

Flexão Composta

PROF. ALEXANDRE A. CURY

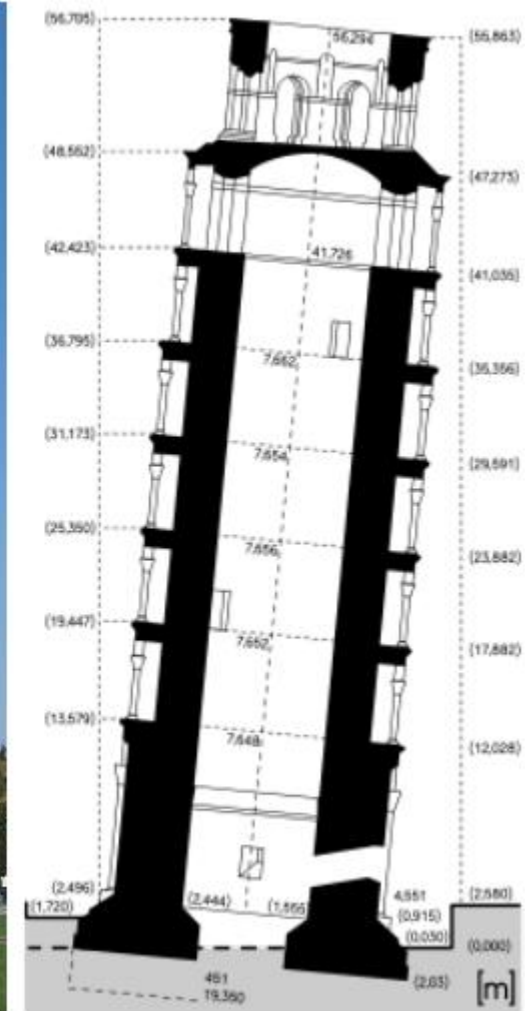
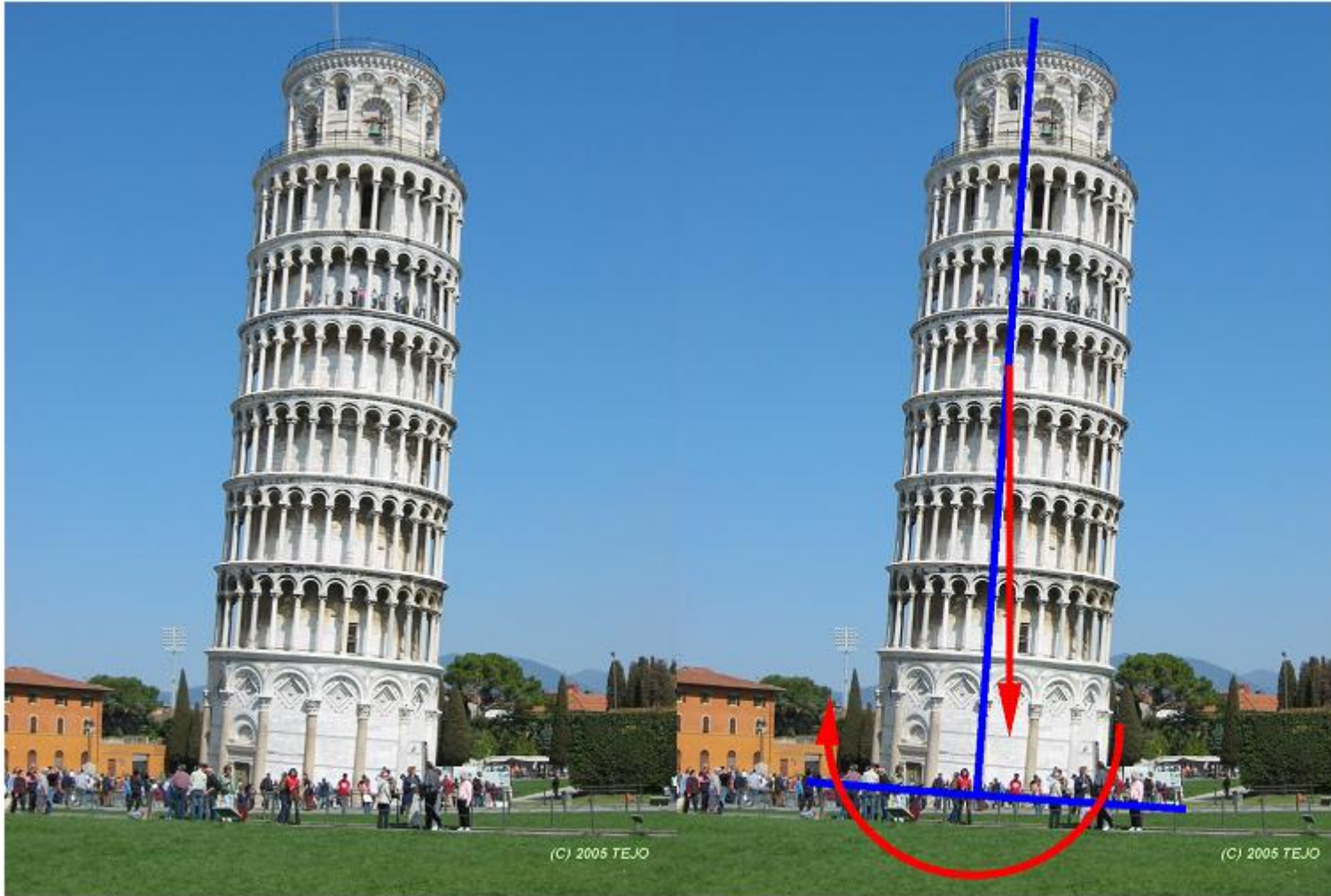
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Flexão Composta

- Encontramos diversas situações em Engenharia nas quais as estruturas estão solicitadas simultaneamente pela ação de **momentos fletores** e **esforços normais**.
- Denominamos este tipo de solicitação de ***flexão composta***.
- Ocorrências usuais:
 - Pilares de canto,
 - Ganchos,
 - Sapatas com cargas excêntricas,
 - Vigas protendidas.
- **OBS**: A flexão composta pode ser reta ou oblíqua! Os exemplos a seguir esclarecerão...

Flexão Composta

- Fundações submetidas à cargas excêntricas:



Flexão Composta

- Vigas protendidas



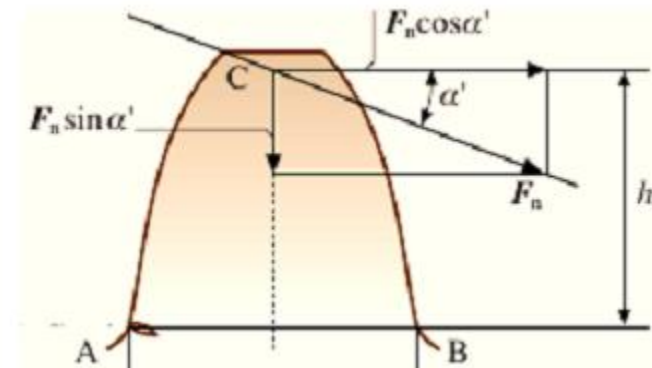
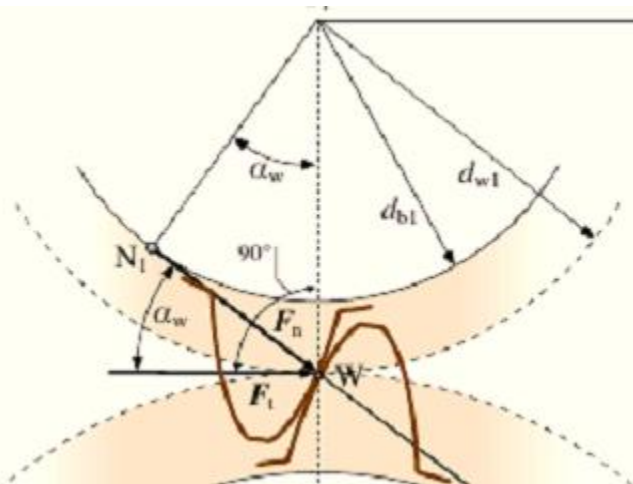
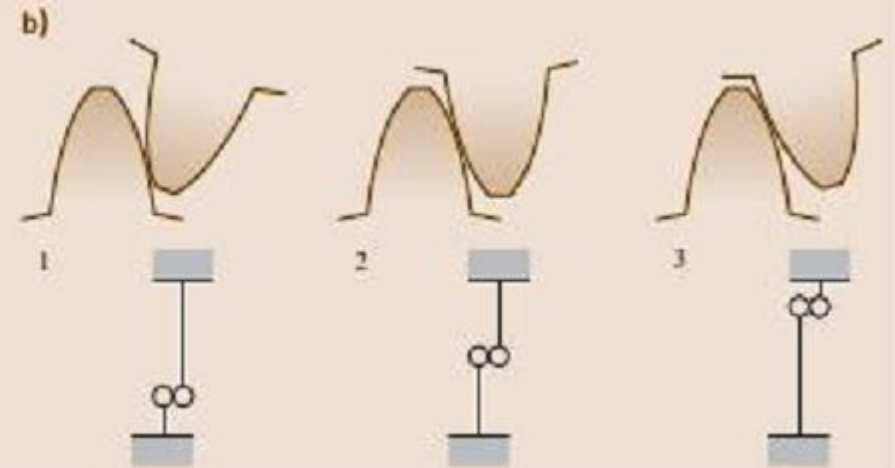
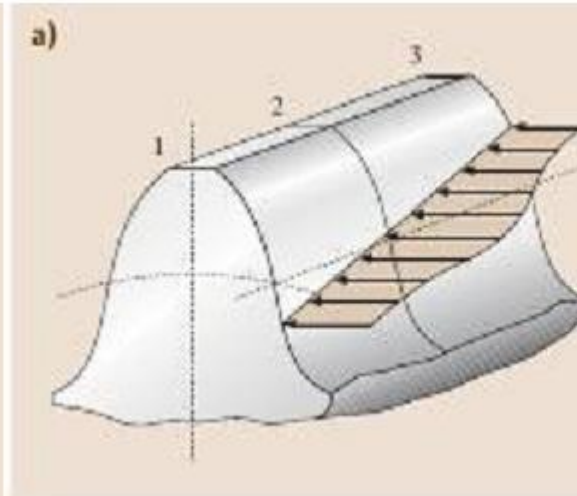
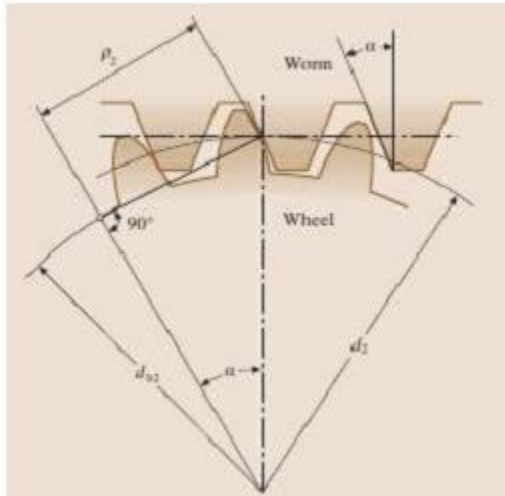
Flexão Composta

