

Flexão Reta x Flexão Oblíqua

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

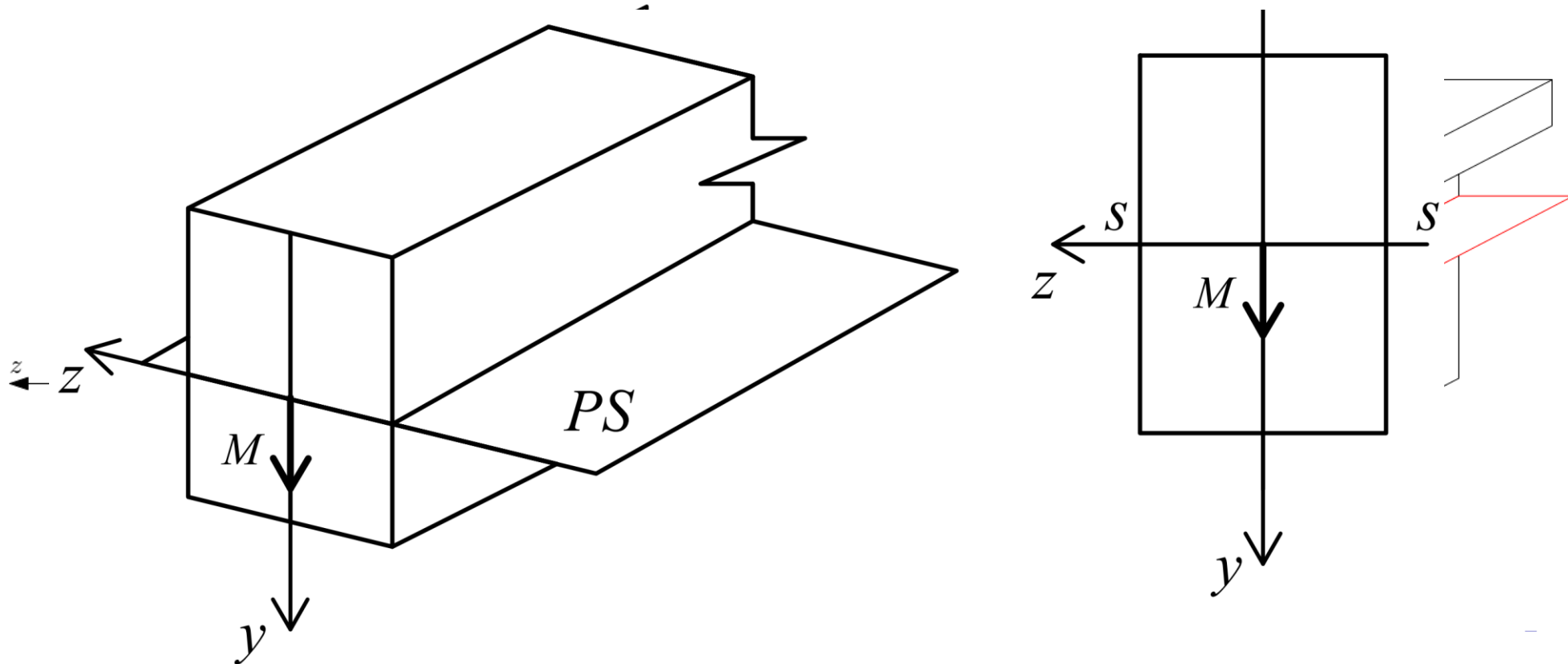
A solid orange horizontal bar spanning the width of the slide at the bottom.

Flexão Reta

Flexão Reta

A flexão reta ocorre quando o plano ou eixo de solicitação **coincide** com um dos eixos principais de inércia.

Exemplos:



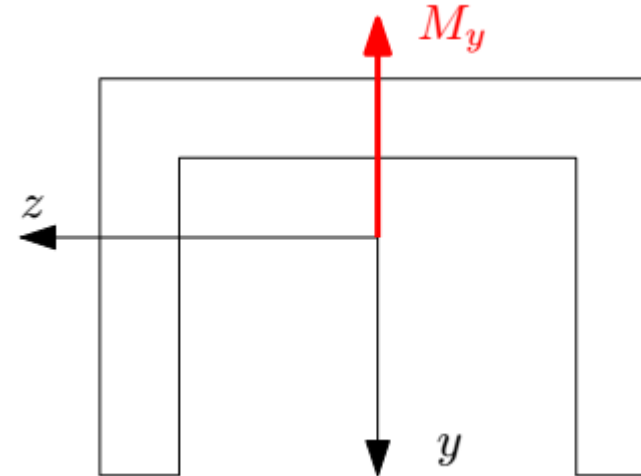
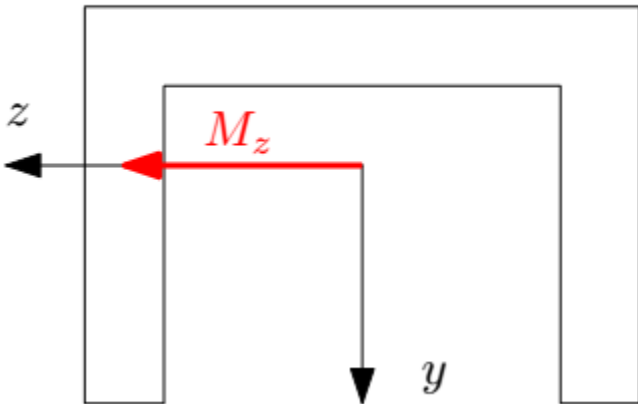
Flexão Reta

O cálculo das tensões normais na flexão reta é realizado de acordo com uma das expressões abaixo, a depender da direção do carregamento:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}$$

OU

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

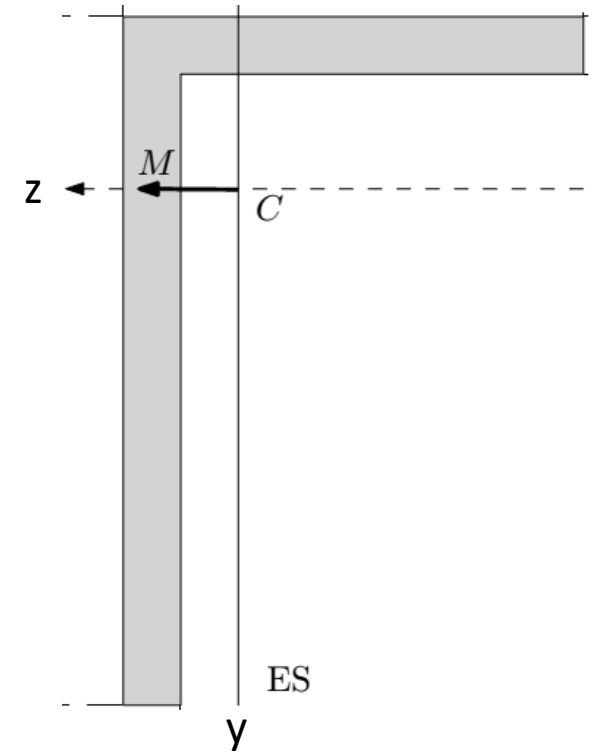
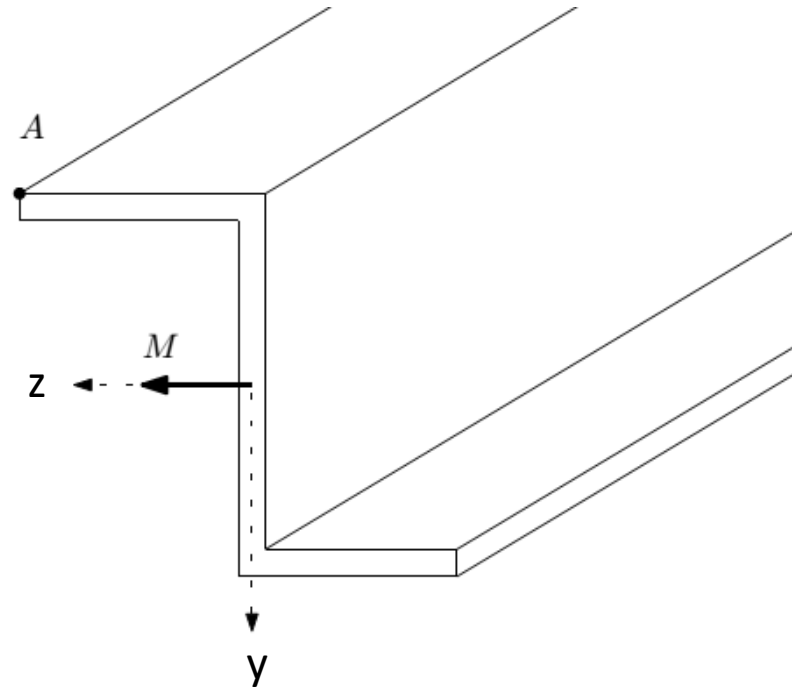
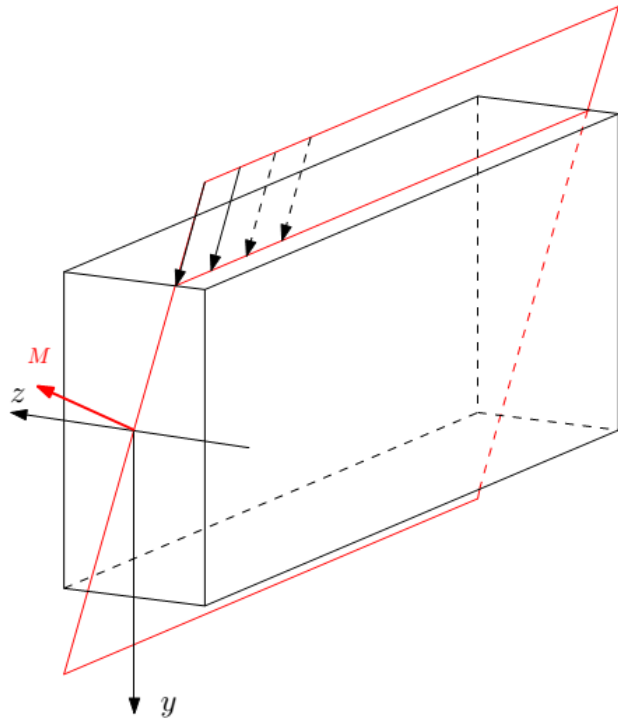


