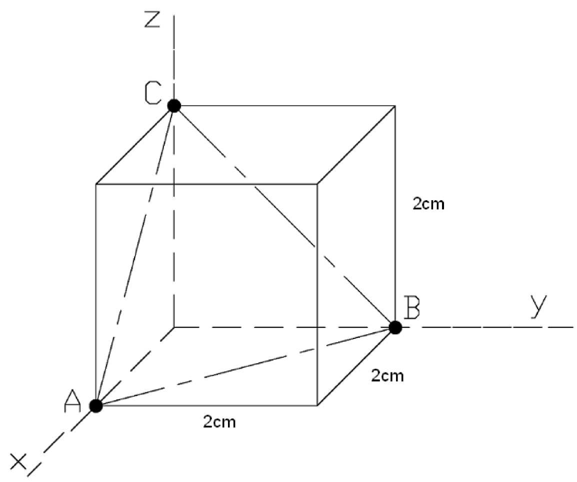
LISTA DE EXERCÍCIOS 2

PARTE 1 - ESTADO TRIAXIAL DE TENSÕES

1. Seja o tensor de tensões (em MPa) para um ponto P no espaço (x, y, z):

$$\underset{\approx}{\sigma} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 \\ -12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Para esta situação, determine o vetor tensão total $\underset{\sim}{\rho_n}$ associado à direção normal ao plano que passa pelos pontos A, B e C de um cubo de aresta 2 cm, conforme mostrado na figura abaixo. Em seguida, calcule as tensões normal e cisalhante atuantes nesse mesmo plano.



Respostas: $\underset{\sim}{\rho_n} = \left(2\sqrt{3}\underset{\sim}{\hat{i}},\ 2\sqrt{3}\underset{\sim}{\hat{j}},\ 4\sqrt{3}\underset{\sim}{\hat{k}}\right)$ MPa; $\sigma_n = 8$ MPa; $\tau_t = 2{,}83$ MPa

2. Para o tensor de tensões (em MPa) para um ponto P no espaço (x, y, z) mostrado abaixo, calcule:

$$\underset{\approx}{\sigma} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -60 \\ 0 & -60 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) O vetor tensão total $\underset{\sim}{\rho_n}$ no plano cujo vetor normal unitário é $\underset{\sim}{\hat{n}} = \frac{1}{3}\left(2\underset{\sim}{\hat{i}} + \underset{\sim}{\hat{j}} + 2\underset{\sim}{\hat{k}}\right)$.

(b) As tensões normal σ_n e cisalhante τ_t, neste mesmo plano.

(c) As tensões e direções principais. Em seguida, esboce o tricirculo de Mohr.

Respostas:

(a) $\underset{\sim}{\rho_n} = \left(16{,}67\underset{\sim}{\hat{i}} - 50\underset{\sim}{\hat{j}} - 16{,}67\underset{\sim}{\hat{k}}\right)$ MPa

(b) $\sigma_n = -16{,}67$ MPa; $\tau_n = 52{,}7$ MPa

(c) $\sigma_1 = 50$ MPa $\quad \underset{\sim}{e_1} = (0,\ -0{,}6,\ 0{,}8)$

$\sigma_2 = 25$ MPa $\quad \underset{\sim}{e_2} = (1,\ 0,\ 0)$

$\sigma_3 = -75$ MPa $\quad \underset{\sim}{e_3} = (0,\ 0{,}8,\ 0{,}6)$

3. Para o tensor de tensões (em MPa) mostrado abaixo, calcule:

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\sigma}} = \begin{bmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{bmatrix}$$

   (a) As tensões e direções principais. Em seguida, esboce o tricirculo de Mohr;
   (b) As tensões esférica (hidrostática) e desviadora.

   Respostas:

   (a) $\sigma_1 = 75$ MPa $\quad \underset{\sim}{e_1} = (0{,}8,\ 0,\ 0{,}6)$
   $\sigma_2 = 50$ MPa $\quad \underset{\sim}{e_2} = (0,\ 1,\ 0)$
   $\sigma_3 = 25$ MPa $\quad \underset{\sim}{e_3} = (0{,}6,\ 0,\ -0{,}8)$

   (b) $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\sigma_E}} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$ MPa $\qquad \underset{\sim}{\underset{\sim}{\sigma_D}} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ MPa

4. Seja o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$, referenciado no sistema de eixos xyz, para um ponto de uma estrutura, mostrado abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -5 \\ 10 & 5 & 15 \\ -5 & 15 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

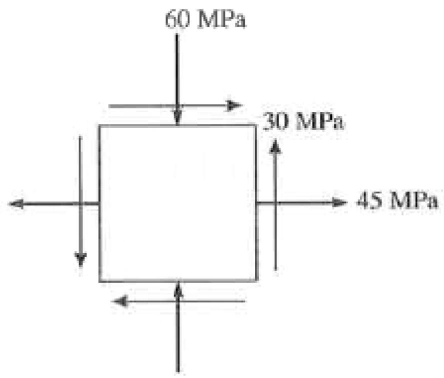
   Existe algum plano no qual não atuem tensões tangenciais e cuja tensão normal seja igual a 5 MPa? Em caso afirmativo, determine a direção deste plano. Caso contrário, responda: em que circunstância isso poderia ser verdade?