- Vigas protendidas



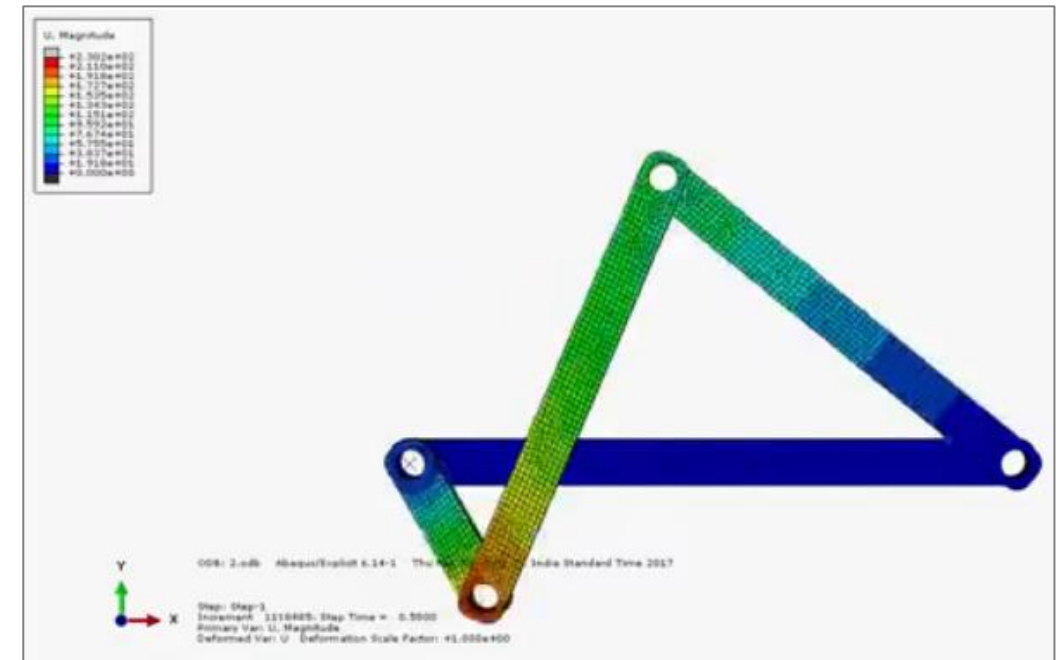
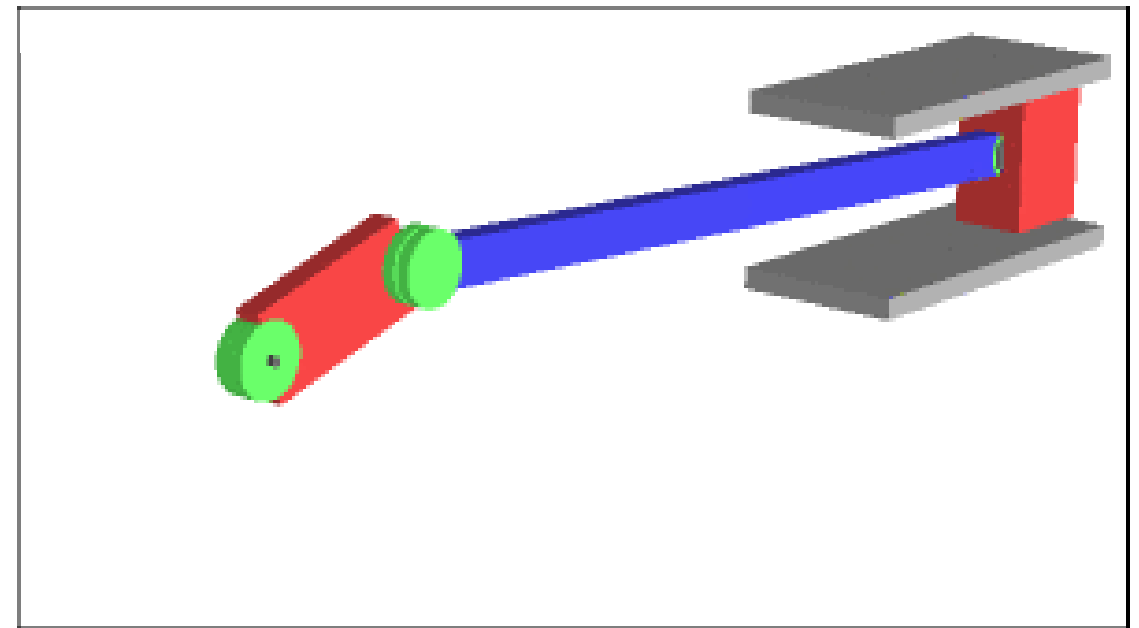
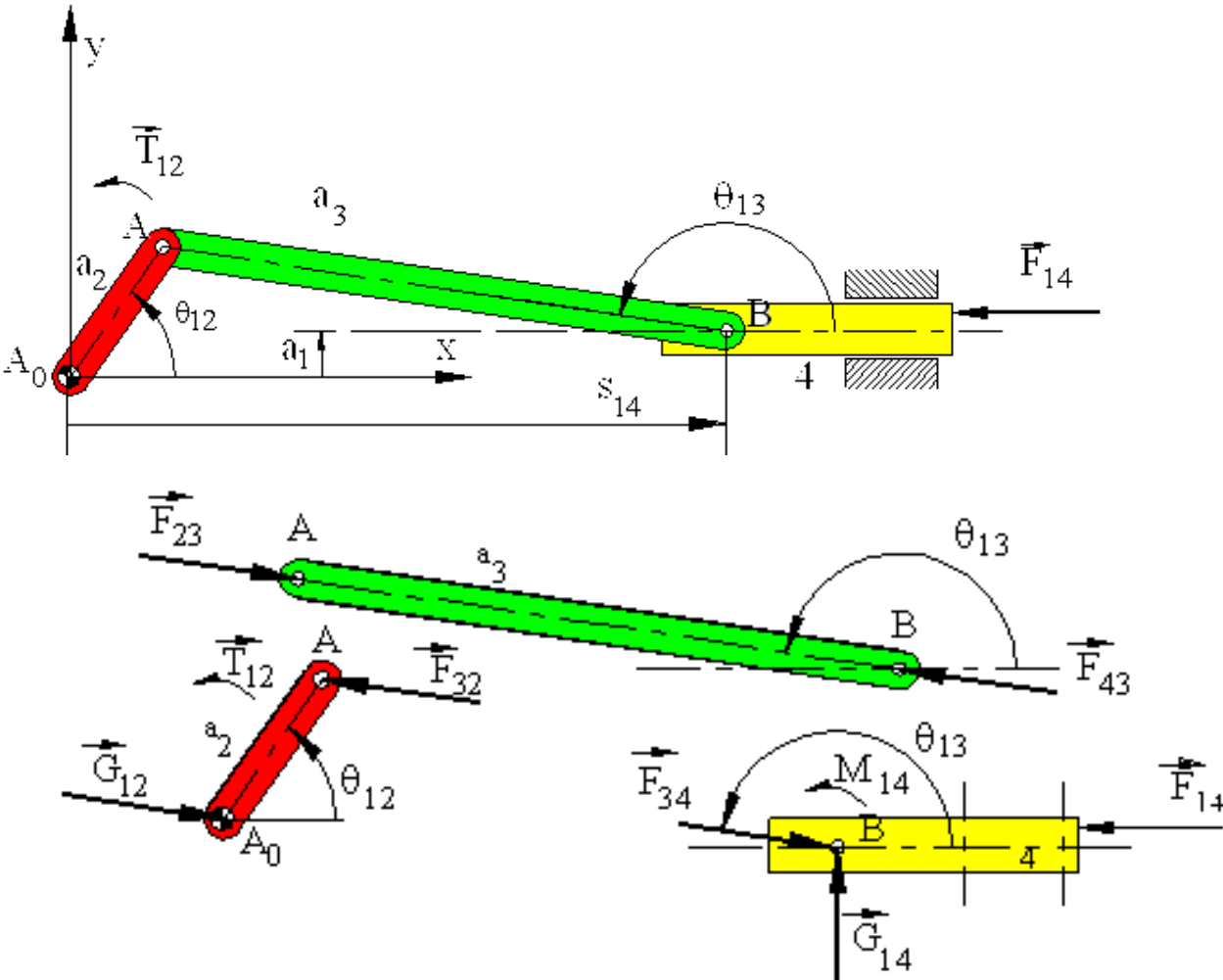
Flexão Composta

- Projetos de componentes mecânicos



Flexão Composta

- Mecanismos de barras

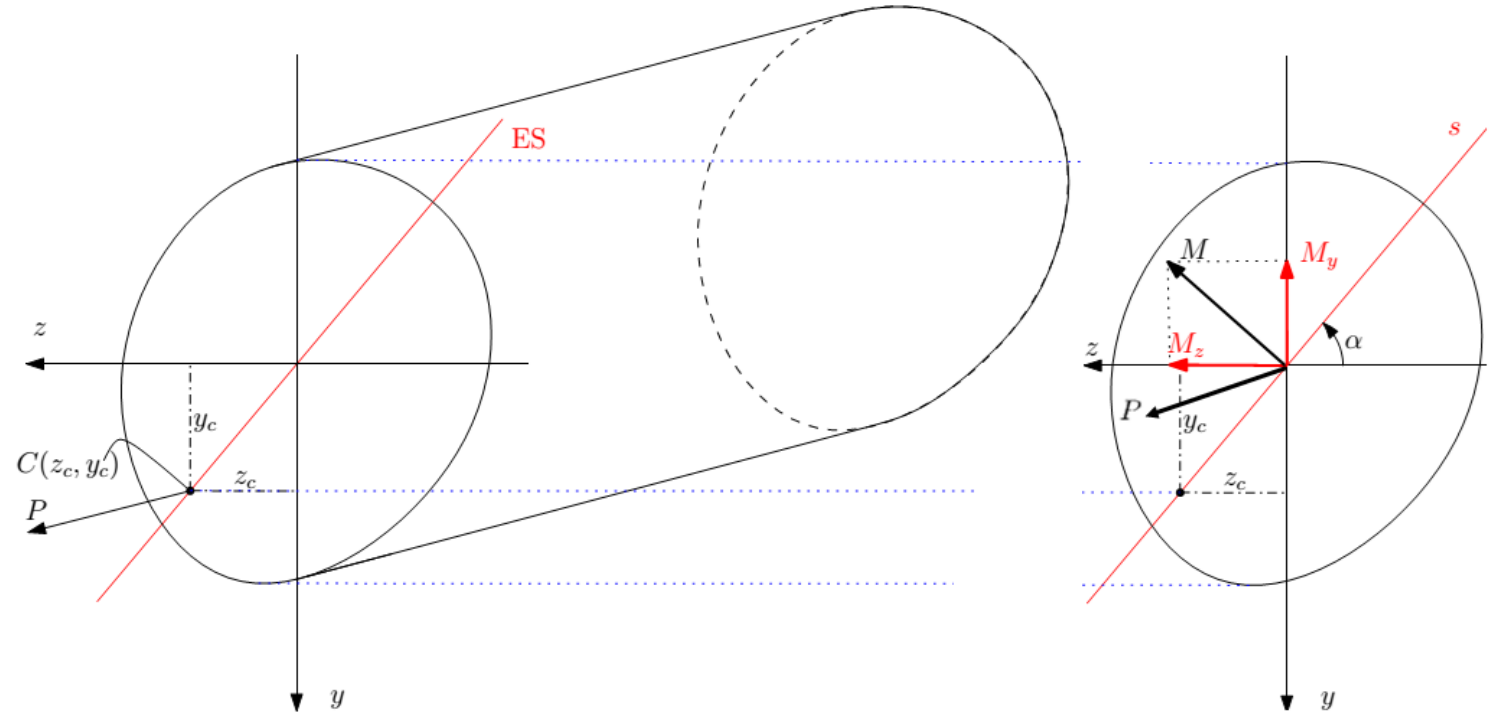


Flexão Composta

Como calcular tensões normais na flexão composta?