Flexão Oblíqua

Flexão Oblíqua

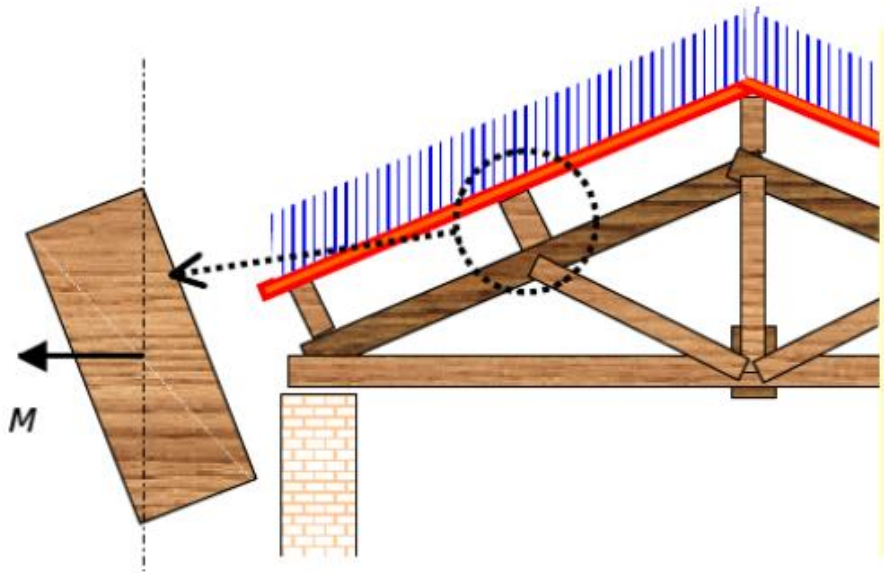
Já a flexão oblíqua ocorre quando o plano ou eixo de solicitação **NÃO coincide** com nenhum dos eixos principais de inércia.

Exemplos:

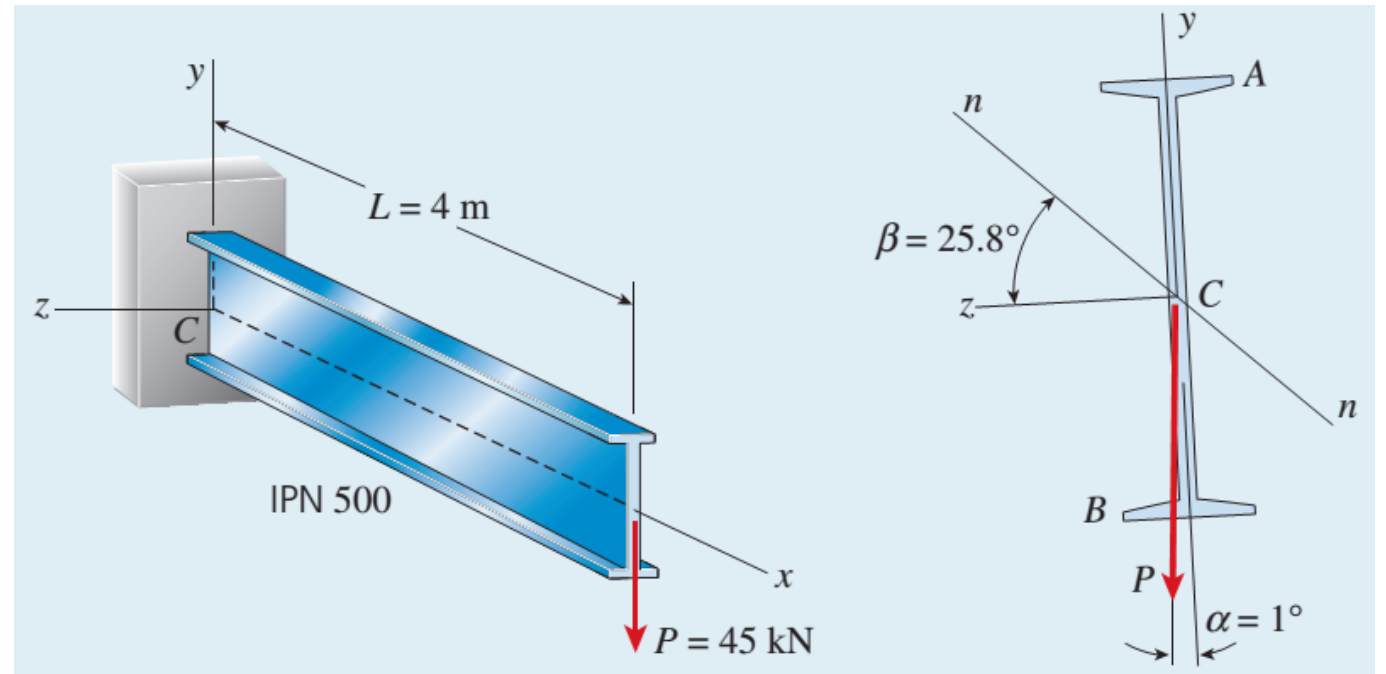


Flexão Oblíqua

Ocorrências na prática:



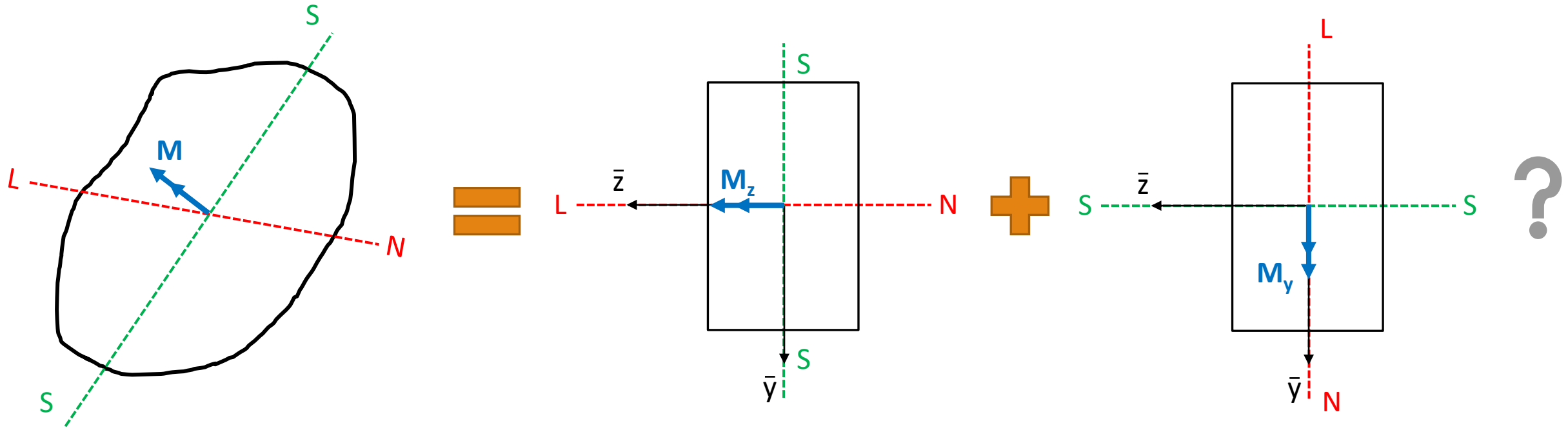
Carregamento nas *terças* de um telhado



Montagem incorreta de uma viga
(viga montada com 1° de inclinação)

