

Flambagem

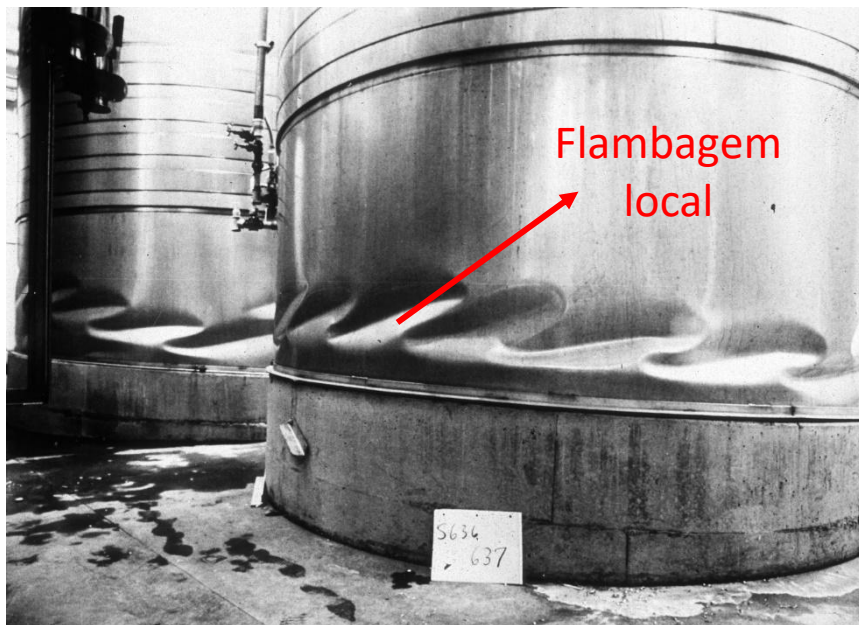
Carregamento Axial

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Flambagem

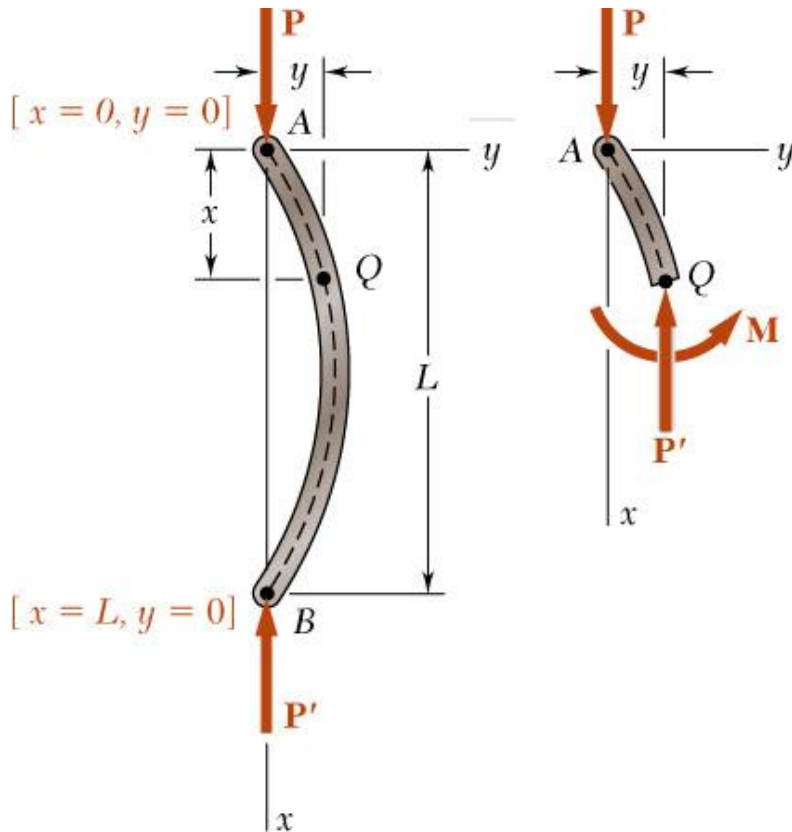
- O que é e por que estudar?
- Onde ocorre?
- Que fatores influenciam? Como evitar?
- Por que, normalmente, é desejável que a diagonal das treliças estejam sob tração?



Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

Considere-se uma coluna birrotulada, carregada axialmente. Analisando-se os esforços na seção Q, a configuração de equilíbrio pode ser escrita como:



$$M(x) = Py$$

Da teoria da flexão, sabemos que a deflexão (flecha) é calculada por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad \text{onde} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

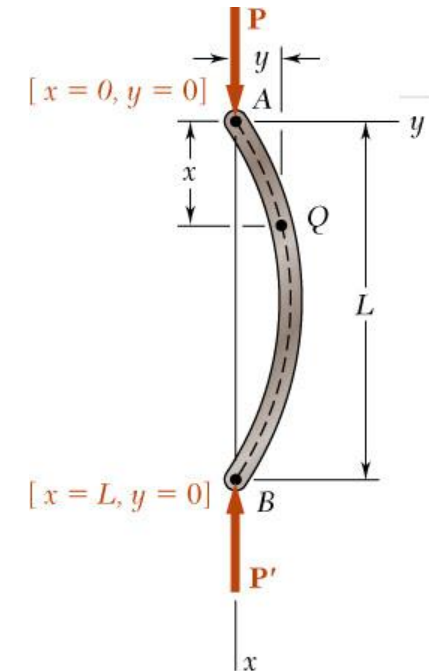
A solução desta EDO é dada por: $y(x) = A \sin kx + B \cos kx$

Esta é a equação diferencial de equilíbrio para a coluna em estudo, sujeita às condições de contorno definidas a partir dos tipos de apoio. Neste caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Em } x = 0, y = 0 \\ \text{Em } x = L, y = 0 \end{array} \right.$$

Valendo-se da 1ª condição de contorno, tem-se que **B=0**!

A 2ª condição de contorno nos fornece: $y(L) = A \sin kL = 0$



Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

$$y(L) = A \sin kL = 0$$

Esta equação nos fornece 2 possibilidades de solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ \sin kL = 0 \end{array} \right. \quad \text{A 1ª solução, evidentemente, não nos atende, pois teríamos } y(x) = 0!$$

Para a 2ª solução, temos: $\sin kL = 0 \longrightarrow kL = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \longrightarrow k = \frac{n\pi}{L}$

Sendo $k^2 = \frac{P}{EI} \longrightarrow \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{P}{EI} \longrightarrow P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$ e $y(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

