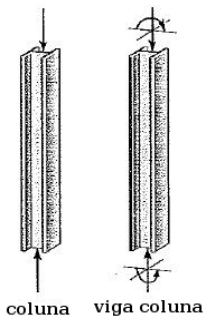
Estruturas Idealizadas

- Estruturas compostas por barras:
 - Vigas
 - Colunas
 - Treliças
 - Quadros



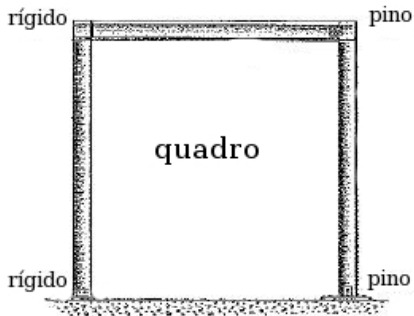
Estruturas Idealizadas

- Estruturas compostas por barras:
 - Vigas
 - Colunas
 - Treliças
 - Quadros



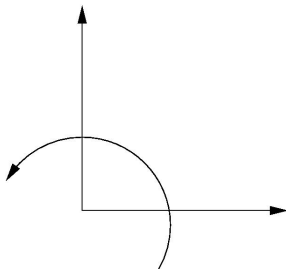
Estruturas Idealizadas

- Estruturas compostas por barras:
 - Vigas
 - Colunas
 - Treliças
 - Quadros



Graus de Liberdade

- Uma estrutura plana possui 3 graus de liberdade:
 - 2 translações
 - 1 rotação



Apoios

- A função dos apoios é restringir os graus de liberdade.
- Representam restrições ao movimento do corpo rígido.
- Despertam reações nas direções restringidas.
- Modelos de apoios para estruturas planas:
 - 1^o gênero: impede um grau de liberdade
 - 2^o gênero: impede dois graus de liberdade
 - 3^o gênero: rotações e translações impedidas
- Em um problema de equilíbrio, os apoios determinam as incógnitas do problema.

Apoios



Figure : Apoio de 1^o gênero.

Apoios



Figure : Apoio de 1^o gênero – detalhe.

Apoios



Figure : Apoio de 1^o gênero – construção.

Apoios



Figure : Apoio de 2^o gênero.

Apoios



Figure : Dois apoios de 2^o gênero.

Apoios



Figure : Apoio de 2^o gênero.

Apoios



Figure : Apoio 3^o gênero.

Apoios

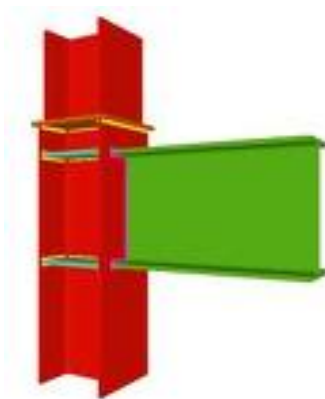


Figure : Apoio 3^o gênero.

Apoios

- A ligação em rótula (ou articulação) é um caso onde um grau de liberdade (rotação) é liberado.
- Ao liberar uma rotação, adiciona mais uma equação ao sistema, sendo:

$$\sum M_{\text{rótula}}^{\text{esquerda}} = \sum M_{\text{rótula}}^{\text{direita}} = 0$$

Daí:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_P &= 0 \quad \text{P qualquer} \\ \sum M_{\text{rótula}}^e &= 0 \quad \text{ou} \quad \sum M_{\text{rótula}}^d = 0 \end{aligned}$$



Apoios



Figure : Rótula (3D).

Apoios



Figure : Rótulas (braço da retroescavadeira).

Apoios



Figure : Rótulas (braço da retroescavadeira).

Estabilidade e Estaticidade

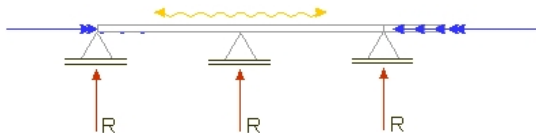
- Acabamos de ver que a função dos apoios é limitar os graus de liberdade
- Três casos podem ocorrer:
 - 1 Os apoios são em número **necessário** para impedir todos os movimentos.
 - 2 Os apoios são em número **inferior** para restringir os movimentos.
 - 3 Os apoios são em número **superior** ao necessário.
- Vamos analisar cada caso.

Estabilidade e Estaticidade

- Restrições adequadas:
 - Apoios em número adequado para impedir movimentos;
 - O número de incógnitas é igual ao número de equações disponíveis.
- Dizemos que a estrutura é **isostática**.
- Ocorre a situação de **equilíbrio estável**.

Estabilidade e Estaticidade

- Restrições inadequadas:
 - Pode haver menos incógnitas que equações – corpo parcialmente restrito;
 - Apoios em número *inferior* para impedir movimentos, mesmo que a *quantidade* de incógnitas seja igual a de equações;
 - Sistema de equações impossível.
- Dizemos que a estrutura é **hipostática**.
- Ocorre a situação de **equilíbrio instável**.



Estabilidade e Estaticidade

- Restrições redundantes:
 - Há mais incógnitas que equações de equilíbrio;
 - Sistema de equações indeterminado.
- Equilíbrio estável.
- Estrutura **hiperestática**.
- Estado de equilíbrio **estaticamente indeterminado**.

Estabilidade e Estaticidade

Em resumo:

Determinação Estática:

- Isostáticas
- Hipostática
- Hiperestática

Estabilidade/Instabilidade:

- Estável
- Instável

Estabilidade e Estaticidade

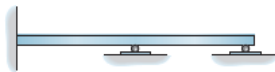
- Estruturas hiperestáticas:
 - Equações de equilíbrio **não** são suficientes para encontrar todas as incógnitas.
 - Equações adicionais são necessárias.
 - As equações de compatibilidade relacionam as cargas aplicadas e os deslocamentos da estrutura.
 - As equações de compatibilidade são iguais em número ao **grau de indeterminação estática** da estrutura.

Estabilidade e Estaticidade

- Exemplos:



(a)

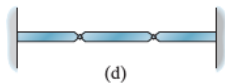
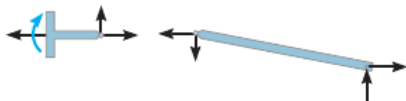
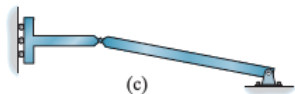


(b)



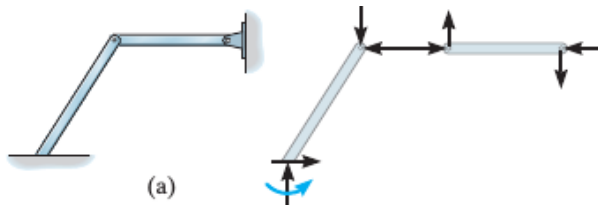
Estabilidade e Estaticidade

- Exemplos:



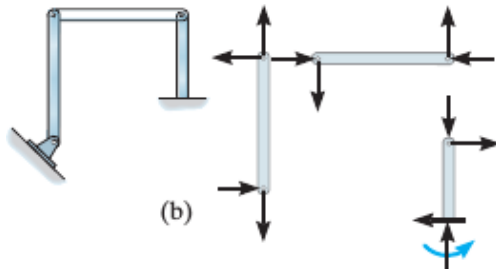
Estabilidade e Estaticidade

- Exemplos:



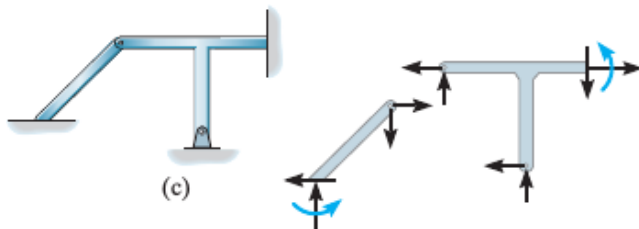
Estabilidade e Estaticidade

- Exemplos:



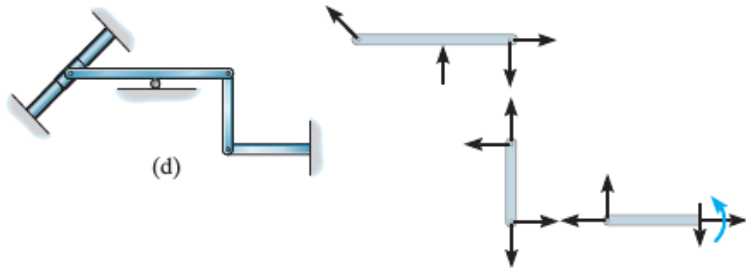
Estabilidade e Estaticidade

- Exemplos:



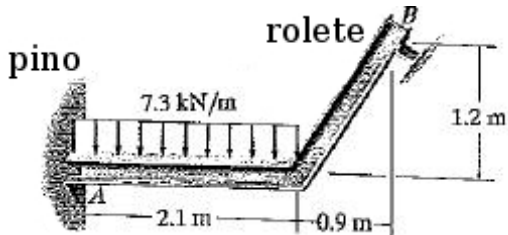
Estabilidade e Estaticidade

- Exemplos:



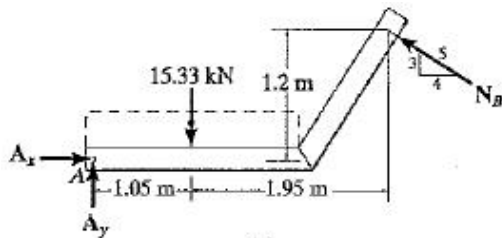
Exemplo 4

- Determine as reações na estrutura abaixo.



Exemplo 4

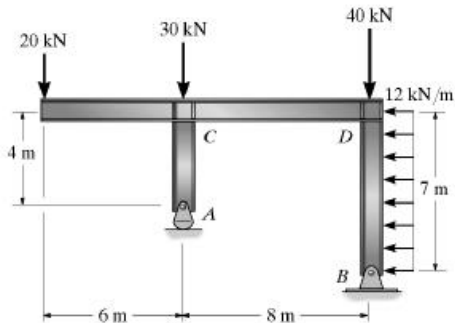
- Determine as reações na estrutura abaixo.



$$\begin{array}{l}
 \circlearrowleft \sum M_A = 0 = 15.33(1.05) + \frac{4}{5}N_B(1.2) + \frac{3}{5}N_B(3) \\
 \rightarrow \sum F_x = 0 = A_x - \frac{4}{5}N_B \\
 \uparrow \sum F_y = 0 = A_y - 15.33 + \frac{3}{5}N_B
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 N_B = 5.83 \text{ kN} \\
 A_x = 4.67 \text{ kN} \\
 A_y = 11.83 \text{ kN}
 \end{array} \right.$$

Exemplo 5

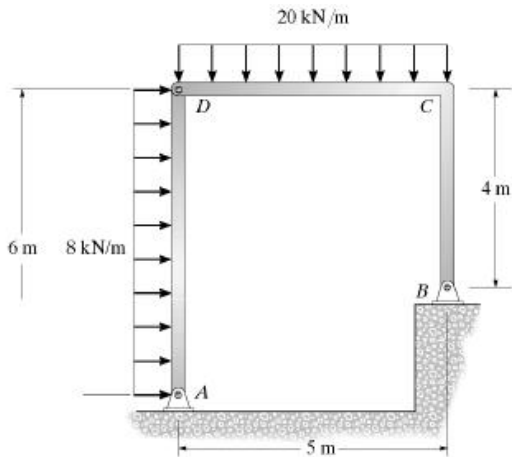
- Determine as reações na estrutura abaixo (Lista de Exercícios).



$$\begin{array}{l}
 \circlearrowleft \sum M_B = 0 = 20(14) + 30(8) + 84(3.5) - A_y(8) \\
 \rightarrow \sum F_x = 0 = B_x - 84 \\
 \uparrow \sum F_y = 0 = 101.75 - 20 - 30 - 40 + B_y
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 A_y = 101.75 \text{ kN} \\
 B_x = 84 \text{ kN} \\
 B_y = 11.75 \text{ kN}
 \end{array} \right.$$

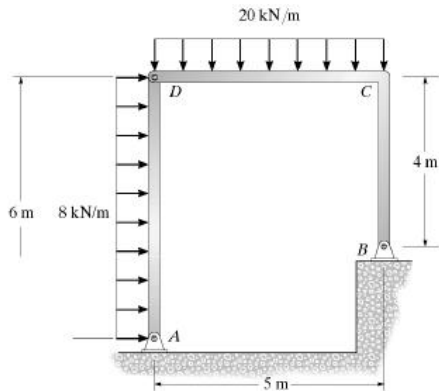
Exemplo 6

- Determine as componentes verticais e horizontais das reações em A e B .



Exemplo 6

- Determine as componentes verticais e horizontais das reações em A e B.



- Reações (arbitradas):

- $A_x \leftarrow, B_x \leftarrow$
- $A_y \uparrow, B_y \uparrow$

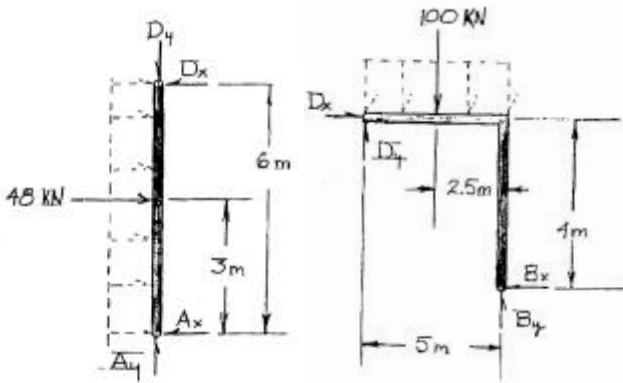
- Equações:

- $\sum F_x = 0$
- $\sum F_y = 0$
- $\sum M = 0$ (em qualquer ponto)
- $\sum M_D^e = \sum M_D^d = 0$ (rótula)

- A rótula permite dividir a estrutura em duas partes.

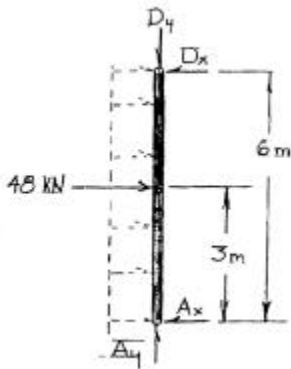
Exemplo 6

- Determine as componentes verticais e horizontais das reações em A e B.



Exemplo 6

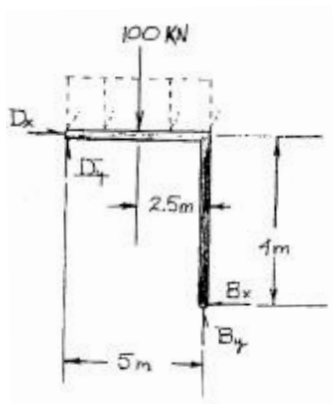
- Determine as componentes verticais e horizontais das reações em A e B.