Flexão Oblíqua

Considere a situação mostrada abaixo. É possível resolver um problema de flexão oblíqua como uma superposição de duas flexões retas?



Sim, desde que $\bar{z}$ e $\bar{y}$ eixos sejam eixos principais de inércia!

Mas...e se não forem?

Flexão Oblíqua

Assumindo que as tensões normais se distribuem linearmente ao longo do plano $\bar{z}$ - $\bar{y}$ da seção transversal da estrutura, podemos escrever:

$$\sigma_x = a\bar{y} + b\bar{z}$$

Para haver equilíbrio entre os esforços internos e externos (momentos fletores), devemos ter:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\bar{z}} = \int_S \sigma_x \bar{y} dS \\ M_{\bar{y}} = - \int_S \sigma_x \bar{z} dS \end{array} \right.$$

Flexão Oblíqua

Temos, assim, um sistema de duas equações e duas incógnitas (a e b) para resolver:

$$\begin{cases} I_{\bar{z}}a + I_{\bar{y}z}b = M_{\bar{z}} \\ -I_{\bar{z}y}a - I_{\bar{z}}b = M_{\bar{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{\bar{z}} & I_{\bar{y}z} \\ -I_{\bar{y}z} & -I_{\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{\bar{z}} \\ M_{\bar{y}} \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, chegamos às soluções:

$$a = \frac{M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}y}}{I_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - I_{\bar{y}z}^2} \qquad b = -\frac{M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}y}}{I_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - I_{\bar{y}z}^2}$$

Substituindo os valores de a e b na equação $\sigma_x = a\bar{y} + b\bar{z}$, vem:

Flexão Oblíqua

$$\sigma_x = \frac{(M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{y} - (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{z}\bar{y}}^2}$$

A expressão acima permite calcular o valor da tensão normal em qualquer ponto da seção transversal, sendo conhecidos os valores dos momentos de inércia, do produto de inércia e dos momentos fletores projetados sobre os eixos **baricêntricos** (não necessariamente principais de inércia!!)

OBS: As coordenadas dos pontos analisados também são descritas em relação aos eixos baricêntricos!

Flexão Oblíqua

E como determinar a posição da Linha Neutra?

Simples! Basta igualar a expressão abaixo a zero:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{y} - (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{z}\bar{y}}^2}$$

e escrever a equação da reta em função de $\bar{y}$ e $\bar{z}$:

$$\bar{y} = \left(\frac{M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}}}{M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}}} \right) \bar{z}$$

coeficiente angular da LN

Flexão Oblíqua

Caso particular: Caso os eixos baricêntricos sejam, também, os principais de inércia, a expressão anterior simplifica-se para:

$$\sigma_x = \left(\frac{M_z}{I_z} \right) y - \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z$$

Isto acontece pois o produto de inércia da seção em relação aos eixos principais de inércia é sempre **nulo**.

E por que o sinal negativo da 2ª parcela?

Devido à convenção dos eixos y e z que adotamos neste curso...

Flexão Oblíqua

Caso particular: Para determinar a posição da LN basta, novamente, igualar a expressão abaixo a zero.

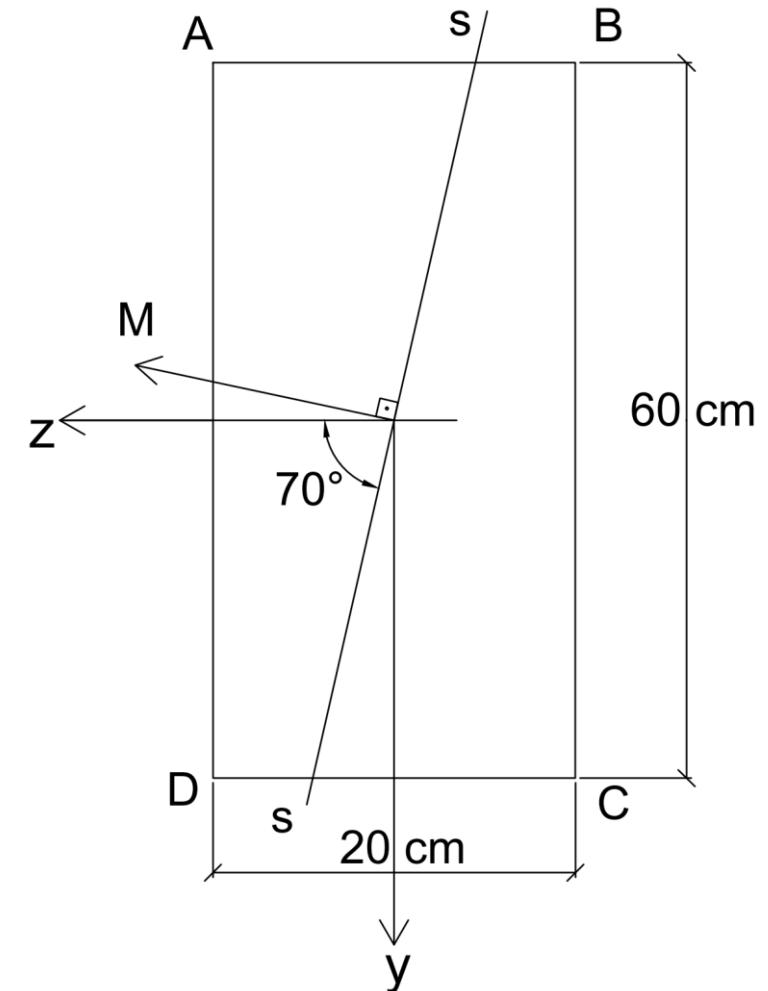
$$\sigma_x = \left(\frac{M_z}{I_z} \right) y - \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z \quad \longrightarrow \quad y = \underbrace{\left(\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \right)}_{\text{coeficiente angular da LN}} z$$

Importante: Nas equações acima, I_z e I_y são os momentos principais de inércia!

Flexão Oblíqua

Exemplo 1: Para a seção ilustrada na figura abaixo, sendo dados $M = 150 \text{ kNm}$ e $\alpha = 70^\circ$, determine:

- a) A posição da linha neutra (nn);
- b) As tensões nos vértices da seção e trace o diagrama de tensões referenciados à nn .