Consideremos a seção genérica:

- Seja uma carga normal aplicada no ponto (z_c, y_c) , denominado centro de solicitação.
- Considere, ainda, que esta carga seja aplicada **fora** do centroide da seção.
- Ao “reduzirmos” esta carga para o centroide da seção, teremos não apenas esta carga, mas também um momento fletor resultante, que poderá ser decomposto na direção dos eixos principais de inércia y e z .



Flexão Composta

Consideremos z e y como sendo os **eixos principais de inércia da seção**.

Reduzindo a carga P aplicada no ponto $C (z_c, y_c)$ ao centroide da seção, resulta em uma força resultante e nos momentos fletores:

$$N = P$$

$$M_z = N \cdot y_c$$

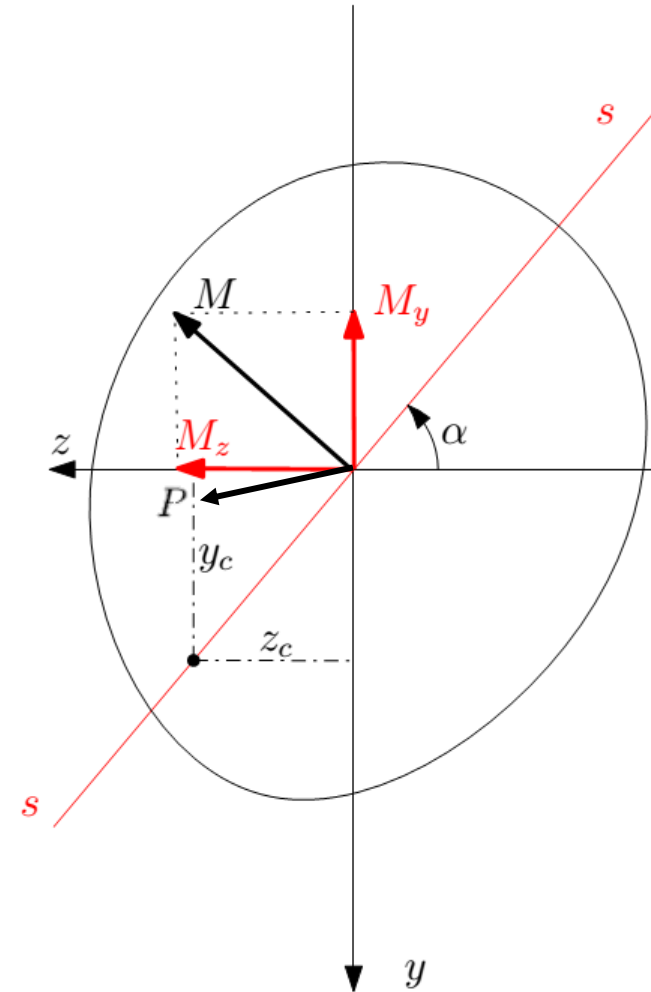
$$M_y = -N \cdot z_c$$

Lembrando que a carga P é:

- Aplicada perpendicularmente à seção da barra;
- Positiva, se provoca tração na seção; negativa, se provoca compressão.

As tensões atuantes são determinadas por superposição de efeitos:

$$\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^{M_z} + \sigma_x^{M_y}$$



Flexão Composta

Sabendo-se que:

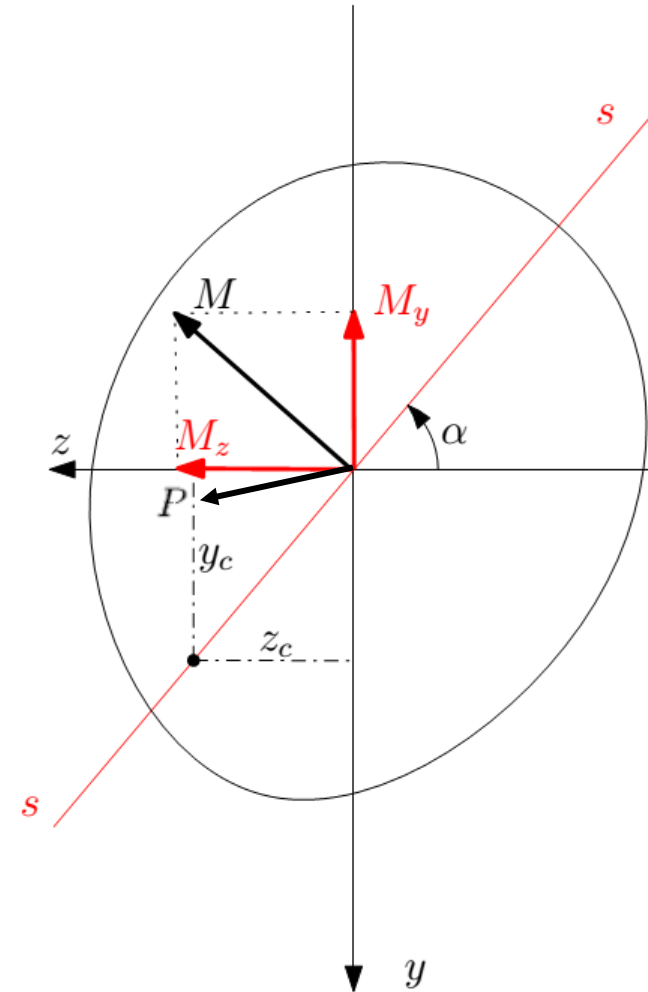
$$\sigma_x^N = \frac{N}{S} \quad \sigma_x^{M_z} = \frac{M_z}{I_z} y \quad \sigma_x^{M_y} = -\frac{M_y}{I_y} z$$

Temos, portanto, que a tensão normal na flexão composta pode ser calculada a partir da equação:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Ou, caso a flexão composta seja causada **exclusivamente** por uma única carga normal resultante:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{Ny_c}{I_z} y + \frac{Nz_c}{I_y} z$$



Flexão Composta

Podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{Ny_c}{\rho_z^2 S} y + \frac{Nz_c}{\rho_y^2 S} z$$

onde $I_i = \rho_i^2 S$, sendo ρ o raio de giração da seção transversal.

Colocando-se o termo $\frac{N}{S}$ em evidência, vem:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \left(1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} + \frac{z_c z}{\rho_y^2} \right)$$

Flexão Composta

Como determinar, então, a posição da linha neutra? Basta igualar a equação anterior a zero!

Simplificando o termo $\frac{N}{S}$, vem:

$$1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} + \frac{z_c z}{\rho_y^2} = 0$$

Esta é uma equação de uma reta que não passa pela origem!

Para defini-la, basta determinar os pontos em que ela cruza os eixos y e z :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -\frac{\rho_z^2}{y_c} \quad \longrightarrow \quad \text{ponto onde corta o eixo } y \\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z_0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = -\frac{\rho_y^2}{z_c} \quad \longrightarrow \quad \text{ponto onde corta o eixo } z \end{array} \right.$$

Flexão Composta

Uma forma mais elegante de se escrever a equação da LN, utilizando os pontos em que ela cruza os eixos y e z (y_0 e z_0 , respectivamente), é:

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$$

Esta equação é denominada “Equação Segmentária da LN”.

IMPORTANTE: Esta equação é válida somente se y e z forem os eixos principais de inércia!

Flexão Composta

Para eixos baricêntricos quaisquer (não principais), a LN pode ser determinada igualando-se a seguinte equação a zero:

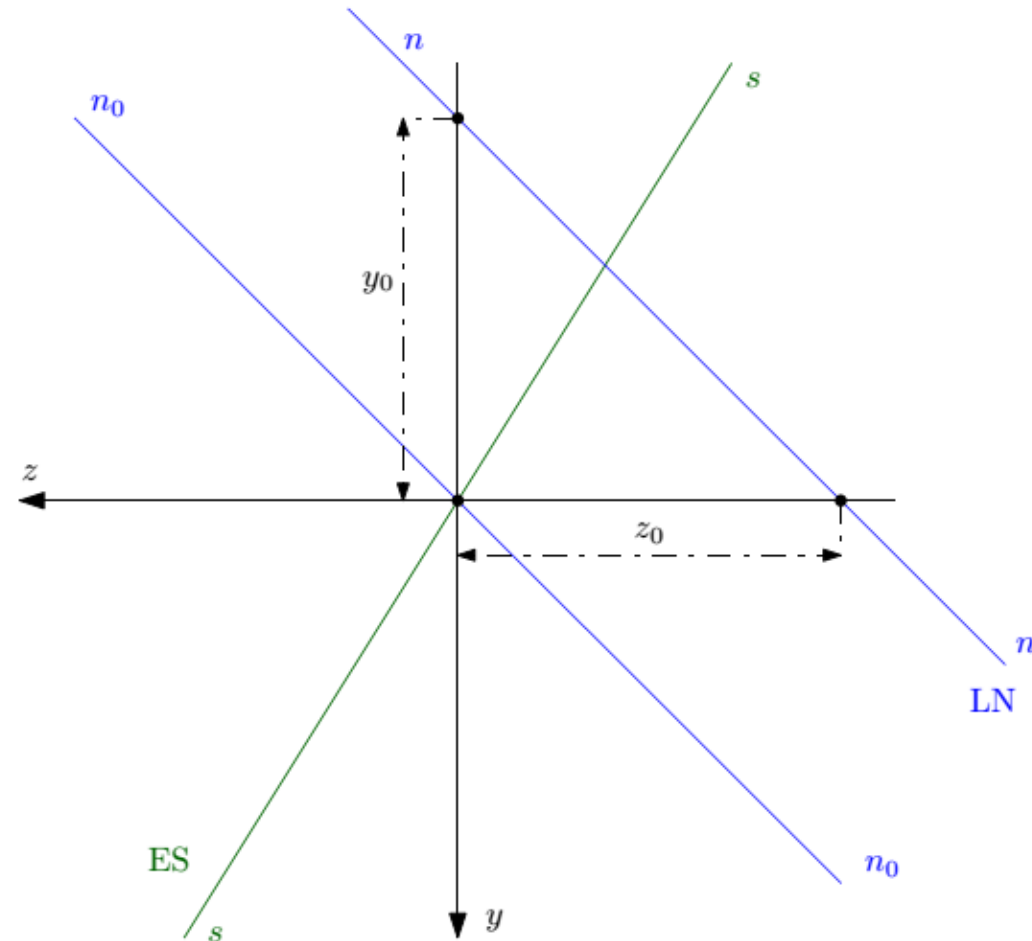
$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{(M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{y} - (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{z}\bar{y}}^2}$$