- Membro AD
- $\circlearrowleft \sum M_A = 0 = -48(3) - D_x(6) \Rightarrow D_x = 24 \text{ kN.}$
- $\rightarrow \sum F_x = 0 = 48 - 24 - A_x \Rightarrow A_x = 24 \text{ kN}$
- $\uparrow \sum F_y = 0 = A_y - D_y \Rightarrow A_y = D_y$

Exemplo 6

- Determine as componentes verticais e horizontais das reações em A e B.



- Membro DCD
- $\circlearrowleft \sum M_B = 0 = 100(2.5) - 24(4) - D_y(5) \Rightarrow D_y = 30.8 \text{ kN.}$
- $\uparrow \sum F_y = 0 = 30.8 - 100 + B_y \Rightarrow B_y = 69.2 \text{ kN}$
- $\rightarrow \sum F_x = 0 = 24 - B_x \Rightarrow B_x = 24 \text{ kN}$
- Do membro AD, temos $A_y = D_y = 30.8 \text{ kN.}$

Programa

- 2 Trelças Isostáticas
 - Estruturas
 - Trelças Isostáticas
 - Método dos Nós
 - Método das Seções



Programa

- 2 Treliças Isostáticas
 - Estruturas
 - Treliças Isostáticas
 - Método dos Nós
 - Método das Seções

Introdução

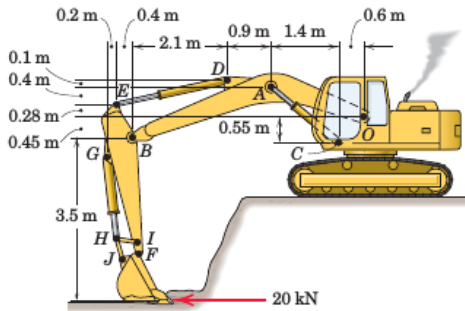
Estrutura

Sistema de elementos conectados construído para suportar ou transferir forças e resistir de forma segura às cargas a ele aplicadas.



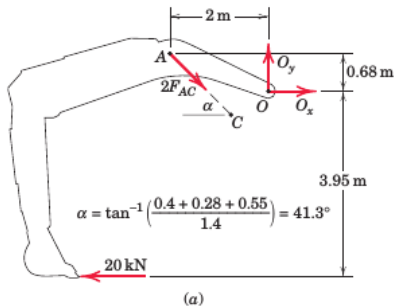
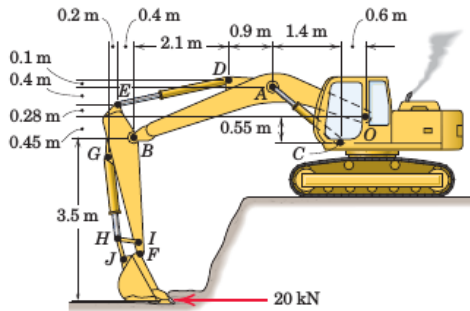
Introdução

- Para alguns tipos estruturais, é possível determinar as forças que agem em cada uma das partes (membros)
 - Desmembrando elementos estruturais (ou grupos de elementos);
 - Analisando os diagramas de corpos livres dos elementos.



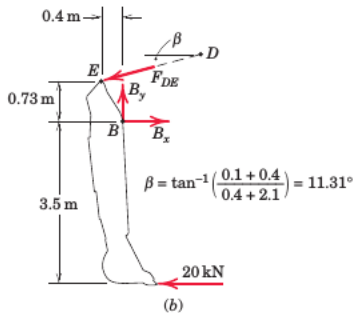
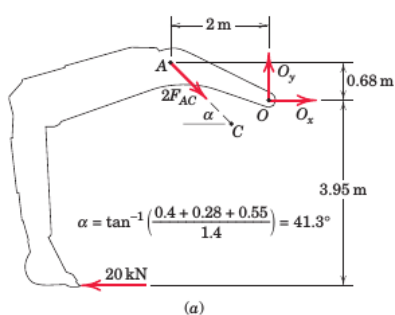
Introdução

- Para alguns tipos estruturais, é possível determinar as forças que agem em cada uma das partes (membros)
 - Desmembrando elementos estruturais (ou grupos de elementos);
 - Analisando os diagramas de corpos livres dos elementos.



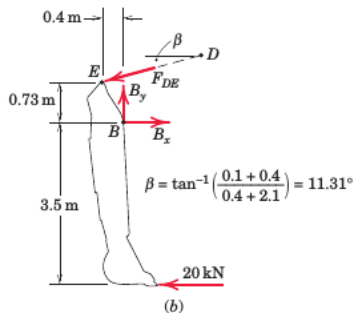
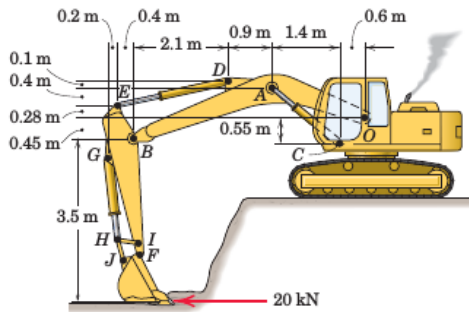
Introdução

- Para alguns tipos estruturais, é possível determinar as forças que agem em cada uma das partes (membros)
 - Desmembrando elementos estruturais (ou grupos de elementos);
 - Analisando os diagramas de corpos livres dos elementos.



Introdução

- Para alguns tipos estruturais, é possível determinar as forças que agem em cada uma das partes (membros)
 - Desmembrando elementos estruturais (ou grupos de elementos);
 - Analisando os diagramas de corpos livres dos elementos.



Introdução

- Algumas estruturas apresentam geometrias e carregamentos complexos, que exigem:
 - Outras formulações matemáticas
 - Emprego de recursos computacionais



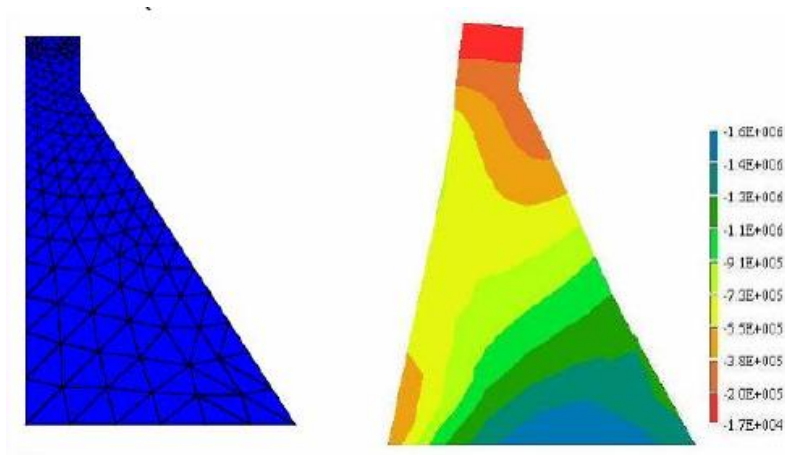
Introdução

- Estruturas complexas : como analisar uma estrutura de barragem?



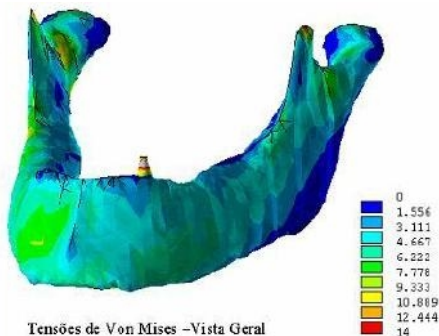
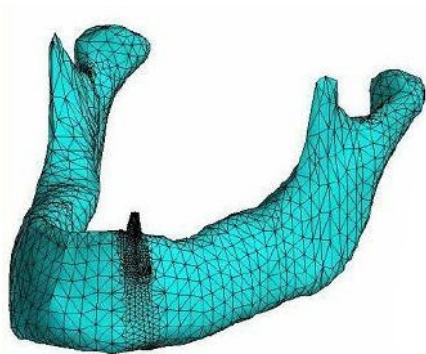
Introdução

- Estruturas complexas : como analisar uma estrutura de barragem?



Introdução

- Estruturas complexas : como analisar o impacto de um implante dentário em uma mandíbula?



Introdução

- Vamos tratar aqui de um tipo particular de estruturas, as **estruturas reticuladas**.
- Uma estrutura reticulada que podem ser decomposta em barras, as quais podem ser analisadas em conjunto ou individualmente.
- Dentre as estruturas reticuladas, um tipo muito empregado na Engenharia são as **TRELIÇAS**.

Programa

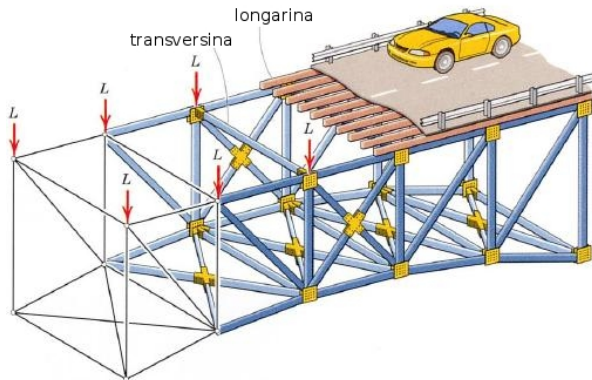
- 2 Trelças Isostáticas
 - Estruturas
 - **Trelças Isostáticas**
 - Método dos Nós
 - Método das Seções

Trelças

- Uma treliça é uma montagem de membros retilíneos e delgados que suporta cargas primariamente axiais (tração e compressão) nas barras.
- O arranjo de barras em uma traliça torna-a um sistema eficiente para suportar cargas elevadas em relação ao seu peso-próprio.

Trelças

- Estrutura típica de uma ponte trelçada
 - O peso combinado do pavimento e dos veículos é transferido para as traves longitudinais (longarinas), daí para as vigas cruzadas (transversinas) e, finalmente, levando em conta o peso-próprio dos membros, para os nós superiores das duas trelças planas que formam as laterais da estrutura.

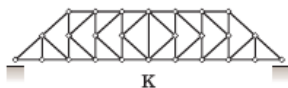
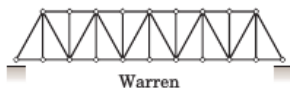
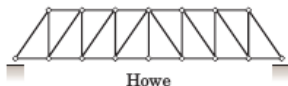
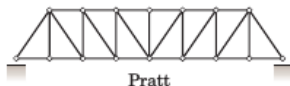


Trelças

- Apesar de serem empregadas há séculos, para cobrir distâncias relativamente longas, o projeto de trelças para utilização de pontes nem sempre foi baseado em princípios gerais da física e da matemática. Nos primórdios da Engenharia, empregavam-se técnicas baseadas na experiência – obtida por tentativas e erros.
- Foi na Revolução Industrial (séc. XIX) que a disponibilidade de ferro batido na Europa e a expansão das rodovias nos Estados Unidos pressionaram os engenheiros a desenvolver projetos de trelças mais racionais para pontes de grande comprimento e baixo peso.

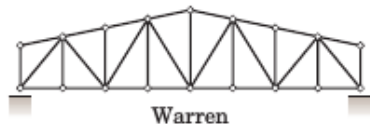
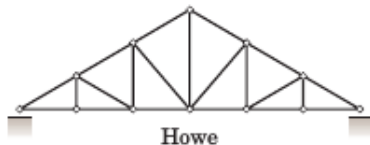
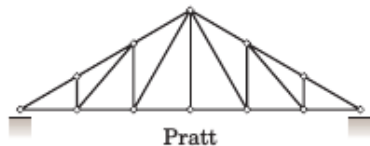
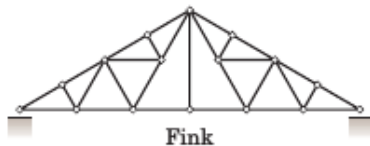
Trelças

- Hoje, as configurações das trelças levam os nomes dos indivíduos que as aperfeiçoaram.
- Exemplos de trelças (planas) usadas em pontes:



Trelças

- Hoje, as configurações das trelças levam os nomes dos indivíduos que as aperfeiçoaram.
- Exemplos de trelças (planas) usadas em pontes:



Trelças

- Aplicações:



Trelças

- Aplicações:



Treliças

- Aplicações:



Trelças

- Aplicações:



Trelças

- Aplicações:



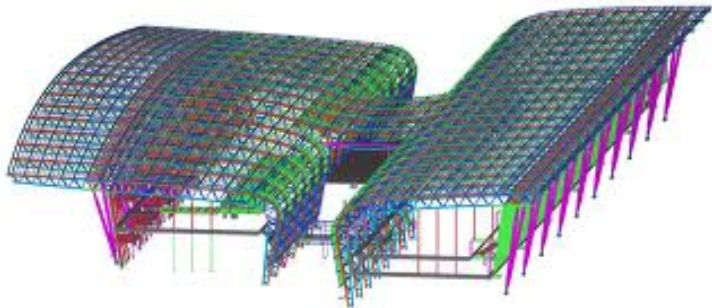
Trelças

- Aplicações:



Trelças

- Aplicações:



Trelças

Modelo estudado:

Trelça Ideal

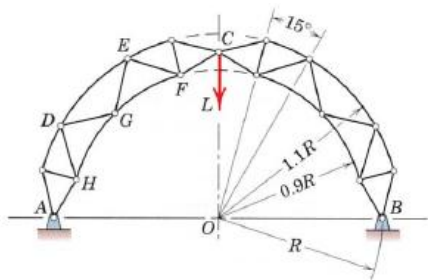
Trelças

Trelça ideal: hipóteses

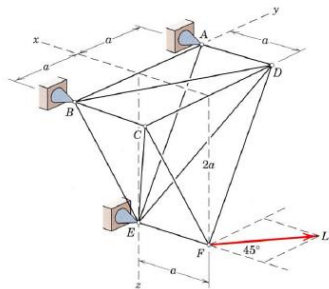
- 1 Todas as barras de uma trelça são retilíneas e podem ser representadas por linhas;
- 2 Os nós aparecem apenas nas extremidades das barras, podendo ser representados por pontos (sem dimensão);
- 3 Todos os nós são articulados (pinos sem atrito);
- 4 O peso de cada elemento é considerado como aplicado nas suas extremidades - ou é desprezível em relação às demais solicitações;
- 5 Existem apenas cargas concentradas, aplicadas nos nós;

Treliças

- Para uma treliça plana, todas as barras e cargas estão no mesmo plano.
- Treliças espaciais possuem barras não coplanares e cargas com direções arbitrárias.



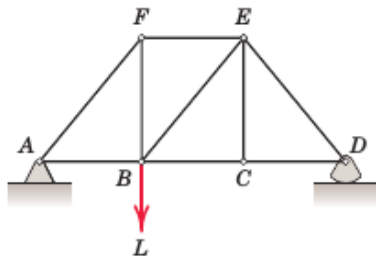
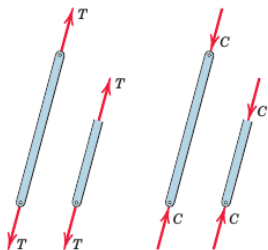
(i) Treliça plana.