cargas críticas

configurações de equilíbrio

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

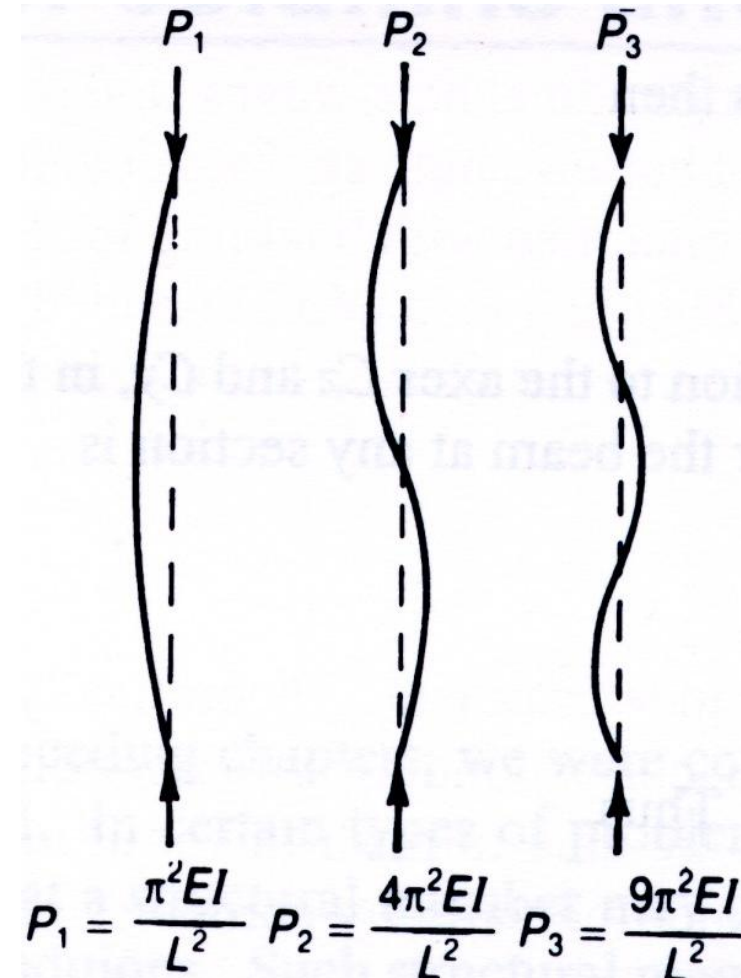
A carga crítica de Euler se dá para $n = 1$, assim:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

menor momento de inércia da seção!

$$y(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

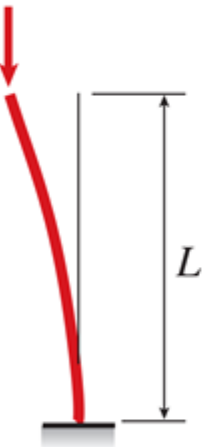
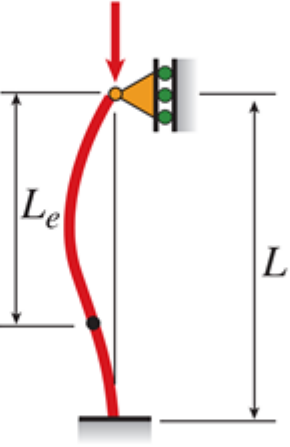
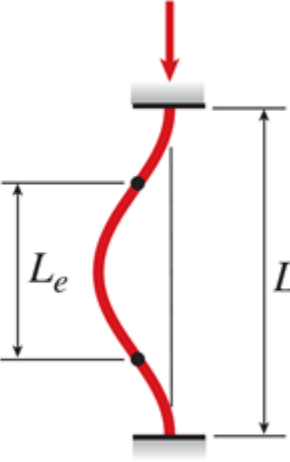
Para cada valor de n , tem-se um valor correspondente da carga crítica e da forma de flambagem.



Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

Para outras condições de apoio, deve-se resolver a mesma EDO, modificando-se a expressão $M(x)$ e as condições de contorno.

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = 2L$	$L_e = L$	$L_e = 0.699L$	$L_e = 0.5L$

Equação geral para a carga crítica de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

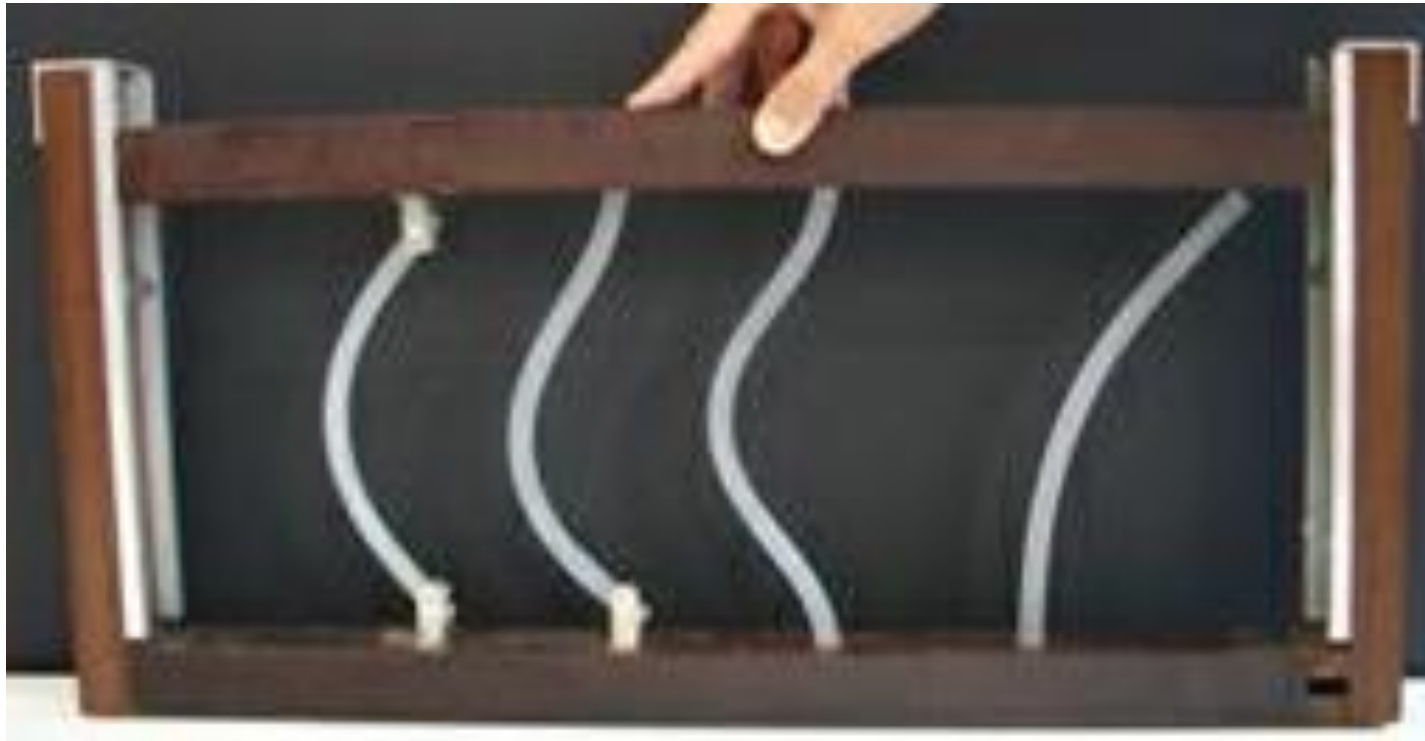
onde L_e ou L_{flamb}

comprimento efetivo ou de flambagem

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

Ensaio em laboratório para diferentes condições de apoio:



Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

A tensão crítica pode ser calculada dividindo-se a carga crítica pela área da seção transversal da coluna:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2 S} \quad \text{Mas} \quad \rho^2 = \frac{I}{S} \quad (\text{raio de giração}) \quad \longrightarrow \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \rho^2}{L_e^2}$$

Pode-se definir a relação acima destacada como “índice de esbeltez”, dado por: $\lambda = \frac{L_e}{\rho}$ menor raio de giração da seção!