Que, após algumas simplificações, resulta em:

$$\frac{1}{S} + \frac{(I_{\bar{y}}y_c - I_{\bar{y}\bar{z}}z_c)\bar{y} - (I_{\bar{y}\bar{z}}y_c - I_{\bar{z}}z_c)\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2} = 0$$

Flexão Composta

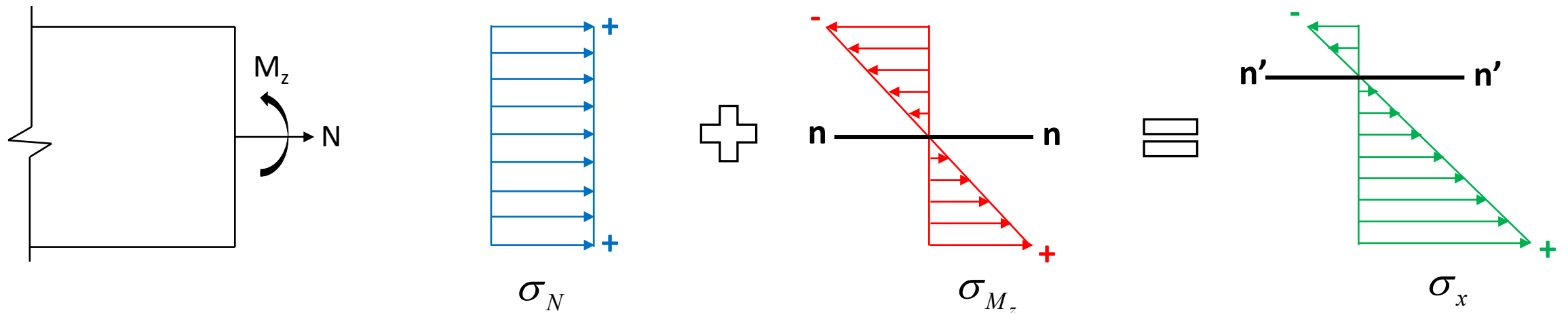
Representação gráfica das LN's na flexão pura oblíqua e na flexão composta oblíqua



Flexão Composta

Como as tensões normais se distribuem ao longo da seção?

Seja uma seção sujeita a um esforço normal N e a um momento fletor M_z :



Observe que o diagrama final de tensões é bitriangular. Isso sempre irá acontecer?

Veremos adiante...

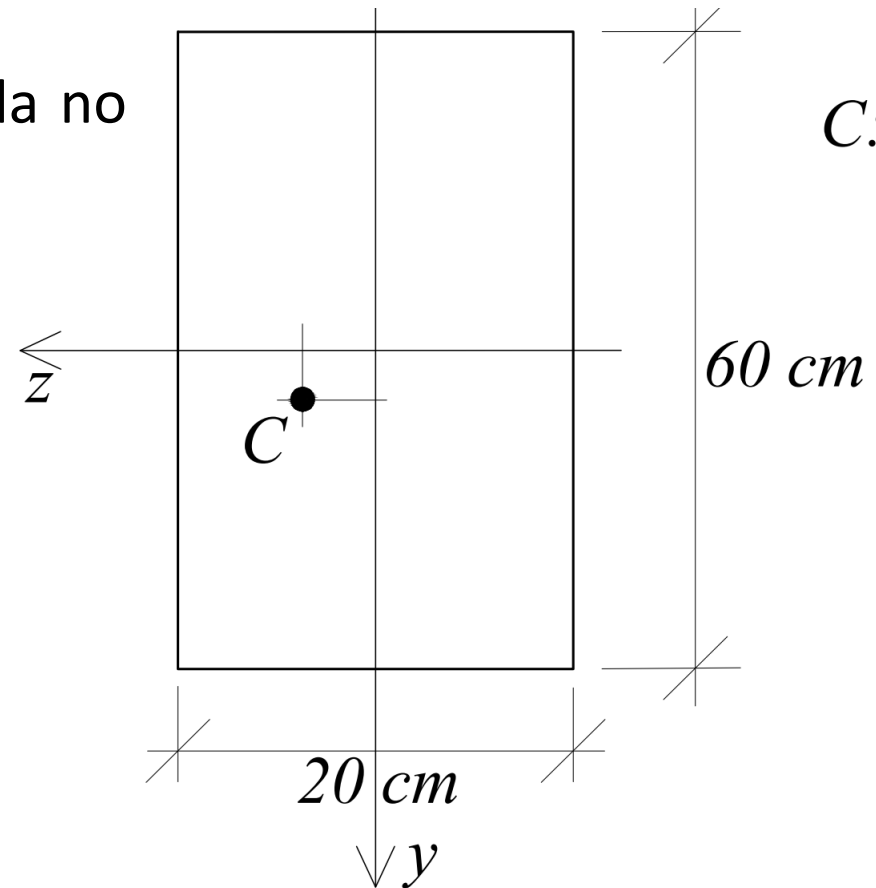
Flexão Composta

Exemplo 4: Para a figura mostrada abaixo, determine:

a) o maior valor que a força de tração T , aplicada no ponto C da seção, pode atingir;

b) o diagrama de tensões.

Dados: $|\bar{\sigma}_c| = |\bar{\sigma}_t| = 150 \text{ N/cm}^2$.



$$C: z_c = 0,8 \text{ cm} \\ y_c = 2,0 \text{ cm}$$

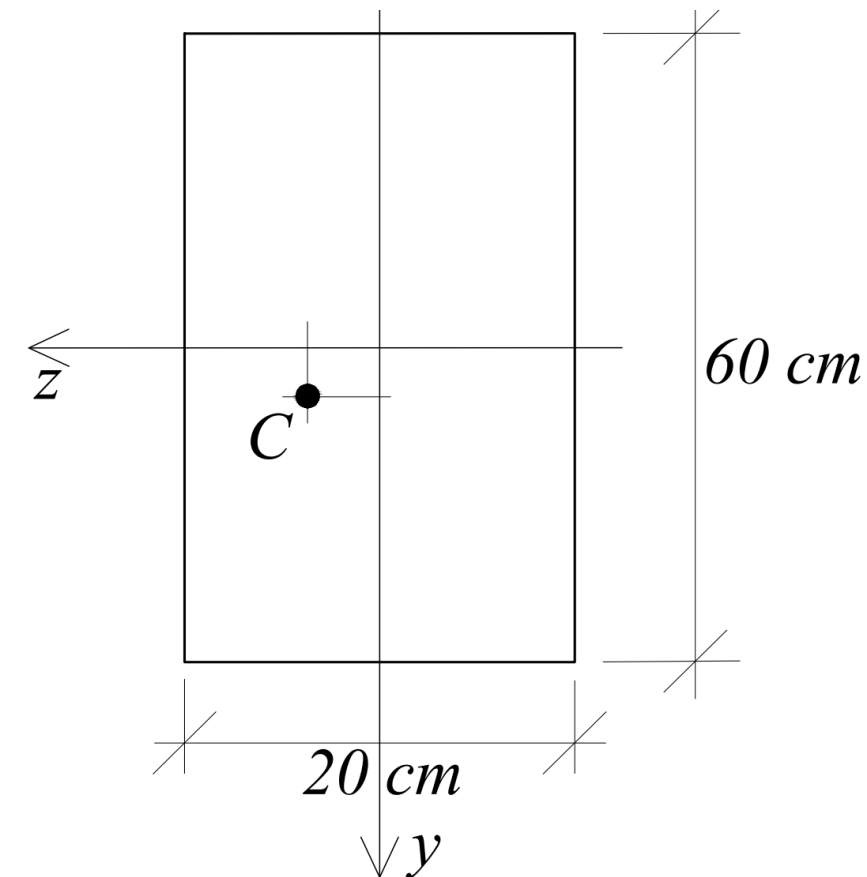
Flexão Composta

a) Haja vista que os eixos z - y são principais de inércia (pois são eixos de simetria), a expressão a ser utilizada para o cálculo das tensões e determinação da linha neutra é:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Para tanto, devemos determinar os momentos fletores em função da força T , além das propriedades geométricas da seção.

Para facilitar as contas, excepcionalmente neste exemplo vamos manter as unidades de força em [N] e as de dimensão em [cm]. Com isso, teremos as tensões na unidade [N/cm²].



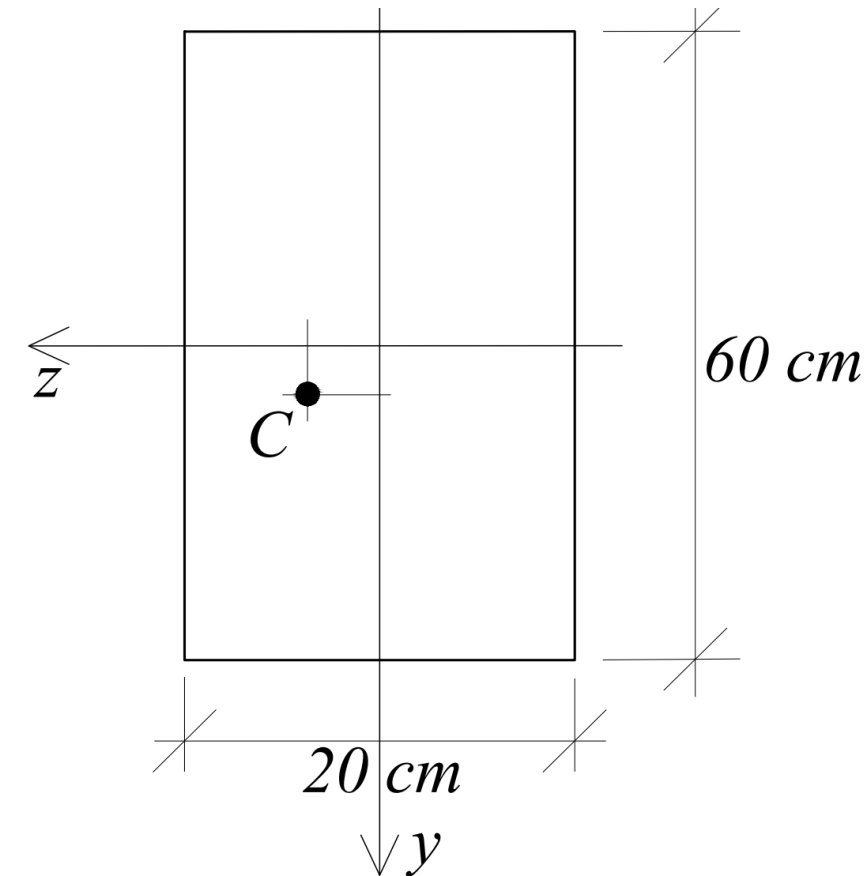
Flexão Composta

Os momentos fletores são obtidos multiplicando-se a força T (em Newton) pelas distâncias em relação aos eixos coordenados, isto é:

$$\begin{cases} M_y = -T z_c = -0,8 T \text{ Ncm} \\ M_z = T y_c = 2,0 T \text{ Ncm} \end{cases}$$

As propriedades geométricas da seção são dadas por:

$$\begin{cases} S = 1.200 \text{ cm}^2 \\ I_z = 360.000 \text{ cm}^4 \\ I_y = 40.000 \text{ cm}^4 \end{cases}$$



Flexão Composta

Para se determinar o maior valor que a força de tração T pode assumir, é preciso saber quais pontos da seção estão sujeitos às maiores tensões de tração e de compressão.