(ii) Treliça espacial.

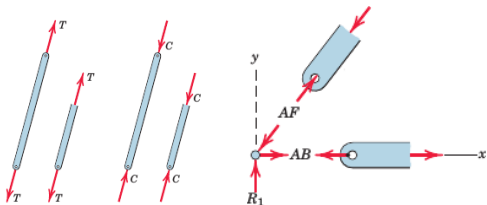
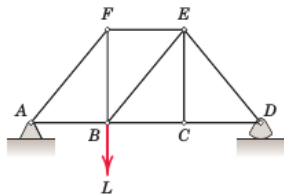
Treliças

- **Uma treliça real geralmente pode ser analisada como uma treliça ideal.**
- **A treliça ideal é um sistema composto por barras retas solicitadas por duas forças.**



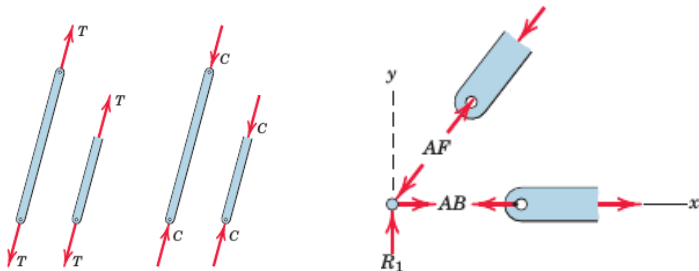
Trelças

- Para que haja equilíbrio, as duas forças devem ser **colineares iguais em magnitude** e **possuir sentidos opostos**.
- Os nós de uma treliça ideal são articulações ou pinos sem atrito, que não resistem a conjugados (momentos) – as cargas são aplicadas nos nós e, portanto, cada barra é um sistema sollicitado por duas forças.



Trelças

- Cada barra de treliça é um elemento submetido a duas forças.
- A força ao longo da barra –de tração ou de compressão– é constante ao longo do comprimento.



Trelças

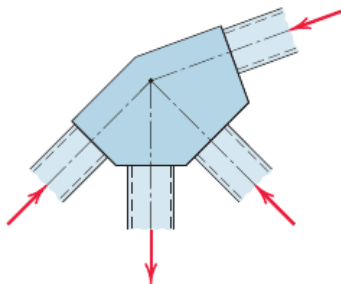
Trelça real x Trelça ideal

- A análise uma trelça real empregando-se a definição de trelça ideal é uma **aproximação** que vai gerar resultados mais ou menos próximos dos exatos, dependendo da validade das hipóteses empregadas.
- Quanto mais próxima de uma trelça ideal for a estrutura, melhor a qualidade dos resultados obtidos na análise aproximada.

Treliças

Conexões de treliças

- Quando os nós das treliças são conexões soldadas ou rebitadas, pode-se, normalmente, considerar que a conexão é do tipo pino se as linhas centrais dos elementos forem concorrentes na junta.



Treliças

Conexões de treliças

- Quando os nós das treliças são conexões soldadas ou rebitadas, pode-se, normalmente, considerar que a conexão é do tipo pino se as linhas centrais dos elementos forem concorrentes na junta.



Trelças

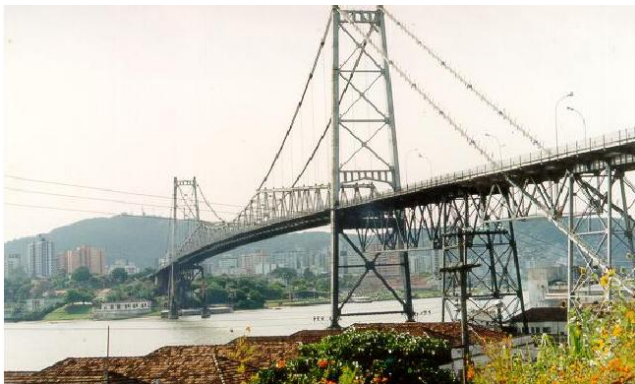
- Detalhes de conexões:



(iii) Exemplo de uma conexão.

Trelças

- Detalhes de conexões:



(iv) Ponte Hercílio Luz (Florianópolis).

Trelças

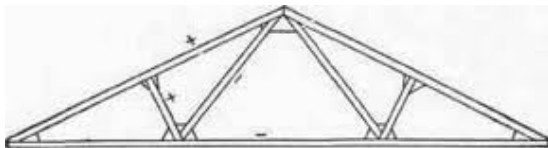
- Detalhes de conexões:



(v) Detalhe de um nó do vão central.

Classificação das treliças

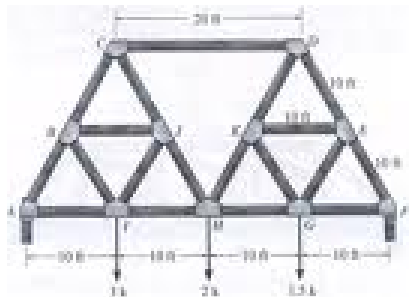
- Treliças Simples: lei de formação em triângulos.
- Treliças Compostas: composição de treliças simples.
- Treliças Complexas:



(vi) Treliça simples.

Classificação das treliças

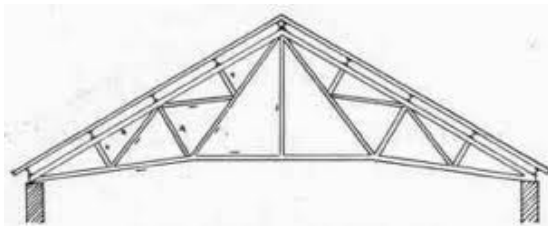
- Trelças Simples: lei de formação em triângulos.
- Trelças Compostas: composição de treliças simples.
- Trelças Complexas:



(vii) Treliça composta.

Classificação das trelças

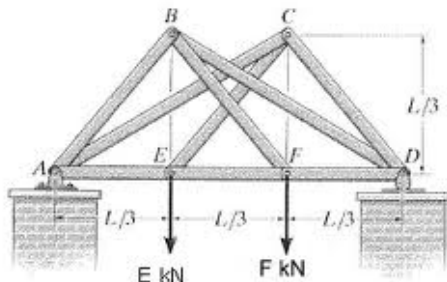
- Trelças Simples: lei de formação em triângulos.
- Trelças Compostas: composição de trelças simples.
- Trelças Complexas:



(viii) Treliça composta.

Classificação das treliças

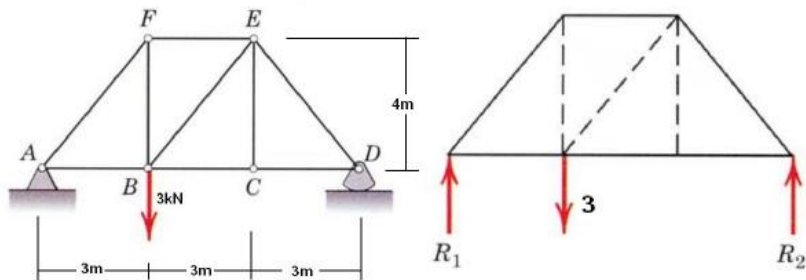
- Trelças Simples: lei de formação em triângulos.
- Trelças Compostas: composição de treliças simples.
- Trelças Complexas:



(ix) Trelça complexa.

Métodos para análise de treliças

- Serão apresentados dois métodos para análise de treliças simples:
 - método dos nós e
 - método das seções
- Ambos serão explicados através da análise da treliça mostrada abaixo cujo diagrama de corpo livre já apresentado.

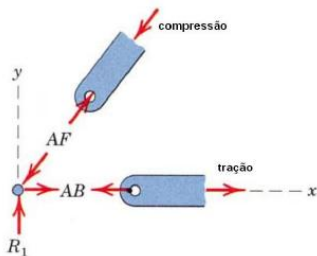


Programa

- 2 Treliças Isostáticas
 - Estruturas
 - Treliças Isostáticas
 - **Método dos Nós**
 - Método das Seções

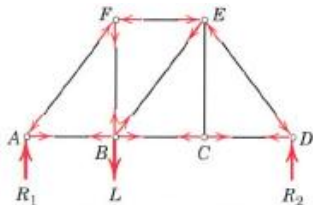
O Método dos Nós

- Este método consiste em atender às condições de equilíbrio para as forças que atuam no pino de conexão de cada nó.
- Trata-se portanto, **equilíbrio de forças concorrentes**.
- No caso plano, dispõe-se de duas equações de equilíbrio independentes para a análise de cada nó, enquanto em 3D, há três equações independentes.



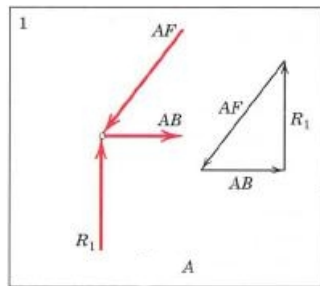
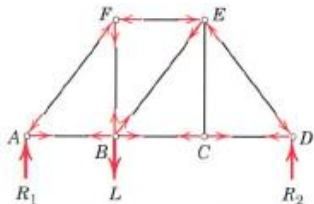
O Método dos Nós

- Equilíbrio de forças (2D) em cada nó ($L = 3 \text{ kN}$).



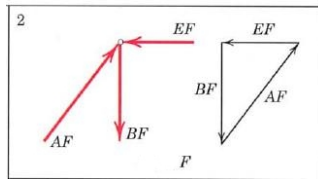
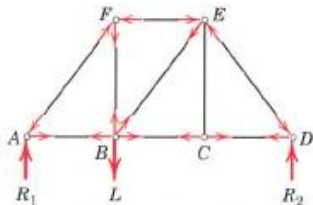
O Método dos Nós

- Equilíbrio de forças (2D) em cada nó ($L = 3 \text{ kN}$).



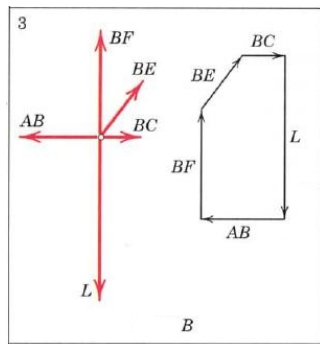
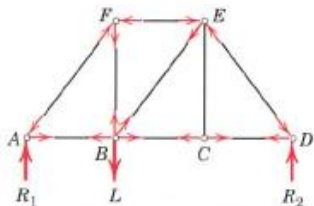
O Método dos Nós

- Equilíbrio de forças (2D) em cada nó ($L = 3 \text{ kN}$).



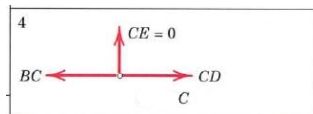
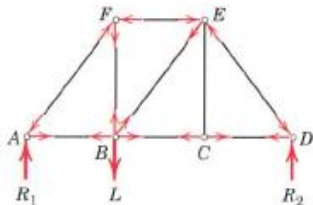
O Método dos Nós

- Equilíbrio de forças (2D) em cada nó ($L = 3 \text{ kN}$).



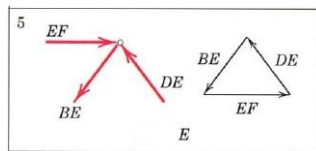
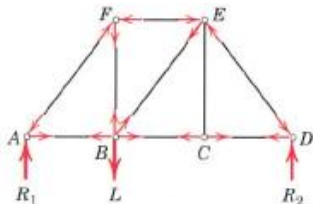
O Método dos Nós

- Equilíbrio de forças (2D) em cada nó ($L = 3 \text{ kN}$).



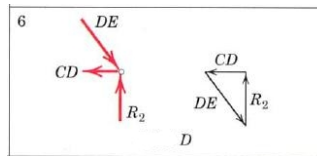
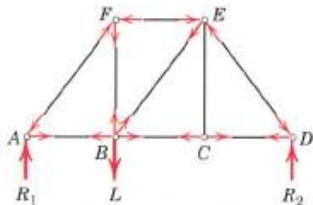
O Método dos Nós

- Equilíbrio de forças (2D) em cada nó ($L = 3 \text{ kN}$).



O Método dos Nós

- Equilíbrio de forças (2D) em cada nó ($L = 3 \text{ kN}$).



O Método dos Nós

Observações:

- Nem sempre é possível determinar *a priori* o sentido correto do esforço normal que atua em uma barra.
- Pode-se arbitrar um sentido, que será correto caso o resultado obtido tenha sinal positivo.
- Há certas situações particulares que, quando observadas, facilitam a análise de treliças (ver o próximo slide).

O Método dos Nós

- Situações particulares:

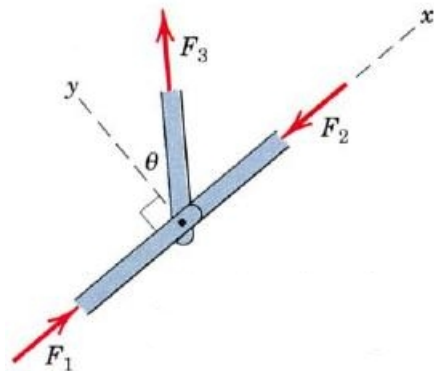


Figure : $\sum F_y = 0$ requer $F_3 = 0$. $\sum F_x = 0$ requer $F_1 = F_2$.

O Método dos Nós

- Situações particulares:

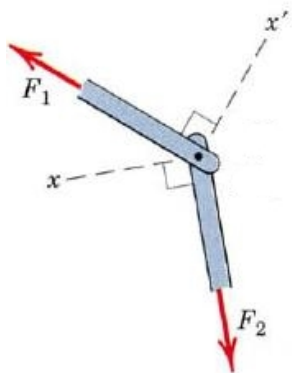


Figure : $\sum F_x = 0$ requer $F_1 = 0$. $\sum F'_x = 0$ requer $F_2 = 0$.

O Método dos Nós

- Situações particulares:

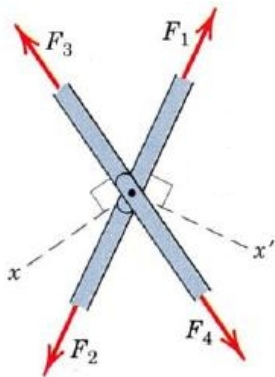
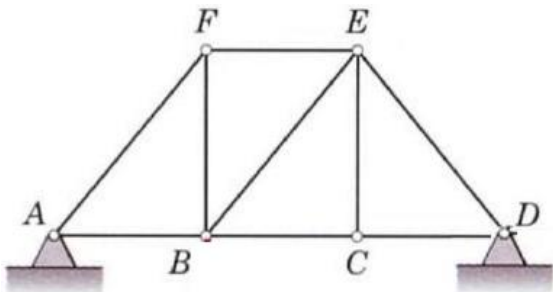


Figure : $\sum F_x = 0$ requer $F_1 = F_2$. $\sum F_{x'} = 0$ requer $F_3 = F_4$.