   Respostas: Não, pois 5 MPa não é tensão principal. Poderia ser verdade caso 5 MPa fosse a tensão principal σ_2.

PARTE 2 - ESTADO PLANO DE TENSÕES

5. Para um ponto sujeito a um estado plano de tensões conforme mostrado na figura abaixo, calcule:

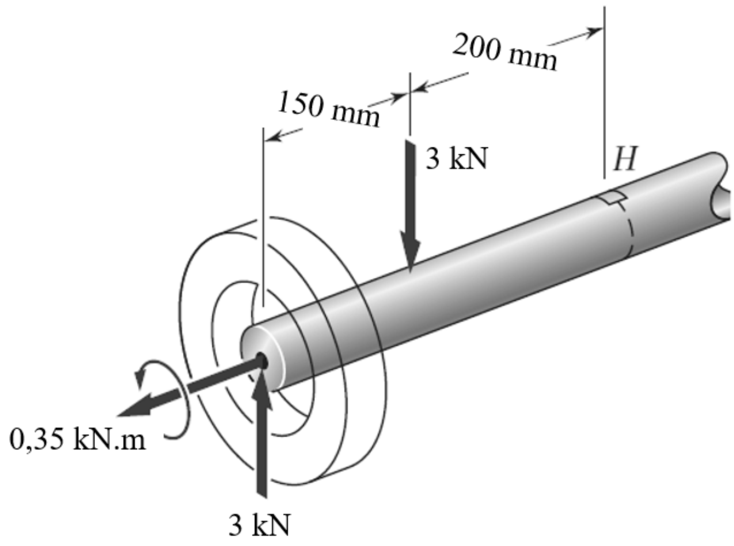
   (a) As tensões e respectivas direções principais;
   (b) A tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média;



   Respostas:

   (a) $\sigma_1 = 52{,}97$ MPa ($\theta_1 = 14{,}87°$); $\sigma_3 = -67{,}97$ MPa ($\theta_3 = -75{,}13°$)
   (b) $\tau_{\max} = 60{,}47$ MPa; $\sigma_{med} = -7{,}50$ MPa

6. O eixo de uma máquina é submetido às ações representadas na figura a seguir. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto H na superfície do eixo, sabendo-se que seu diâmetro é igual a 3,2 cm.



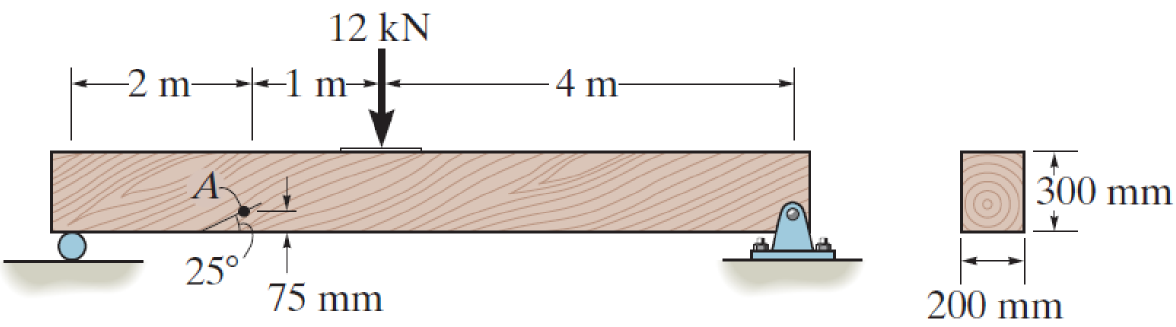
Respostas: $\sigma_1 = 18{,}66$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -158{,}55$ MPa, $\tau_{\max} = 88{,}60$ MPa.

7. Uma viga de madeira está sujeita à força vertical de 12 kN representada na figura a seguir. No ponto A, as fibras da madeira formam um ângulo de 25º com a direção horizontal, conforme mostrado na figura. Para essa situação, calcule:

   (a) O valor absoluto das tensões normal e cisalhante que atuam no plano que define a direção das fibras no ponto A;

   (b) O valor das tensões principais e a orientação dos planos em que elas ocorrem.