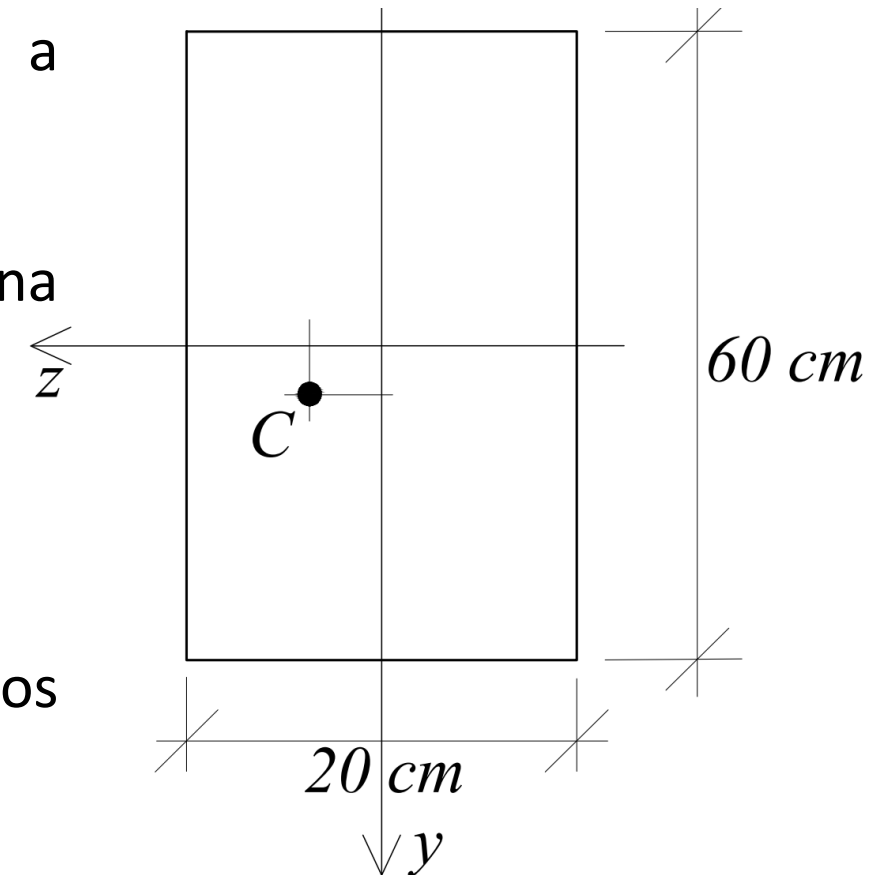
Assim, é necessário determinar, primeiramente, onde está a linha neutra.

Para tanto, substituímos os valores obtidos anteriormente na equação de σ_x e a igualamos a zero, isto é:

$$\sigma_x = \frac{T}{1200} + \frac{2Ty}{360000} + \frac{0,8Tz}{40000} = 0$$

Multiplicando-se todos os termos por 360000 e dividindo-os por T , vem:

$$300 + 2y + 7,2z = 0 \rightarrow \boxed{150 + y + 3,6z = 0}$$



Flexão Composta

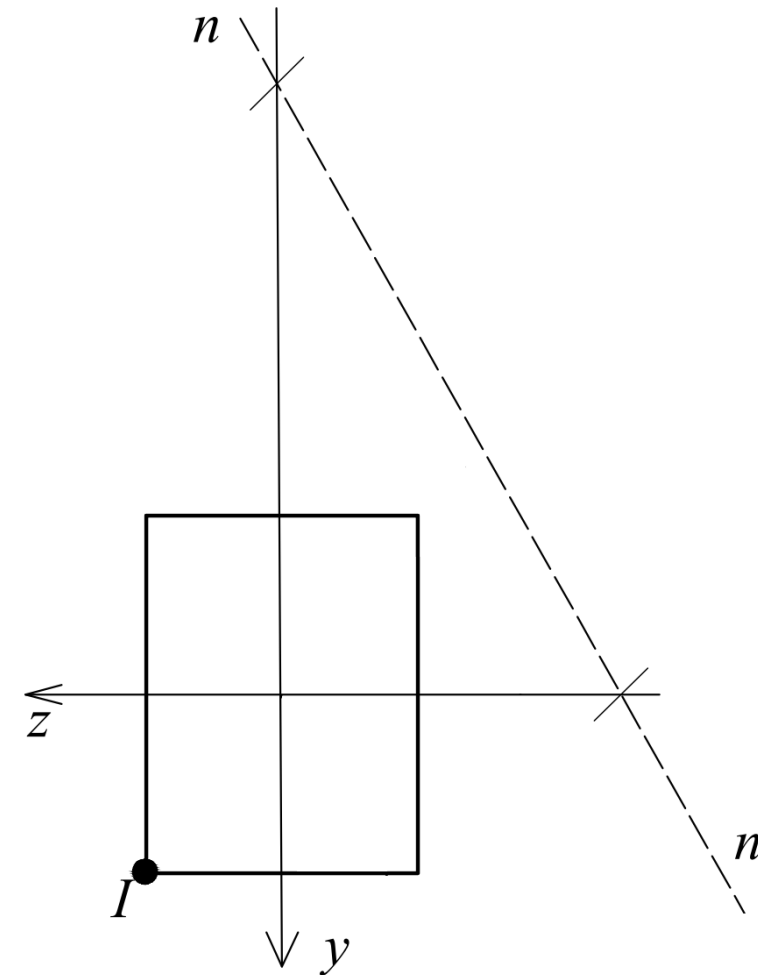
Os pontos onde a linha neutra corta os eixos z e y são, portanto:

$$y = -150 \text{ cm}$$
$$z = -41,67 \text{ cm}$$

Substituindo-se estes valores nos eixos, nota-se que a LN está fora da seção, como mostra a figura ao lado.

Assim, haja vista que a força aplicada é de tração, conclui-se que **TODOS** os pontos da seção estão sujeitos à tensões de tração, unicamente.

Portanto, o ponto mais solicitado desta seção é, sem dúvida, o ponto I .



Flexão Composta

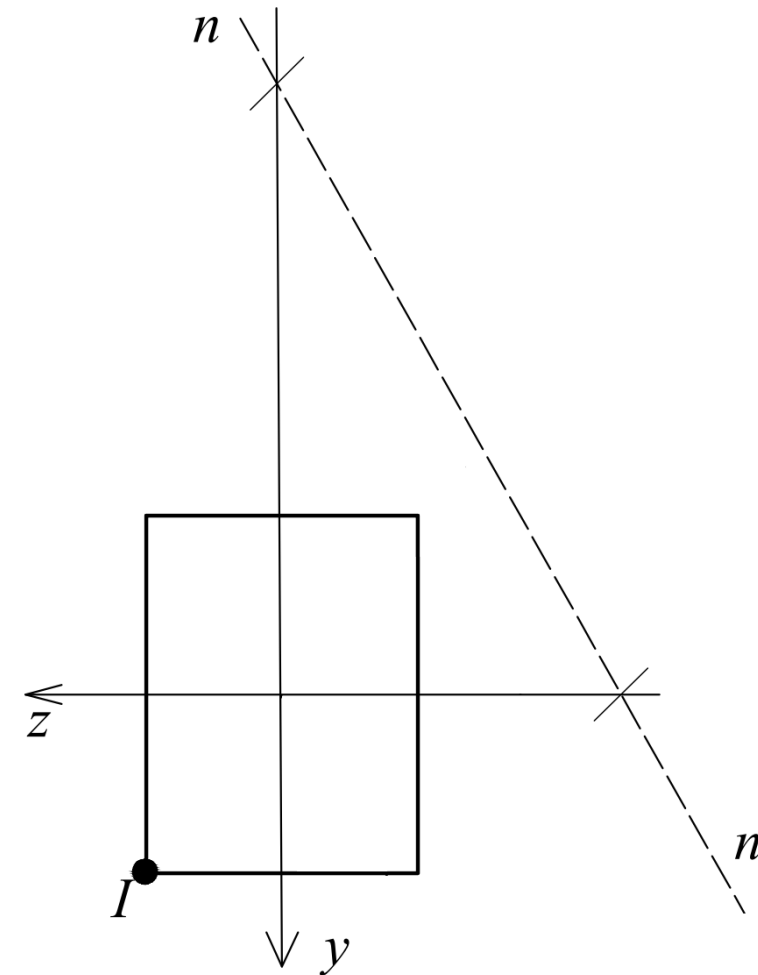
O valor máximo de T será obtido, então, limitando-se a tensão normal no ponto I a 150 N/cm^2 .

Substituindo-se a tensão máxima admissível e as coordenadas do ponto I ($z = 10 \text{ cm}$; $y = 30 \text{ cm}$) na equação abaixo, vem:

$$\sigma_x^I = \frac{T}{1200} + \frac{2T(30)}{360000} + \frac{0,8T(10)}{40000} < 150 \text{ [N/cm}^2\text{]}$$

