

Estado Plano de Deformação

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Estado Plano de Deformação

Introdução:

Assim como fizemos no estudo dos estados de tensão, trataremos, agora, de um caso particular denominado **ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)**.

O estudo do EPD é de extrema importância pois, como será visto adiante, ele é muito utilizado em aplicações envolvendo medições experimentais de deformações em estruturas.

Para efeito deste estudo, vamos considerar, por exemplo, o caso em que as únicas deformações diferentes de zero sejam apenas as deformações: ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{xy} .

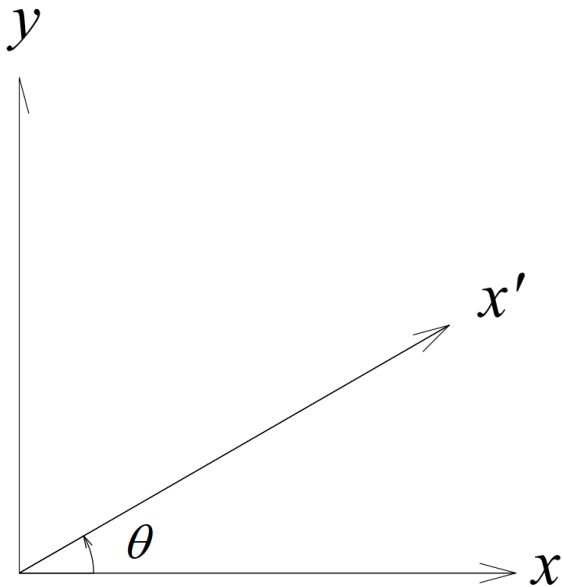
Assim, teremos um tensor de deformações da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

Estado Plano de Deformação

Deformações lineares e tangenciais numa direção qualquer:

De forma idêntica ao que foi feito no estudo do EPT, multiplicaremos o vetor deformação total pelo vetor que indica uma direção x' qualquer:



$$\hat{\tilde{x}}' = [\cos \theta \quad \sin \theta]$$

onde θ é o ângulo formado entre os eixos x' e x .

Calculando-se $\tilde{\epsilon}_{x'} = \tilde{\epsilon} \times \hat{\tilde{x}}'$ e, em seguida, $\epsilon_{x'x'} = \tilde{\epsilon}_{x'} \cdot \hat{\tilde{x}}'$, vem:

$$\epsilon_{x'x'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta$$

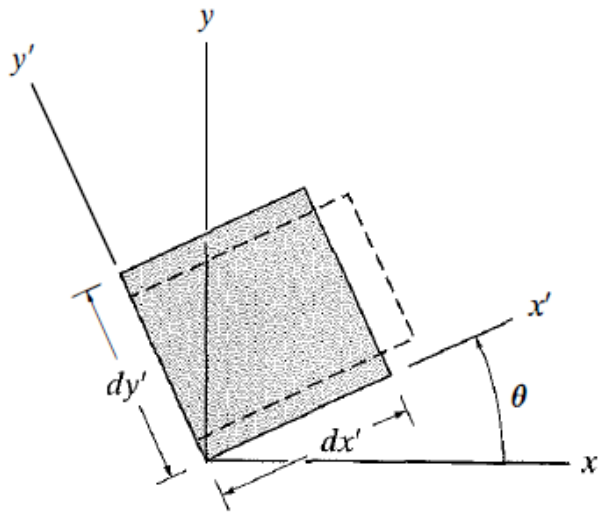
A expressão acima permite calcular o valor da deformação normal em um dado ponto de uma estrutura numa direção θ qualquer, desde que se conheça o tensor de deformações neste ponto.