O Método dos Nós

Redundância externa e externa

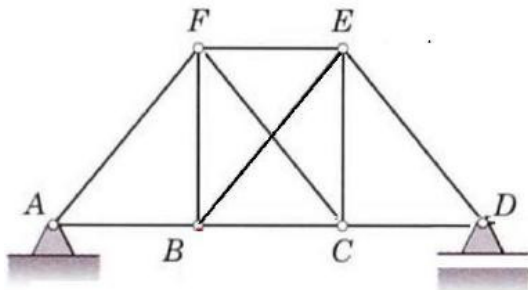
- Se uma treliça plana tem mais apoios externos do que os necessários para garantir uma configuração de equilíbrio estável (para qualquer tipo de carregamento), a treliça como um todo é estaticamente indeterminada (hiperestática) e os apoios extras constituem **redundância externa**.



O Método dos Nós

Redundância externa e interna

- Se uma treliça plana tem mais elementos internos do que os necessários para evitar o colapso quando algum dos vínculos é removido, trata-se de uma estrutura estaticamente indeterminada (hiperestática) e os elementos extras constituem **redundância interna**.



O Método dos Nós

Condição de **estaticidade** para treliças planas simples

- Para uma treliça plana simples que seja externamente determinada, existe uma relação específica entre o número de barras e o número de nós necessária para a estabilidade interna sem redundância.
- Considere-se uma treliça com n nós e b barras:
 - **número de incógnitas do problema:** r reações de apoio + 1 força para cada barra $\Rightarrow r + b$;
 - **número de equações de equilíbrio:** 2 por nó $\Rightarrow 2n$.
 - Uma treliça isostática satisfaz

$$r + b = 2n$$

O Método dos Nós

- Classificação quanto a estaticidade

- ① **isostática** (número de incógnitas igual ao número de equações)

$$r + b = 2n$$

- ② **hiperestática** (número de incógnitas maior ao número de equações)

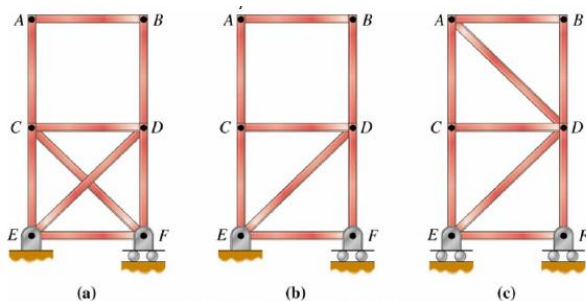
$$r + b > 2n$$

- ③ **hipostática** (número de incógnitas inferior ao de equações)

$$r + b < 2n$$

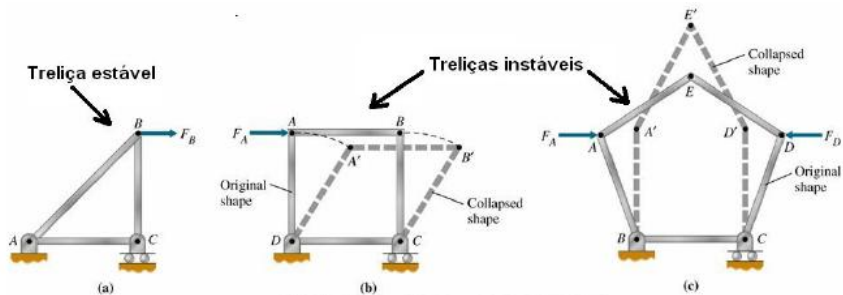
O Método dos Nós

- A relação $r + b = 2n$ é uma condição necessária mas não suficiente para garantir a estabilidade de uma treliça.



O Método dos Nós

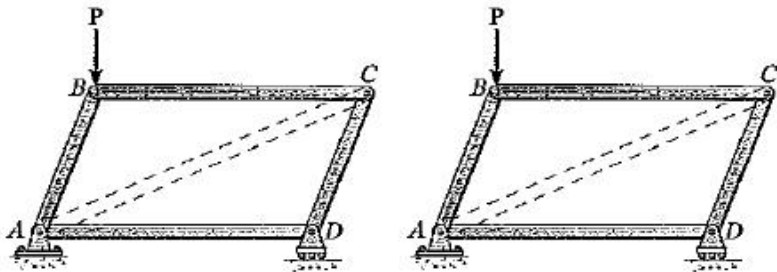
- A relação $r + b = 2n$ é uma condição necessária mas não suficiente para garantir a estabilidade de uma treliça.



O Método dos Nós

Condição de **estabilidade**

- Para evitar o colapso, os elementos da treliça devem formar um conjunto rígido.
- A estrutura $ABCD$ abaixo irá colapsar a menos que uma barra seja adicionada em uma diagonal (AC por exemplo).

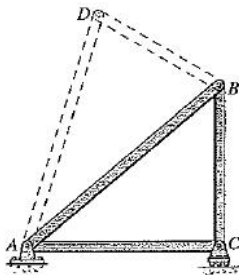


O Método dos Nós

Condição de **estabilidade**

- O conjunto estável mais simples de elementos é o triângulo.
- Uma treliça (com j nós e m barras) formada inicialmente a partir de um triângulo e adicionando-se dois novos elementos para posicionar cada novo nó em relação à estrutura existente, satisfaz automaticamente a relação

$$r + b = 2n$$

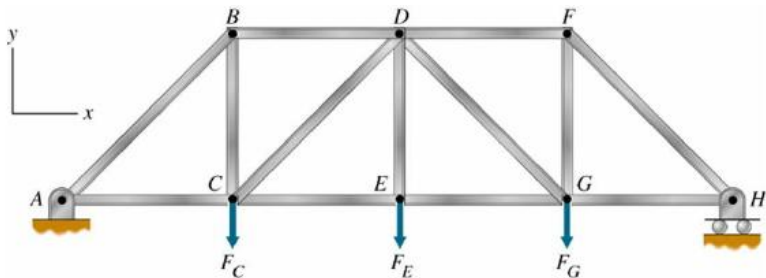


O Método dos Nós

Condição de **estabilidade**

- O conjunto estável mais simples de elementos é o triângulo.
- Uma treliça (com j nós e m barras) formada inicialmente a partir de um triângulo e adicionando-se dois novos elementos para posicionar cada novo nó em relação à estrutura existente, satisfaz automaticamente a relação

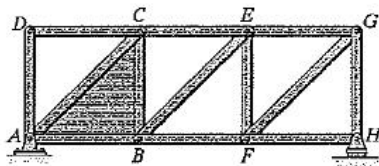
$$r + b = 2n$$



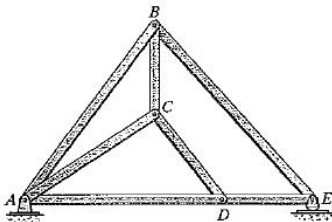
O Método dos Nós

Condição de **estabilidade**

- A treliça estável “básica” é formada por triângulos.



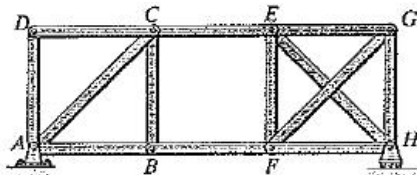
- Mas uma treliça estável não precisa necessariamente ser composta por triângulos.



O Método dos Nós

Condição de **estabilidade**

- Para a treliça abaixo, temos $n = 8$, $b = 13$ e $r = 3$.



- Então (entre as EH e FG barras não há um nó)

$$r + b = 2n \Rightarrow 3 + 13 = 2(8)$$

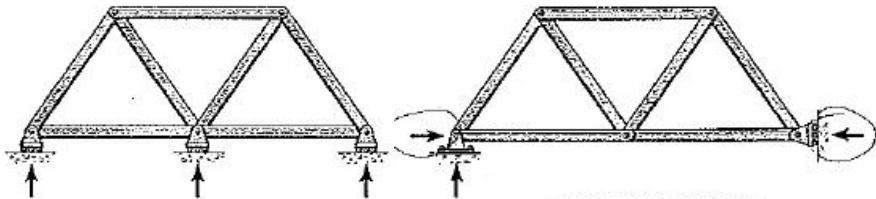
- Porém, a treliça é **internamente instável**, pois o quadro $BCEF$ é deformável.
- Mesmo satisfazendo $r + b = 2n$ essa treliça é instável e portanto hipostática.

O Método dos Nós

Condição de **estabilidade**

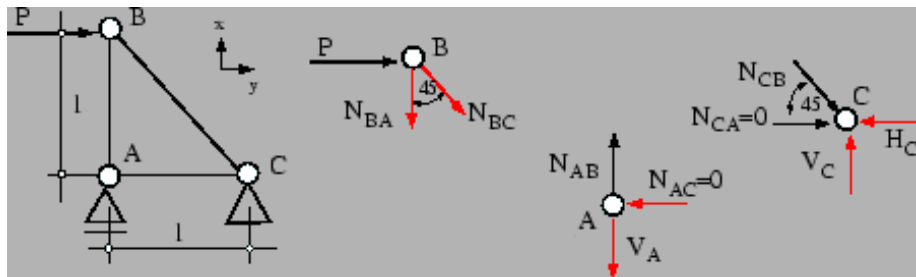
- Se uma treliça possui reações paralelas ou concorrentes em um ponto, ela é **externamente instável**.
- Para ambos os casos abaixo

$$r + b = 2n \Rightarrow 3 + 7 = 2(5)$$



O Método dos Nós – Exemplo 1

- Compute a força em cada membro aplicando o método dos nós.

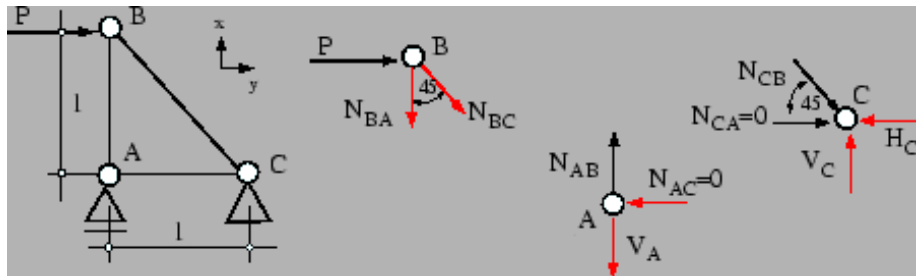


- Observações

- Arbitramos as forças N_{BA} e N_{BC} em B como forças de **tração**.
- Arbitramos N_{AC} em A como força de **compressão** e $V_A \downarrow$.
- Arbitramos $V_C \uparrow$ e $H_C \leftarrow$.

O Método dos Nós – Exemplo 1

- Compute a força em cada membro aplicando o método dos nós.



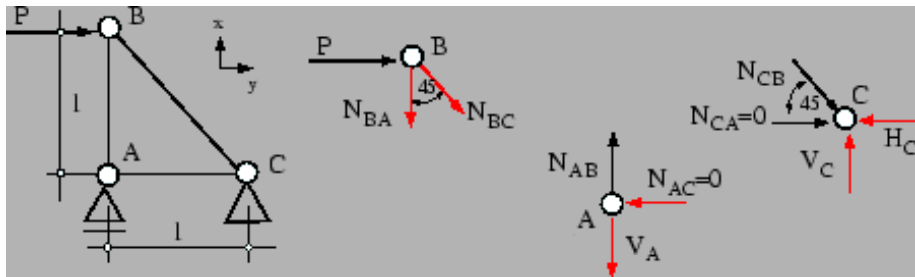
- Nó B

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= P + N_{BC} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) & \left| \begin{array}{l} N_{BC} = -2P/\sqrt{2} \text{ (C)} \\ N_{BA} = +P \text{ (T)} \end{array} \right. \\ \sum F_y = 0 &= -N_{BA} - N_{BC} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

- N_{BC} tem a direção contrária do arbitrado, então é compressão.

O Método dos Nós – Exemplo 1

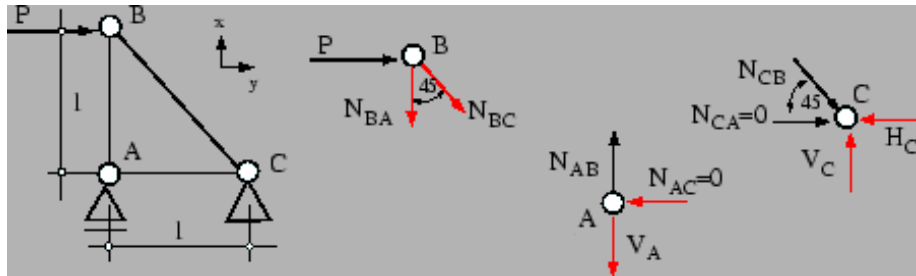
- Compute a força em cada membro aplicando o método dos nós.



- Nó A
- N_{AB} é uma força de tração (ver nó B).
- Caso particular: $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{AC} = 0$.
- $\sum F_y = 0$ requer $V_A = N_{AC} = +P$ ($V_A \downarrow$ com sentido correto).

O Método dos Nós – Exemplo 1

- Compute a força em cada membro aplicando o método dos nós.



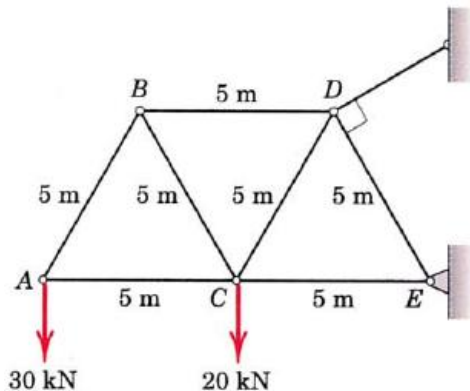
- Nó C

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= N_{CB} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - H_C & \left| \begin{array}{l} H_C = +P \leftarrow \\ V_C = +P \uparrow \end{array} \right. \\ \sum F_y = 0 &= -N_{CB} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + V_C \end{aligned}$$

- H_C e V_C estão com os sentidos corretos.

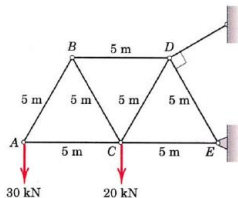
O Método dos Nós – Exemplo 2

- Compute a força em cada membro aplicando o método dos nós.



O Método dos Nós – Exemplo 2

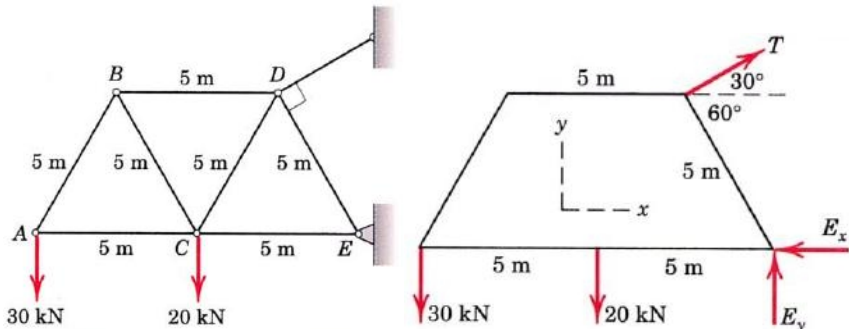
- Compute a força em cada membro aplicando o método dos nós.