   OBS: Neste exercício, considere τ_{xy} com sinal negativo.

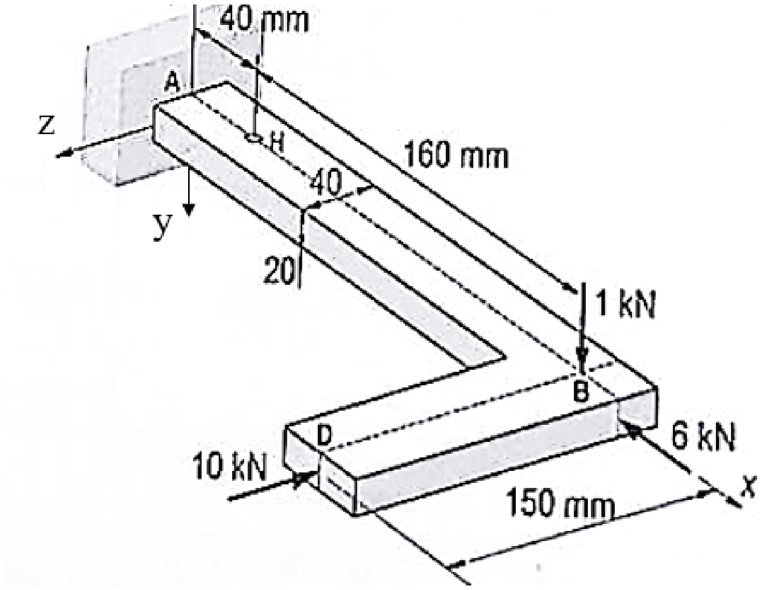


Respostas:

(a) $\sigma = 0,507$ MPa; $\tau = 0,95$ MPa

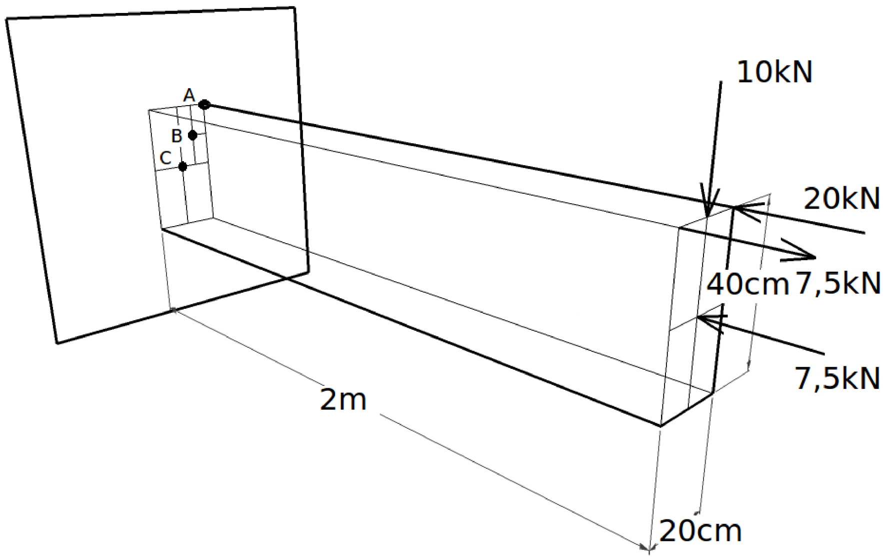
(b) $\sigma_1 = 2{,}29$ MPa, $\sigma_3 = -0{,}00721$ MPa, $\theta_1 = -3{,}21^{\circ}$, $\theta_3 = 86{,}79^{\circ}$.

8. Três forças são aplicadas ao componente de máquina ABD mostrado a seguir. A seção transversal no ponto H é retangular de 20 mm x 40 mm, conforme mostrado na figura abaixo. Determine as tensões normais máxima e mínima, além da tensão de cisalhamento máxima no ponto H.



Respostas: $\sigma_1 = 58{,}51$ MPa, $\sigma_3 = -6{,}01$ MPa, $\tau_{\max} = 32{,}26$ MPa

9. Para a viga mostrada na figura abaixo, esboce os círculos de Mohr para os pontos A, B e C, assumindo-se que todos estejam sujeitos a um estado plano de tensão. Indique as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima para cada ponto.



