

Revisão – Geometria das Massas

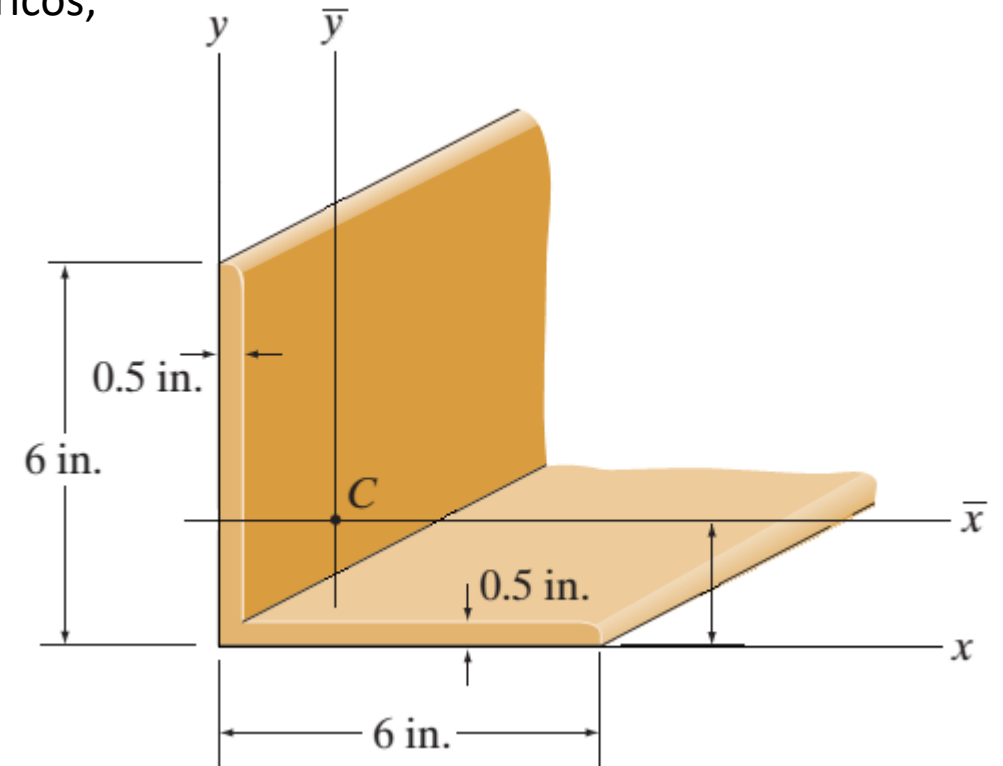
PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Exemplo

Dada a seção transversal mostrada abaixo, calcule:

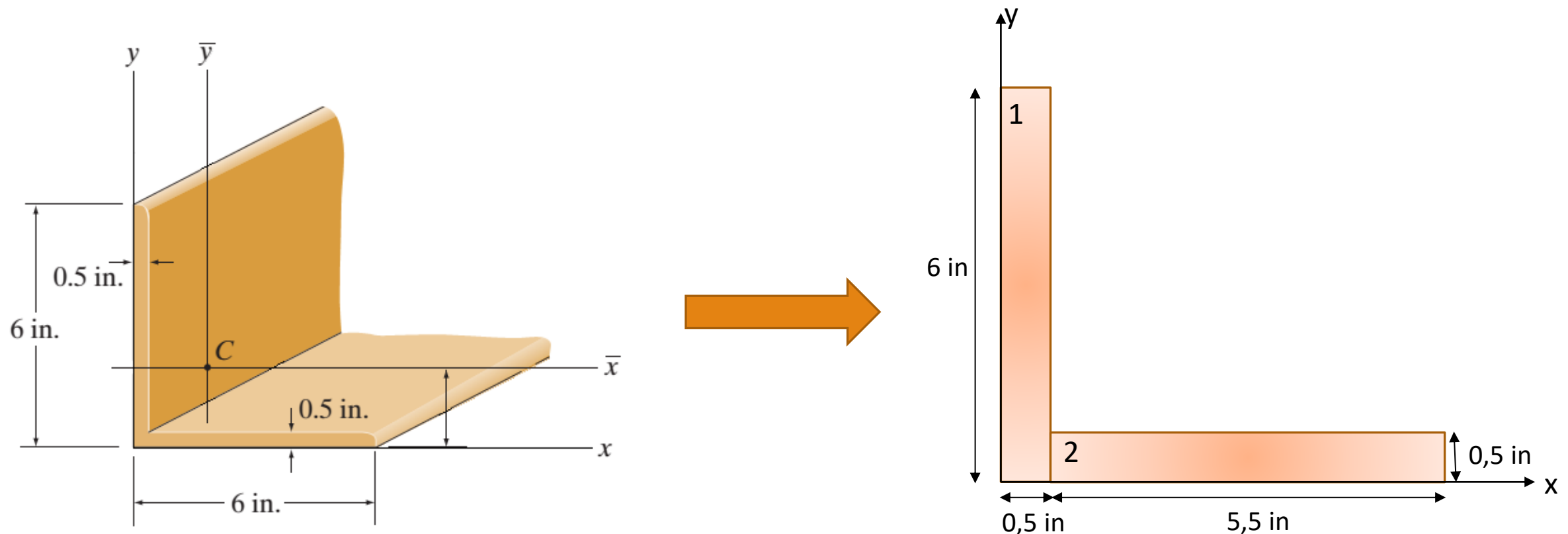
- a) As coordenadas do centroide;
- b) Os momentos e o produto de inércia com relação aos eixos baricêntricos;
- c) Os momentos e as direções principais de inércia.