- Procedimento de cálculo (sugerido)
 - 1 Determine as reações de apoio.
 - 2 Trace os diagramas de corpo livre para cada nó (observando se a força na barra é de tração ou compressão).
 - 3 Faça o equilíbrio dos nós (observando a quantidade de incógnitas).

O Método dos Nós – Exemplo 2

- Reações de apoio

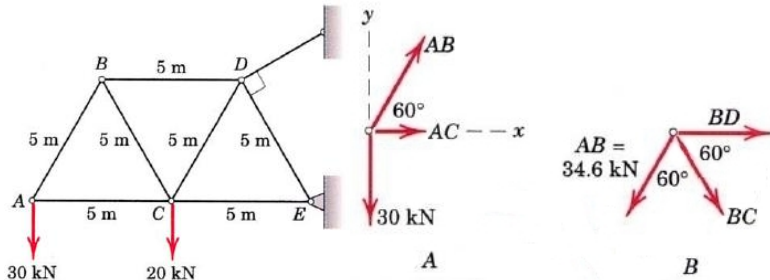


$$\begin{array}{l}
 \sum M_E = 0 = 5T - 20(5) - 30(10) \\
 \sum F_x = 0 = 80 \cos 30 - E_x \\
 \sum F_y = 0 = 80 \sin 30 + E_y - 20 - 30
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 T = 80.0 \text{ kN } \nearrow \\
 E_x = 69.3 \text{ kN } \leftarrow \\
 E_y = 10.0 \text{ kN } \uparrow
 \end{array} \right.$$

O Método dos Nós – Exemplo 2

● Observações:

- A força de tração/compressão se refere ao membro, não ao nó.
- Seta desenhada do lado do nó (onde o membro exerce a força).
- Desta maneira, tração sai do nó, e compressão chega no nó.
- Abaixo arbitramos todas as forças de tração.



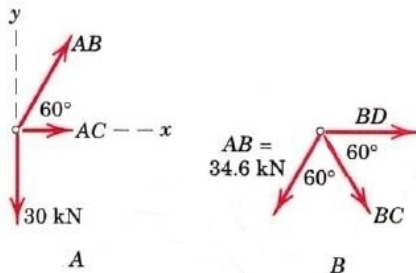
O Método dos Nós – Exemplo 2

- Nó A [(T) indica tração e (C) indica compressão]

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}AB - 30 & \left| \right. & AB = +34.60 \text{ kN (T)} \\ \sum F_x = 0 &= \frac{1}{2}AB + AC & \left| \right. & AC = -17.32 \text{ kN (C)} \end{aligned}$$

- Nó B [(T) indica tração e (C) indica compressão]

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}BC - \frac{\sqrt{3}}{2}AB & \left| \right. & BC = -AB = -34.60 \text{ kN (C)} \\ \sum F_x = 0 &= BD - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC & \left| \right. & BD = +34.60 \text{ kN (T)} \end{aligned}$$



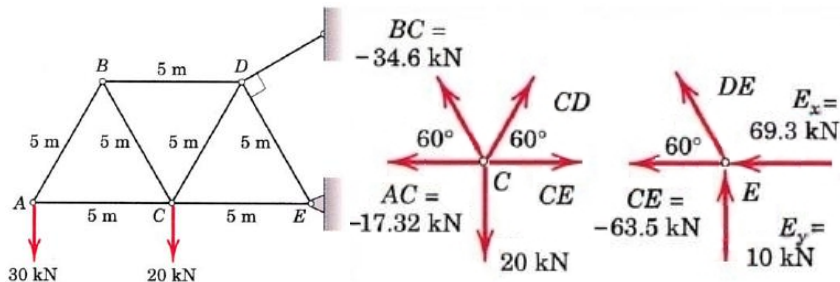
O Método dos Nós – Exemplo 2

- Nó C [(T) indica tração e (C) indica compressão]

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &= \frac{\sqrt{3}}{2}CD + \frac{\sqrt{3}}{2}BC - 20 & \left| \begin{array}{l} CD = +57.7 \text{ kN (T)} \\ CE = -63.5 \text{ kN (C)} \end{array} \right. \\ \sum F_x = 0 &= CE - AC - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CD \end{aligned}$$

- Nó E [(T) indica tração e (C) indica compressão]

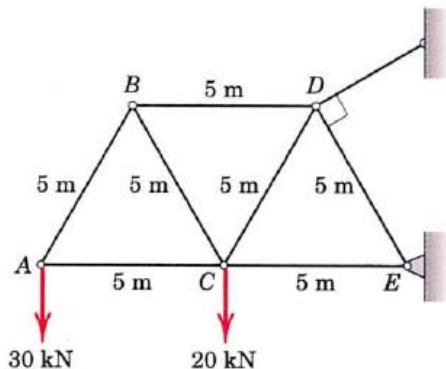
$$\sum F_y = 0 = +\frac{\sqrt{3}}{2}DE + 10 \quad \left| \quad DE = -11.6 \text{ kN (C)} \right.$$



O Método dos Nós – Exemplo 2

- Resumo:

Barra	T/C	\pm (kN)
AB	T	+34.6
AC	C	-17.3
BC	C	-34.6
BD	T	+17.3
CD	T	+57.7
CE	C	-63.5
DE	C	-11.6



Programa

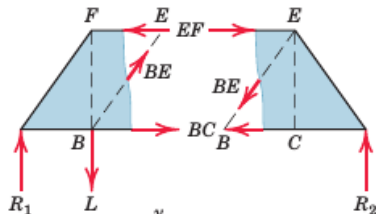
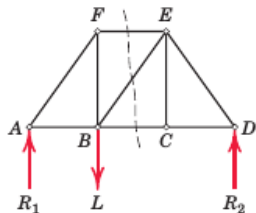
- 2 Treliças Isostáticas
 - Estruturas
 - Treliças Isostáticas
 - Método dos Nós
 - Método das Seções

Método das Seções

- Ao analisar treliças planas pelo método dos nós
 - Os procedimentos envolvem forças concorrentes em nós
 - Precisamos apenas de duas das três equações de equilíbrio
- Tirar vantagem da terceira equação (equilíbrio dos momentos)
 - Selecionar uma seção inteira da treliça
 - Analisar o equilíbrio de um corpo livre sob ação de um sistema de forças não-concorrentes
- A vantagem é que é possível conhecer a força em uma determinada barra diretamente através da análise de uma seção que corte aquele elemento.

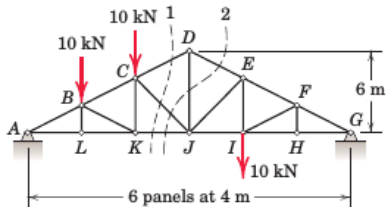
Método das Seções

- Ilustração do método



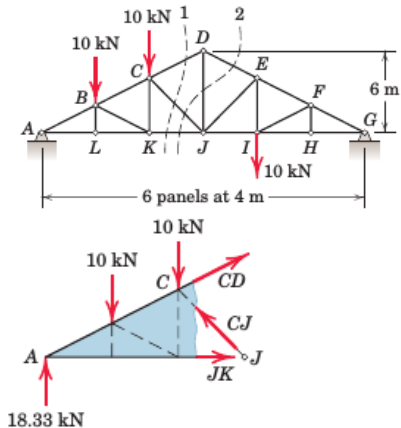
Método das Seções

- Ilustração do método



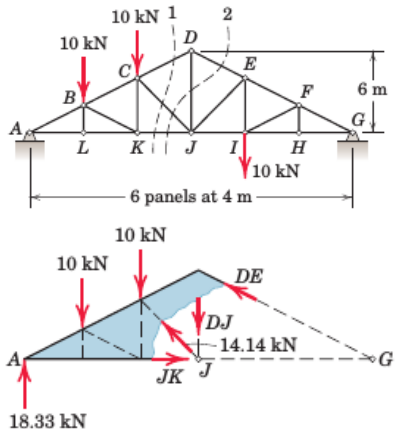
Método das Seções

- Ilustração do método



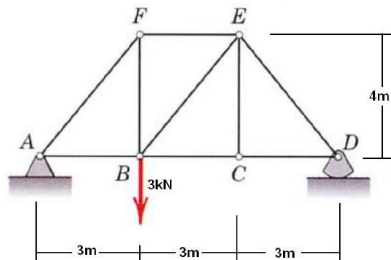
Método das Seções

- Ilustração do método



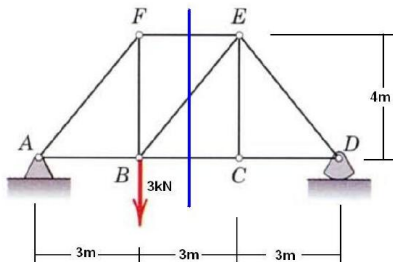
Método das Seções – Exemplo 1

- Determinar as forças nas barras FE , BE e BC .



Método das Seções – Exemplo 1

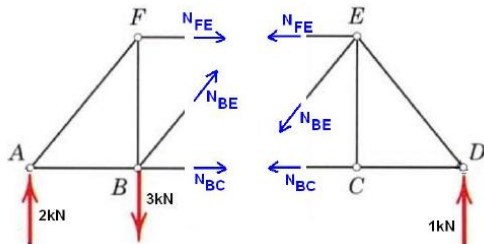
- Determinar as forças nas barras FE , BE e BC .



- Procedimento: traçar uma seção que intercepta (no máximo) três barras

Método das Seções – Exemplo 1

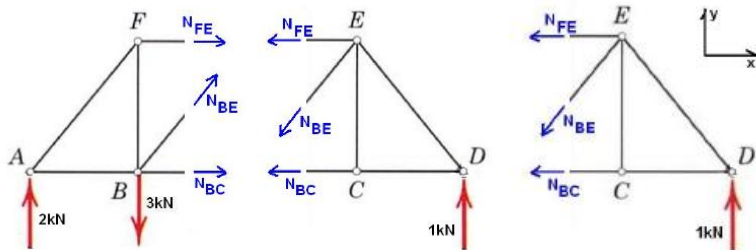
- Determinar as forças nas barras FE , BE e BC .



- A seção divide a treliça em duas partes (em equilíbrio!).
- Arbitramos as forças (tração/compressão) nas barras.

Método das Seções – Exemplo 1

- Determinar as forças nas barras FE , BE e BC .



- Escolhemos uma das partes (direita) para promover o equilíbrio.

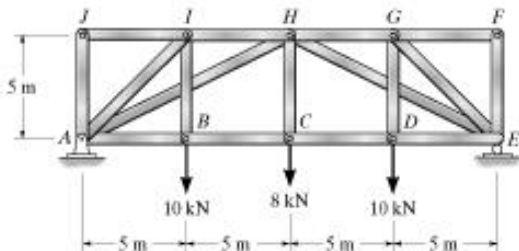
$$\sum M_E = 0 = -N_{BC}(4) + 1(3) = 0 \Rightarrow N_{BC} = +0.75 \text{ kN (T)}$$

$$\sum M_B = 0 = +N_{FE}(4) + 1(6) = 0 \Rightarrow N_{FE} = -1.50 \text{ kN (C)}$$

$$\sum F_y = 0 = -N_{BE}\frac{4}{5} + 1 = 0 \Rightarrow N_{BE} = +1.25 \text{ kN (T)}$$

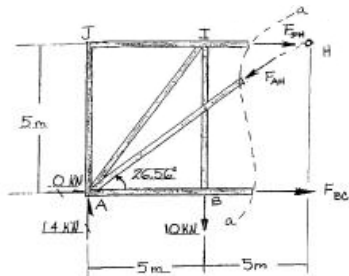
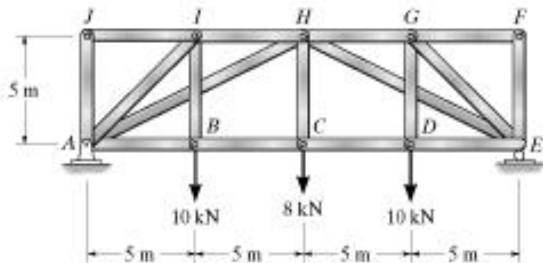
Método das Seções – Exemplo 2

- Determinar as forças nas barras IH , AH e BC .



Método das Seções – Exemplo 2

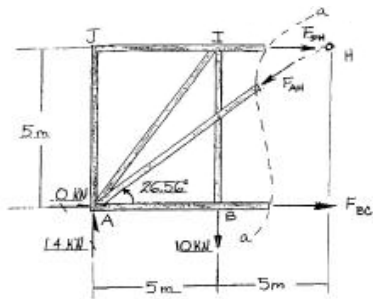
- Determinar as forças nas barras IH , AH e BC .



- Reações de apoio
- $\sum M_E = 0 = -A_y(20) + 10(15) + 8(10) + 10(5) \Rightarrow A_y = 14 \text{ kN}$
- $\sum F_x = 0 = A_x$

Método das Seções – Exemplo 2

- Determinar as forças nas barras IH , AH e BC .



- $\sum M_A = 0 = -F_{IH}(5) - 10(5) \Rightarrow F_{IH} = -10 \text{ kN} = 10 \text{ kN}(C)$
- $\sum M_H = 0 = F_{BC}(5) + 10(5) - 14(10) \Rightarrow F_{BC} = +18 \text{ kN} = 18 \text{ kN}(T)$
- $\sum F_y = 0 = 14 - 10 - F_{AH} \frac{5}{\sqrt{5^2+10^2}} \Rightarrow F_{AH} = +8.94 \text{ kN} = F_{AH} = 8.94 \text{ kN}(C)$

MAC-015 Resistência dos Materiais – Unidade 02

Engenharia Elétrica
Engenharia de Produção
Engenharia Sanitária e Ambiental

Leonardo Goliatt, Michèle Farage, Alexandre Cury

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional
Universidade Federal de Juiz de Fora



Departamento de Mecânica
Aplicada e Computacional



Universidade Federal de Juiz de Fora
Faculdade de Engenharia

versão 16.06

Programa

- 1 Carga Axial
 - Tensão e Deformação
 - Membros com carga axial estaticamente indeterminados
 - Variação de temperatura



Programa

1 Carga Axial

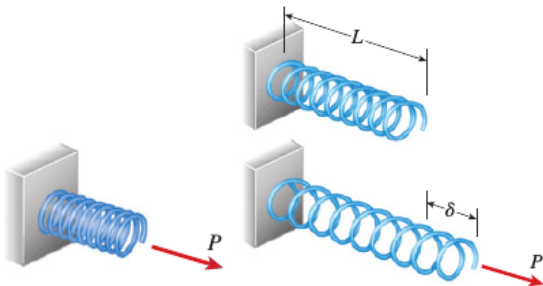
- Tensão e Deformação
- Membros com carga axial estaticamente indeterminados
- Variação de temperatura

Mudança de comprimento em membros carregados axialmente

- Exemplo da tração de uma barra prismática

$$P = k\delta; \quad \delta = fP$$

onde δ é o alongamento, k é o coeficiente de rigidez e f é o coeficiente de flexibilidade.