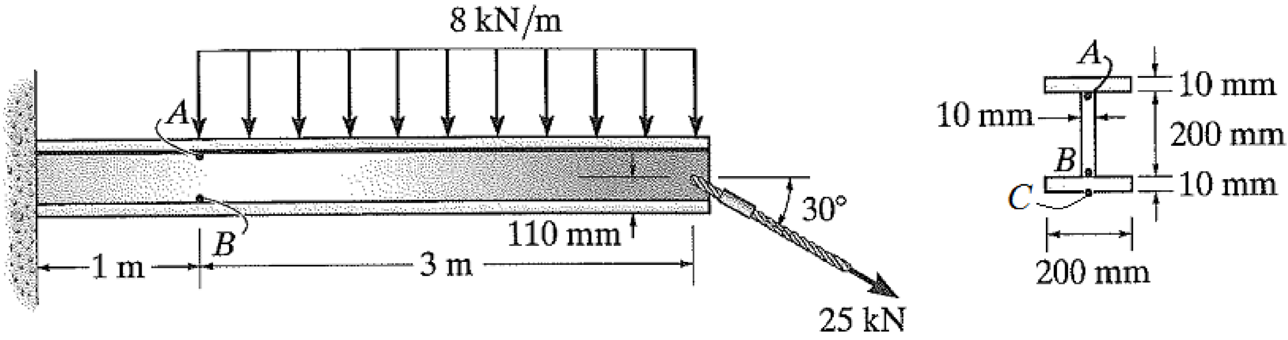
Respostas:

(a) Ponto A: $\sigma_{xx} = 2$ MPa; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = 0$; $\sigma_1 = 2$ MPa; $\sigma_3 = 0$; $\tau_{\max} = 1$ MPa

(b) Ponto B: $\sigma_{xx} = 0{,}875$ MPa; $\sigma_{yy} = 0$, $\tau_{xy} = 0{,}141$ MPa; $\sigma_1 = 0{,}897$ MPa; $\sigma_3 = -0{,}022$ MPa; $\tau_{\max} = 0{,}460$ MPa

(c) Ponto C: $\sigma_{xx} = -0{,}25$ MPa; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = 0{,}188$ MPa; $\sigma_1 = 0{,}10$ MPa; $\sigma_3 = -0{,}35$ MPa; $\tau_{\max} = 0{,}225$ MPa.

10. Para a viga mostrada na figura abaixo, esboce os círculos de Mohr para os pontos A, B e C, assumindo-se que todos estejam sujeitos a um estado plano de tensão. Indique as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima para cada ponto. O momento de inércia da seção, com relação ao eixo horizontal que passa pelo centroide, é igual a $5{,}08 \times 10^7$ mm^4.



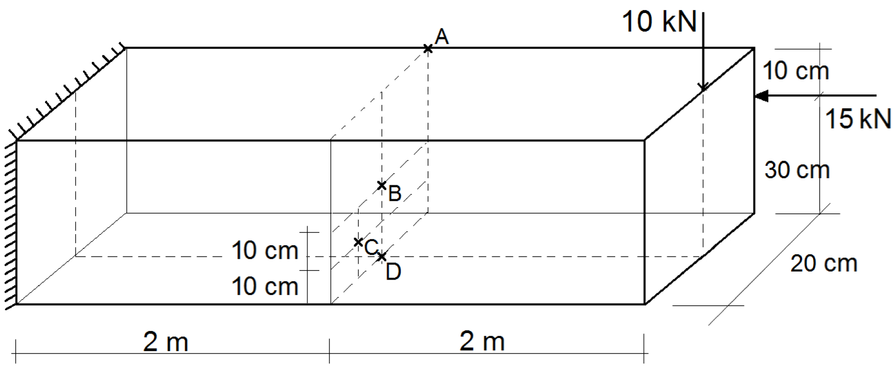
Respostas:

(a) Ponto A: $\sigma_1 = 149{,}8$ MPa, $\sigma_3 = -1{,}52$ MPa, $\tau_{\text{max}} = 75{,}67$ MPa.

(b) Ponto B: $\sigma_1 = 1{,}60$ MPa, $\sigma_3 = -142{,}7$ MPa, $\tau_{\text{max}} = 72{,}13$ MPa.

(c) Ponto C: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -155{,}55$ MPa, $\tau_{\text{max}} = 77{,}77$ MPa.

11. A viga engastada e livre, de seção retangular 20 cm $\times$ 40 cm, está sujeita a duas cargas concentradas, conforme mostrado na figura abaixo. Trace os círculos de Mohr para os pontos A, B, C e D, indicando, em cada círculo, os valores das máximas tensões normais e tangenciais. Considere x o eixo longitudinal da viga e y e z as direções transversais.