Exemplo

1º passo: Adotar um par de eixos auxiliares “ $x - y$ ” que, por conveniência, deixe toda a seção no quadrante positivo.

2º passo: Subdividir a seção em figuras com geometrias conhecidas (quadrados, retângulos, círculos, semicírculos, etc.).

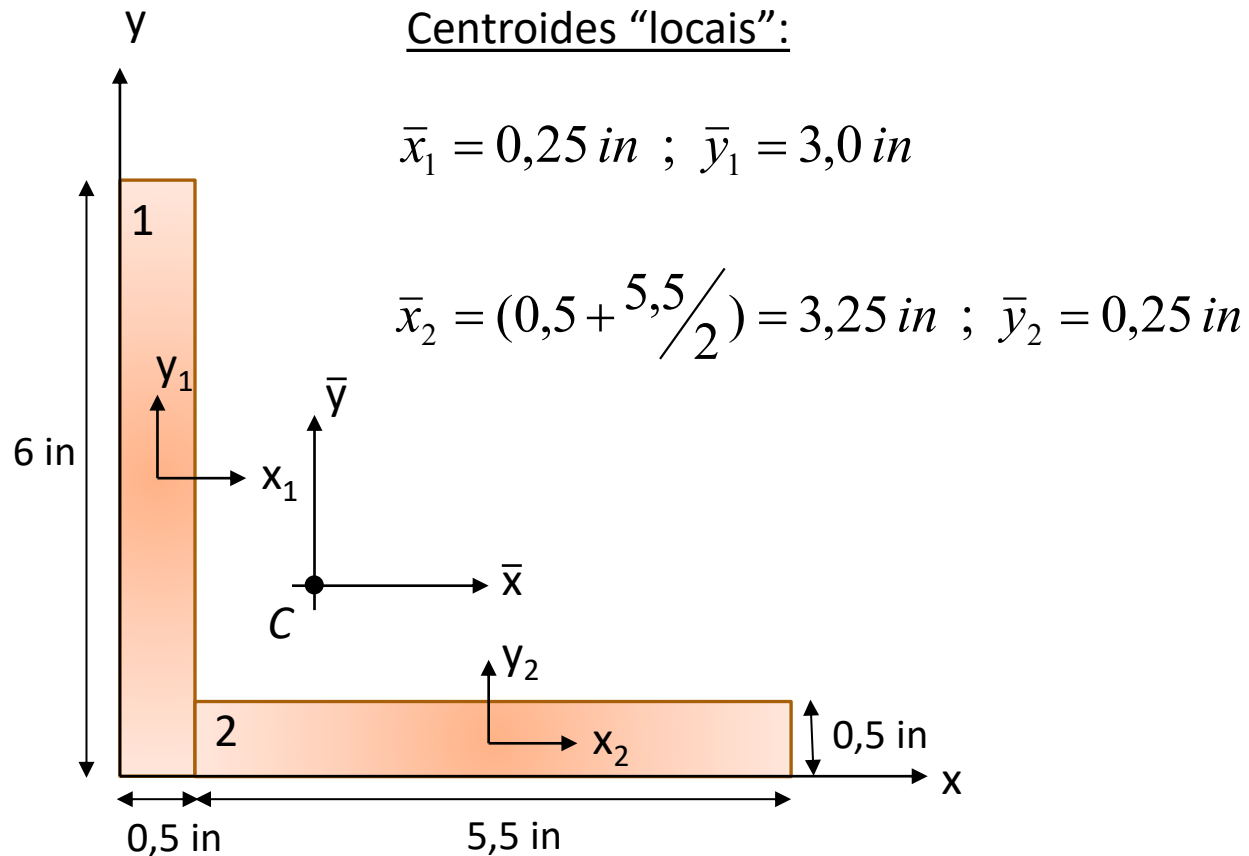


Exemplo

a) Cálculo das coordenadas do centroide C:

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int_A dA} \quad \text{ou} \quad \bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int_A dA} \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}$$



Centroide global C:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0,25 \cdot (0,5 \cdot 6,0) + 3,25 \cdot (5,5 \cdot 0,5)}{0,5 \cdot 6,0 + 5,5 \cdot 0,5}$$

$$\bar{x} = 1,685 \text{ in}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3,0 \cdot (0,5 \cdot 6,0) + 0,25 \cdot (5,5 \cdot 0,5)}{0,5 \cdot 6,0 + 5,5 \cdot 0,5}$$

$$\bar{y} = 1,685 \text{ in}$$

Exemplo

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \text{e} \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = I_{\bar{xy}} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

b) Cálculo dos momentos e produto de inércia:

$$I_x = I_{\bar{x}} + A \cdot d_y^2$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + A \cdot d_x^2$$