Estado Plano de Deformação

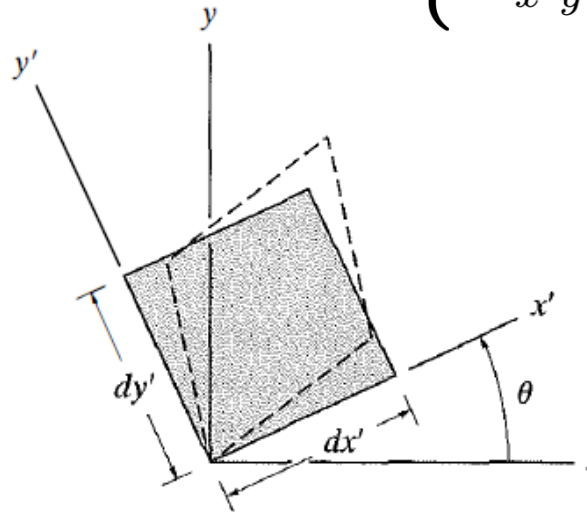
Deformações lineares e tangenciais numa direção qualquer:

Convenções de sinais para uso das equações de transformação de deformações no plano:

$$\begin{cases} \epsilon_{x'x'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \epsilon_{x'y'} = \frac{\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}}{2} \sin 2\theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$



Deformação normal positiva, $\epsilon_{x'}$



Deformação por cisalhamento positiva, $\gamma_{x'}$

θ é o ângulo formado entre os eixos x' e x .

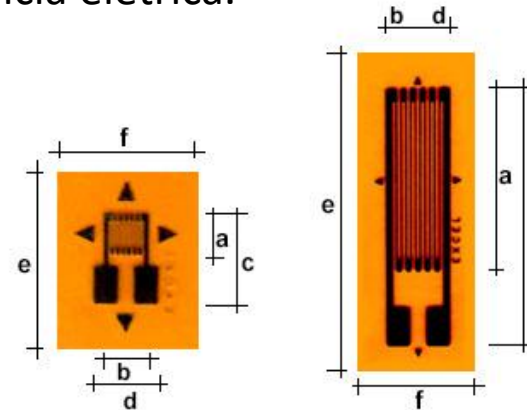
Estado Plano de Deformação

Análise Experimental - Strain-Gages

As relações entre deformações em direções quaisquer nos permite resolver problemas práticos de análise experimental de estruturas já que torna possível, a partir de medidas de deformações, estabelecer os valores das tensões existentes em um ponto.

As deformações lineares em torno de um ponto podem ser medidas por dispositivos denominados de *strain-gages* (ou extensômetros elétricos) mediante a variação de sua resistência elétrica.

Assim, podemos medir deformações lineares utilizando algum modelo de ***strain-gage* unidirecional**:



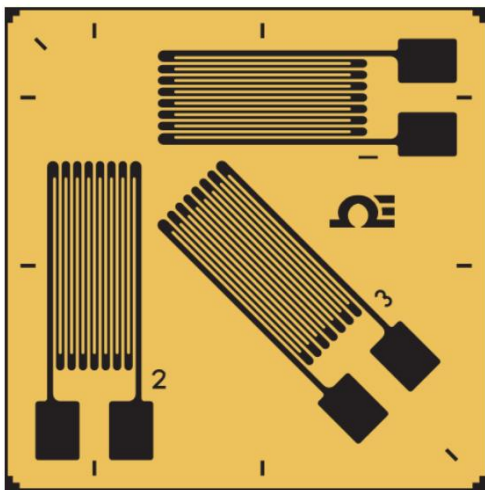
A partir das medições das deformações lineares segundo três direções distintas, também podemos determinar o estado **plano** de deformação no ponto considerado. Para tanto, utiliza-se um agrupamento de três desses dispositivos organizados em um conjunto denominado **roseta de deformações**.