Respostas:

(a) Ponto A: $\sigma_1 = 2{,}72$ MPa, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{\text{max}} = 1{,}36$ MPa;

(b) Ponto B: $\sigma_1 = 0{,}116$ MPa, $\sigma_3 = -0{,}303$ MPa, $\tau_{\text{max}} = 0{,}21$ MPa;

(c) Ponto C: $\sigma_1 = 0{,}012$ MPa, $\sigma_3 = -1{,}65$ MPa, $\tau_{\text{max}} = 0{,}83$ MPa;

(d) Ponto D: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -3{,}66$ MPa, $\tau_{\text{max}} = 1{,}83$ MPa.

PARTE 3 - ESTADOS DE DEFORMAÇÕES E LEI DE HOOKE GENERALIZADA

12. O estado plano de deformações em um ponto é dado por:

$$\varepsilon_{xx} = 480 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{yy} = 140 \times 10^{-6}, \quad \gamma_{xy} = -350 \times 10^{-6}$$

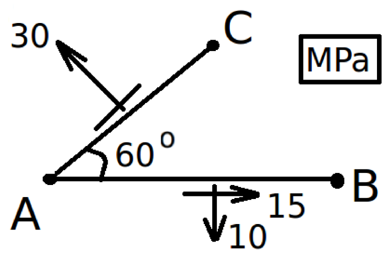
Determine as deformações principais, direções principais e a deformação de cisalhamento máxima.

Respostas: $\varepsilon_1 = 554 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_3 = 66 \times 10^{-6}$; $\theta_1 = -22{,}9°$; $\theta_3 = 67{,}1°$; $\gamma_{\max} = 488 \times 10^{-6}$

13. Um ponto em estado plano de tensões está sujeito às tensões mostradas na figura abaixo. Para esta situação e considerando $E = 2{,}10$ GPa e $\nu = 0{,}3$, determine:

(a) O tensor de tensões tomando AB como direção x;

(b) A variação do comprimento de um segmento na direção AC, de comprimento inicial 5 cm.



Respostas:

(a) $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\sigma}} = \begin{bmatrix} 19{,}35 & -15 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$ MPa

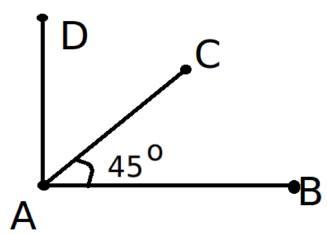
(b) Variação do comprimento: $-0{,}23$ mm.

14. Mediu-se, em torno de um ponto de uma estrutura, conforme apresentado na figura abaixo, os comprimentos $AB = 10$ cm, $AC = 3$ cm e $AD = 2$ cm. Após realizadas essas medições, a estrutura foi submetida à ação de carregamento externo, constatando-se as seguintes variações de comprimento nesses segmentos: os segmentos AB e AC sofreram alongamentos de 0,2 mm e 0,03 mm, respectivamente, e o segmento AD sofreu um encurtamento de 0,08 mm.

Tomando-se AB como sendo a direção x e considerando $E = 2{,}10$ GPa e $\nu = 0{,}3$, determine:

(a) o tensor de deformações

(b) o tensor de tensões neste ponto.

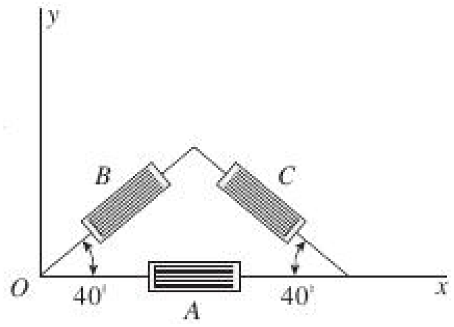


Respostas:

(a) $\varepsilon_{xx} = 2 \times 10^{-3}$; $\varepsilon_{yy} = -4 \times 10^{-3}$; $\varepsilon_{xy} = 2 \times 10^{-3}$.

(b) $\sigma_{xx} = 1{,}846$ MPa; $\sigma_{yy} = -7{,}846$ MPa; $\tau_{xy} = 3{,}231$ MPa.

15. As deformações na superfície de um dispositivo de alumínio (E = 70 GPa, ν = 0,33) foram medidas por uma roseta de strain-gages mostrada na figura abaixo. As deformações medidas foram: $\varepsilon_A = 1100 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_B = 1496 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_C = -39{,}44 \times 10^{-6}$. Para essa situação, determine o tensor de deformações e calcule a tensão normal na direção x.