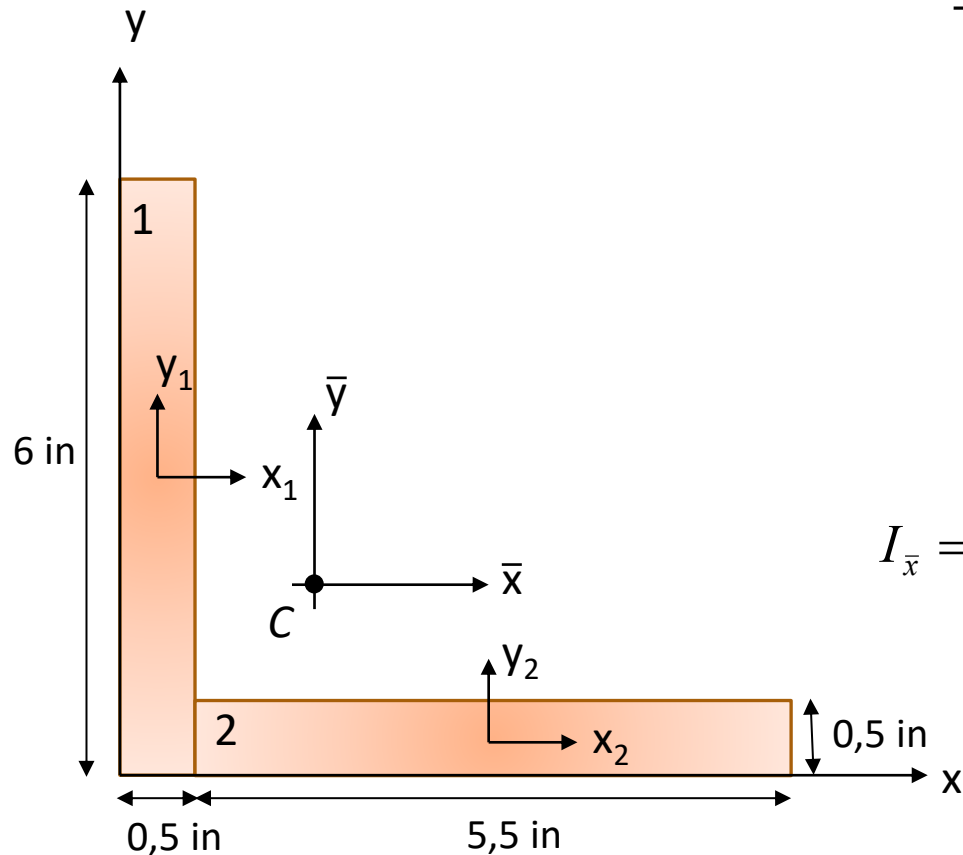
- Momento de inércia em relação a $\bar{x}$:

$$I_{\bar{x}} = I_{x_1} + I_{x_2} = \left(I_{\bar{x}_1} + A_1 \cdot d_{y_1-\bar{y}}^2 \right) + \left(I_{\bar{x}_2} + A_2 \cdot d_{y_2-\bar{y}}^2 \right)$$

$$I_{\bar{x}} = \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 \cdot d_{y_1-\bar{y}}^2 \right) + \left(\frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 \cdot d_{y_2-\bar{y}}^2 \right)$$

$$I_{\bar{x}} = \left(\frac{0,5 \cdot 6,0^3}{12} + 0,5 \cdot 6,0 \cdot (3,0 - 1,685)^2 \right) + \left(\frac{5,5 \cdot 0,5^3}{12} + 5,5 \cdot 0,5 \cdot (0,25 - 1,685)^2 \right)$$

$$I_{\bar{x}} = 19,908 \text{ in}^4$$



Exemplo

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \text{e} \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = I_{\bar{xy}} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

b) Cálculo dos momentos e produto de inércia:

$$I_x = I_{\bar{x}} + A \cdot d_y^2$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + A \cdot d_x^2$$