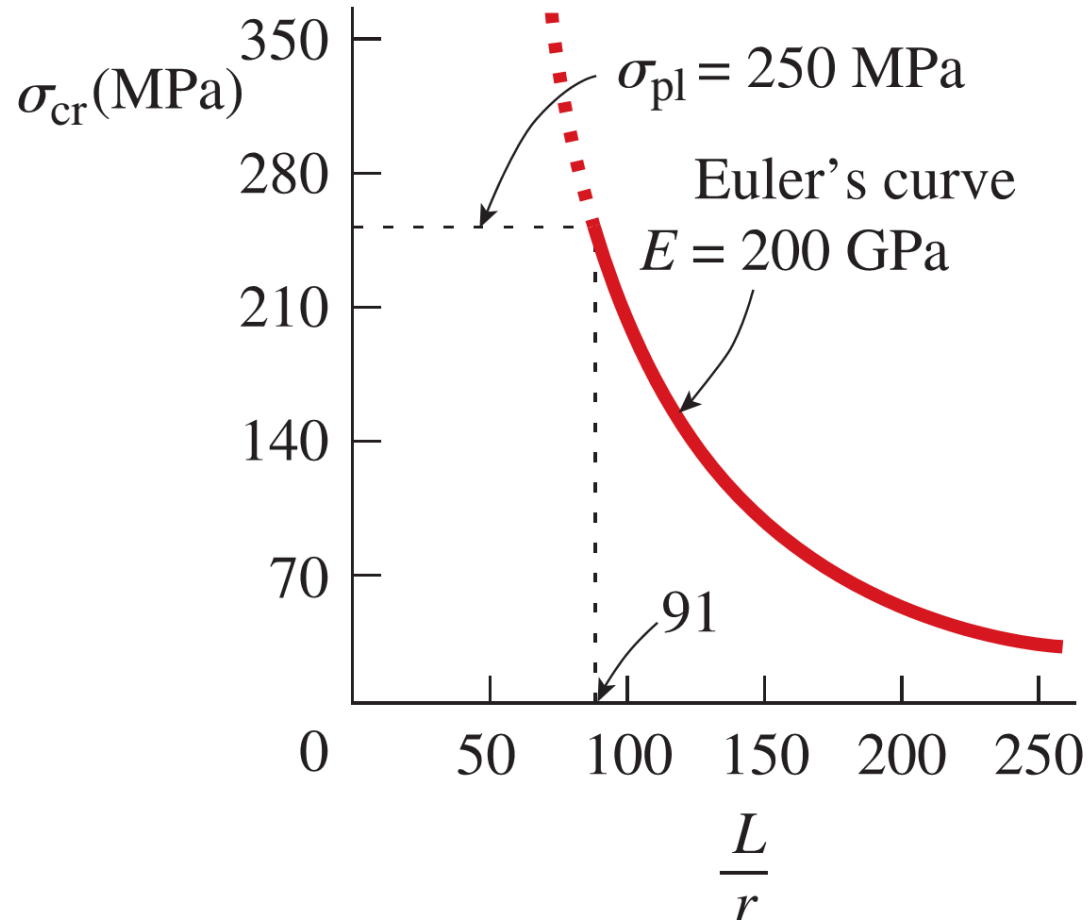
Finalmente, tem-se: $\sigma_{cr} = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 E$ Curva de Euler

Pergunta 1: Dadas 2 barras de aço, uma CA-40 e outra CA-50 (igual comprimento, seção transversal e condições de apoio), qual estaria mais “propensa” a sofrer flambagem?

Pergunta 2: Caso a coluna não possua eixo de simetria (perfil L, por exemplo), qual valor utilizar para o momento de inércia?

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

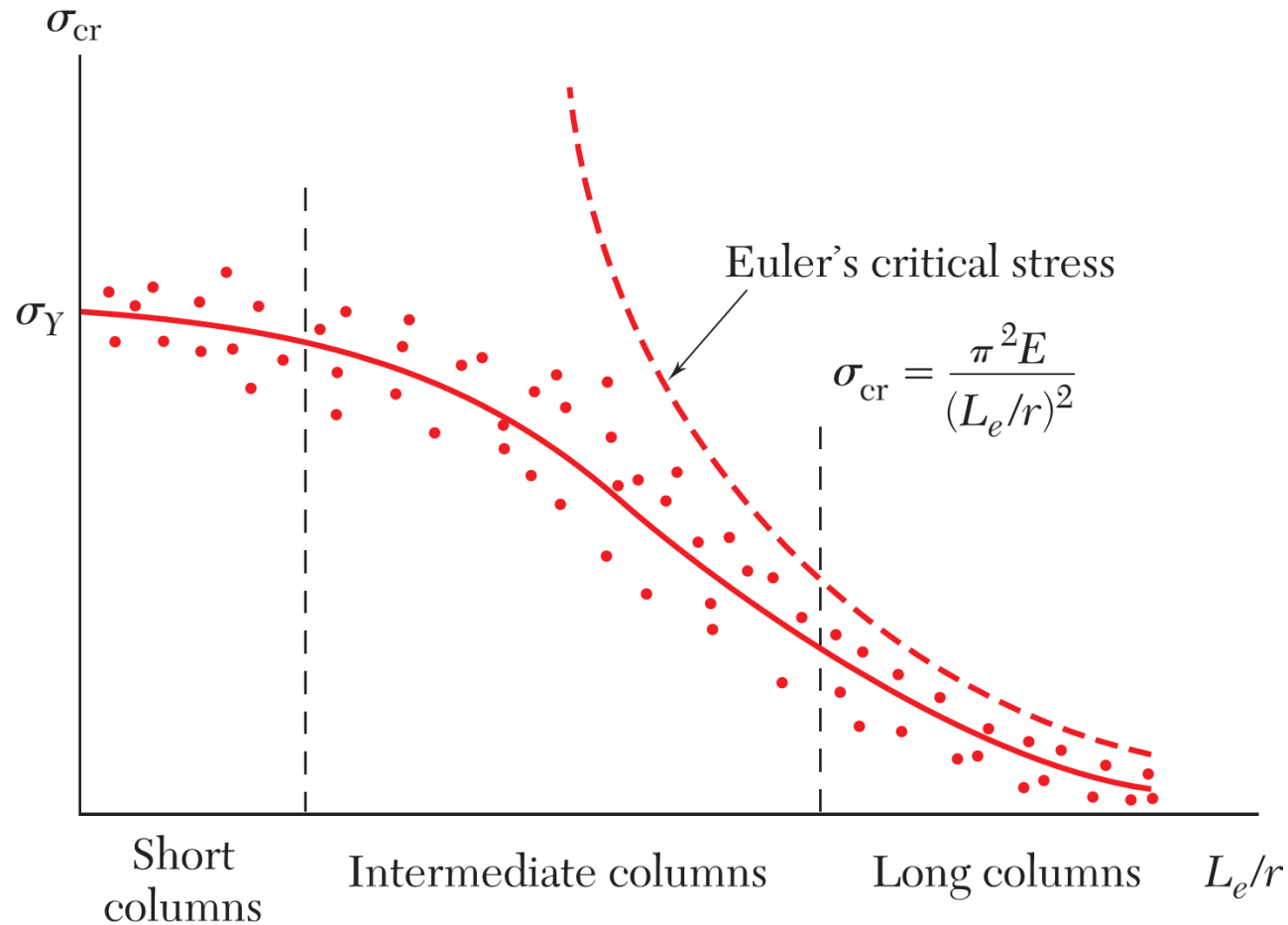


Importante:

- As equações anteriormente deduzidas para a carga crítica de Euler são válidas somente no **regime linear elástico** de deformações!
- Assim, antes de se analisar a possibilidade de flambagem, deve-se verificar se a tensão atuante é **menor** que a tensão de escoamento do material em estudo.