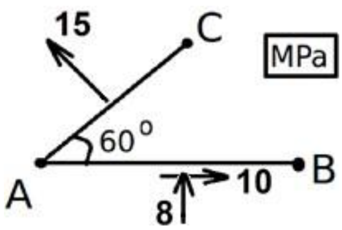
Respostas: $\varepsilon_{xx} = 1100 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_{yy} = 200 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_{xy} = 780 \times 10^{-6}$; $\sigma_{xx} = 91{,}6$ MPa

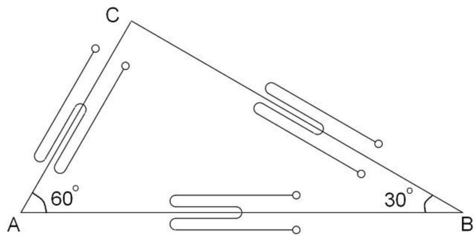
16. Considere um ponto de uma estrutura sujeito a um estado de tensões conforme mostrado na figura abaixo (à esquerda). Tomando a direção AB como eixo x:

    (a) Construa o círculo de Mohr referente ao estado de tensões no entorno deste ponto;

    (b) Calcule o comprimento final dos segmentos AB, BC e AC, considerando-se a roseta de *strain-gages* mostrada na figura (à direita).

    Dados: E = 2 GPa, ν = 0,3. Comprimentos iniciais: AC = 3 cm e BC = 4 cm.





Respostas:

(a) $\sigma_1 = 15{,}39$ MPa, $\sigma_3 = -12{,}27$ MPa, $\tau_{\max} = 13{,}83$ MPa;

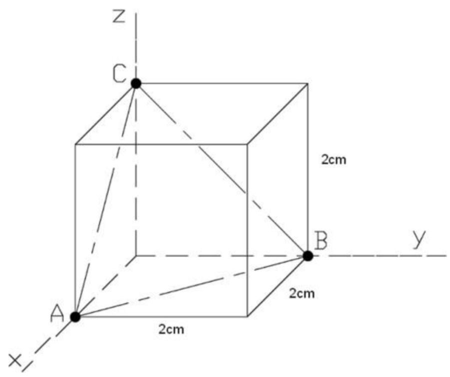
(b) $AB = 5{,}034$ cm, $BC = 4{,}037$ cm, $AC = 2{,}975$ cm.

17. O tensor de tensões (valores em MPa) em um ponto P, em relação ao sistema de eixos xyz, é mostrado abaixo. Sabendo-se que a tensão tangencial medida no plano que passa pelos pontos A, B e C de um cubo de 2 cm de aresta é nula, determine:

    (a) o valor de x para que haja tração na direção z, além do valor da tensão normal ao plano ABC;

    (b) a deformação volumétrica no entorno do ponto P, considerando E = 30 GPa e ν = 0,40.

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 \\ -12 & 0 & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

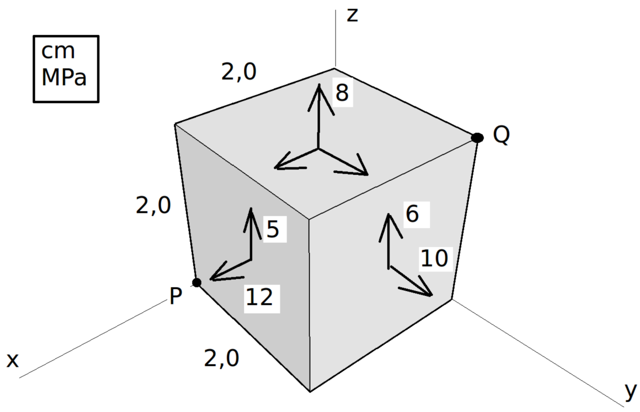


Respostas:

(a) 18 MPa e 6 MPa, respectivamente;

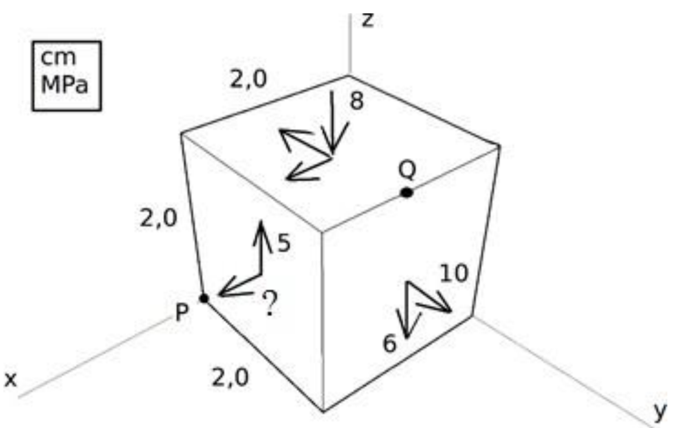
(b) 0,00028.