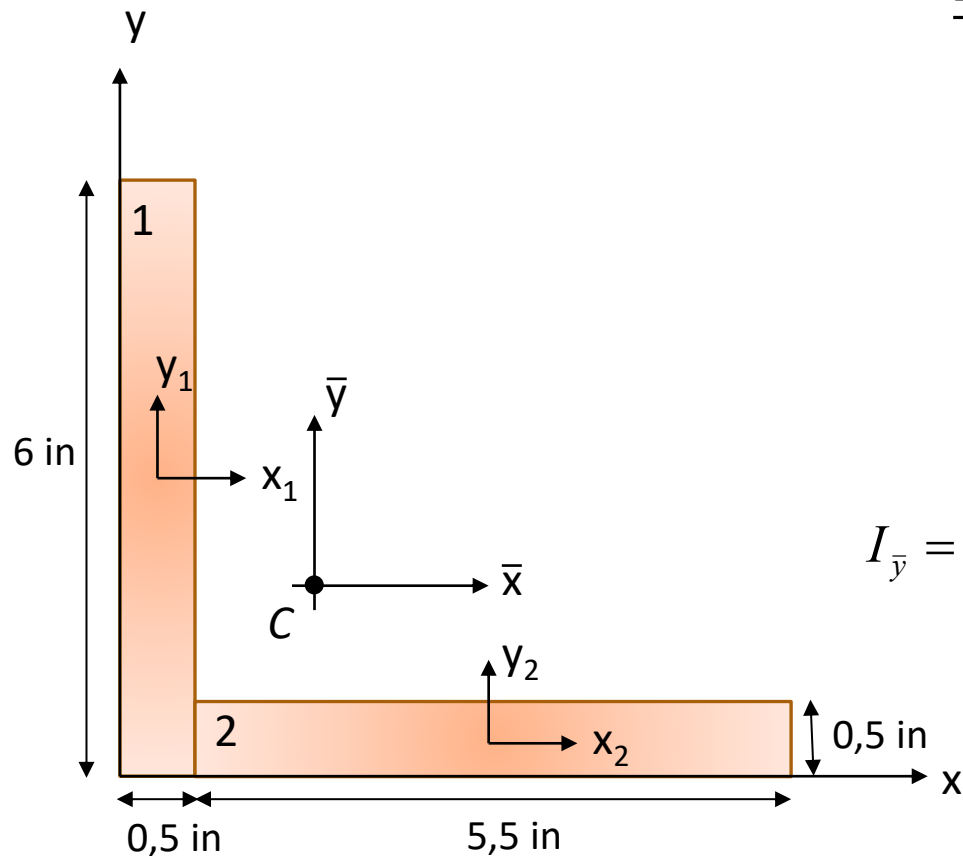
- Momento de inércia em relação a $\bar{y}$:

$$I_{\bar{y}} = I_{y_1} + I_{y_2} = (I_{\bar{y}_1} + A_1 \cdot d_{x_1-\bar{x}}^2) + (I_{\bar{y}_2} + A_2 \cdot d_{x_2-\bar{x}}^2)$$

$$I_{\bar{y}} = \left(\frac{h_1 b_1^3}{12} + h_1 b_1 \cdot d_{x_1-\bar{x}}^2 \right) + \left(\frac{h_2 b_2^3}{12} + h_2 b_2 \cdot d_{x_2-\bar{x}}^2 \right)$$

$$I_{\bar{y}} = \left(\frac{6,0 \cdot 0,5^3}{12} + 6,0 \cdot 0,5 \cdot (0,25 - 1,685)^2 \right) + \left(\frac{0,5 \cdot 5,5^3}{12} + 0,5 \cdot 5,5 \cdot (3,25 - 1,685)^2 \right)$$

$$I_{\bar{y}} = 19,908 \text{ in}^4$$



Exemplo

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \text{e} \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

b) Cálculo dos momentos e produto de inércia:

$$I_x = I_{\bar{x}} + A \cdot d_y^2$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + A \cdot d_x^2$$

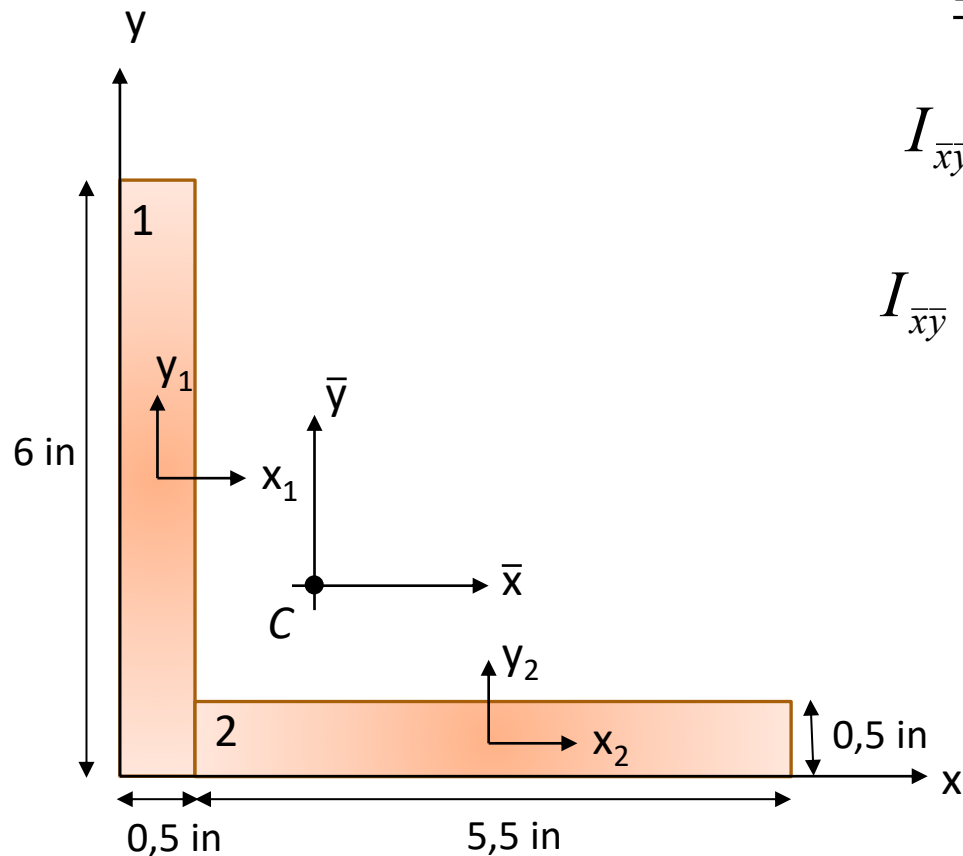
$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