Estado Plano de Deformação

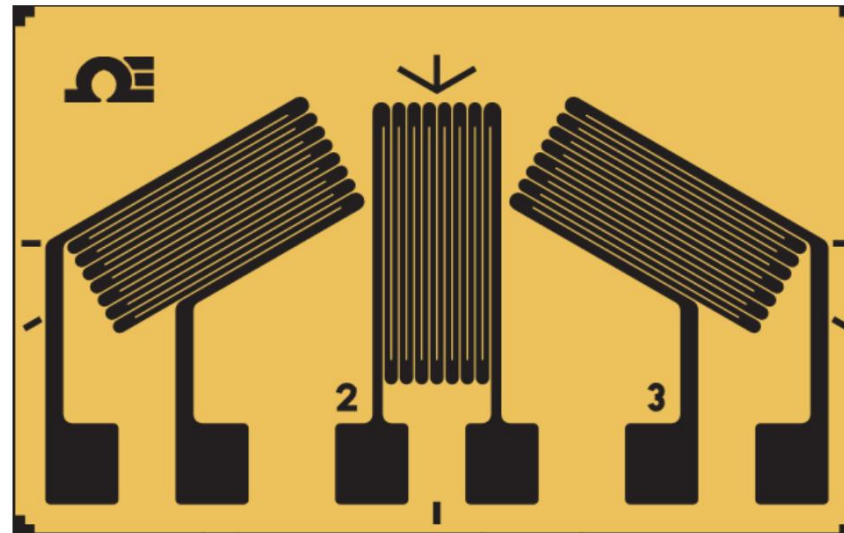
Análise Experimental - Strain-Gages

As figuras abaixo mostram três rosetas bastante utilizadas, nas quais são medidas deformações em direções variando de 0° a 120° .

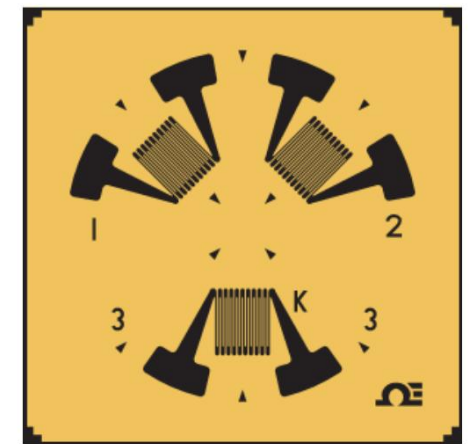
As rosetas são pequenas o suficiente em relação ao corpo para que suas deformações representem o estado de deformação de um ponto.



(a) Roseta $0/45^\circ/90^\circ$



(b) Roseta $0/60^\circ/120^\circ$



(c) Roseta $120^\circ/120^\circ/120^\circ$

Estado Plano de Deformação

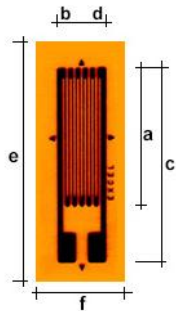
Análise Experimental - Strain-Gages

No mercado, há diferentes modelos de *strain-gages* para compra. Exemplos:

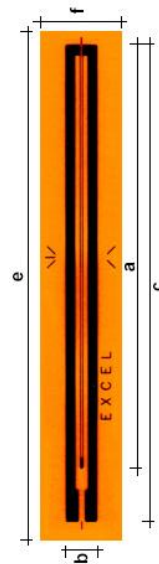
EXCEL

<https://excelsensor.com.br/extensometros-colaveis-de-resistencia-eletrica/modelos/>

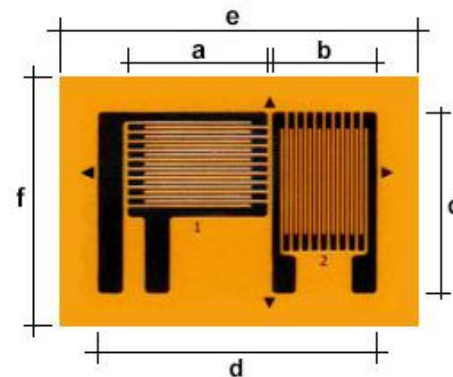
MODELOS UNIDIRECIONAIS ESTREITOS



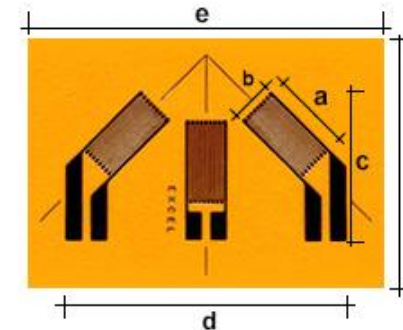
MODELOS UNIDIRECIONAIS LONGOS
Para concreto e materiais similares