Resolvendo para T , tem-se:

$$T = 125.000 \text{ N ou } 125 \text{ kN}$$

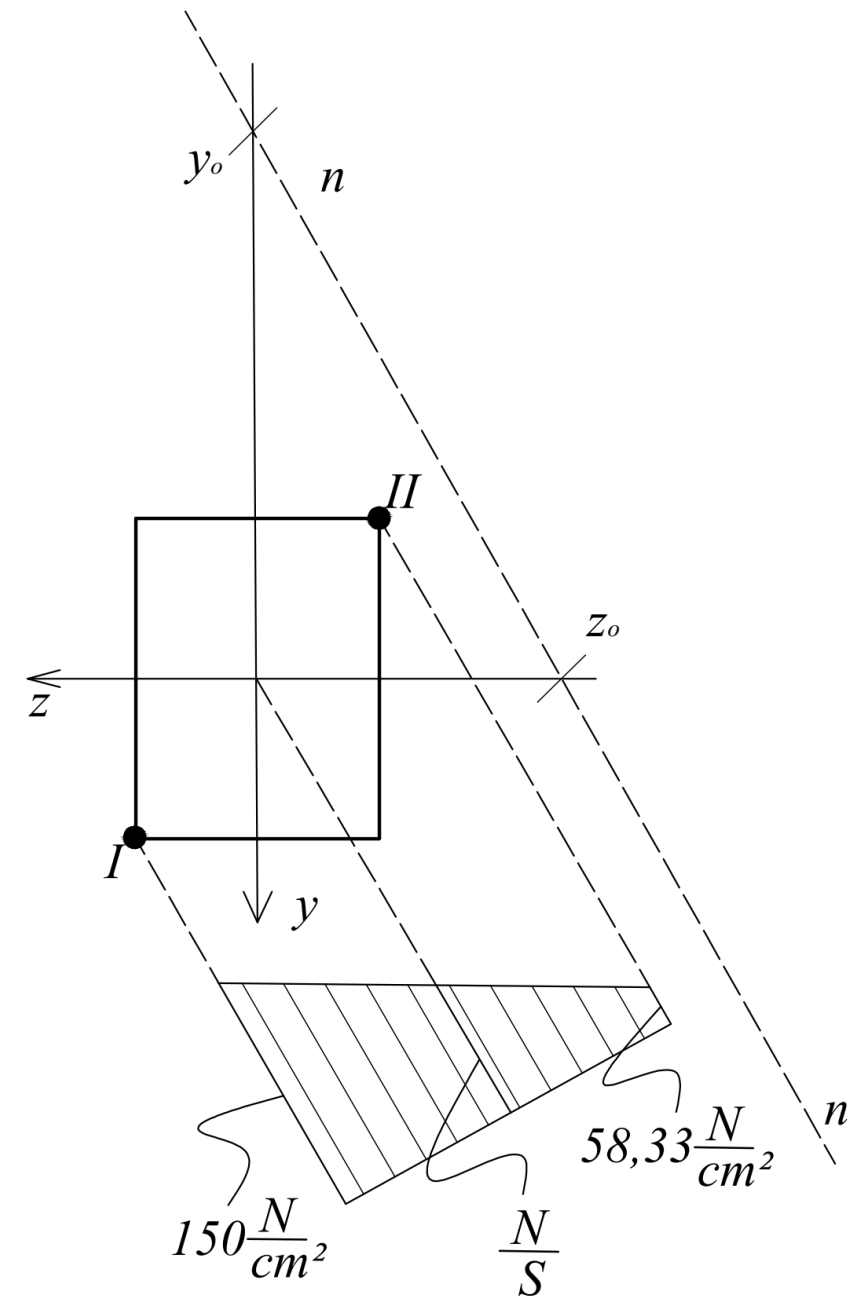


Flexão Composta

b) O diagrama de tensões pode ser traçado conhecendo-se as tensões normais em pontos-chaves da seção.

Note que a tensão normal no CG da seção é simplesmente dado por N/S , pois $z=y=0$.

A tensão normal no ponto II foi calculada apenas para fins didáticos, pois ela não é necessária para a determinação da força T máxima encontrada anteriormente.

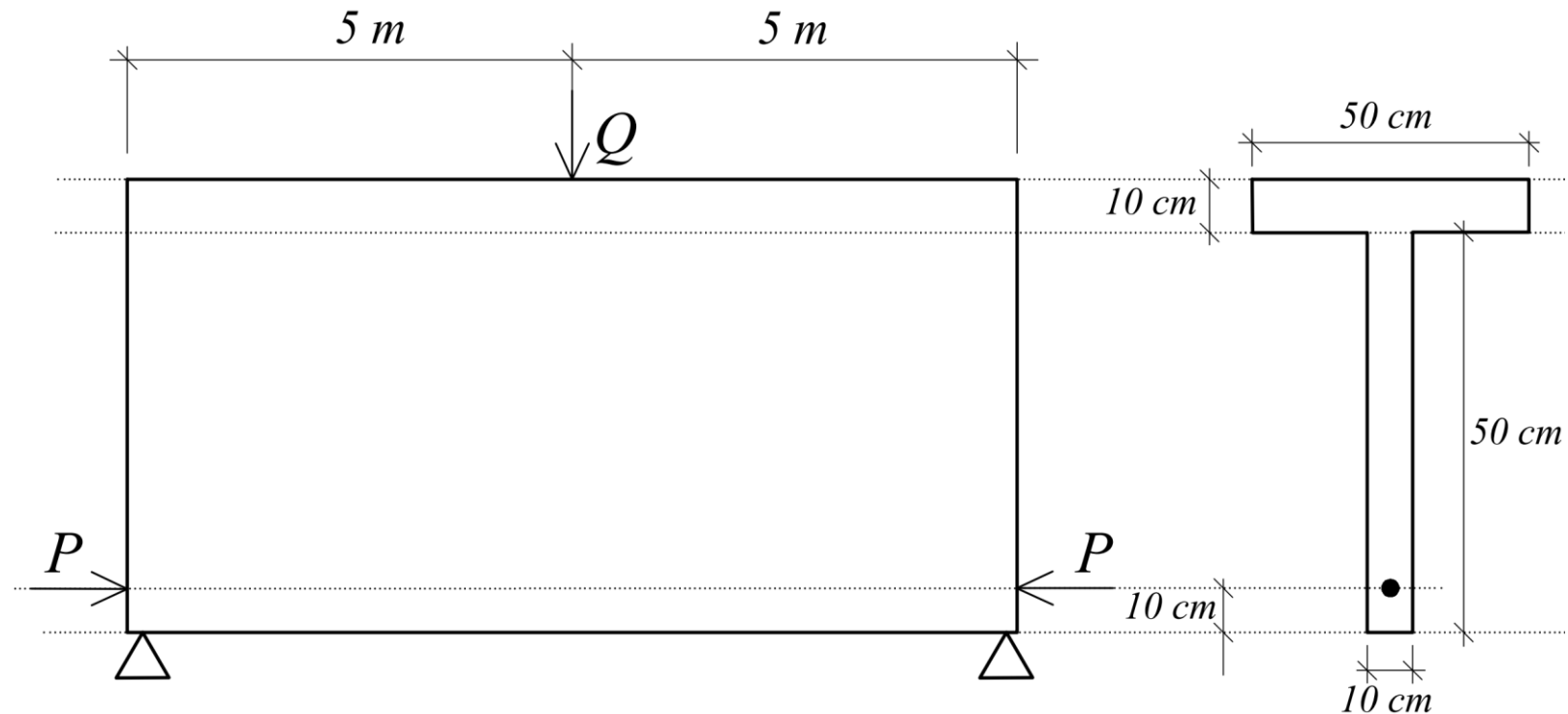


Flexão Composta

Exemplo 5: Sabe-se que para a viga mostrada na figura abaixo, o maior valor que a carga Q pode atingir é 15 kN. Este valor está limitado pela máxima tensão de tração do material que constitui a viga. Assim, calcule:

Dados:

$$\begin{cases} I_z = 3,33 \times 10^9 \text{ mm}^4 \\ S = 10^5 \text{ mm}^2 \\ \bar{y} = 400 \text{ mm} \end{cases}$$



- O acréscimo que esta carga Q poderá sofrer se uma força de protensão de 80 kN for aplicada, conforme indica a figura;
- O acréscimo de vão que esta viga poderia cobrir em decorrência da mesma protensão (mantendo-se, porém, o valor original da carga Q).

Flexão Composta

a) O primeiro passo consiste em calcular a máxima tensão normal que ocorre na estrutura quando submetida apenas à carga $Q = 15 \text{ kN}$.

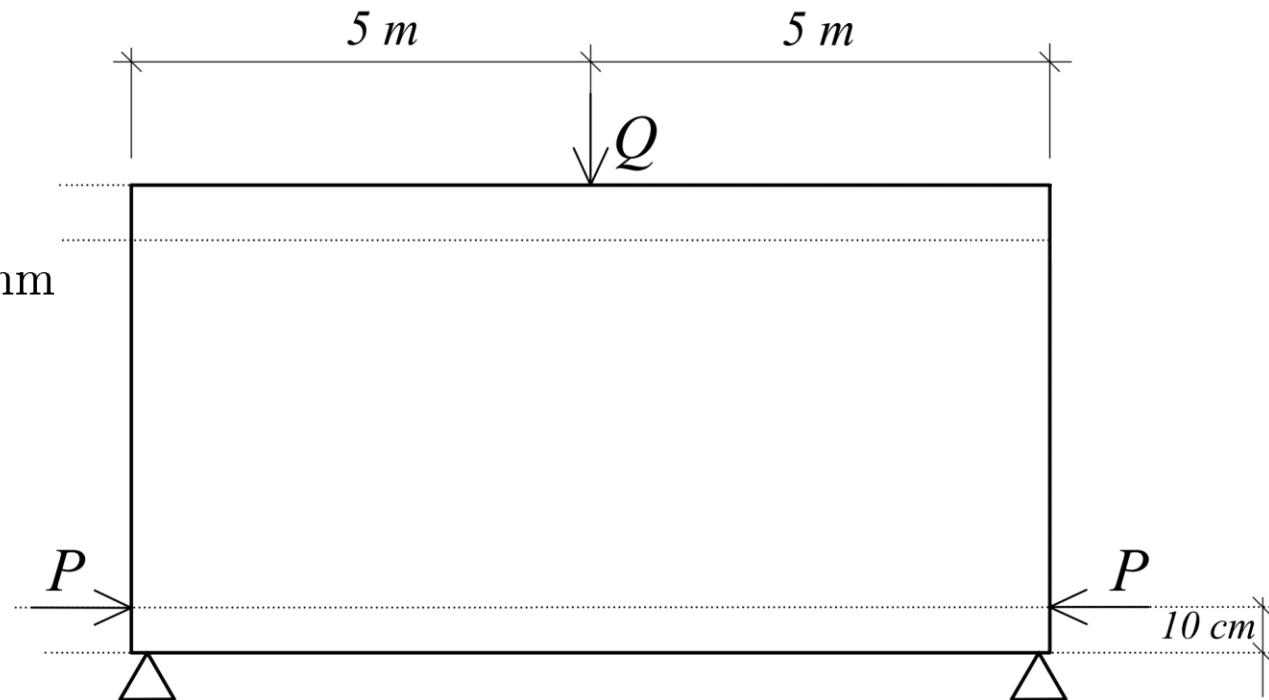
A seção mais solicitada é a do meio vão. Nesta seção, os pontos mais solicitados à tração são aqueles situados na fibra inferior.