- Produto de inércia:

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = (I_{xy})_1 + (I_{xy})_2 = [(I_{\bar{x}\bar{y}})_1 + A_1 \cdot d_{x_1} \cdot d_{y_1}] + [(I_{\bar{x}\bar{y}})_2 + A_2 \cdot d_{x_2} \cdot d_{y_2}]$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = [0 + 0,5 \cdot 6,0 \cdot (0,25 - 1,685) \cdot (3,0 - 1,685)] + [0 + 5,5 \cdot 0,5 \cdot (3,25 - 1,685) \cdot (0,25 - 1,685)]$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = -11,837 \text{ in}^4$$



Exemplo

c) Momentos e direções principais de inércia:

$$I_{1,2} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

- Momentos principais de inércia:

$$I_{1,2} = \left(\frac{19,908 + 19,908}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{19,908 - 19,908}{2} \right)^2 + (-11,837)^2}$$

$$I_1 = 31,745 \text{ in}^4$$

$$I_2 = 8,071 \text{ in}^4$$

Verificações:

$$I_x + I_y = I_1 + I_2$$

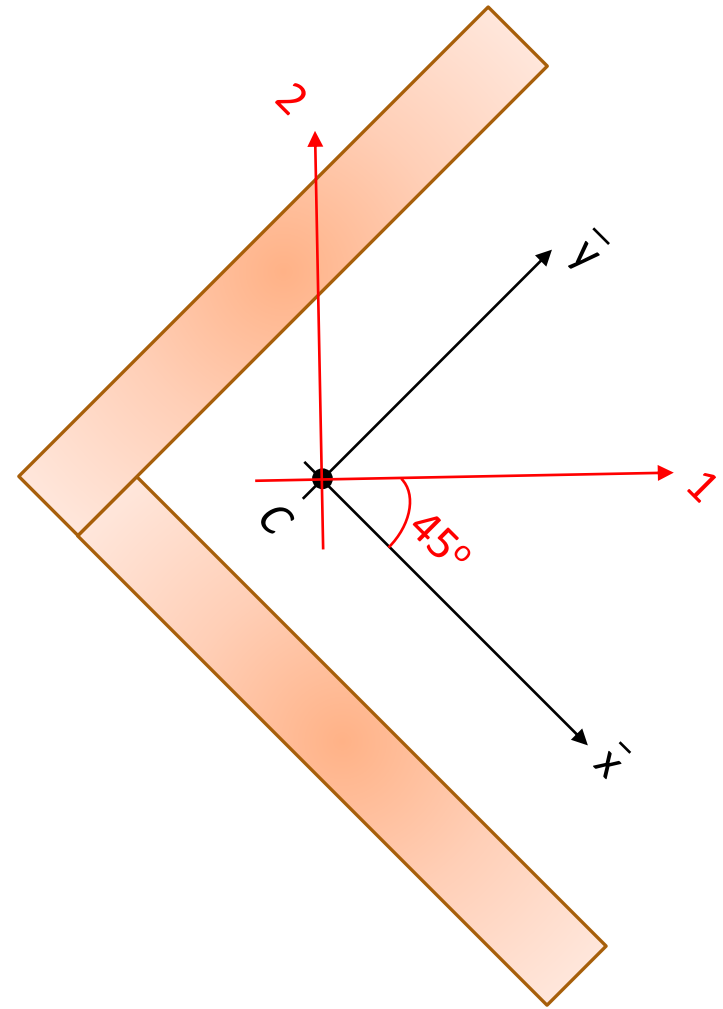
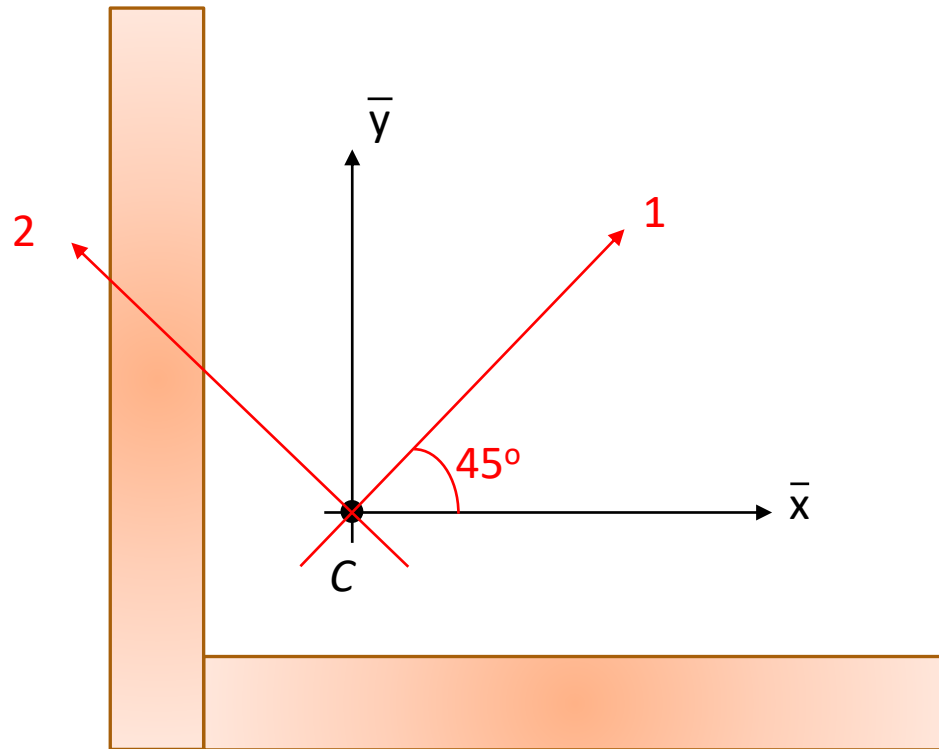
$$I_x I_y - I_{xy}^2 = I_1 I_2$$