Flambagem

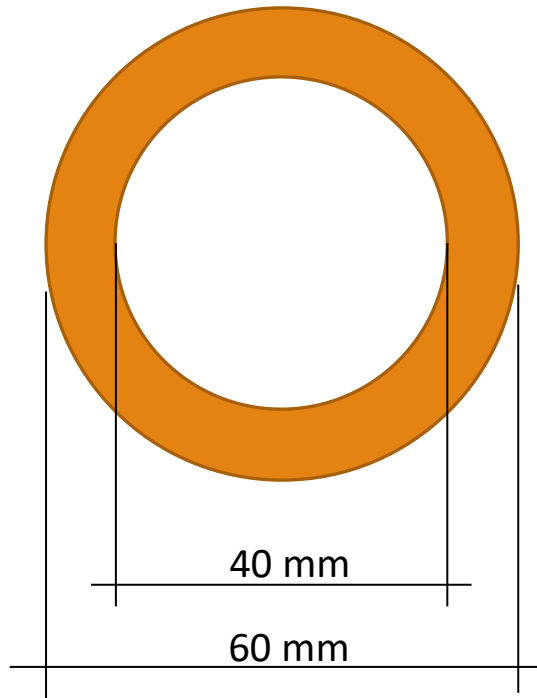
O gráfico abaixo ilustra os resultados obtidos em ensaios com colunas de diferentes índices de esbeltez:



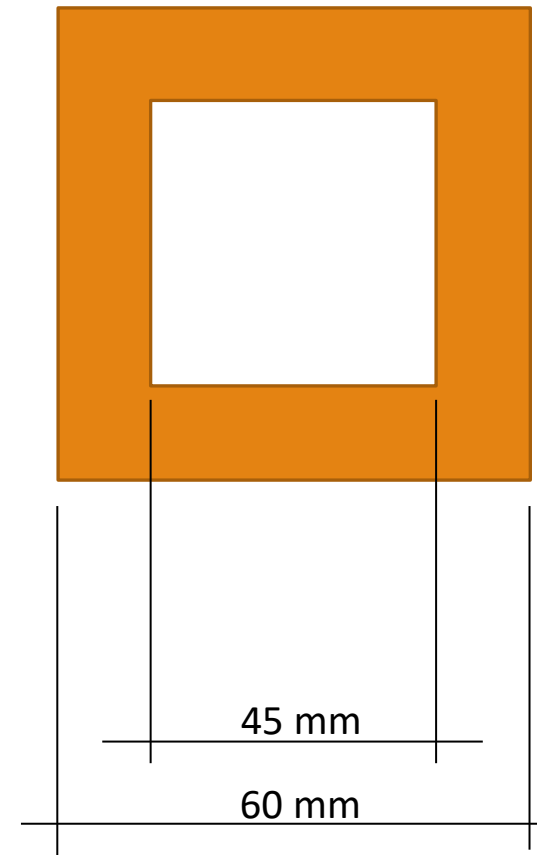
Flambagem

Exemplo 1) Sejam os dois perfis mostrados abaixo, ambos possuindo a mesma área de seção transversal. Qual deles suporta maior carga, antes de flambar? Considere $L_{ef} = 3\text{m}$, $E = 105\text{ GPa}$ e $\sigma_e = 70\text{ MPa}$.

a)



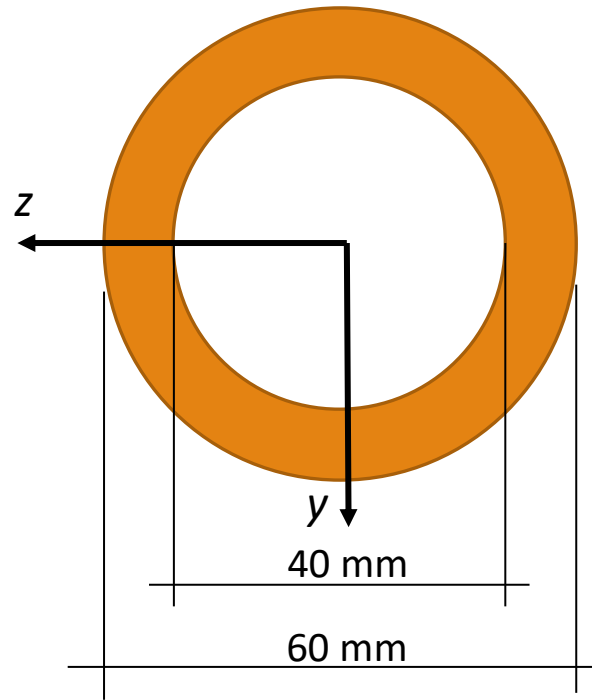
b)



Flambagem

Haja vista que todas as propriedades das barras são idênticas, aquela que ditará a capacidade de cada barra “resistir” à flambagem será o momento de inércia. Assim, para cada caso temos:

a)



$$I_z = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi(60^4 - 40^4)}{64}$$

$$= 5,105 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

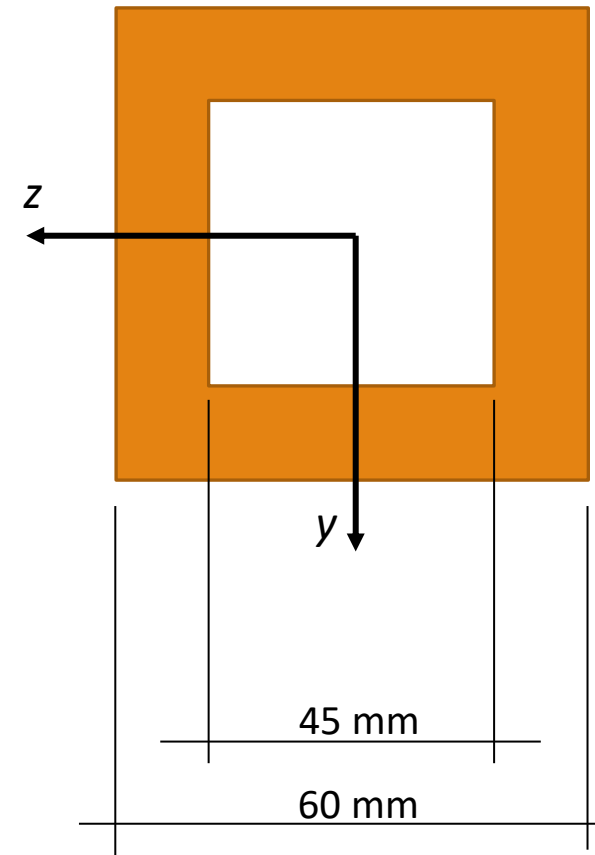
Flambagem

Haja vista que todas as propriedades das barras são idênticas, aquela que ditará a capacidade de cada barra “resistir” à flambagem será o momento de inércia. Assim, para cada caso temos:

$$I_z = I_y = \frac{(BH^3 - bh^3)}{12} = \frac{(60^4 - 45^4)}{12}$$
$$= 7,38 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

CONCLUSÃO: Como a seção b) possui o maior momento de inércia, ela é a mais adequada.