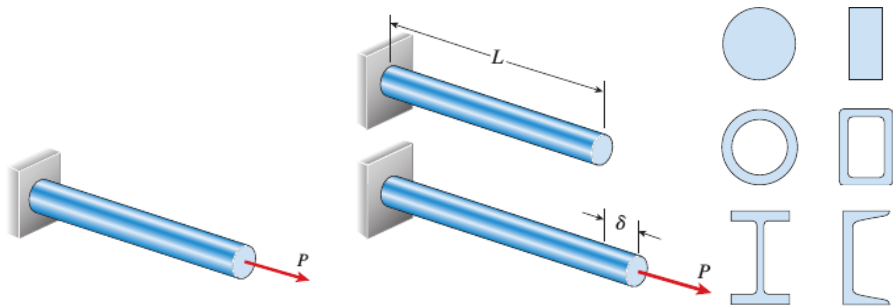


Mudança de comprimento em membros carregados axialmente

- Exemplo da tração de uma barra prismática

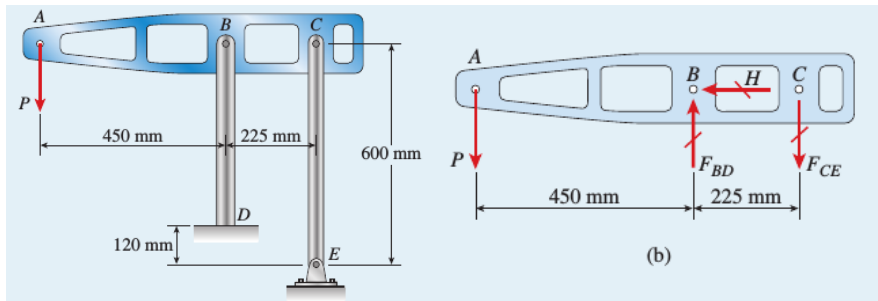
$$\delta = \frac{PL}{EA}; \quad k = \frac{EA}{L}; \quad f = \frac{L}{EA}$$

onde E é o módulo de elasticidade e A é a área da seção transversal.



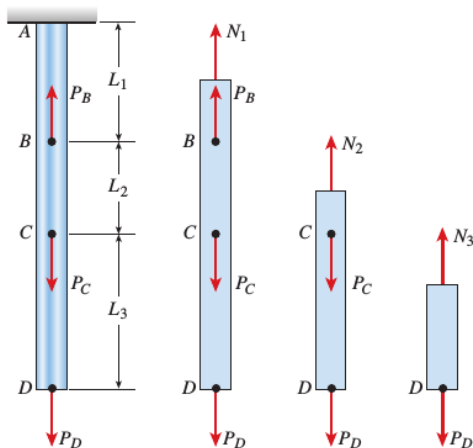
Mudança de comprimento em membros carregados axialmente

- Exemplo de membros carregados axialmente



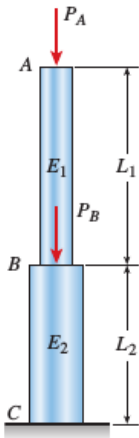
Mudança de comprimento em membros carregados axialmente

- Exemplo de membros carregados axialmente



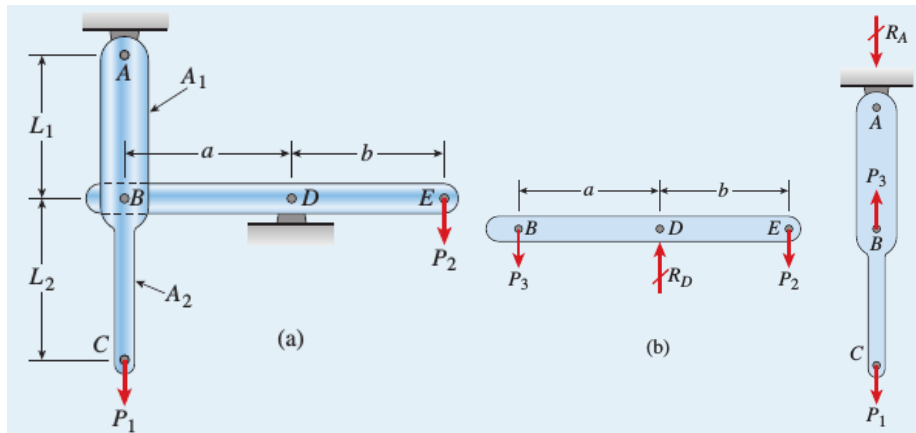
Mudança de comprimento em membros carregados axialmente

- Exemplo de membros carregados axialmente



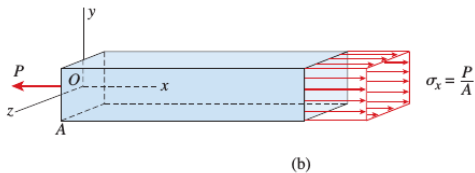
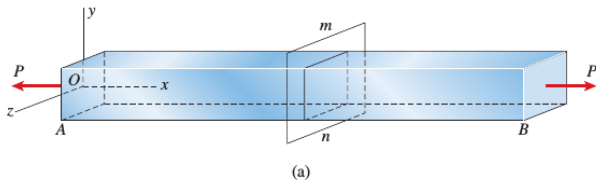
Mudança de comprimento em membros carregados axialmente

- Exemplo de membros carregados axialmente



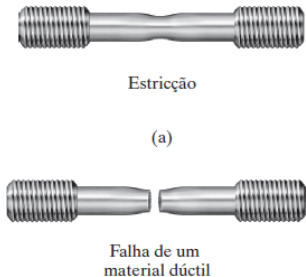
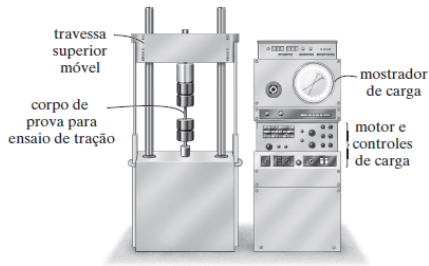
O ensaio de tração e compressão

- O conceito de tensão



O ensaio de tração e compressão

- A resistência de um material depende de sua capacidade de suportar uma carga sem deformação excessiva ou ruptura.
- Essa propriedade é inerente ao próprio material e deve ser determinada por métodos experimentais, como o ensaio de tração ou compressão.
- Uma máquina de teste é projetada para ler a carga exigida para manter o alongamento uniforme.



O diagrama tensão–deformação

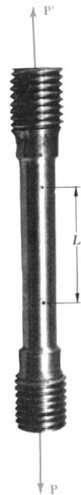
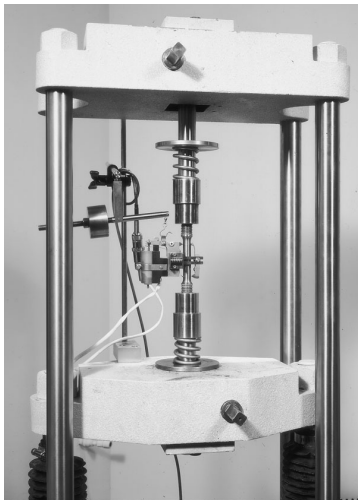
- A tensão nominal (σ), ou tensão de engenharia, é determinada pela divisão da carga aplicada P pela área original da seção transversal do corpo de prova, A_0 .

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

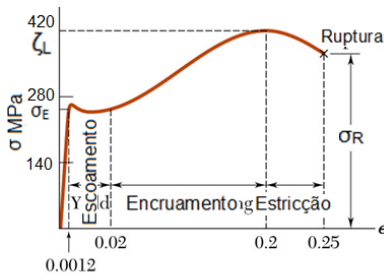
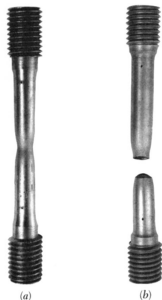
- A deformação nominal (ε), ou deformação de engenharia, é determinada pela divisão da variação, δ , no comprimento de referência do corpo de prova, pelo comprimento de referência original do corpo de prova, L_0 .

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0}$$

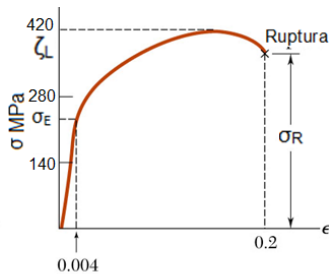
O ensaio de tração e compressão



O ensaio de tração e compressão

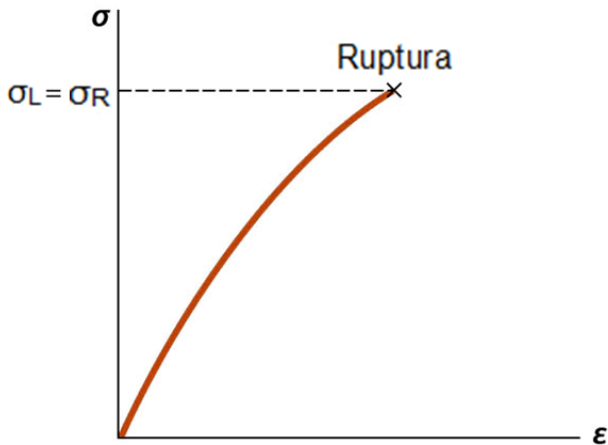


(a) Aço com baixo teor de carbono

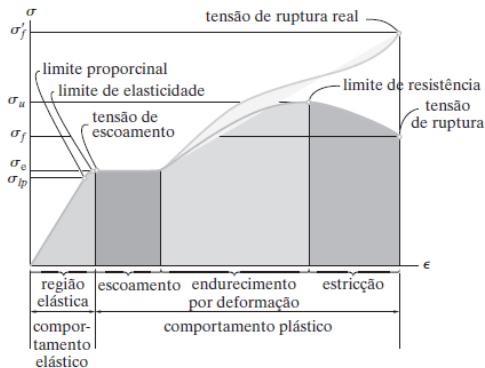


(b) Liga de alumínio

O ensaio de tração e compressão



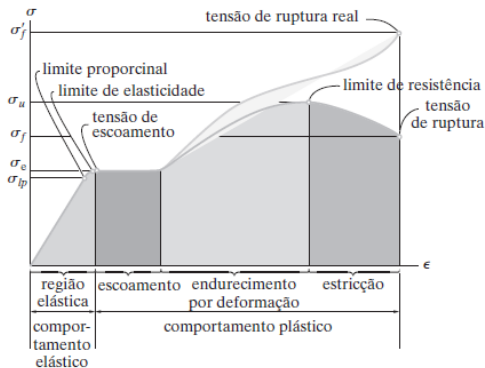
O diagrama tensão–deformação



Diagramas de tensão–deformação convencional e real para um material dúctil (aço)(não está em escala)

- Comportamento elástico
- Escoamento
- Endurecimento por deformação
- Estrição
- Diagrama tensão–deformação real
- O comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis

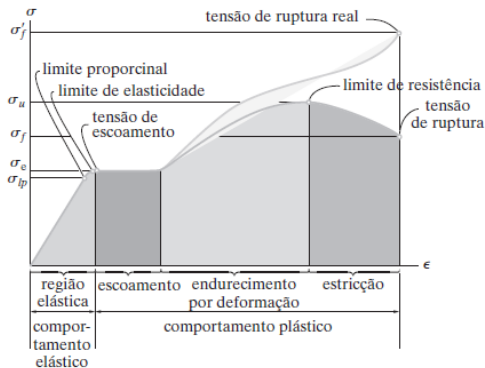
O diagrama tensão–deformação



Diagramas de tensão–deformação convencional e real para um material dúctil (aço)(não está em escala)

- Comportamento elástico
 - A tensão é proporcional à deformação.
 - O material é linearmente elástico.
- Escoamento
- Endurecimento por deformação
- Estrição
- Diagrama tensão–deformação real
- O comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis

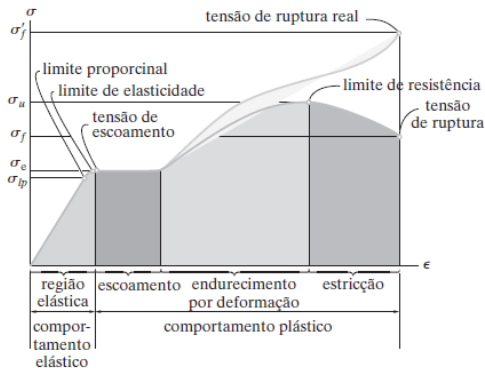
O diagrama tensão–deformação



Diagramas de tensão–deformação convencional e real para um material dúctil (aço)(não está em escala)

- Comportamento elástico
- Escoamento
 - Um pequeno aumento na tensão acima do limite de elasticidade resultará no colapso do material e fará com que ele se deforme permanentemente.
- Endurecimento por deformação
- Estrição
- Diagrama tensão–deformação real
- O comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis

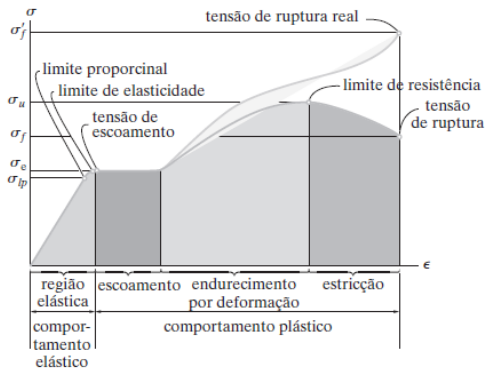
O diagrama tensão–deformação



Diagramas de tensão–deformação convencional e real para um material dúctil (aço)(não está em escala)

- Comportamento elástico
- Escoamento
- Endurecimento por deformação
 - Quando o escoamento tiver terminado, pode-se aplicar uma carga adicional ao corpo de prova, o que resulta em uma curva que cresce continuamente, mas torna-se mais achatada até atingir uma tensão máxima denominada limite de resistência.
- Estricção
- Diagrama tensão–deformação real
- O comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis

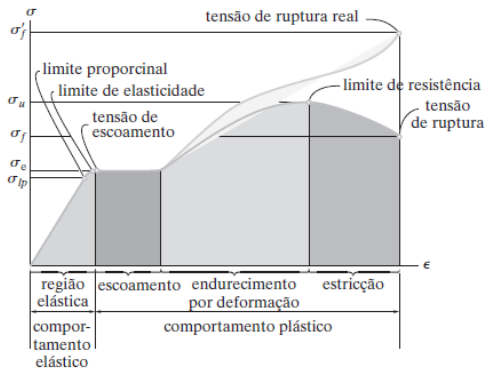
O diagrama tensão–deformação



Diagramas de tensão–deformação convencional e real para um material dúctil (aço)(não está em escala)

- Comportamento elástico
- Escoamento
- Endurecimento por deformação
- Estricção
 - No limite de resistência, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região localizada do corpo de prova.
 - O corpo de prova quebra quando atinge a tensão de ruptura.
- Diagrama tensão–deformação real
- O comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis

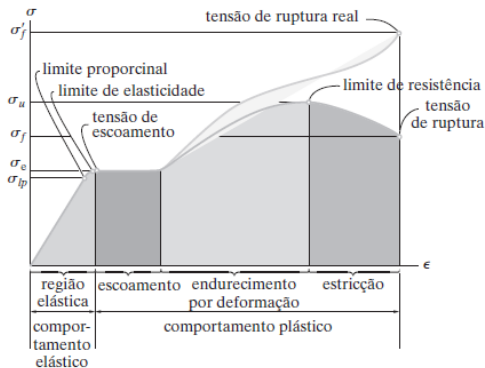
O diagrama tensão–deformação



Diagramas de tensão–deformação convencional e real para um material dúctil (aço)(não está em escala)

- Comportamento elástico
- Escoamento
- Endurecimento por deformação
- Estrição
- Diagrama tensão–deformação real
 - Os valores da tensão e da deformação calculados por essas medições são denominados tensão real e deformação real.
 - Use este diagrama já que a maioria dos projetos de engenharia é feito dentro da faixa elástica.
- O comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis

O diagrama tensão–deformação



Diagramas de tensão–deformação convencional e real para um material dúctil (aço) (não está em escala)

- Comportamento elástico
- Escoamento
- Endurecimento por deformação
- Estrição
- Diagrama tensão–deformação real
- O comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis
 - 1 **Materiais dúcteis:** Material que possa ser submetido a grandes deformações antes de sofrer ruptura é denominado material dúctil.
 - 2 **Materiais frágeis:** Materiais que exibem pouco ou nenhum escoamento antes da falha são denominados materiais frágeis.