- Direções principais de inércia:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-2(-11,837)}{19,908 - 19,908} = \infty$$

$$2\theta_p = 90^\circ \begin{cases} \nearrow \theta_{p1} = 45^\circ \\ \searrow \theta_{p2} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ \\ \text{ou} \\ \theta_{p2} = 45^\circ - 90^\circ = -45^\circ \end{cases}$$

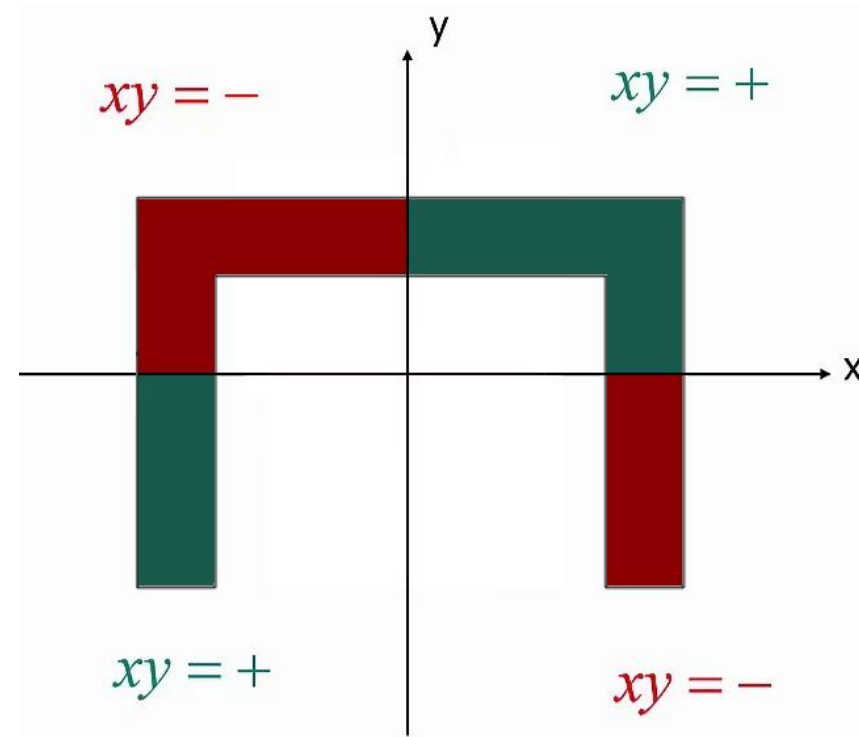
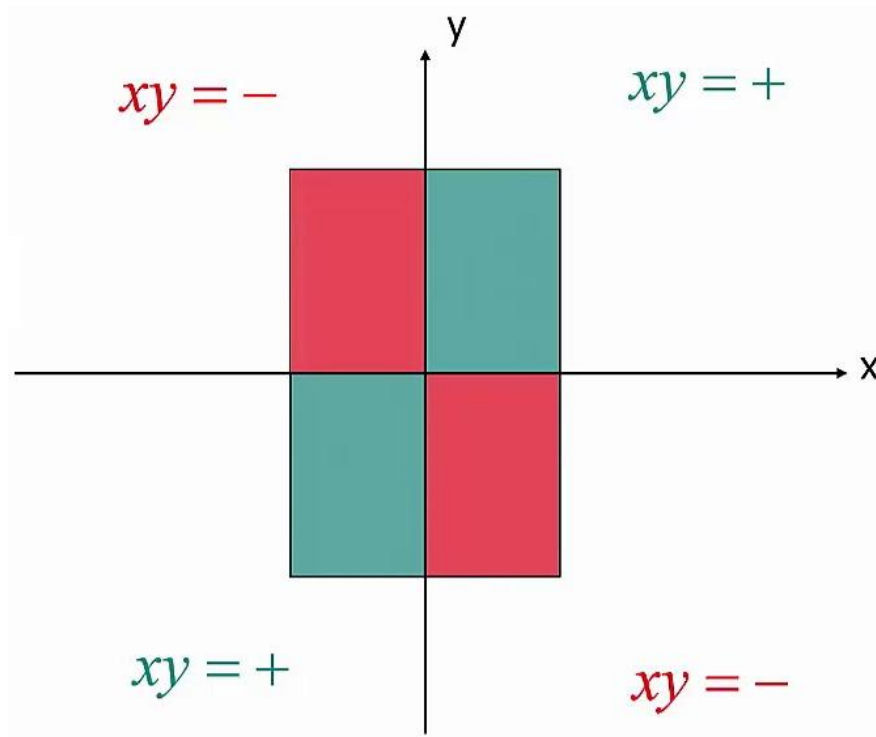
Exemplo