MODELO ROSETA DUPLA A 90°



MODELO ROSETA TRIPLA A 90°



MODELOS PARA A DETERMINAÇÃO DE TENSÕES INTERNAS



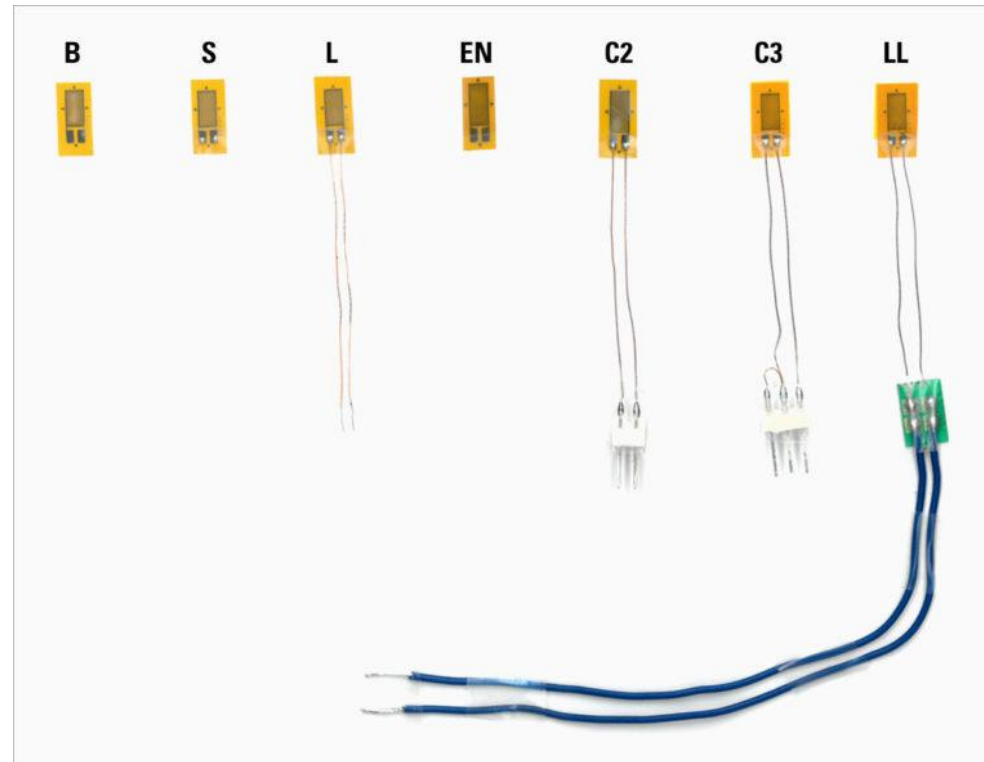
Estado Plano de Deformação

Análise Experimental - Strain-Gages

No mercado, há diferentes modelos de *strain-gages* para compra. Exemplos:



<https://excelsensor.com.br/extensometros-colaveis-de-resistencia-eletrica/modelos/>



Estado Plano de Deformação

Deformação lineares extremas:

De modo análogo ao que foi discutido no EPT, mais importante do que apenas calcular diferentes valores de deformação linear e tangencial, é conhecer seus valores extremos (máximos e mínimos) e em quais direções elas ocorrem.

Desta forma, segue-se a mesma premissa já adotada, isto é, monta-se a *equação característica* a partir do determinante do tensor de deformação, subtraído da incógnita ϵ_e dos termos da diagonal principal. Assim, temos:

$$\epsilon_e^2 - (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\epsilon_e + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2 = 0$$

onde ϵ_e é a deformação principal.

As raízes desta equação são dadas por:

$$\epsilon_{1,3} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

E as direções principais são obtidas resolvendo:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}$$

Estado Plano de Deformação

Deformação tangencial máxima:

A tensão tangencial máxima é obtida a partir da expressão:

$$\varepsilon_{\max} = \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad \text{ou} \quad \gamma_{\max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3| = 2 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

Ainda a partir das conclusões obtidas no estudo do EPT, sabe-se que as deformações tangenciais extremas ocorrem em direções bissetrizes em relação às direções das deformações principais.

Desta forma, uma vez obtidas as direções principais θ_1 e θ_3 , basta somar (ou subtrair) 45° a qualquer um destes ângulos.