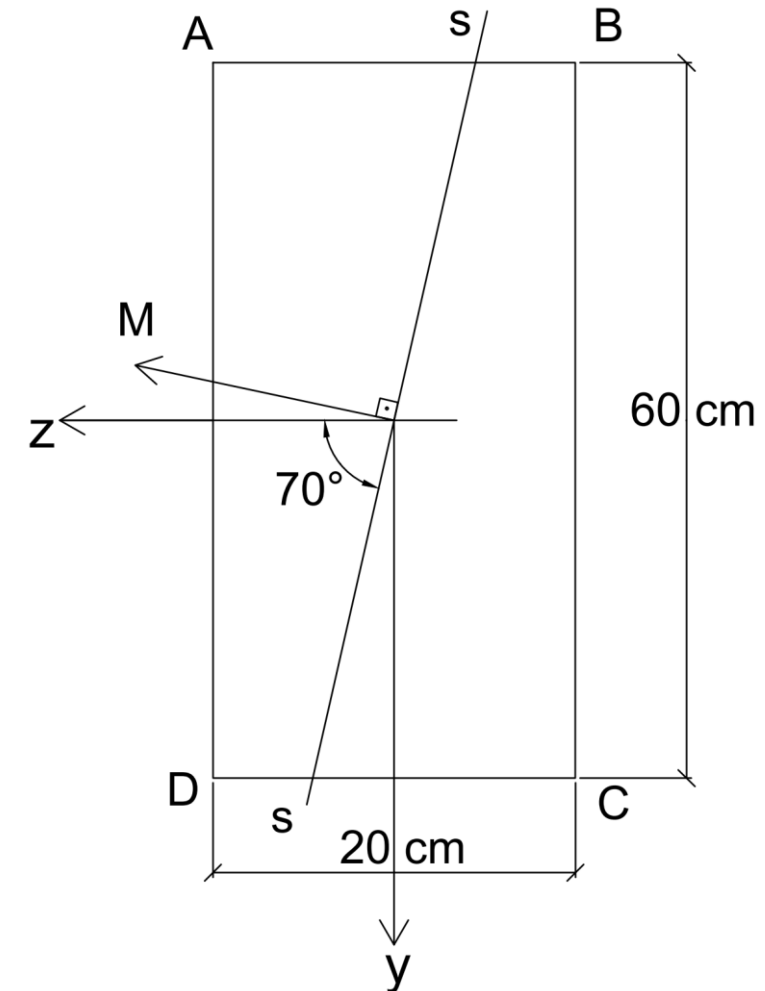
Flexão Oblíqua

a) Haja vista que os eixos z-y são eixos principais de inércia (pois são eixos de simetria), a posição da linha neutra pode ser obtida zerando-se a equação:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

Para tanto, precisamos calcular as projeções dos momentos fletores sobre z e y, além dos momentos de inércia.

Para facilitar as contas, é recomendável manter as unidades de força em [N] e as de dimensão em [mm]. Com isso, teremos as tensões na já usual unidade [MPa].



Flexão Oblíqua

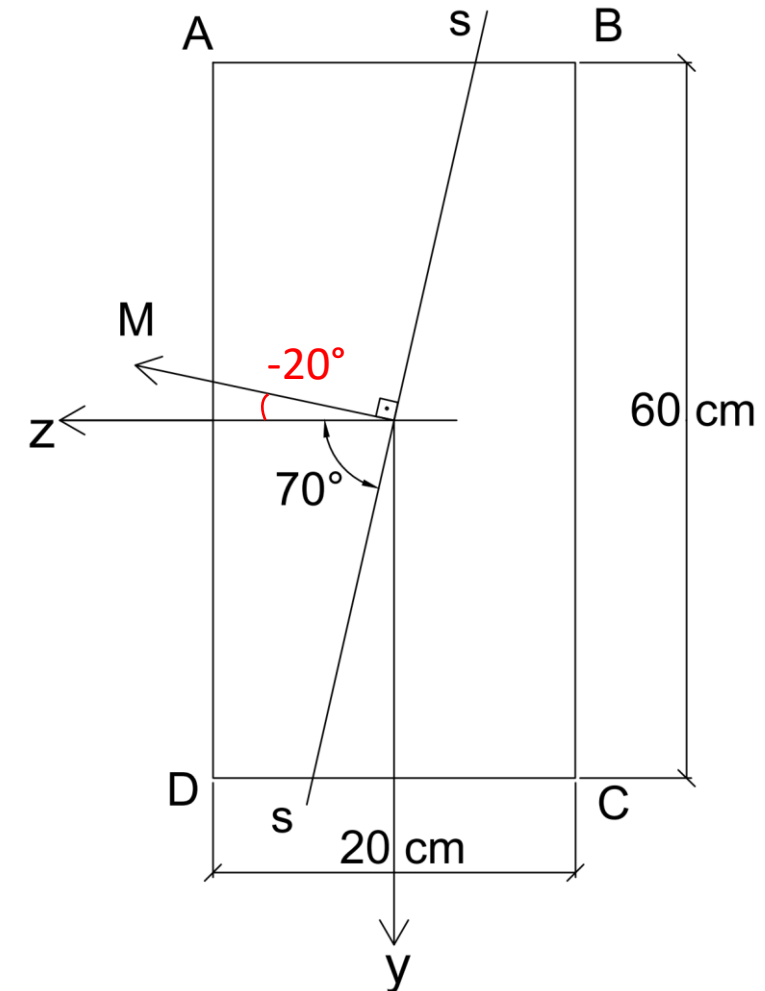
Assim, temos:

$$\begin{cases} M_z = M \cos(-20^\circ) = 140,95 \times 10^6 \text{ Nmm} \\ M_y = M \sin(-20^\circ) = -51,30 \times 10^6 \text{ Nmm} \end{cases}$$

Note que a marcação dos ângulos é **POSITIVA** no sentido **anti-horário** e **NEGATIVA** no sentido **horário**.

Os momentos de inércia em relação aos eixos z e y são:

$$\begin{cases} I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{200 \times 600^3}{12} = 3600 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{600 \times 200^3}{12} = 400 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$



Flexão Oblíqua

Substituindo-se os valores na equação de σ_x mostrada anteriormente, vem:

$$\sigma_x = \frac{140,95 \times 10^6}{3600 \times 10^6} y - \frac{(-51,30 \times 10^6)}{400 \times 10^6} z \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = 0,03915y + 0,1282z$$

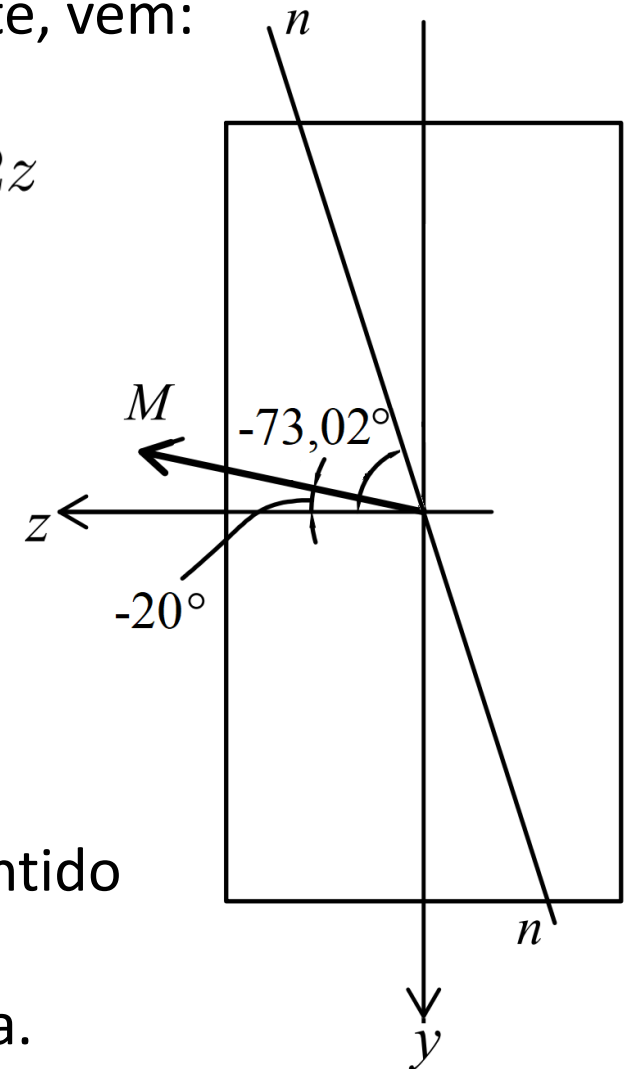
A equação da linha neutra é obtida fazendo-se $\sigma_x = 0$, isto é:

$$y + 3,275z = 0 \quad \text{ou} \quad y = -3,275z$$

O coeficiente angular da reta é, portanto, $\arctan(-3,275) = -73,02^\circ$.

Ou seja:

- a linha neutra está a $-73,02^\circ$ a partir do eixo z, marcada no sentido horário, e
- o vetor momento fletor resultante M a -20° , como mostra a figura.