Pontos importantes

1) Caso a seção possua pelo menos um eixo de simetria, o produto de inércia da área em relação aos eixos é **nulo**.

Exemplos:



Pontos importantes

2) Todo eixo de simetria é eixo principal de inércia. Vejamos pelas equações mostradas anteriormente:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$I_{1,2} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

Pela equação da esquerda: se os eixos x e y são eixos de simetria, o produto de inércia da área em relação a esses eixos (I_{xy}) é nulo. Logo, a solução para as direções principais θ_{p1} e θ_{p2} será 0° e 90° .

Decorre, portanto, que **os eixos principais de inércia são os próprios eixos x e y .**

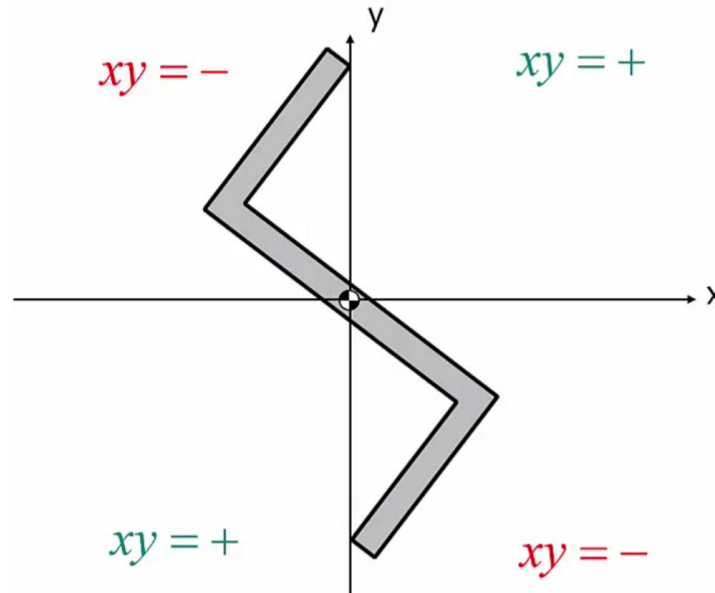
Pela equação da direita: se os eixos x e y são eixos de simetria, o produto de inércia (I_{xy}) é nulo. Logo, a solução para os momentos principais de inércia I_1 e I_2 será:

$$I_1 = I_x \text{ e } I_2 = I_y$$

Pontos importantes

Atenção: Não confundir eixos de simetria com eixos de antissimetria!

Exemplo:



Na figura acima, os eixos x e y são eixos de antissimetria. Neste caso, o produto de inércia da área da seção em relação aos eixos xy **NÃO** é nulo.

Pontos importantes

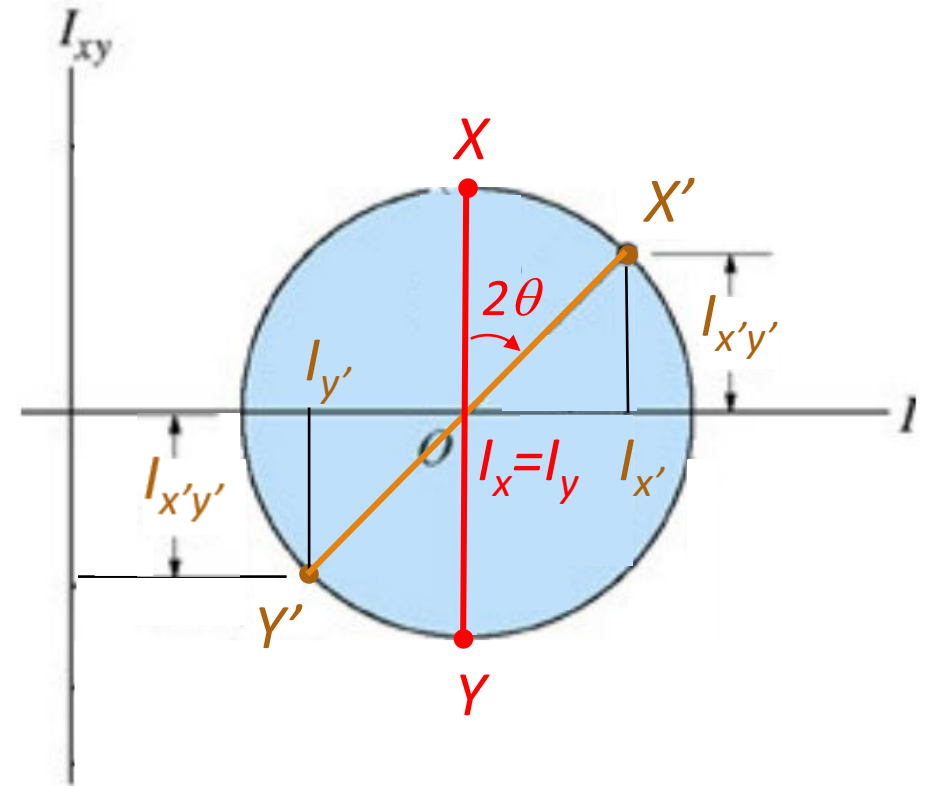
4) Transformações de momentos de inércia também podem ser feitas através de uma solução gráfica fácil de lembrar: o **Círculo de Mohr**. Aplicação semelhante será usada para transformações de tensão e deformação nas próximas aulas.