18. O estado de tensões em torno de um ponto de uma estrutura é representado pelo sólido de tensões mostrado na figura abaixo. Para esta situação, calcule o novo comprimento do segmento que liga os pontos P e Q. Considere $E = 2{,}10$ GPa e $\nu = 0{,}3$.



Resposta: 34,72 mm

19. O estado de tensões em torno de um ponto de uma estrutura é dado pelas tensões indicadas na figura abaixo. Sabendo-se que o comprimento do segmento PQ, deformado, é 2,9833 cm, determine o valor de σ_{xx}, considerando $E = 2$ GPa e $\nu = 0{,}3$.



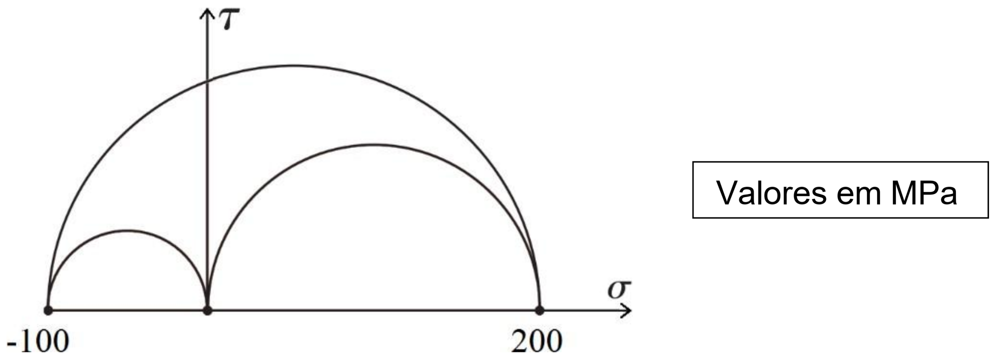
Resposta: $\sigma_{xx} = 12$ MPa.

20. Um cubo de volume inicial $V_0 = 900$ cm^3, constituído por um material linear elástico, homogêneo e isotrópico, foi colocado dentro de uma câmara hidráulica e sujeito a um estado triaxial de compressão uniforme de 8 MPa. A redução de volume ocorrida foi de 9 cm^3.

    O mesmo sólido, em um ensaio separado do anterior, foi submetido a uma tensão tangencial $\tau_{xy} = 3$ MPa, causando uma distorção angular igual a 0,005. Determine o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν do material.

    Respostas: $E = 1{,}44$ GPa e $\nu = 0{,}20$.

21. A figura abaixo ilustra o tri-círculo de Mohr referente a um ponto de uma estrutura de aço ($E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}30$). Para esta situação:



    (a) calcule as deformações lineares nas direções x, y e z, tomando-se x como direção principal onde atua uma tensão normal de tração e sabendo-se que $\sigma_{zz} = 3\,\sigma_{yy}$;

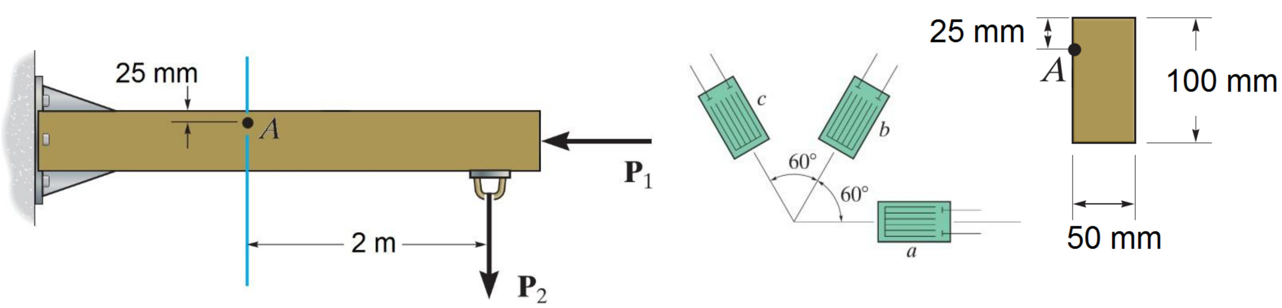
    (b) verifique se o estado de tensão representado pelo tensor $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 170 & -90 & 0 \\ -90 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa é equivalente ao ilustrado pelo tri-círculo de Mohr.

    Respostas:

    (a) $\varepsilon_{xx} = 0{,}001155$, $\varepsilon_{yy} = -0{,}0003125$, $\varepsilon_{zz} = -0{,}0006375$;

    (b) Sim, pois os invariantes são idênticos.