Lei de Hooke

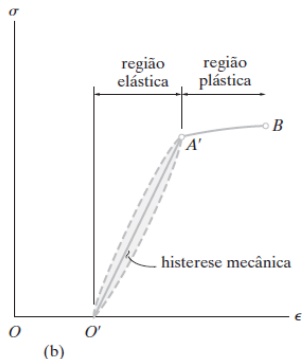
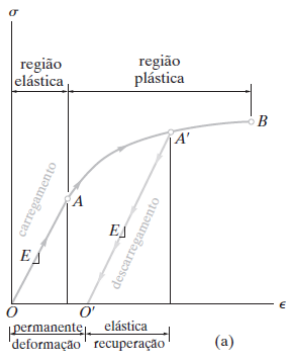
- A lei de Hooke define a relação linear entre tensão e deformação dentro da região elástica.

$$\sigma = E\varepsilon$$

- σ = tensão
 - E = módulo de elasticidade ou módulo de Young
 - ε = deformação
- E pode ser usado somente se o material tiver relação linear-elástica.

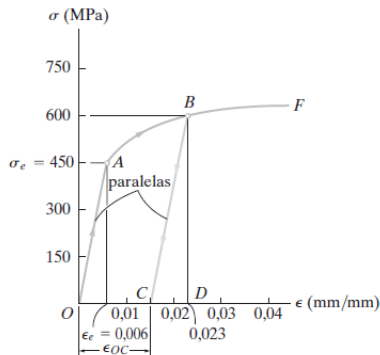
Endurecimento por deformação

- Se um corpo de prova de material dúctil for carregado na região plástica e, então, descarregado, a deformação elástica é recuperada.
- Entretanto, a deformação plástica permanece, e o resultado é que o material fica submetido a uma deformação permanente.



Exemplo de um diagrama

- O diagrama tensão-deformação para uma liga de alumínio utilizada na fabricação de peças de aeronaves é mostrado abaixo. Se um corpo de prova desse material for submetido à tensão de tração de 600 MPa, determine a deformação permanente no corpo de prova quando a carga é retirada.

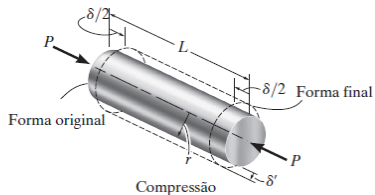
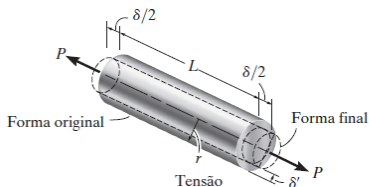


Coeficiente de Poisson

- Coeficiente de Poisson, ν , estabelece que dentro da faixa elástica, a razão entre essas deformações é uma constante, já que estas são proporcionais.

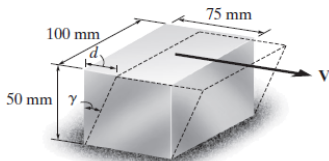
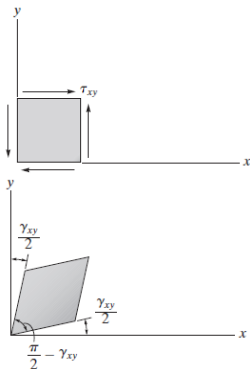
$$\nu = - \frac{\epsilon_{lateral}}{\epsilon_{longitudinal}}$$

- A expressão acima tem sinal negativo porque o alongamento longitudinal (deformação positiva) provoca contração lateral (deformação negativa) e vice-versa.



O diagrama tensão–deformação de cisalhamento

- Para *cisalhamento puro*, o equilíbrio exige que tensões de cisalhamento iguais sejam desenvolvidas nas quatro faces do elemento.
- Se o material for homogêneo e isotrópico, a tensão de cisalhamento distorcerá o elemento uniformemente.

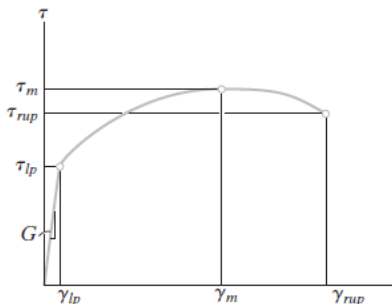


O diagrama tensão–deformação de cisalhamento

- A maioria dos materiais de engenharia apresenta comportamento elástico linear, portanto a lei de Hooke para cisalhamento pode ser expressa por

$$\tau = G\gamma$$

- G = módulo de elasticidade ao cisalhamento ou módulo de rigidez.



O diagrama tensão–deformação de cisalhamento

- Três constantes do material, E , ν e G , na realidade, estão relacionadas pela equação

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- G = módulo de elasticidade ao cisalhamento ou módulo de rigidez.
- E = módulo de elasticidade ou módulo de Young
- ν = Coeficiente de Poisson

Exemplo

Um corpo de prova de alumínio tem diâmetro $d_0 = 25$ mm e tem comprimento de referência de $L_0 = 250$ mm. Supondo que uma força de 165 kN alongue o corpo de 1.20 mm, determine o módulo de elasticidade e quanto o diâmetro do corpo se contrai. O limite elástico do alumínio é atingido em 440 MPa. Dados: $G_{al} = 26$ GPa.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{165(10^3)\text{N}}{(\pi/4)(0.025\text{m})^2} = 336.1 \text{ MPa} < 440 \text{ MPa}$$

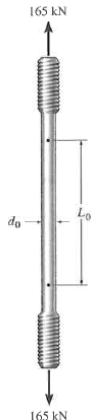
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} = \frac{1.2\text{mm}}{250\text{mm}} = 0.0048 \text{ mm/mm}$$

$$E_{al} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{336.1\text{Pa}}{0.0048} = 70\text{GPa}$$

$$G_{al} = \frac{E_{al}}{2(1+\nu)} \Rightarrow 26\text{GPa} = \frac{70\text{GPa}}{1(1+\nu)} \Rightarrow \nu = 0.346$$

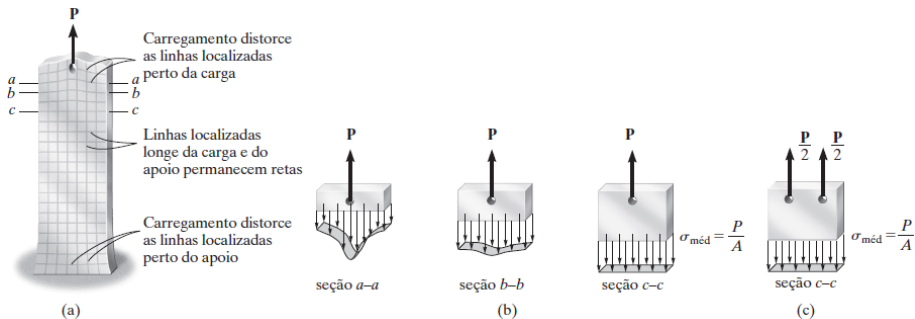
$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}} \Rightarrow 0.346 = -\frac{\varepsilon_{lat}}{0.0048} \Rightarrow \varepsilon_{lat} = -0.00166\text{mm/mm}$$

$$\delta' = (0.00166)(25) = 0.0415\text{mm} - \text{contração no diâmetro}$$

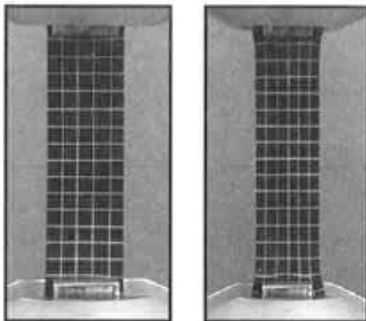


Princípio de Saint-Venant

- O princípio Saint-Venant afirma que a deformação e tensão localizadas nas regiões de aplicação de carga ou nos apoios tendem a “nivelar-se” a uma distância suficientemente afastada

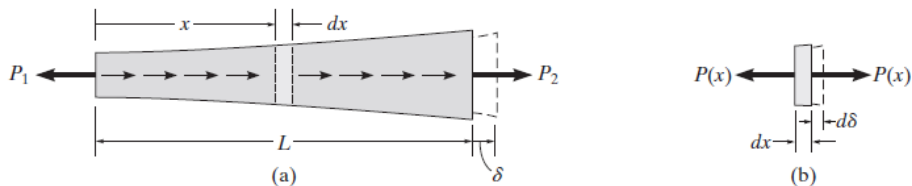


Princípio de Saint-Venant



Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial

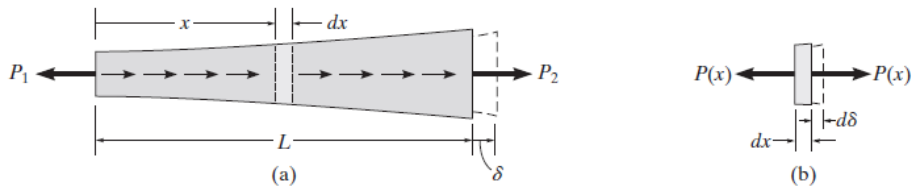
Usando a lei Hooke e as definições de tensão e deformação, somos capazes de determinar a deformação elástica de um elemento submetido a cargas axiais.



- δ = deslocamento de um ponto na barra relativo a outro
- L = distância original
- $P(x)$ = força axial interna na seção
- $A(x)$ = área da seção transversal da barra
- E = módulo de elasticidade

Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial

Usando a lei Hooke e as definições de tensão e deformação, somos capazes de determinar a deformação elástica de um elemento submetido a cargas axiais.



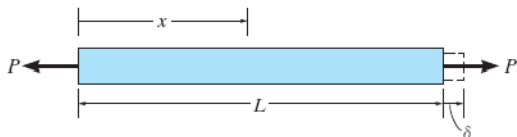
$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} = E\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow d\delta = \varepsilon dx = \frac{P(x)}{A(x)E} dx$$

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x)E} dx$$

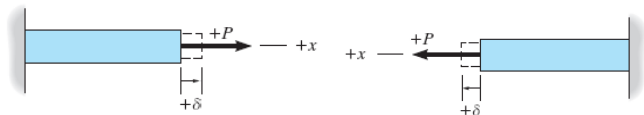
Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial

- Quando uma força constante externa é aplicada a cada extremidade da barra,

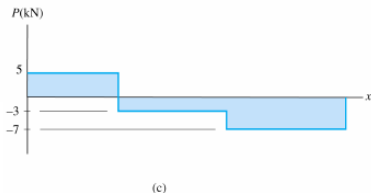
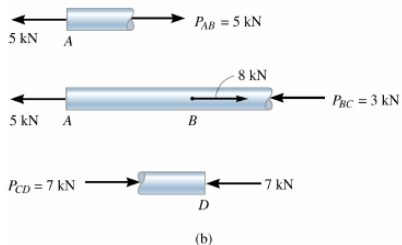
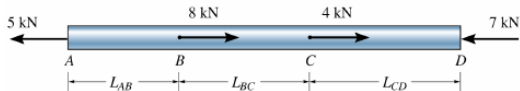
$$\delta = \frac{PL}{AE}$$



- Força e deslocamento são positivos se provocarem tração e alongamento; e negativos causarão compressão e contração.



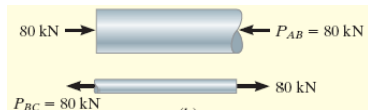
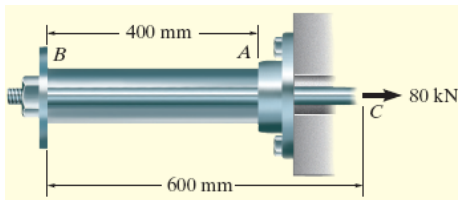
Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial



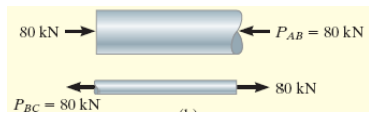
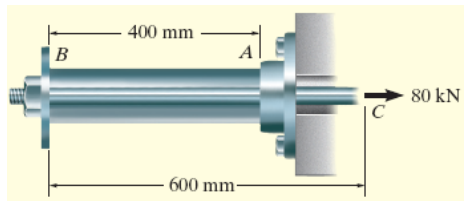
$$\delta_{AD} = \sum \frac{PL}{EA} = \frac{5L_{AB}}{EA} + \frac{-3L_{BC}}{EA} + \frac{-7L_{CD}}{EA}$$

Exemplo

- O conjunto é composto por um tubo de alumínio AB com área de seção transversal de 400 mm^2 . Uma barra de aço com 10 mm de diâmetro está acoplada a um colar rígido e que passa pelo tubo. Se uma carga de tração de 80 kN for aplicada à barra, determine o deslocamento da extremidade C da barra. ($E_{aco} = 200 \text{ GPa}$, $E_{al} = 70 \text{ GPa}$)



Exemplo



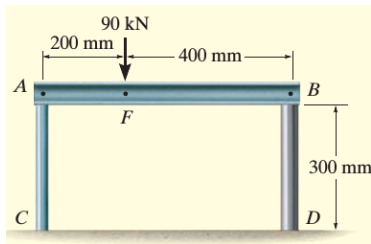
$$\delta_{CB} = \frac{PL}{EA} = \frac{+80(10^3)0.6}{\pi(0.005)^2 200(10^9)} = 0.003056\text{m} \rightarrow$$

$$\delta_{BA} = \frac{PL}{EA} = \frac{-80(10^3)0.4}{400(10^{-6}) 70(10^9)} = -0.001143\text{m} \rightarrow$$

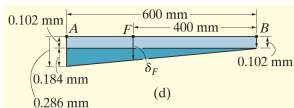
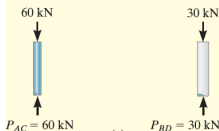
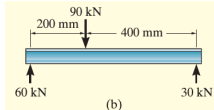
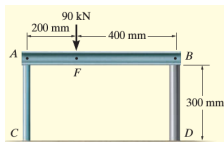
$$\delta_C = \delta_{CB}(\rightarrow) + \delta_{BA}(\rightarrow) = 0.0042\text{m}$$

Exemplo

- Uma viga rígida AB apoia-se sobre dois postes curtos como mostrado na figura. AC é feito de aço e tem diâmetro de 20 mm; BD é feito de alumínio e tem diâmetro de 40 mm. Determinar o deslocamento do ponto F em AB se for aplicada uma carga vertical de 90 kN nesse ponto. Admitir $E_{aco} = 200$ GPa e $E_{al} = 70$ GPa.