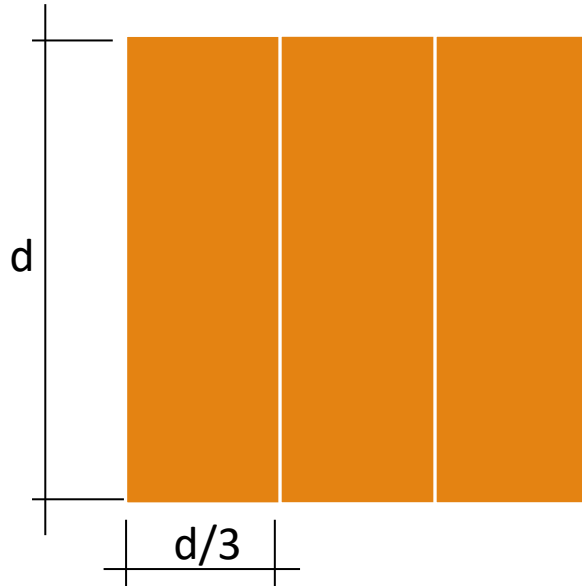
b)



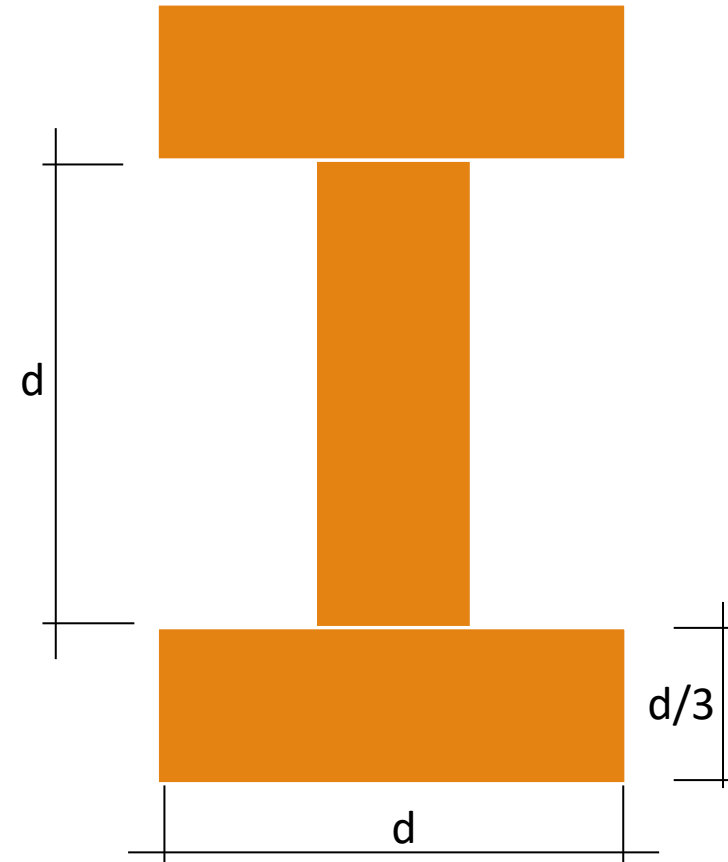
Flambagem

Exemplo 2) A seção transversal de uma coluna de comprimento efetivo L pode ser construída a partir do arranjo de 3 tábuas de mesmas dimensões, conforme mostram as figuras abaixo. Qual arranjo é mais eficiente em relação à ocorrência de flambagem?

a)



b)

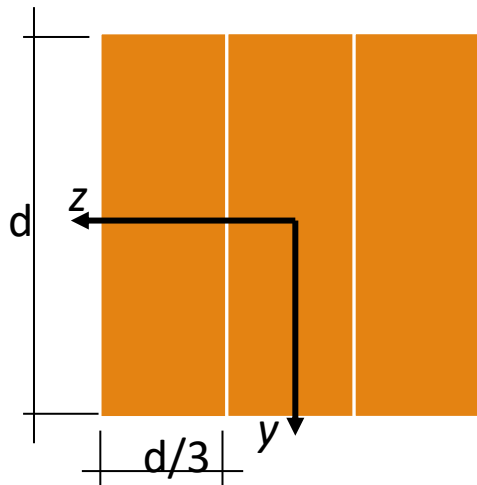


Flambagem

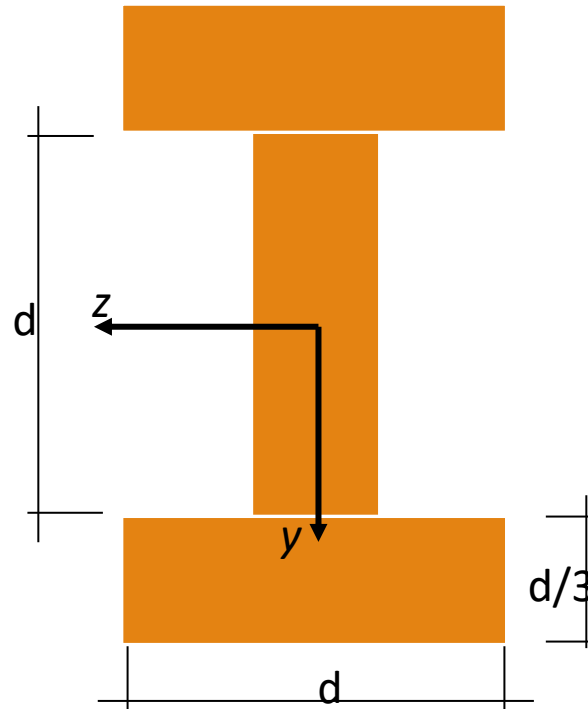
A premissa deste problema é a mesma da anterior. No entanto, deve-se tomar um cuidado extra, haja vista que, à primeira vista, a tendência é dizer que o arranjo b) é o mais eficiente, pois possui maior momento de inércia.

Acontece que, para qualquer situação que envolva escolha de perfis em problemas de flambagem devida a carregamento axial, devemos sempre buscar aquele que possua **o maior dentre os menores momentos de inércia**.

a)



b)



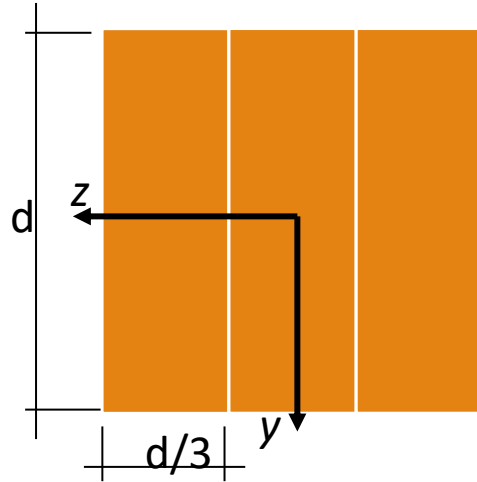
No caso deste problema, devemos comparar o momento de inércia I_z (ou I_y) do perfil a) com o momento de inércia I_y (e não I_z !) do perfil b).

O maior dentre estes dois indicará o perfil a ser escolhido.

Flambagem

Assim, temos:

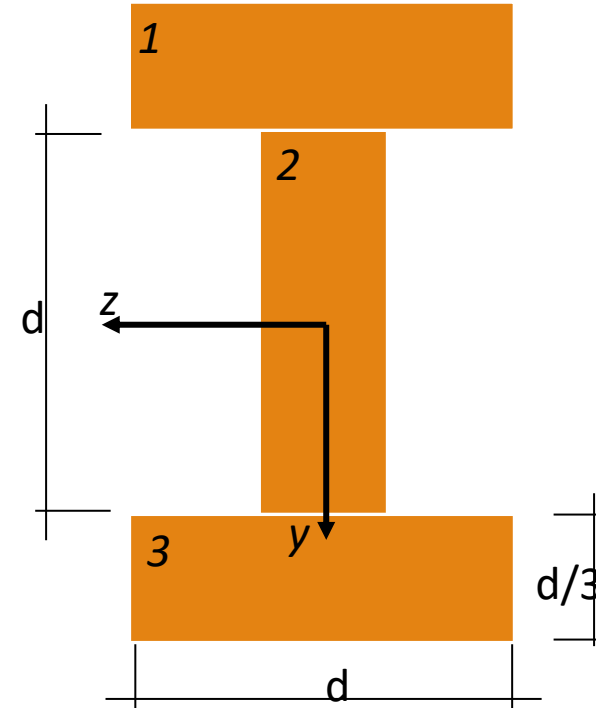
a)



$$I_z = I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{d^4}{12} = 0,08333d^4$$