O momento fletor nesta seção é dado por:

$$M_{max} = M_z = \frac{Q l}{2 \cdot 2} = \frac{15 \cdot 10^3 \times 10 \cdot 10^3}{4} = 37,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

E a máxima tensão normal de tração é:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z y_i}{I_z} = \frac{37,5 \cdot 10^6 \cdot 400}{3,33 \cdot 10^9} \Rightarrow \sigma_{max} = 4,50 \text{ MPa}$$



Flexão Composta

Ao aplicarmos uma protensão de $P = 80$ kN na posição indicada na figura, teremos a atuação concomitante:

- Da carga normal excêntrica com $e = 300$ mm \rightarrow gerando esforço normal e fletor em z ;
- Do momento fletor devido à nova carga vertical Q_{novo} \rightarrow gerando fletor em z ;

O valor do momento fletor provocado pela carga de protensão é dado por:

$$M_z^P = -P \times e = -80 \times 10^3 \times 300 = -24 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

Para uma nova carga Q_{novo} , o momento fletor será:

$$M_z^Q = \frac{Q_{novo}}{2} \frac{l}{2} = \frac{Q_{novo} \times 10 \cdot 10^3}{4} = 2,5 \cdot 10^3 \times Q_{novo} \text{ Nmm}$$

O momento fletor resultante em z será: $M_z = M_z^Q + M_z^P = (2,5 \cdot 10^3 Q_{novo} - 24 \cdot 10^6) \text{ Nmm}$

Flexão Composta

Igualando a tensão de tração no ponto mais solicitado ($y_i = 400$ mm) ao valor máximo encontrado - caso sem protensão - obtemos a equação que nos permite calcular o novo valor da carga. Assim, temos:

$$\sigma_{max} = 4,5 = \frac{N}{S} + \frac{M_z y}{I_z}$$

Substituindo-se os valores calculados anteriormente, vem:

$$4,50 = -\frac{80 \times 10^3}{10^5} + \frac{(2,5 \cdot 10^3 \times Q_{novo} - 24 \cdot 10^6)400}{3,33 \cdot 10^9}$$

Obtendo-se, finalmente:

$$Q_{novo} = 27.266,67 \text{ N ou } 27,27 \text{ kN} \implies \text{Acréscimo de carga} = 12,27 \text{ kN}$$

Flexão Composta

b) O cálculo do acréscimo de comprimento da viga segue estritamente o mesmo raciocínio anterior. Desta forma, basta-nos calcular, agora, o novo momento fletor devido a l_{novo} :

$$M_z^l = \frac{Q}{2} \frac{l_{novo}}{2} = \frac{15 \cdot 10^3}{2} \frac{l_{novo}}{2} = 3,75 \cdot 10^3 \times l_{novo} \text{ Nmm}$$

Assim, a expressão para o cálculo da máxima tensão normal será:

$$4,50 = -\frac{80 \times 10^3}{10^5} + \frac{(3,75 \times 10^3 \times l_{novo} - 24 \times 10^6)400}{3,33 \times 10^9}$$

Obtendo-se, finalmente:

$$l_{novo} = 18.177,78 \text{ mm} \implies \text{Acréscimo de comprimento} = 8,18 \text{ m}$$

Pergunta: O aumento percentual da carga e do comprimento são iguais? Explique.

Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

Da situação anterior, observamos que:

- Quando se varia a posição de aplicação da carga, a posição da LN também varia.
- Com isso, o diagrama de tensões pode ser:
 - ✓ **Bitriangular:** tensões de tração e compressão ao longo da seção transversal (LN corta a seção);
 - ✓ **Trapezoidal:** tensões de um único sinal (tração ou compressão) em toda a seção (LN não corta a seção);
 - ✓ **Triangular:** tensões de um único sinal (tração ou compressão) em toda a seção (LN tangencia a seção).

Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

Definição: O NCI é o lugar geométrico da seção transversal tal que, se nele for aplicada uma carga de tração (ou compressão) P , toda a seção estará tracionada (ou comprimida).

Consequência: a seção só terá tensões de um mesmo tipo (tração ou compressão).

Importância: materiais com baixa resistência a um dado tipo de sollicitação. Ex.: concreto simples, muros de arrimo, chaminés, etc.

Como determinar, então, o NCI de uma dada seção transversal?

Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

Processo espontâneo de determinação do NCI:

A partir de um número finito de tangentes à seção transversal da peça – as quais consideraremos, cada uma, como uma linha neutra – podemos determinar os centros de solicitação (pontos de aplicação da carga) correspondentes.

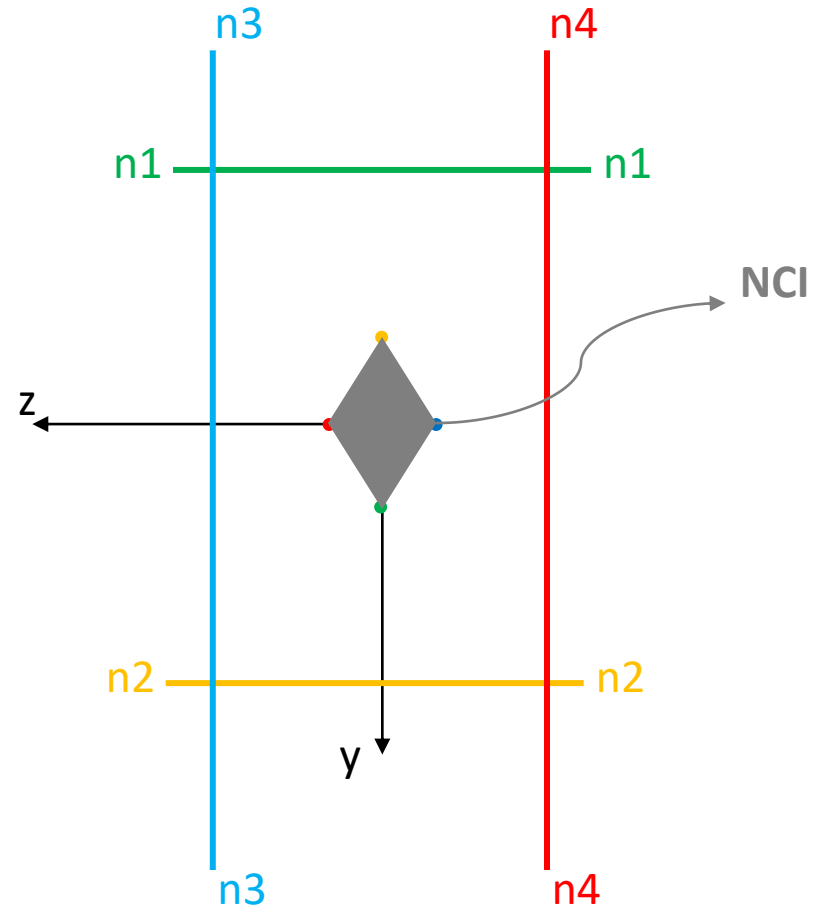
O conjunto destes centros delimitará o NCI da seção.

Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

Exemplo:

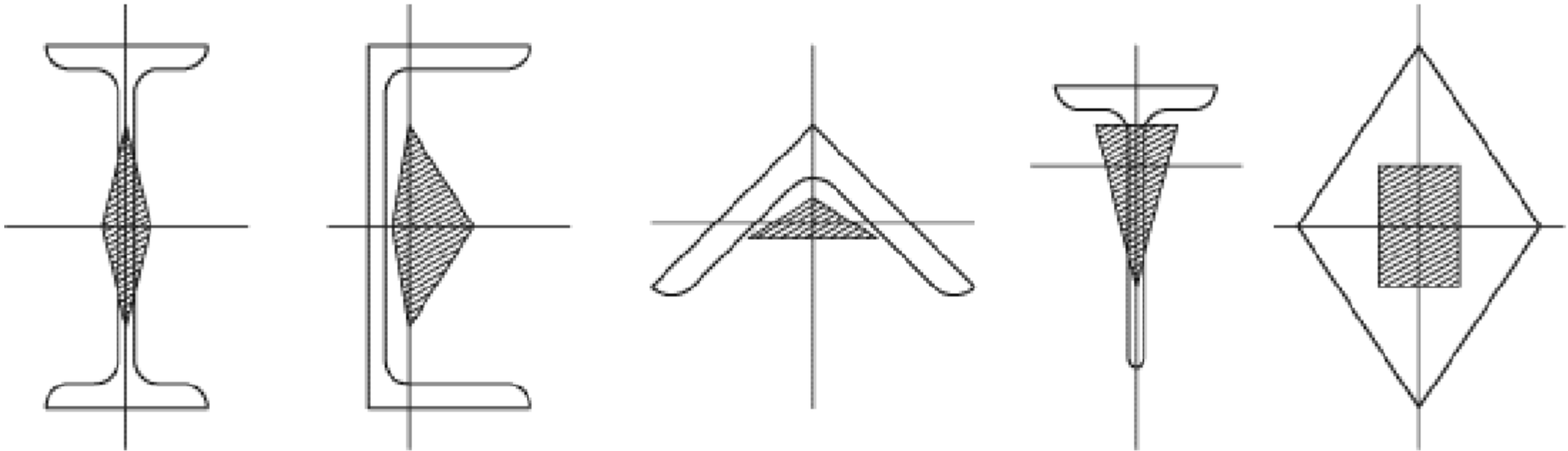
Seção retangular



Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

Outros exemplos:



Flexão Composta

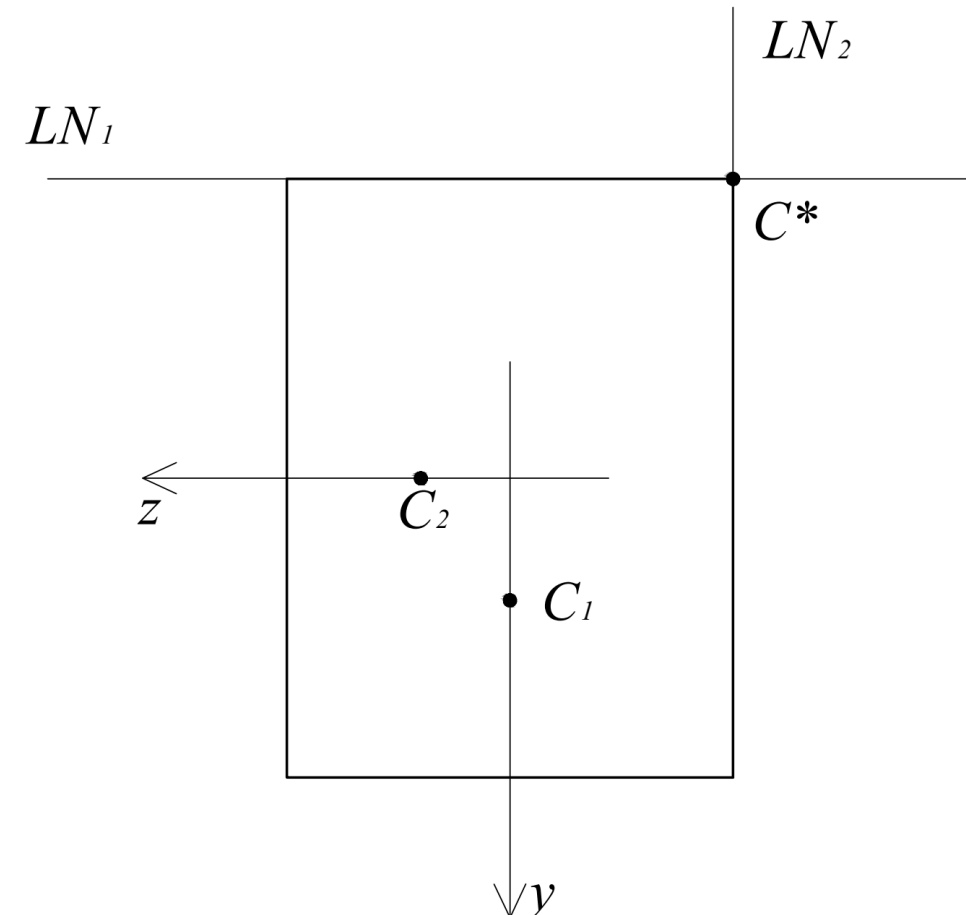
Exemplo 6: Determine o NCI de uma seção retangular.