Exemplo



$$+ \circlearrowleft \sum M_A = 0 = -90(0.2) + P_{BD}(0.6) \Rightarrow P_{BD} = 90(0.2)/0.6 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 = P_{BD} + P_{AC} - 90 \\ P_{AC} = 60 \text{ kN}$$

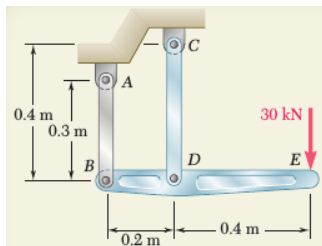
$$\delta_A = \frac{P_{AC} L_{AC}}{A_{AC} E_{aco}} = \frac{-60(10^3)0.3}{\pi(0.010)^2 200(10^9)} = 0.286 \text{ mm} \downarrow$$

$$\delta_B = \frac{-30(10^3)0.3}{\pi(0.020)^2 70(10^9)} = 0.102 \text{ mm} \downarrow$$

$$\delta_F = 0.102 + (0.286 - 0.102) \left(\frac{400}{600} \right) = 0.225 \text{ mm} \downarrow$$

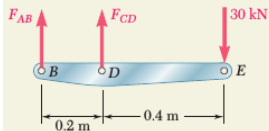
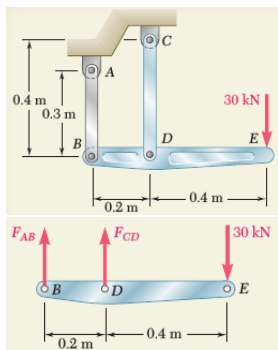
Exemplo

A barra rígida BDE esta apoiada por duas barras verticais de AB e CD. A ligação AB é feita de alumínio ($E = 70 \text{ GPa}$) e tem uma área de secção transversal de 500 mm^2 ; a ligação de CD é feita de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) e tem uma área de seção transversal de 600 mm^2 . Com o carregamento de 30 kN mostrado, determinar a deflexão nos pontos B, D e E.



Exemplo

Forças atuantes na barra horizontal:



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 = -30(0.6) + F_{CD}(0.2)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 = -30(0.4) - F_{AB}(0.2)$$

$$F_{CD} = 90 \text{ kN}; \quad F_{AB} = -60 \text{ kN}$$

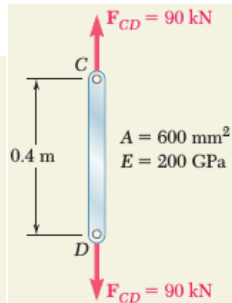
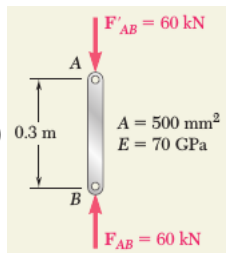
Deslocamentos nas barras verticais:

$$\delta_B = \frac{PL}{EA} = \frac{-60(10^3)0.3}{500(10)^{-6}70(10^9)}$$

$$\delta_B = -514(10)^{-6} \text{ m } \uparrow$$

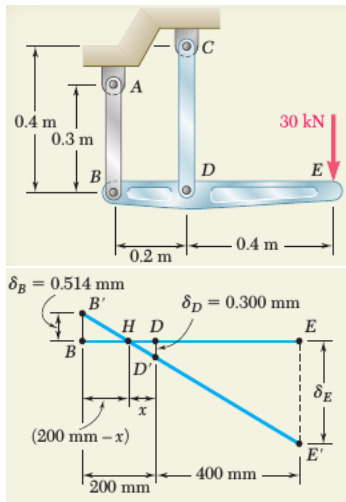
$$\delta_D = \frac{PL}{EA} = \frac{90(10^3)0.4}{600(10)^{-6}200(10^9)}$$

$$\delta_D = 300(10)^{-6} \text{ m } \downarrow$$



Exemplo

Deslocamentos do ponto E :



Sejam B' e D' as posições deslocadas dos pontos B e D . Uma vez que BDE é rígida, os pontos B' e D' e E' permanecem sobre a mesma reta, e então

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} = \frac{0.514}{0.300} = \frac{200-x}{x}$$

$$\Rightarrow x = 73.7\text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} = \frac{\delta_E}{0.300} = \frac{400+73.7}{73.7}$$

$$\Rightarrow \delta_E = 1.928\text{ mm} \downarrow$$

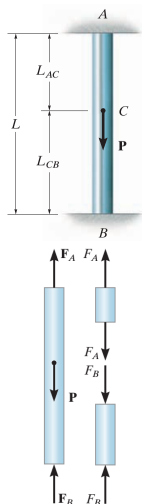
Programa

1 Carga Axial

- Tensão e Deformação
- **Membros com carga axial estaticamente indeterminados**
- Variação de temperatura

Carga Axial

Membros com carga axial estaticamente indeterminados



- A barra abaixo possui as duas extremidades fixas, e a **condição de equilíbrio** resulta em

$$+\uparrow \sum F = 0 = F_A + F_B - P$$

- Uma equação adicional é fornecida pela **condição de compatibilidade**

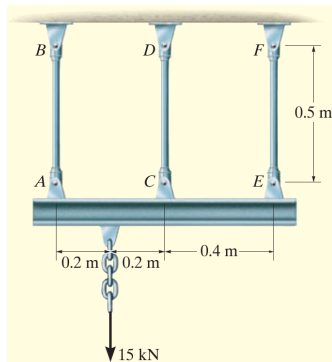
$$\delta_{A/B} = 0 = \frac{F_{AC}L_{AC}}{A_{AC}E_{AC}} + \frac{F_{CB}L_{CB}}{A_{CB}E_{CB}}$$

- São necessárias
 - 1 Equações de equilíbrio
 - 2 Equações de compatibilidade

Carga Axial

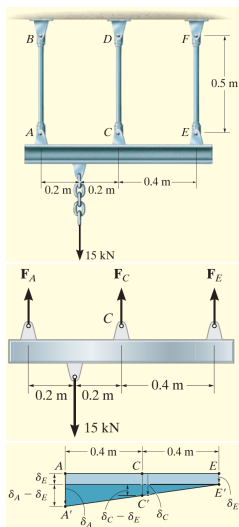
Membros com carga axial estaticamente indeterminados

- Três barras de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) são acopladas a um elemento rígido por pinos e submetidas a uma carga de 15 kN como mostrado. Determine a força em cada barra. As barras AB e EF têm área de seção transversal de 25 mm^2 e a barra CD seção transversal de 15 mm^2 .



Carga Axial

Membros com carga axial estaticamente indeterminados



- Equações de equilíbrio

$$+ \circlearrowleft \sum M_C = 0 = -F_A(0.4) + 15(0.2) + F_E(0.4)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0 = F_A + F_C + F_E - 15$$

- Equações de compatibilidade

$$\frac{\delta_A - \delta_E}{0.8} = \frac{\delta_C - \delta_E}{0.4} \Rightarrow \delta_C = (\delta_A + \delta_E)/2$$

$$\frac{F_C L}{15E} = \frac{1}{2} \left(\frac{F_A L}{25E} + \frac{F_E L}{25E} \right)$$

$$F_C = 0.3F_A + 0.3F_E$$

- Resolvendo simultaneamente

- $F_A = 9.52 \text{ kN}$

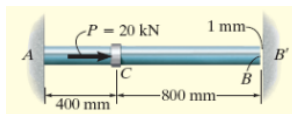
- $F_C = 3.46 \text{ kN}$

- $F_E = 2.02 \text{ kN}$

Carga Axial

Membros com carga axial estaticamente indeterminados

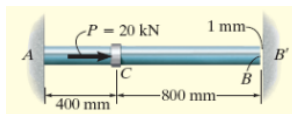
A haste de aço ($E = 200$ GPa) tem diâmetro de 5 mm e está presa à parede fixa em A . Antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede B' e a haste. Determine as reações em A e B' se a haste for submetida a uma força axial $P = 20$ kN. Despreze o tamanho do colar em C .



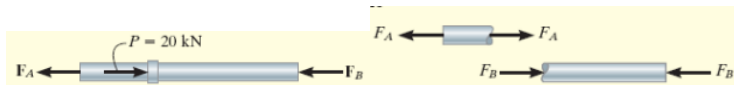
Carga Axial

Membros com carga axial estaticamente indeterminados

A haste de aço ($E = 200$ GPa) tem diâmetro de 5 mm e está presa à parede fixa em A. Antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede B' e a haste. Determine as reações em A e B' se a haste for submetida a uma força axial $P = 20$ kN. Despreze o tamanho do colar em C.



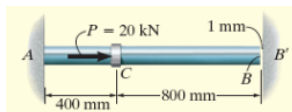
O equilíbrio da haste exige: $+\uparrow \sum F_x = 0 = -F_A - F_B + 20(10^3)$



Carga Axial

Membros com carga axial estaticamente indeterminados

A haste de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) tem diâmetro de 5 mm e está presa à parede fixa em A. Antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede B' e a haste. Determine as reações em A e B' se a haste for submetida a uma força axial $P = 20 \text{ kN}$. Despreze o tamanho do colar em C.



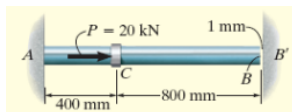
A condição de compatibilidade para a haste exige que $\delta_{B-A} = 0.001 \text{ m}$

$$\delta_{B-A} = 0.001 = \frac{F_A L_{AC}}{EA} - \frac{F_B L_{CB}}{EA} \Rightarrow 0.4F_A - 0.8F_B = 3927 \text{ Nm}$$

Carga Axial

Membros com carga axial estaticamente indeterminados

A haste de aço ($E = 200 \text{ GPa}$) tem diâmetro de 5 mm e está presa à parede fixa em A. Antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede B' e a haste. Determine as reações em A e B' se a haste for submetida a uma força axial $P = 20 \text{ kN}$. Despreze o tamanho do colar em C.



Temos:

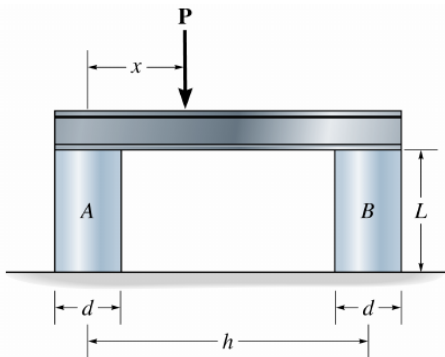
$$\begin{aligned} F_A + F_B &= 20(10^3) \\ 0.4F_A - 0.8F_B &= 3927 \end{aligned}$$

Resolvendo chegamos em $(F_A, F_B) = (16.6, 3.39) \text{ kN}$.

Carga Axial

Membros com carga axial estaticamente indeterminados

[Desafio:] Dois postes apoiam a viga rígida, cada um deles possui largura d , espessura d e comprimento L . Supondo que o módulo de elasticidade do material A seja E_A e do material B seja E_B , determinar a distância x para aplicar a força \mathbf{P} de modo que a viga permaneça horizontal.



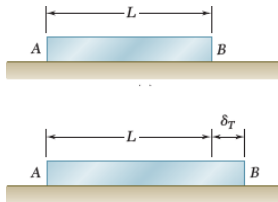
Programa

1 Carga Axial

- Tensão e Deformação
- Membros com carga axial estaticamente indeterminados
- Variação de temperatura

Variação de temperatura

- Todos os membros e estruturas que analisamos até agora mantinham-se na mesma temperatura enquanto eles estavam sendo carregados.
- Vamos agora considerar várias situações que envolvem mudanças na temperatura.
- Vamos primeiro considerar uma haste homogênea AB de seção transversal uniforme, apoiada livremente sobre uma superfície horizontal lisa, que sofre um aumento de temperatura.



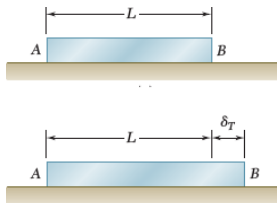
Carga Axial

Variação de temperatura

- Se a temperatura do da haste aumenta de uma quantidade ΔT , observa-se que ela alonga-se por uma quantidade δT que é proporcional tanto a mudança de temperatura ΔT e o seu comprimento L .
- Temos então o deslocamento e deformação dados por

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad \Rightarrow \quad \epsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha\Delta T$$

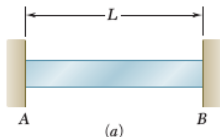
- α é o coeficiente de dilatação térmica e
- ΔT é a variação de temperatura.



Carga Axial

Variação de temperatura

- Suponha-se que a mesma haste AB de comprimento L é colocada entre dois suportes fixos a uma distância L entre si, e considere que não há forças nesta condição inicial.

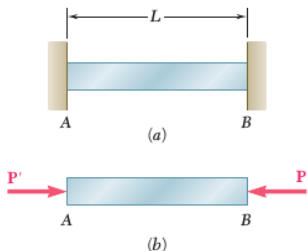


- Se a temperatura aumentar por ΔT , a barra não pode alongar por causa das restrições impostas nas suas extremidades e o alongamento δT da barra é zero.
- Uma vez que a haste é homogênea e de seção transversal uniforme, a deformação também é zero ($\delta T = 0$).

Carga Axial

Variação de temperatura

- No entanto, os suportes vão exercer forças iguais e opostas na haste depois que a temperatura foi elevada, para evitar que o alongamento.



- Fazendo o equilíbrio das forças horizontais, observa-se que o problema que temos de resolver é estaticamente indeterminado.

Carga Axial

Variação de temperatura

- Para resolver o problema, destacamos a haste do seu suporte B e deixamos alongar livremente à medida que sofre a mudança de temperatura ΔT .
- O alongamento correspondente é

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

- Aplicando a força P (reação redundante), temos

$$\delta_P = \frac{PL}{EA}$$

- O deslocamento total δ deve ser nulo, então

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{EA} = 0 \Rightarrow P = -EA\alpha(\Delta T)$$