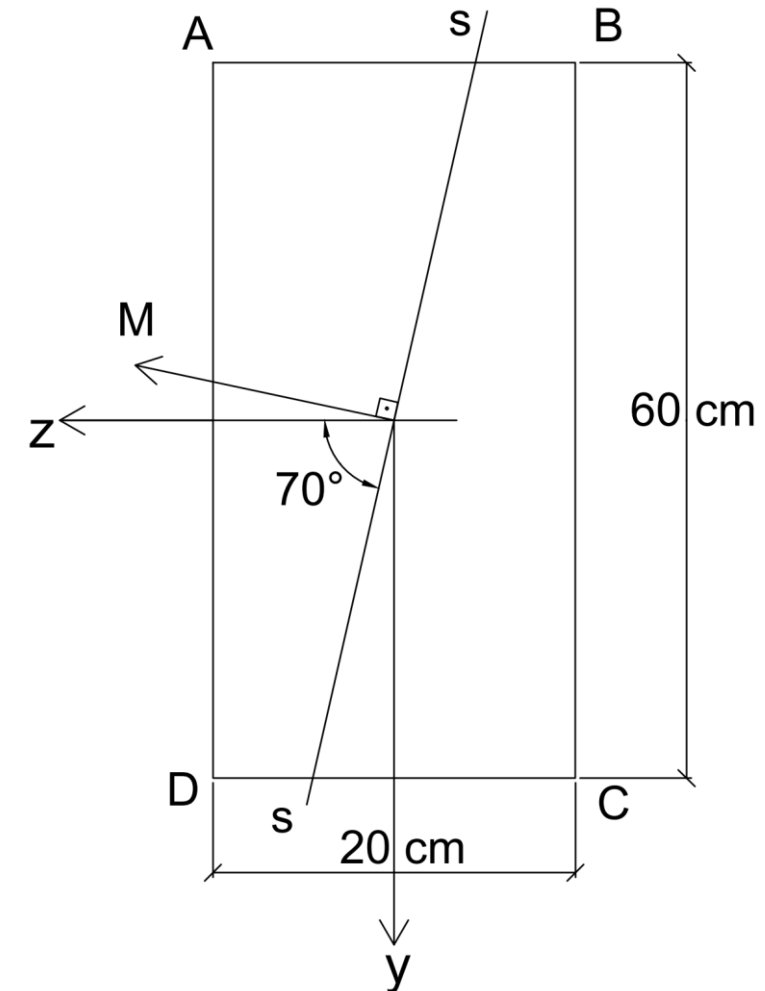
Flexão Oblíqua

b) As tensões normais nos vértices da seção são calculadas substituindo-se as coordenadas dos pontos A, B, C e D na expressão abaixo:

$$\sigma_x = 0,03915y + 0,1282z$$

As coordenadas dos pontos, em relação ao referencial z - y adotado, são:

$$\begin{aligned} A : & \quad (y = -300 \quad ; \quad z = 100) \\ B : & \quad (y = -300 \quad ; \quad z = -100) \\ C : & \quad (y = 300 \quad ; \quad z = -100) \\ D : & \quad (y = 300 \quad ; \quad z = 100) \end{aligned}$$

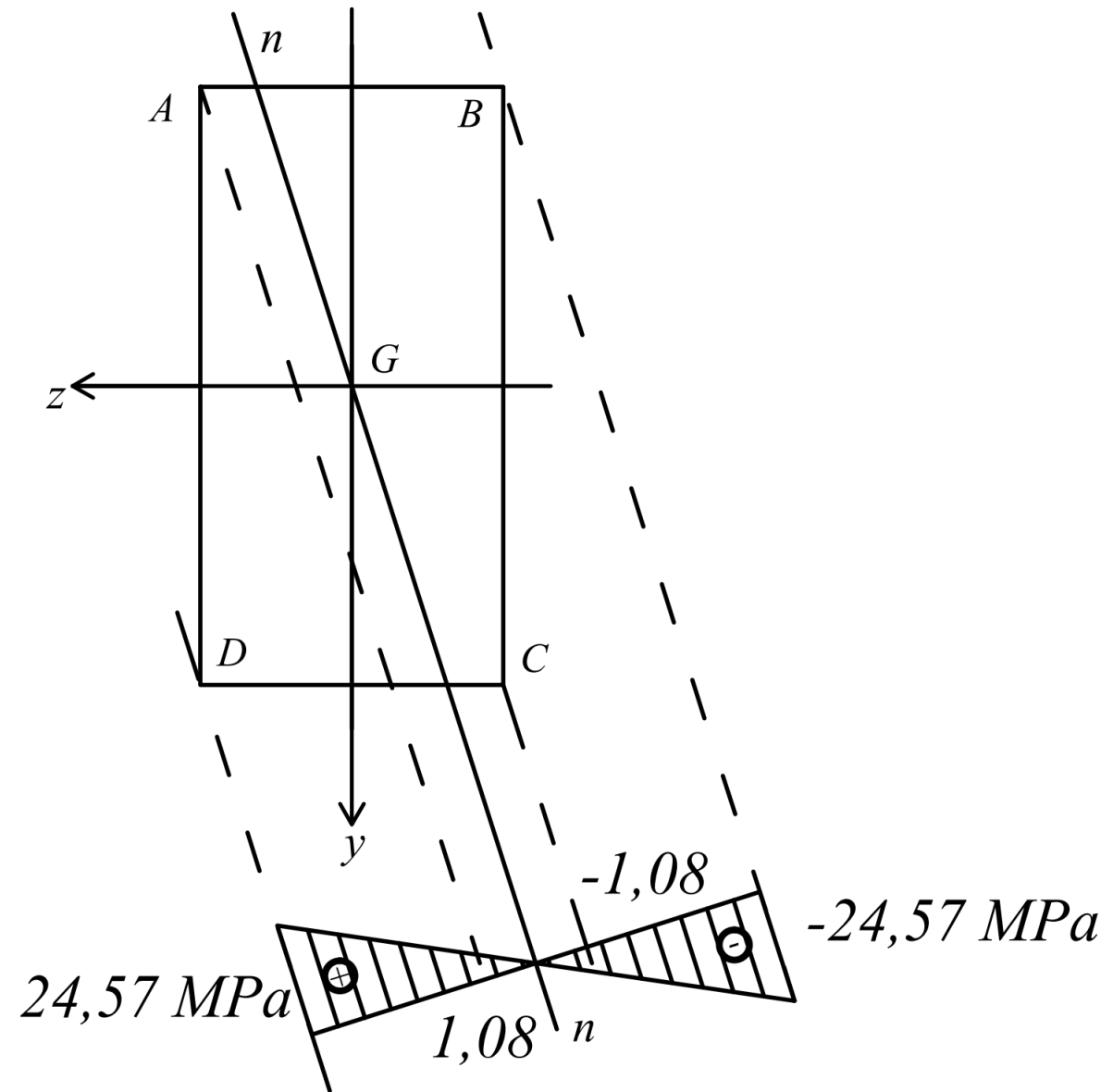


Flexão Oblíqua

Assim, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^A = 1,08 \text{ MPa} \\ \sigma_x^B = -24,57 \text{ MPa} \\ \sigma_x^C = -1,08 \text{ MPa} \\ \sigma_x^D = 24,57 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

De posse desses valores, o diagrama de tensões é traçado como mostra a figura:

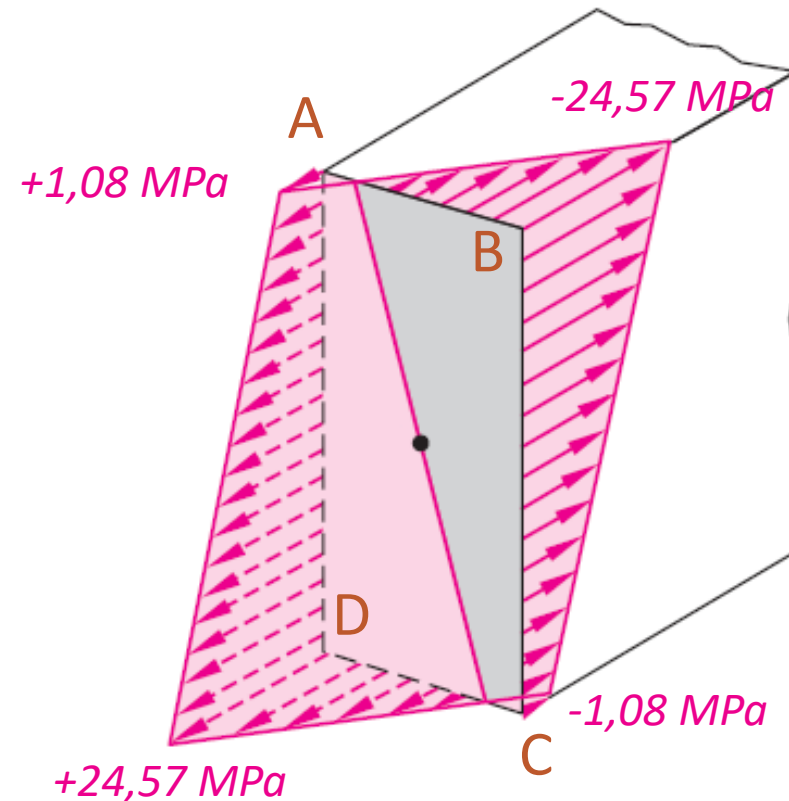


Flexão Oblíqua

Assim, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^A = 1,08 \text{ MPa} \\ \sigma_x^B = -24,57 \text{ MPa} \\ \sigma_x^C = -1,08 \text{ MPa} \\ \sigma_x^D = 24,57 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