Para determinar o NCI de uma seção retangular, duas linhas neutras são suficientes, como mostra a figura ao lado.

As demais coordenadas do NCI são obtidas utilizando-se o princípio da antipolaridade.

Para os casos em que os eixos z e y são principais de inércia da seção, podemos utilizar a equação já vista:

$$1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} + \frac{z_c z}{\rho_y^2} = 0$$



Flexão Composta

$$1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} + \frac{z_c z}{\rho_y^2} = 0$$

Determinação das coordenadas do centro de solicitação C_1 :

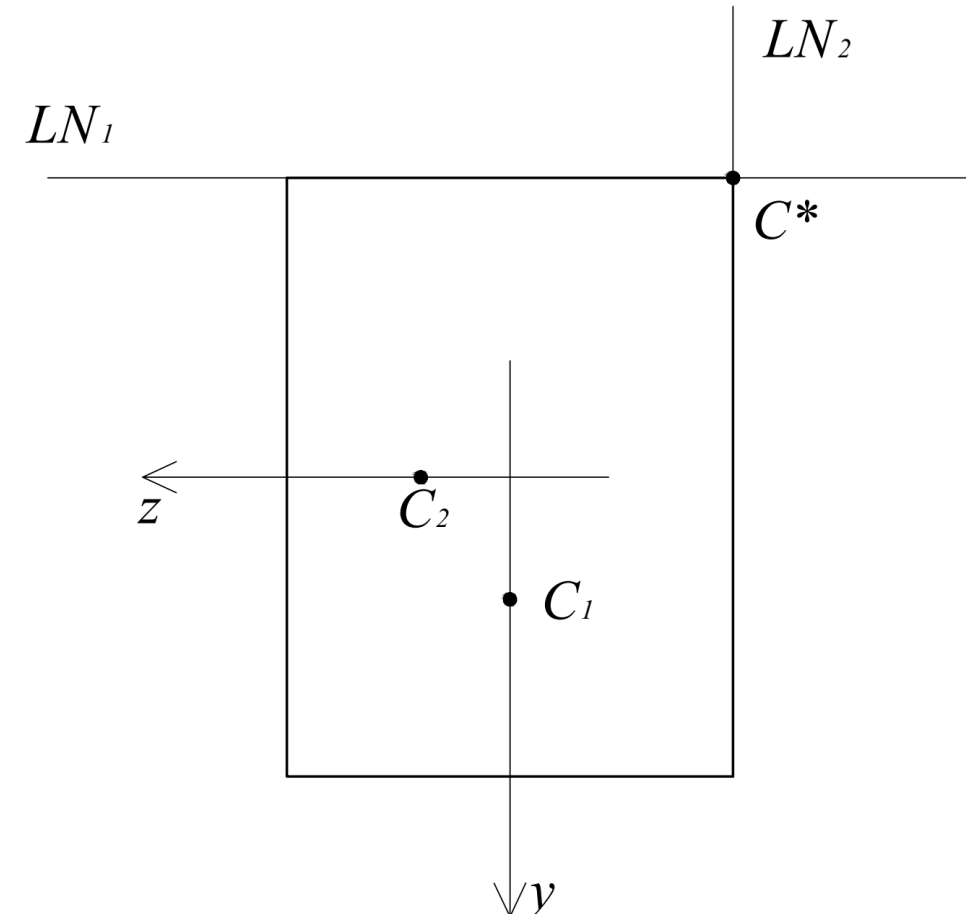
Por inspeção, vemos que a equação da LN_1 é dada por:

$$y = -\frac{h}{2} \text{ (p/ qualquer } z)$$

Adotando-se $z = 0$, vem: $1 + \frac{y_{c_1}(-h/2)}{\rho_z^2} = 0$

onde $\rho_z^2 = \frac{I_z}{S} = \left(\frac{bh^3}{12}\right)/bh = \frac{bh^2}{12}$

Assim, $y_{c_1} = \frac{\rho_z^2}{h/2} = \frac{h}{6}$ e $z_{c_1} = 0$



Flexão Composta

$$1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} + \frac{z_c z}{\rho_y^2} = 0$$

Determinação das coordenadas do centro de solicitação C_2 :

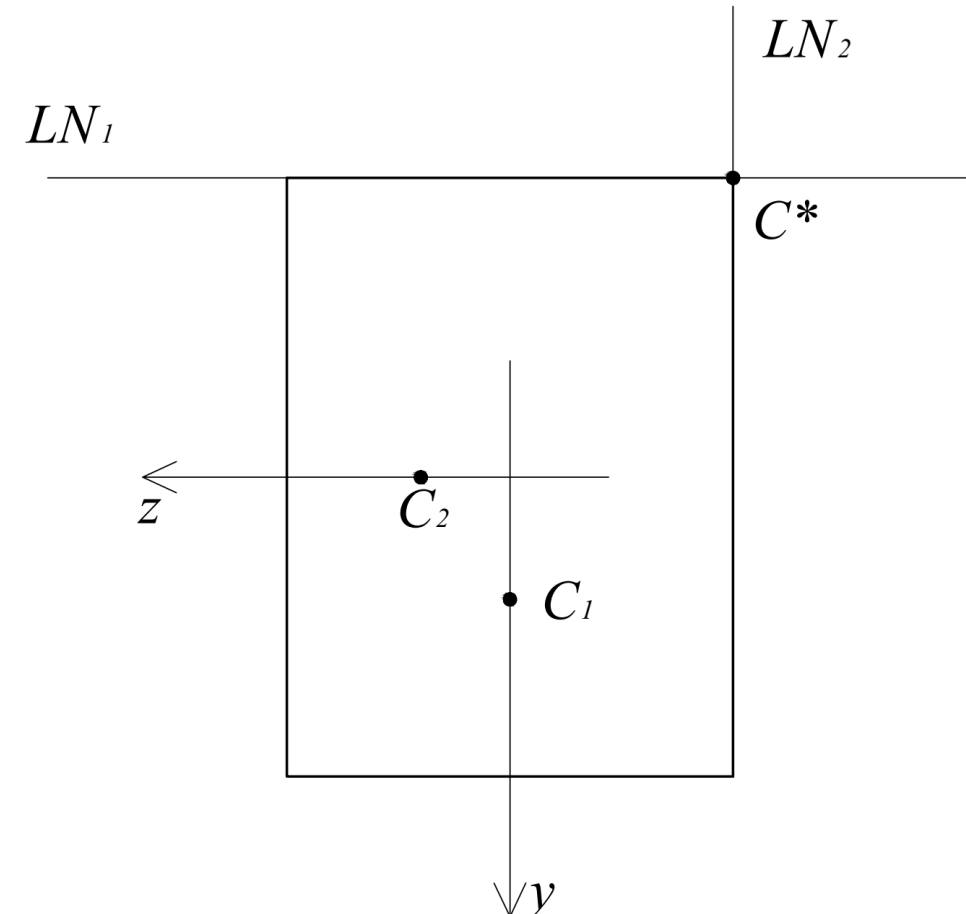
Por inspeção, vemos que a equação da LN_2 é dada por:

$$z = -\frac{b}{2} \text{ (p/ qualquer } y\text{)}$$

Adotando-se $y = 0$, vem: $1 + \frac{z_{c_2}(-b/2)}{\rho_y^2} = 0$

onde $\rho_y^2 = \frac{I_y}{S} = \left(\frac{hb^3}{12}\right)/bh = \frac{hb^2}{12}$

Assim, $z_{c_2} = \frac{\rho_y^2}{b/2} = \frac{b}{6}$ e $y_{c_2} = 0$

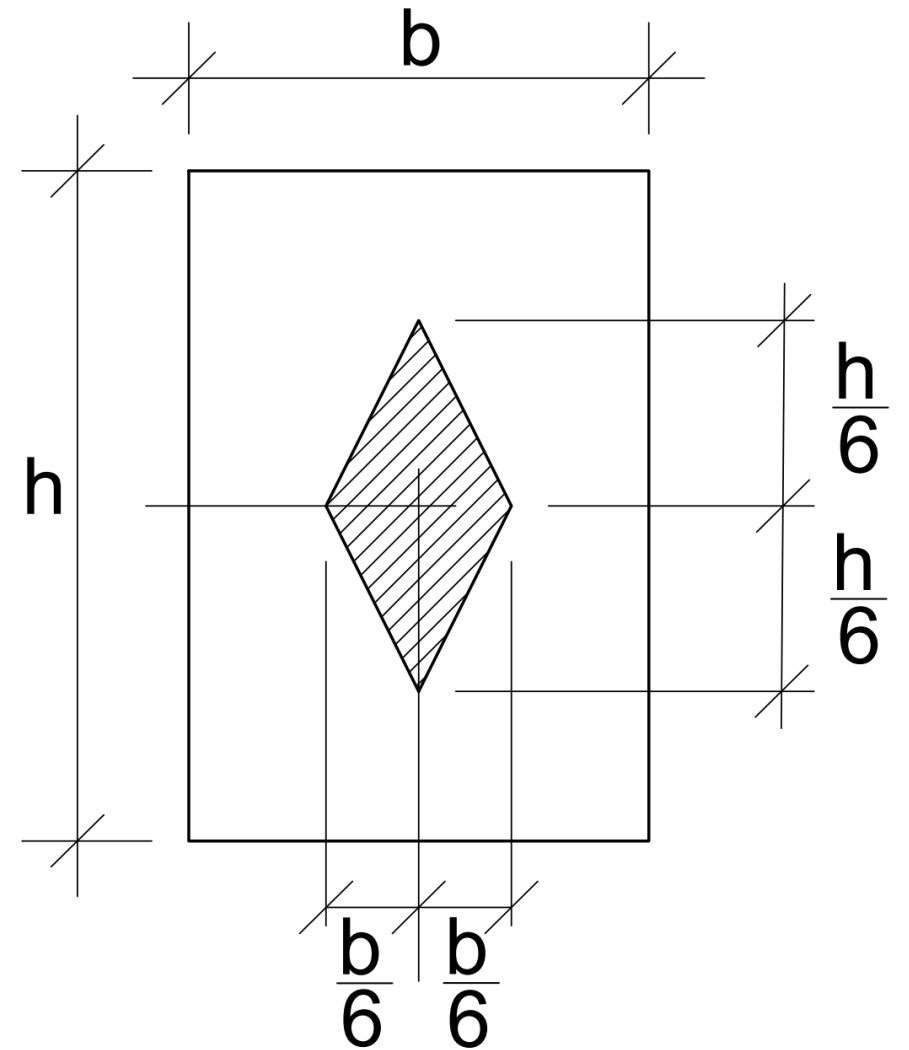


Flexão Composta

Determinação do NCI:

Pelo princípio da antipolaridade, os demais centros de carga são obtidos a partir dos valores simétricos daqueles calculados anteriormente.

Assim, o NCI de uma seção retangular fica determinado conforme mostrado na figura ao lado.



Flexão Composta

- Os slides apresentados foram livremente baseados nas Notas de Aula do prof. Elson Toledo – MAC/UFJF
- Algumas figuras, fotos e equações presentes nos slides foram retiradas do material do prof. Leonardo Goliatt – MAC/UFJF