+ eficiente!

b)



$$I_y = \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{h_2 b_2^3}{12} + \frac{h_3 b_3^3}{12} = \frac{(d/3)d^3}{12} + \frac{d(d/3)^3}{12} + \frac{(d/3)d^3}{12}$$

$$= 0,05864 d^4$$

Flambagem

Carregamento Excêntrico

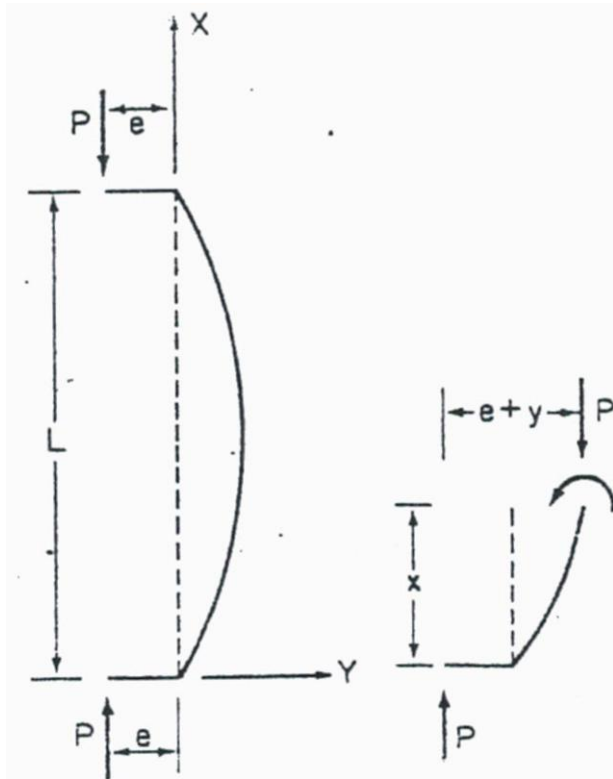
PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Flambagem

Carga excêntrica (Casos imperfeitos)

Considere-se uma coluna birrotulada, carregada fora do eixo, com uma excentricidade e . De forma similar ao caso anterior, a configuração de equilíbrio pode ser escrita como:



$$M(x) = P(e + y)$$

Da teoria da flexão, sabemos que a deflexão (flecha) é calculada por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P(e + y)}{EI}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = -\frac{Pe}{EI} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 e \quad \text{onde} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

Flambagem

Carga excêntrica (Casos imperfeitos)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 e$$

A solução desta EDO é dada por: $y(x) = A \sin kx + B \cos kx - e$

Esta é a equação diferencial de equilíbrio para a coluna em estudo, sujeita às condições de contorno definidas a partir dos tipos de apoios.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Em } x = 0, y = 0 \\ \text{Em } x = L, y = 0 \end{array} \right.$$

A partir das condições de contorno, chega-se a equação da linha elástica de flambagem:

$$y(x) = e \cdot \left(\tan \frac{kL}{2} \cdot \sin kx + \cos kx - 1 \right)$$

Flambagem

Carga excêntrica (Casos imperfeitos)

É de maior interesse, porém, conhecer o valor da máxima deflexão que, neste caso, ocorre em $x = L/2$ (à meia altura):

$$\delta_{\max} = y(L/2) = e \cdot \left(\tan \frac{kL}{2} \cdot \sin \frac{kL}{2} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right) = e \cdot \left[\sec \left(\frac{kL}{2} \right) - 1 \right]$$

Substituindo $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ na expressão acima, vem:

$$\delta_{\max} = e \cdot \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

É possível reescrever a equação acima em função da carga crítica de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow EI = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \delta_{\max} = e \cdot \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{\frac{P_{cr} L^2}{\pi^2}}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad \Rightarrow \quad \delta_{\max} = e \cdot \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

O que acontece se a carga externa P for igual à carga crítica? E, se $P' = 2P$, $\delta' = 2\delta$?

Flambagem

Máximo momento fletor

O máximo momento fletor também ocorre, neste caso, em $x = L/2$ (à meia altura) e pode ser calculado como:

$$M_{\max} = M(L/2) = P(e + \delta_{\max}) = Pe \cdot \left[\sec\left(k \frac{L}{2}\right) \right]$$

Substituindo $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ na expressão acima, vem: $M_{\max} = Pe \cdot \left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \right]$

Flambagem

Máxima tensão normal

A máxima tensão normal também ocorre em $x = L/2$ (à meia altura) e pode ser calculada pela teoria da flexão composta:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} + \frac{M_{\max} c}{I}$$

onde c é distância entre a fibra analisada e a LN da seção.

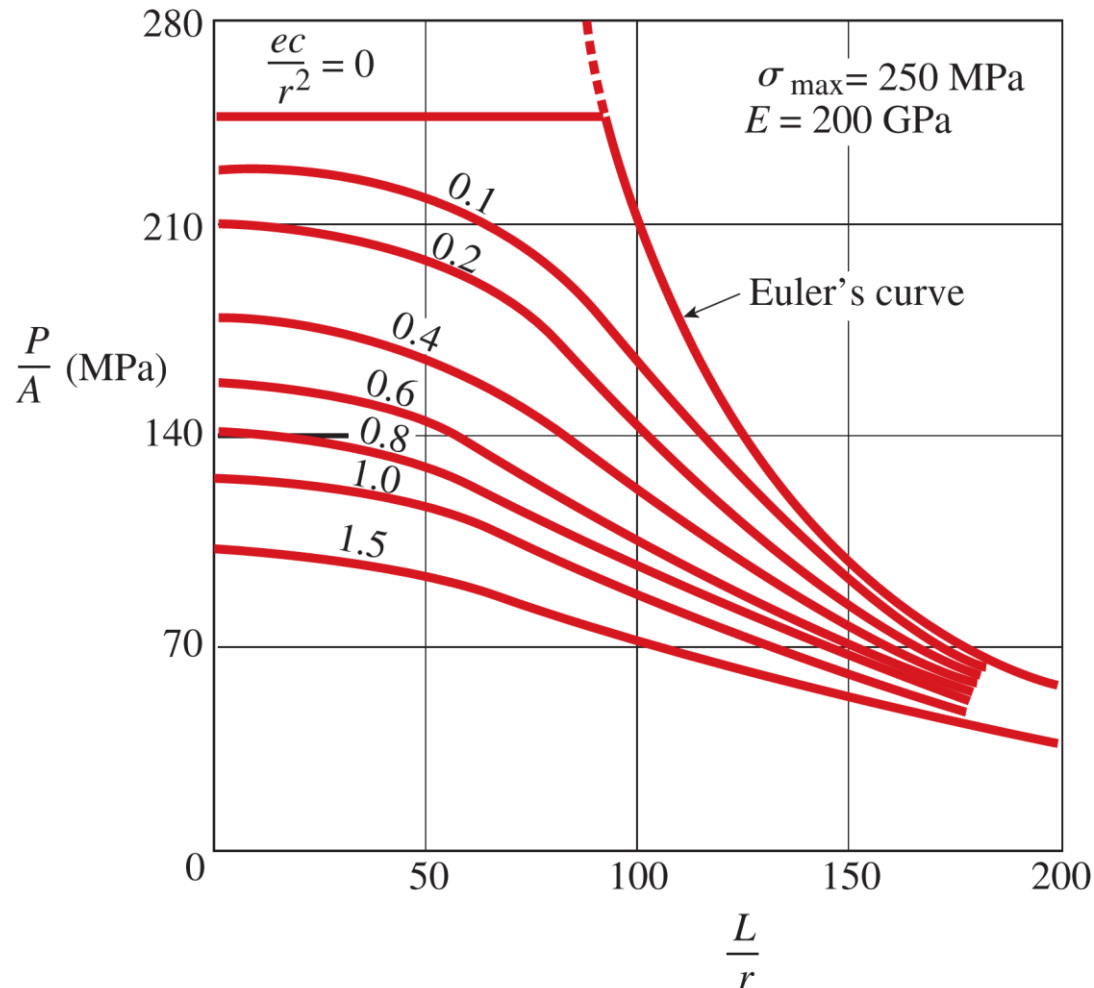
Substituindo o valor de $M_{\max}$ na expressão acima, tem-se:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} \left[1 + \frac{ec}{\rho^2} \sec \left(\frac{L}{2\rho} \sqrt{\frac{P}{ES}} \right) \right] \quad \longrightarrow \quad \text{Equação da secante}$$

Índice de excentricidade

Flambagem

O gráfico abaixo mostra as diversas situações representadas pela Equação da Secante.