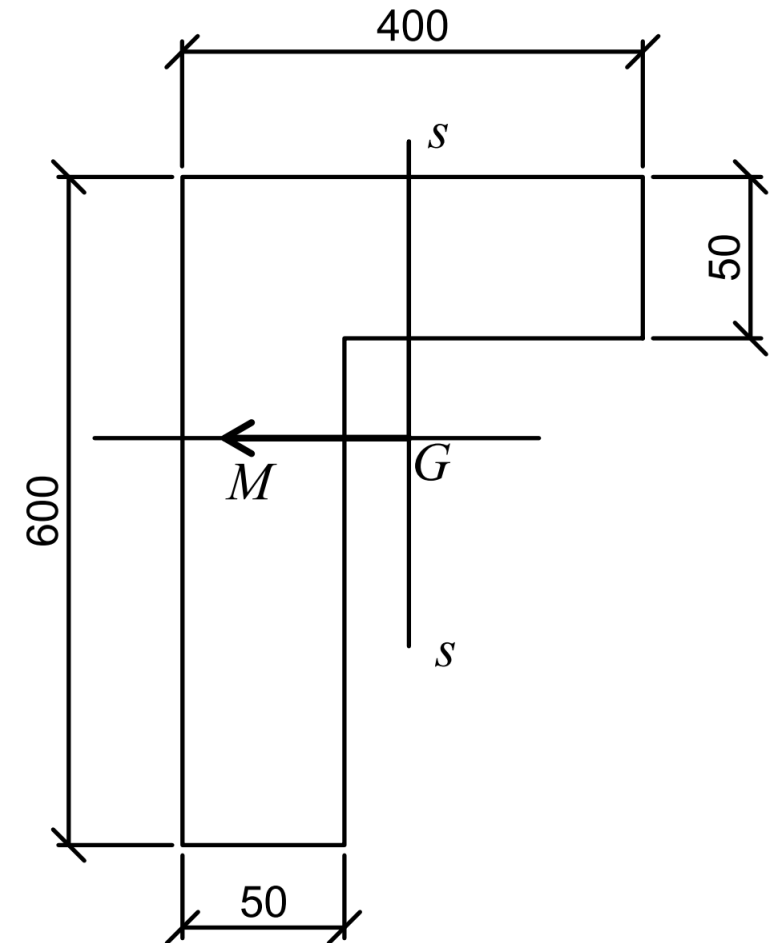
Para facilitar a visualização, a distribuição de tensões na seção transversal também pode ser representada em perspectiva:



Flexão Oblíqua

Exemplo 2: Para o perfil L (dimensões em mm) mostrado na figura abaixo e considerando $M = 50\text{kNm}$, determine:

- a) a posição da linha neutra;
- b) as tensões normais máximas.



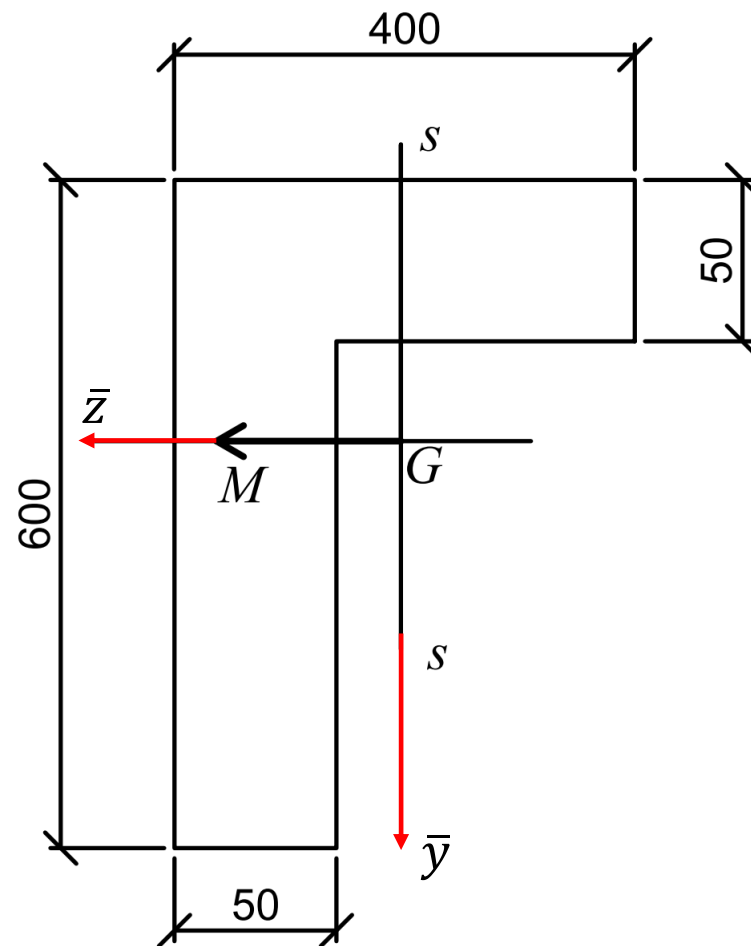
Flexão Oblíqua

a) Diferentemente do exemplo anterior, os eixos $\bar{z}$ - $\bar{y}$ marcados **NÃO** são eixos principais de inércia (pois nenhum deles é eixo de simetria).

Assim, a posição da linha neutra pode ser mais facilmente obtida zerando-se a equação:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{y} - (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{z}\bar{y}}^2}$$

Para tanto, precisamos calcular as projeções dos momentos fletores sobre $\bar{z}$ e $\bar{y}$, além dos momentos de inércia e produto de inércia em relação a estes eixos baricêntricos.



Flexão Oblíqua

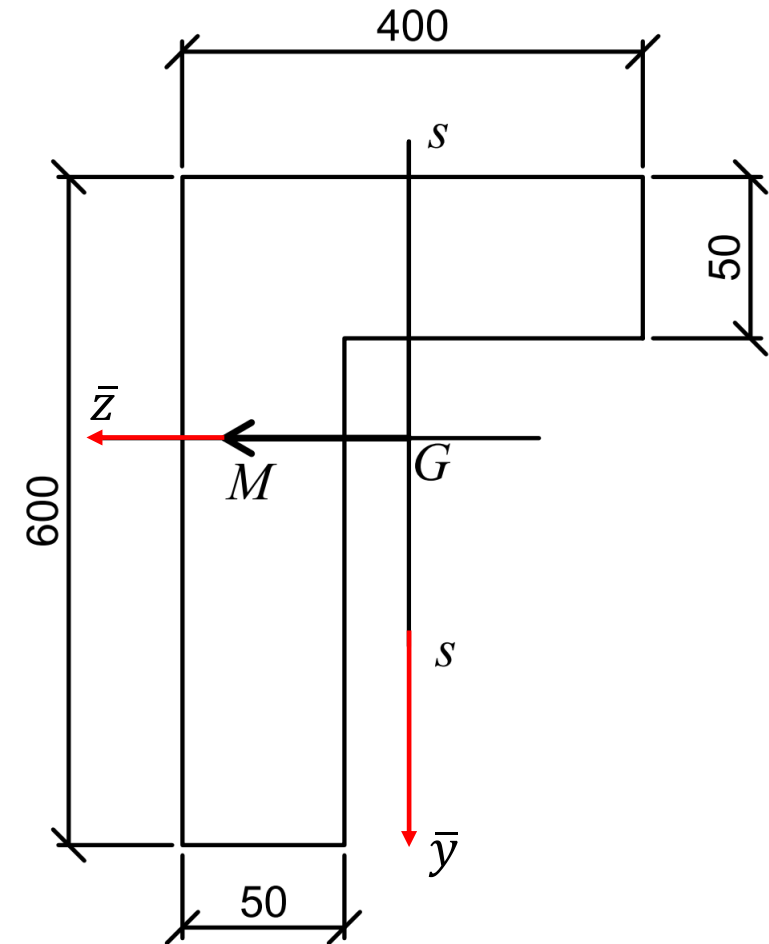
Assim, temos:

$$\begin{cases} M_{\bar{z}} = 50 \times 10^6 \text{ Nmm} \\ M_{\bar{y}} = 0 \end{cases}$$