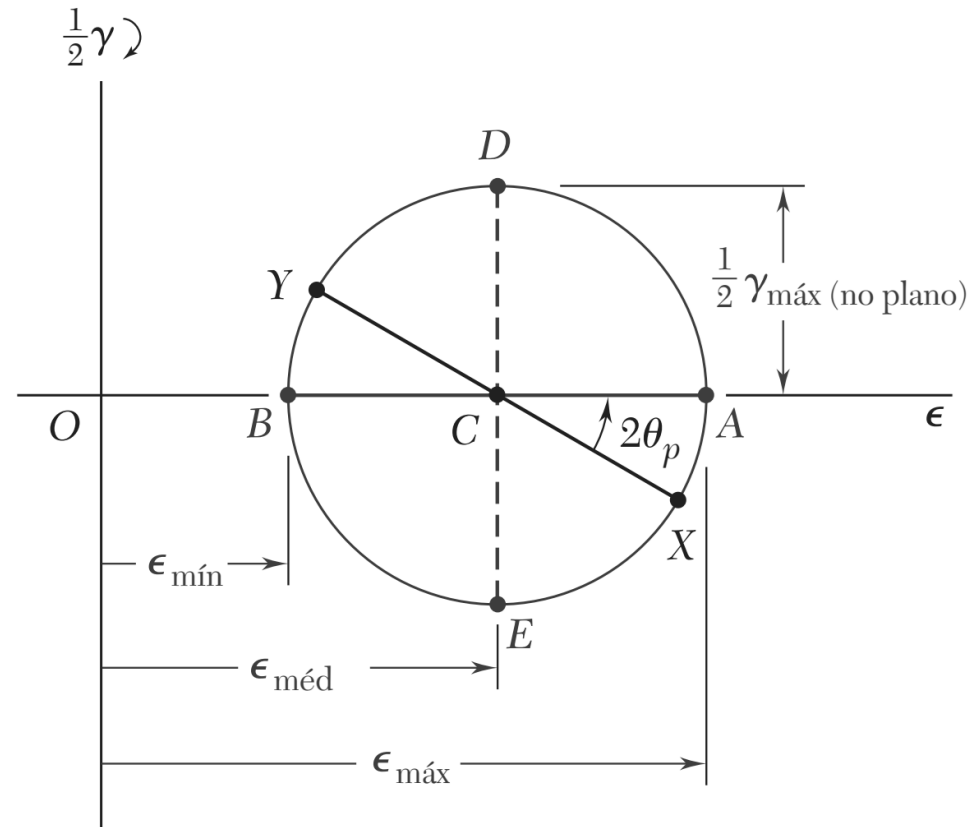
Por fim, na direção onde ocorre a deformação tangencial máxima, a deformação normal é média, isto é:

$$\varepsilon_{\text{média}} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2}$$

Estado Plano de Deformação

Círculo de Mohr:

O círculo de Mohr para o EPD é traçado de forma semelhante ao do EPD e é apresentado na figura abaixo:

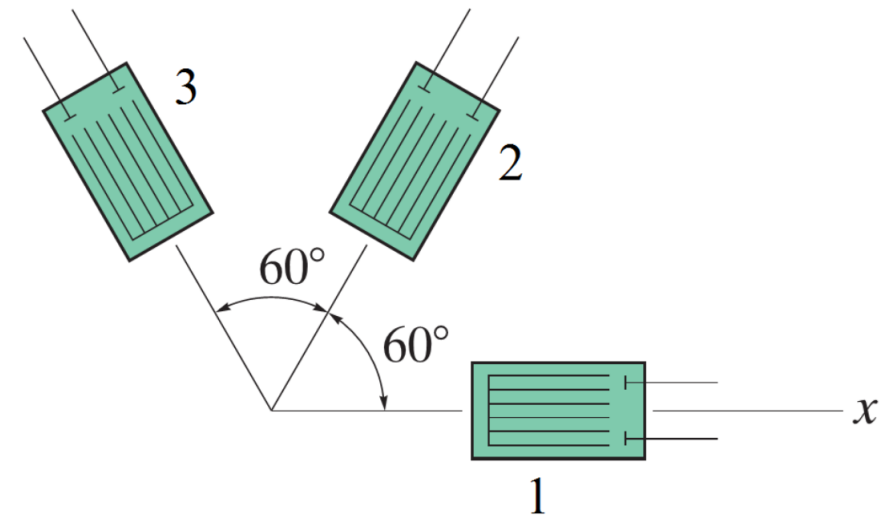


Estado Plano de Deformação

Exemplo 2:

Mediu-se, no entorno de um ponto, utilizando-se uma roseta de *strain-gages*, conforme mostrado na figura abaixo, as seguintes deformações lineares:

- na direção 1: $\epsilon_1 = 0.001$,
- na direção 2: $\epsilon_2 = 0.003$,
- na direção 3: $\epsilon_3 = -0.002$.



Tomando a direção 1 como x , determine:

- a) as componentes do tensor de deformações neste ponto.
- b) as deformações principais.

Estado Plano de Deformação

a) Neste problema, temos a seguinte situação:

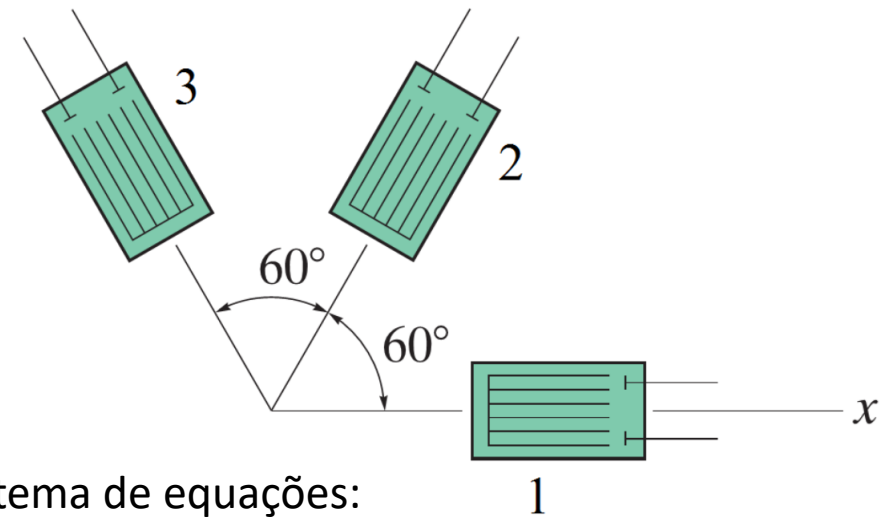
$$\begin{cases} \text{Direção 1} \Rightarrow \theta_1 = 0^\circ & \rightarrow \epsilon_{xx} = 0.001 \\ \text{Direção 2} \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ & \rightarrow \epsilon_2 = 0.003 \\ \text{Direção 3} \Rightarrow \theta_3 = 120^\circ & \rightarrow \epsilon_3 = -0.002 \end{cases}$$

Para o cálculo de ϵ_{yy} e ϵ_{xy} utilizaremos:

$$\epsilon_{x'x'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta$$

substituindo $\epsilon_{x'x'} = 0,003$ para $\theta = 60^\circ$ e $\epsilon_{x'x'} = -0,002$ para $\theta = 120^\circ$ tem-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} 0.003 &= \frac{0.001 + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{0.001 - \epsilon_{yy}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \epsilon_{xy} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ -0.002 &= \frac{0.001 + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{0.001 - \epsilon_{yy}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \epsilon_{xy} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$



Estado Plano de Deformação

A solução do sistema é dada por: $\varepsilon_{yy} = 0,0003333$ e $\varepsilon_{xy} = 0,0028868$. Assim, o tensor de deformações é:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.0028868 \\ 0.0028868 & 0.0003333 \end{bmatrix}$$

b) As deformações principais são obtidas aplicando-se as equações:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

Que resulta em: chegamos aos valores: $\varepsilon_1 = 0,0035726$ e $\varepsilon_2 = -0,0022393$.

Estado Plano de Deformação

Referências:

Esses slides foram preparados usando como base:

- 1) Beer, Johnston – Mecânica dos Materiais – 6ª ed.
- 2) Toledo, Bastos, Cury - Apostila de Resistência dos Materiais, UFJF.