Importante:

E se as condições de apoio forem diferentes do caso “rótula-rótula”?

Nesse caso, basta substituir a variável “L” por “ L_e ” nas equações.

Mas, atenção! Essa substituição é correta **somente** para a condição “**engaste-livre**”.

Para a condição “**engaste-rótula**”, uma nova EDO deverá ser formulada (com condições de contorno específicas)

Para a condição “**engaste-engaste**”, estas análises simplesmente não fazem sentido! Por quê?

Flambagem

Exemplo 3) Uma carga $P = 37 \text{ kN}$ é aplicada excentricamente ($e = 1,2 \text{ mm}$) a uma coluna de aço de 32 mm de diâmetro e $1,2 \text{ m}$ de comprimento. Determine: a) a máxima deflexão lateral, b) a máxima tensão normal. Adotar $E = 200 \text{ GPa}$.

a) Para determinar a máxima deflexão lateral, utilizaremos a expressão abaixo:

$$\delta_{\max} = e \cdot \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

Substituindo os valores e compatibilizando as unidades, vem:

$$\delta_{\max} = 1,2 \cdot \left[\sec \left(\sqrt{\frac{37 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \left(\frac{\pi (32)^4}{64} \right)}} \frac{1200}{2} \right) - 1 \right] = 1,2 \cdot [\sec(1,1375) - 1] = 1,2 \cdot \left[\frac{1}{\underbrace{\cos(1,1375)}_{\text{em radianos!}}} - 1 \right] = 1,2 \cdot (2,3817 - 1) = \boxed{1,658 \text{ mm}}$$

Flambagem

b) Para determinar a máxima tensão normal, temos duas possibilidades:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} \left[1 + \frac{ec}{\rho^2} \sec \left(\frac{L}{2\rho} \sqrt{\frac{P}{ES}} \right) \right]$$

Eq. da Secante

ou

$$\begin{cases} M_{\max} = P(e + \delta_{\max}) \\ \sigma_{\max} = \frac{P}{S} + \frac{M_{\max}c}{I} \end{cases}$$

No caso deste exemplo, vamos utilizar a segunda abordagem, por ser a mais simples de se operar.

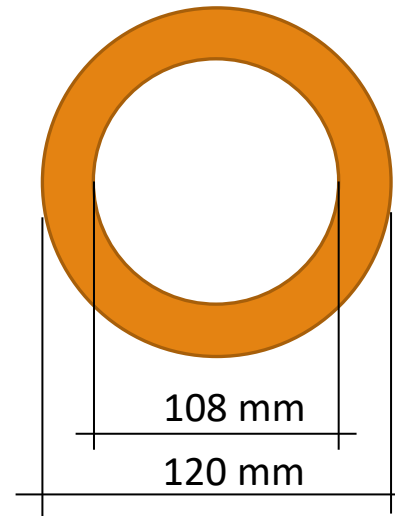
Substituindo os valores e compatibilizando as unidades, vem:

$$M_{\max} = 37 \cdot 10^3 (1,2 + 1,658) = 105.746 \text{ Nmm} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{\max} = \frac{37 \cdot 10^3}{\pi(32)^2/4} + \frac{105746(32/2)}{\pi(32)^4/64} = 78,88 \text{ MPa}$$

Flambagem

Exemplo 4) Seja um tubo circular de latão de 2,8 m de comprimento, conforme mostrado abaixo. Sobre ele, aplica-se uma carga P com excentricidade $e = 5$ mm. Adotando $E = 120$ GPa, determine:

- a) o valor da carga P de forma que a máxima deflexão lateral seja igual a 5 mm;
- b) o valor da máxima tensão normal.



Flambagem

a) Para determinar o valor máximo da carga, utilizaremos a expressão abaixo:

$$\delta_{\max} = e \cdot \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

Substituindo alguns valores e compatibilizando as unidades, vem:

$$5 = 5 \cdot \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad \longrightarrow \quad 1 = \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \quad \longrightarrow \quad \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) = 2 \quad \longrightarrow \quad \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{2\pi}{3L} \quad \longrightarrow \quad \frac{P}{EI} = \left(\frac{2\pi}{3L} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad P = \frac{4}{9} \left(\frac{\pi^2 EI}{L^2} \right) = 235 \text{ kN}$$

carga crítica de Euler

Flambagem

b) Novamente, para se determinar a máxima tensão normal, vamos utilizar a mesma abordagem utilizada no exemplo anterior.

$$M_{\max} = P(e + \delta_{\max})$$

$$M_{\max} = 235 \cdot 10^3 (5 + 5) = 2,35 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} + \frac{M_{\max} c}{I}$$

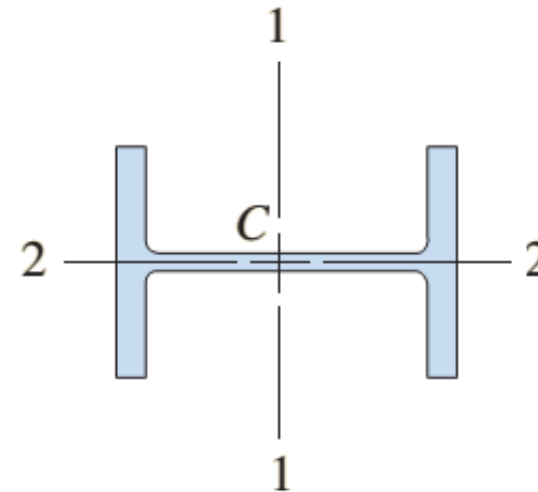
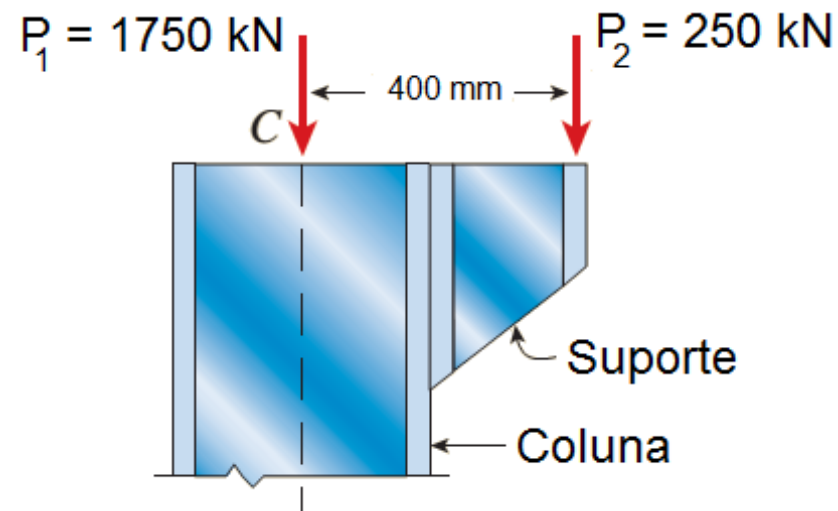
$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{235 \cdot 10^3}{\pi(120^2 - 108^2)/4} + \frac{2,35 \cdot 10^6 (120/2)}{\pi(120^4 - 108^4)/64} \\ &= 149,64 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Flambagem