As propriedades geométrica da seção são:

$$\begin{cases} I_{\bar{z}} = 17,395 \times 10^8 \text{ mm}^4 \\ I_{\bar{y}} = 6,27 \times 10^8 \text{ mm}^4 \\ I_{\bar{z}\bar{y}} = 6,08 \times 10^8 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

Note que o produto de inércia é positivo, como esperado.



Flexão Oblíqua

Substituindo-se os valores na equação σ_x mostrada anteriormente, vem:

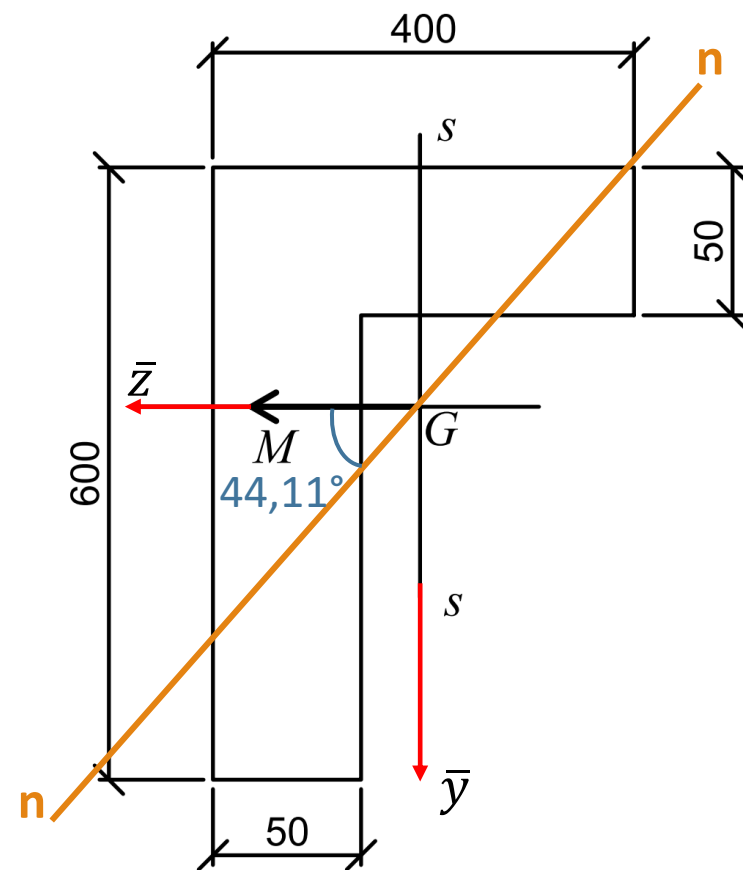
$$\sigma_x = \frac{(50 \cdot 10^6 \times 6,27 \cdot 10^8 + 0 \times 6,08 \cdot 10^8) \bar{y} - (0 \times 17,395 \cdot 10^8 + 50 \cdot 10^6 \times 6,08 \cdot 10^8) \bar{z}}{[17,395 \cdot 10^8 \times 6,27 \cdot 10^8 - (6,08 \cdot 10^8)^2]} \Rightarrow \sigma_x = 0,0435 \bar{y} - 0,0422 \bar{z}$$

A equação da linha neutra é obtida fazendo-se $\sigma_x = 0$, isto é:

$$0,0435 \bar{y} - 0,0422 \bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0,97 \bar{z}$$

O coeficiente angular da reta é, portanto, $\arctan(0,97) = 44,11^\circ$.

Ou seja, a linha neutra está a $44,11^\circ$ a partir do eixo $\bar{z}$, marcada no sentido anti-horário, como mostra a figura ao lado.



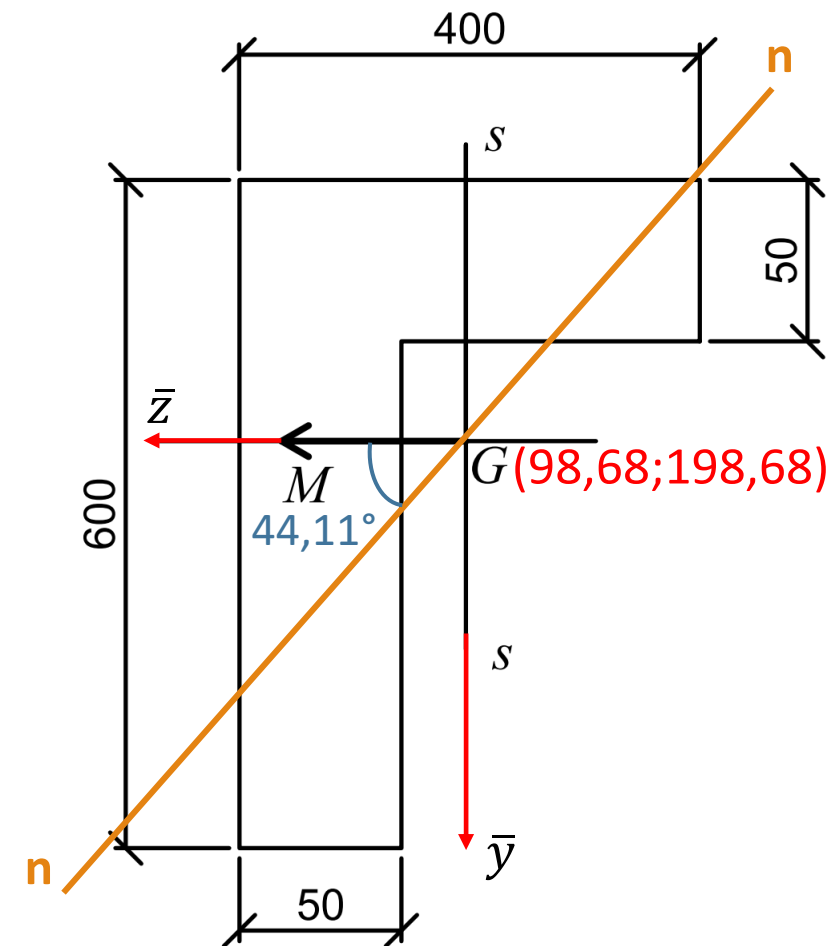
Flexão Oblíqua

b) As tensões normais máximas irão ocorrer, por inspeção, nos pontos *A* e *B* da seção, pois são aqueles mais afastados da linha neutra. Assim, basta substituir as coordenadas destes pontos na expressão abaixo:

$$\sigma_x = 0,0435\bar{y} - 0,0422\bar{z}$$

As coordenadas destes pontos em relação ao referencial $\bar{z}$ e $\bar{y}$ adotado são:

$$\begin{array}{ll} A : z_A = 98,68 \text{ mm} & y_A = -198,68 \text{ mm} \\ B : z_B = 48,68 \text{ mm} & y_B = 401,32 \text{ mm} \end{array}$$