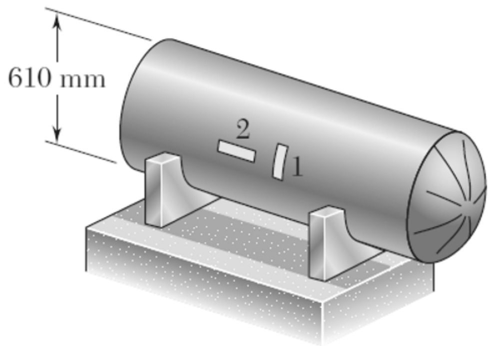
22. Considere a viga de aço ($E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}30$), engastada e livre, mostrada na figura abaixo. Sabendo-se que os *strain-gages* colados no ponto A medem $\varepsilon_a = 30 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 17{,}5 \times 10^{-6}$ e $\varepsilon_c = -16 \times 10^{-6}$, determine os valores de $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$.



    Respostas: $P_1 = 763{,}49$ kN e $P_2 = 13{,}22$ kN.

PARTE 4 - VASOS DE PRESSÃO DE PAREDES FINAS

23. Um tanque cilíndrico (diâmetro interno de 610 mm e espessura de parede de 19 mm) armazena um gás sob pressão. Os *strain-gages* 1 e 2, colados sobre a superfície do tanque nas direções transversal e longitudinal (ver figura a seguir), indicaram deformações de 255 μ e 60 μ, respectivamente.



Sabendo-se que o tanque é feito de um material com módulo de elasticidade transversal $G =$ 77,2 GPa, determine:

(a) o valor da pressão manométrica dentro do tanque;

(b) o coeficiente de Poisson ν e o módulo de elasticidade E do material;

(c) as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto onde os *strain-gages* foram colados;

(d) as deformações principais e a deformação de cisalhamento máxima no ponto onde os $strain - gages$ foram colados;

Respostas:

(a) 3,75 MPa;

(b) $\nu = 0{,}30$, $E = 200{,}72$ GPa;

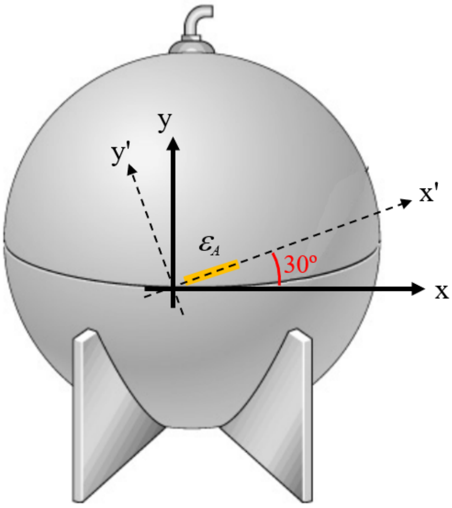
(c) $\sigma_1 = 60{,}2$ MPa, $\sigma_2 = 30{,}1$ MPa, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{\max} = 30{,}1$ MPa;

(d) $\varepsilon_1 = 255\ \mu$, $\varepsilon_2 = 60\ \mu$, $\varepsilon_3 = -135\ \mu$, $\gamma_{\max} = 390\ \mu$.

24. Na superfície de um tanque esférico de parede fina pressurizado, um *strain-gage* ε_A, colado na direção indicada na figura, forneceu a leitura de 819 $\mu\varepsilon$. O tanque tem um diâmetro de 2 m, espessura de 10 mm e é feito de um material com coeficiente de Poisson igual a 0,29 e módulo de elasticidade longitudinal igual a 200 GPa.

    (a) Calcule a pressão interna no tanque;

    (b) Calcule a máxima tensão de cisalhamento e esboce o tricírculo de Mohr que representa o estado de tensões onde o *strain-gage* ε_A está colado.



Respostas:

(a) 4,614 MPa;

(b) 115,35 MPa.

25. Um extensômetro (*strain gage*) é instalado na direção longitudinal na superfície de uma lata de alumínio de refrigerante, como mostra a figura abaixo. A razão raio-espessura da lata é igual a 200. Quando a latinha é aberta, a deformação se altera em $\varepsilon_0 = 170 \times 10^{-6}$. Para esta situação, responda:

    (a) Qual era a pressão interna p na lata? (Considere $E = 70$ GPa e $\nu = 0{,}33$.)

    (b) Qual é a variação da deformação na direção radial quando a tampa é aberta?

Respostas:

(a) 350 kPa;

(b) 0,835 $\times 10^{-3}$.