Exemplo 6) Uma coluna de aço ($E = 210 \text{ GPa}$), cujo perfil é mostrado abaixo, está apoiada por pinos (birrotulada) nas extremidades e tem comprimento de 7,5 m. A coluna suporta um carregamento aplicado no centroide $P_1 = 1750 \text{ kN}$ e um carregamento aplicado excêntricamente $P_2 = 250 \text{ kN}$. Calcule a máxima tensão normal de compressão, utilizando:

a) a teoria da flexão composta;

b) a equação da secante.



Dados do perfil:

$$I_1 = 486,89 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$h = 362 \text{ mm}$$

$$\rho_1 = 157,81 \text{ mm}$$

$$A = 19550 \text{ mm}^2$$

A flambagem ocorre sobre o eixo 1-1 da seção transversal e o carregamento excêntrico age no eixo 2-2 a uma distância de 400 mm do centroide da seção.

Flambagem

Tendo em vista que as duas cargas agem sobre a coluna, não é possível aplicar a equação da secante de forma direta, dada a relação não-linear entre carregamento e tensão.

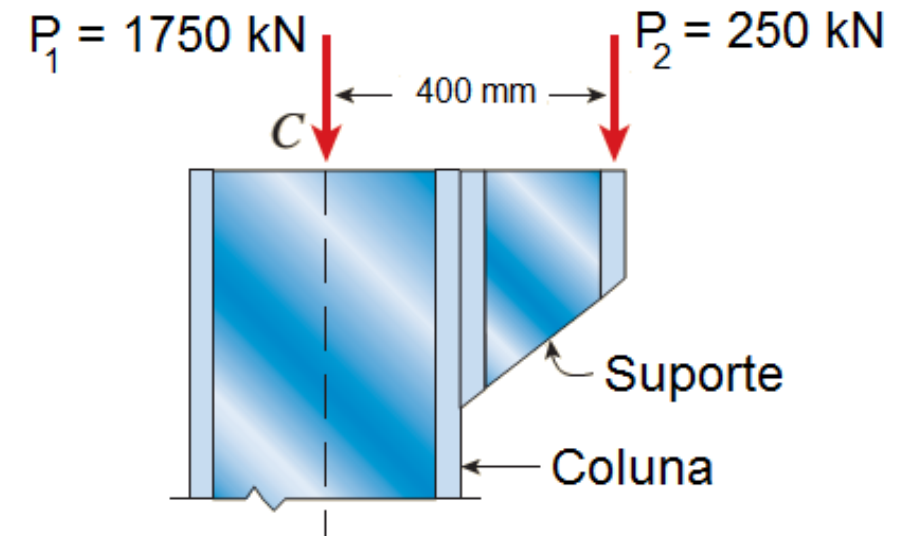
Assim, precisaremos calcular uma única carga resultante e uma excentricidade “equivalente” que gerem o mesmo momento fletor em relação ao centroide da seção.

Analizando a figura ao lado, o momento fletor em relação a C é dado por:

$$M^C = 1750 \text{ [kN]} \times 0 \text{ [mm]} + 250 \text{ [kN]} \times 400 \text{ [mm]} = \mathbf{100.000 \text{ [kN mm]}}$$

A força resultante é dada por $R = P_1 + P_2 = \mathbf{2000 \text{ kN}}$

Esta força resultante deverá gerar o mesmo momento em C, calculado anteriormente. Assim, a excentricidade “equivalente” é calculada como:
 $e = M^C / R = 100000 \text{ [kNmm]} / 2000 \text{ [kN]} = \mathbf{50 \text{ mm.}}$



Flambagem

O sistema equivalente é mostrado na figura abaixo. A partir de agora, a análise será feita utilizando-se este sistema, apenas.

a) Pela teoria da flexão composta, tem-se que $\sigma = \frac{N}{S} + \frac{Mc}{I}$, onde c é a distância da LN à fibra em estudo (normalmente, a mais externa).

Substituindo os dados na expressão acima, vem:

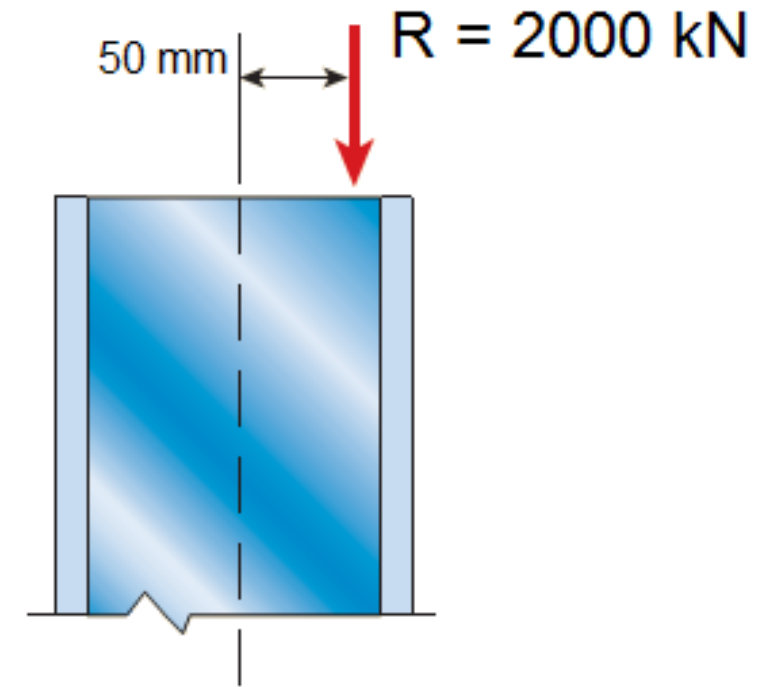
$$\sigma = \frac{2000 \times 10^3 [N]}{19550 [mm^2]} + \frac{(100.000 \times 10^3 [Nmm]) \times (181 [mm])}{486,89 \times 10^6 [mm^4]} = 139,48 \text{ MPa}$$

b) Pela Eq. da secante, tem-se:

$$\sigma = \frac{N}{S} \left[1 + \frac{ec}{\rho^2} \sec \left(\frac{L}{2\rho} \sqrt{\frac{N}{ES}} \right) \right]$$

Fazendo $c = h/2 = 362/2 = 181$ mm e substituindo os demais valores na expressão acima, vem:

$$\sigma = \frac{2000 \times 10^3}{19550} \left[1 + \frac{50 \times 181}{157,81^2} \sec \left(\frac{7500}{2 \times 157,81} \sqrt{\frac{2000 \times 10^3}{210 \times 10^3 \times 19550}} \right) \right] = 145,26 \text{ MPa}$$



Flambagem

Perguntas:

- 1) Por que as tensões foram calculadas pensando-se na flambagem em torno do eixo 1-1, quando percebe-se, claramente, que o menor momento de inércia se dá em torno do eixo 2-2?
- 2) Por que ocorre essa diferença de valores entre as duas teorias? Qual é a mais adequada, neste caso?