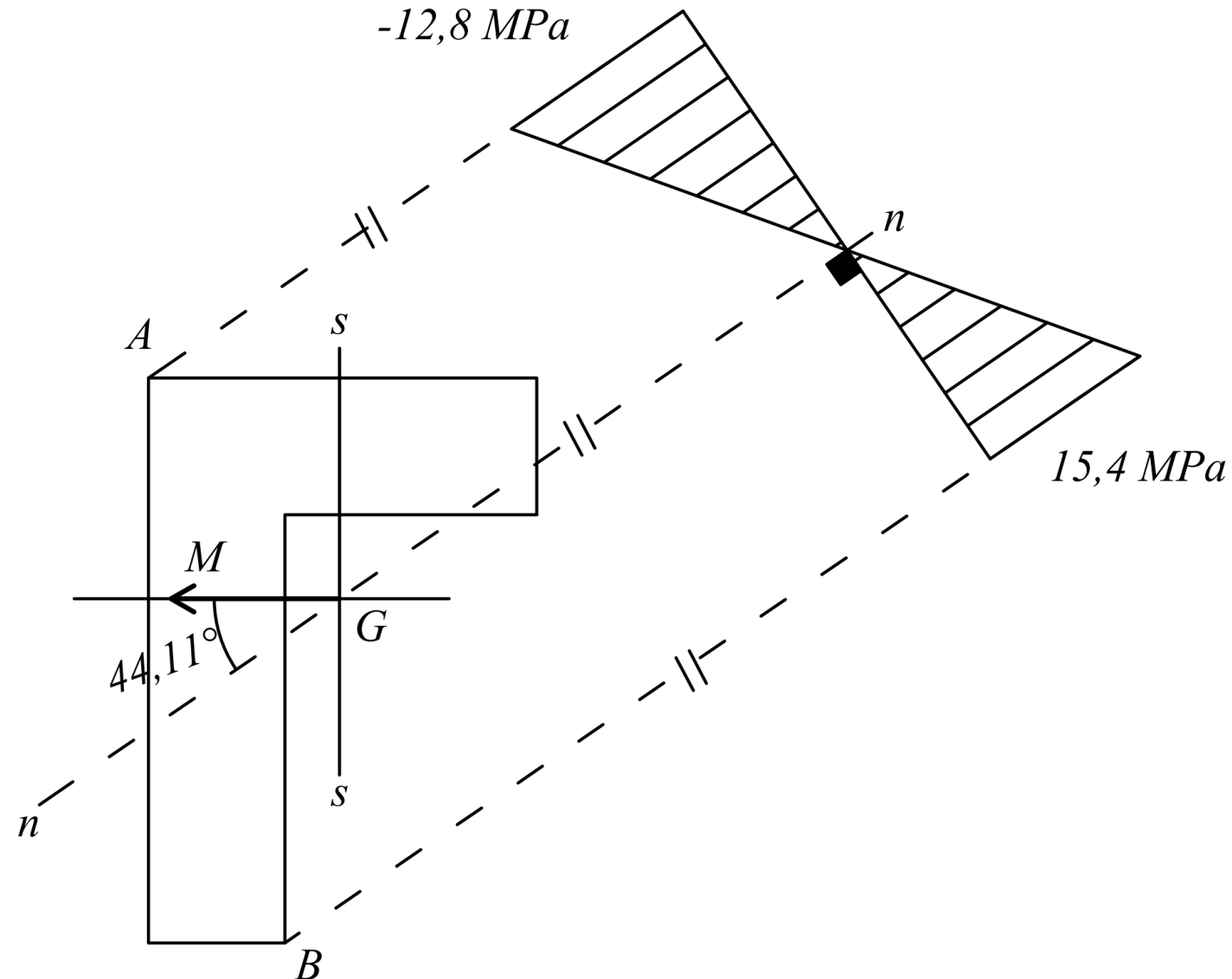


Flexão Oblíqua

Assim, tem-se:

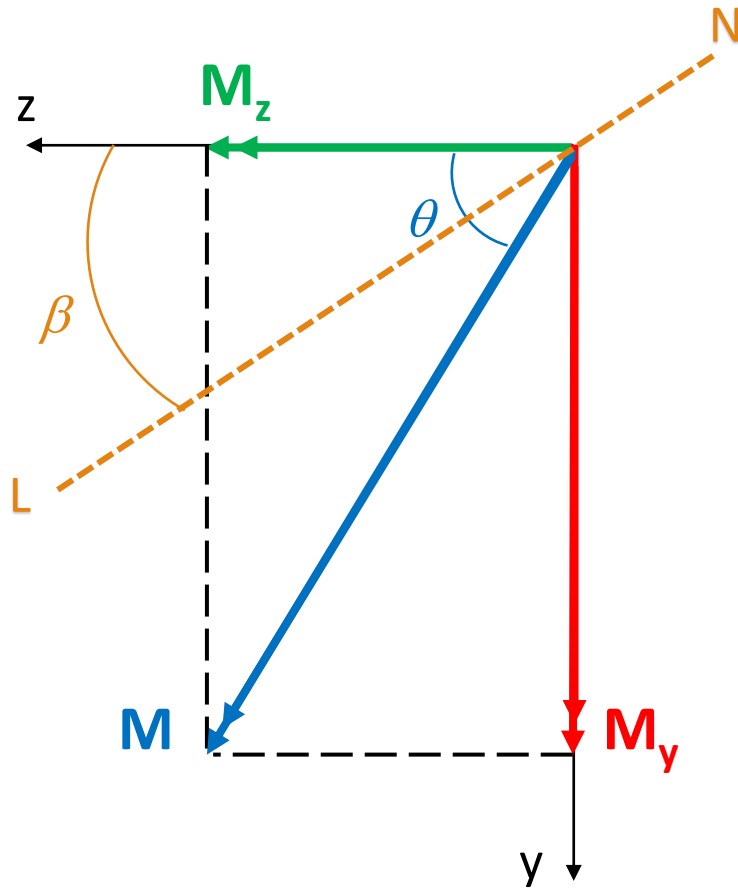
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_A = -12,80 \text{ MPa} \\ \sigma_B = 15,40 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

De posse desses valores, o diagrama de tensões é traçado como mostra a figura ao lado:



Flexão Oblíqua – Conteúdo Extra

Vejamos uma outra forma de determinar a posição da LN, baseado no referencial principal:



$$y = \left(\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \right) z \quad \tan \beta = \left(\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \right)$$

$$\tan \theta = \frac{M_y}{M_z}$$



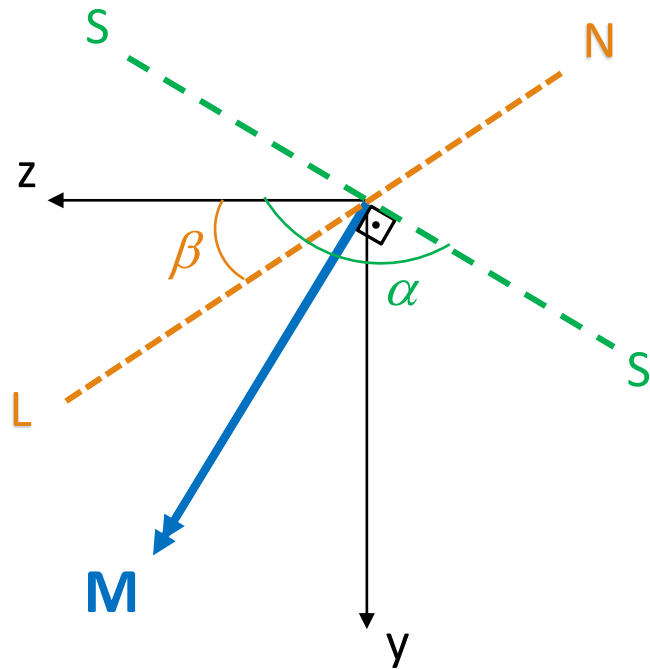
$$\tan \beta = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

$$\tan \beta \cot \theta = \frac{I_z}{I_y}$$

onde $\cot \theta = \frac{M_z}{M_y}$

Flexão Oblíqua – Conteúdo Extra

A posição da LN também pode ser determinada em função dos momentos de inércia e da direção do carregamento:



$$\tan \alpha \tan \beta = -\frac{I_z}{I_y}$$

Onde:

- α : o ângulo formado o eixo de solicitação (ss) e o eixo z principal;
- I_z e I_y : momentos de inércia em relação aos eixos z e y principais.

Atenção: Os ângulos são marcados positivamente no sentido anti-horário, a partir do eixo **z principal**.

Flexão Oblíqua

- Os slides apresentados foram livremente baseados nas Notas de Aula do prof. Elson Toledo – MAC/UFJF.
- Algumas figuras, fotos e equações presentes nos slides foram retiradas do material do prof. Leonardo Goliatt – MAC/UFJF.