Formulação para encontrar momentos e produtos de inércia de uma figura plana em relação a um sistema de eixos $x'-y'$, orientado de um ângulo qualquer θ , com relação ao sistema de eixos $x-y$:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$



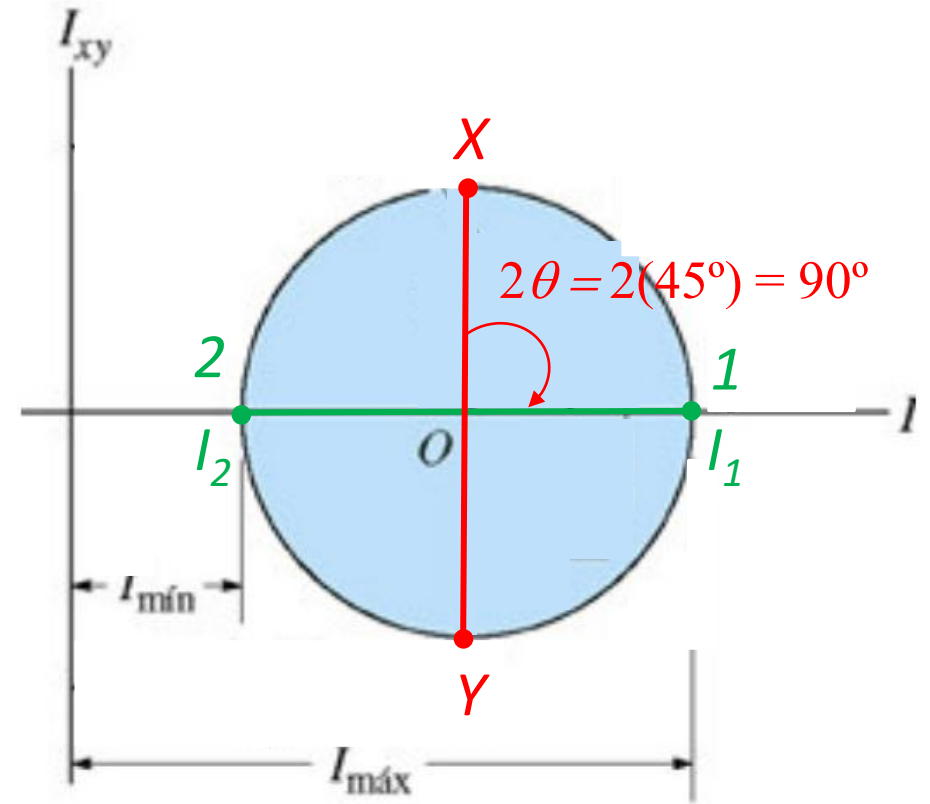
Pontos importantes

4) Transformações de momentos de inércia também podem ser feitas através de uma solução gráfica fácil de lembrar: o **Círculo de Mohr**. Aplicação semelhante será usada para transformações de tensão e deformação nas próximas aulas.

Graficamente, notamos que os valores de momento de inércia máximo e mínimo ocorrem quando substituímos $\theta = \theta_p$ nas equações de transformação de inércia apresentadas. Trata-se do giro de $\theta = \theta_p = 45^\circ$ aplicado no exemplo estudado nesta aula. No Círculo de Mohr, o giro indicado é $2\theta = 2(45^\circ) = 90^\circ$.

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$I_{1,2} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$



Pontos importantes

4) Transformações de momentos de inércia também podem ser feitas através de uma solução gráfica fácil de lembrar: o **Círculo de Mohr**. Aplicação semelhante será usada para transformações de tensão e deformação nas próximas aulas.

Graficamente, também notamos que o produto de inércia I_{xy} assume, em módulo, um valor máximo quando $I_x = I_y = I_{\text{médio}}$. Trata-se da situação inicial ($\theta = 0^\circ$) do exemplo estudado nesta aula. No Círculo de Mohr, o giro indicado é $2\theta = 2(0^\circ) = 0^\circ$.

