

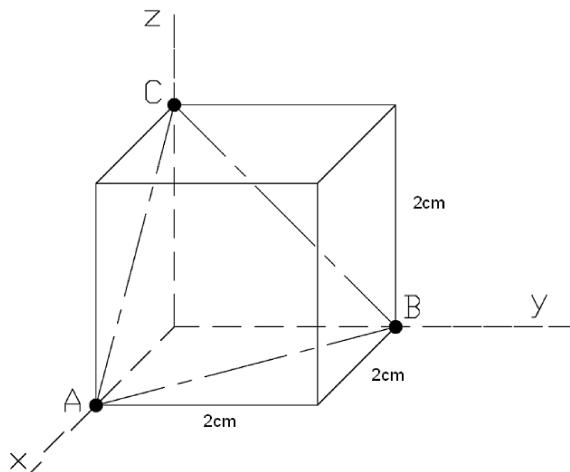
LISTA DE EXERCÍCIOS 2

PARTE 1 - ESTADO TRIAXIAL DE TENSÕES

1. Seja o tensor de tensões (em MPa) para um ponto P no espaço (x, y, z) :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 \\ -12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Para esta situação, determine o vetor tensão total ρ_n associado à direção normal ao plano que passa pelos pontos A , B e C de um cubo de aresta $\tilde{2}$ cm, conforme mostrado na figura abaixo. Em seguida, calcule as tensões normal e cisalhante atuantes nesse mesmo plano.



Respostas: $\rho_n = \left(2\sqrt{3}\hat{i}, 2\sqrt{3}\hat{j}, 4\sqrt{3}\hat{k} \right)$ MPa; $\sigma_n = 8$ MPa; $\tau_t = 2,83$ MPa

2. Para o tensor de tensões (em MPa) para um ponto P no espaço (x, y, z) mostrado abaixo, calcule:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -60 \\ 0 & -60 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) O vetor tensão total ρ_n no plano cujo vetor normal unitário é $\hat{n} = \frac{1}{3} \left(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \right)$.

(b) As tensões normal σ_n e cisalhante τ_t , neste mesmo plano.

(c) As tensões e direções principais. Em seguida, esboce o tricírculo de Mohr.

Respostas:

(a) $\rho_n = \left(16,67\hat{i} - 50\hat{j} - 16,67\hat{k} \right)$ MPa

(b) $\sigma_n = -16,67$ MPa; $\tau_t = 52,7$ MPa

(c) $\sigma_1 = 50$ MPa $e_1 = (0, \underset{\sim}{-0,6}, 0,8)$
 $\sigma_2 = 25$ MPa $e_2 = (1, \underset{\sim}{0}, 0)$
 $\sigma_3 = -75$ MPa $e_3 = (0, \underset{\sim}{0,8}, 0,6)$

3. Para o tensor de tensões (em MPa) mostrado abaixo, calcule:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{bmatrix}$$

- (a) As tensões e direções principais. Em seguida, esboce o tricírculo de Mohr;
- (b) As tensões esférica (hidrostática) e desviadora.

Respostas:

(a) $\sigma_1 = 75 \text{ MPa}$ $e_1 = (\overset{\sim}{0,8}, 0, 0,6)$

$\sigma_2 = 50 \text{ MPa}$ $e_2 = (\overset{\sim}{0}, 1, 0)$

$\sigma_3 = 25 \text{ MPa}$ $e_3 = (\overset{\sim}{0,6}, 0, -0,8)$

(b) $\sigma_E = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \text{ MPa}$ $\sigma_D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

4. Seja o tensor de tensões σ , referenciado no sistema de eixos xyz , para um ponto de uma estrutura, mostrado abaixo:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -5 \\ 10 & 5 & 15 \\ -5 & 15 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Existe algum plano no qual não atuem tensões tangenciais e cuja tensão normal seja igual a 5 MPa? Em caso afirmativo, determine a direção deste plano. Caso contrário, responda: em que circunstância isso poderia ser verdade?

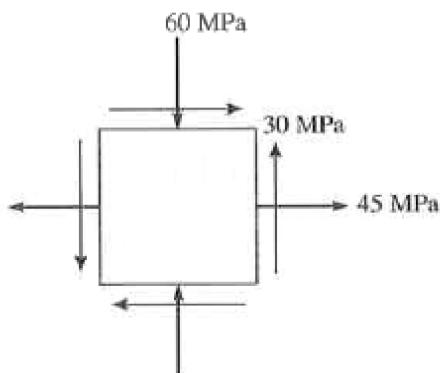
Respostas: Não, pois 5 MPa não é tensão principal. Poderia ser verdade caso 5 MPa fosse a tensão principal σ_2 .

PARTE 2 - ESTADO PLANO DE TENSÕES

5. Para um ponto sujeito a um estado plano de tensões conforme mostrado na figura abaixo, calcule:

- (a) As tensões e respectivas direções principais;

- (b) A tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média;

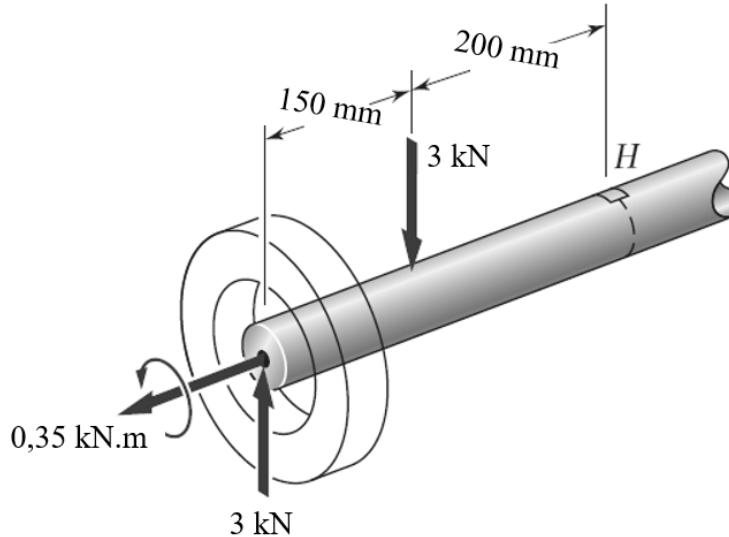


Respostas:

(a) $\sigma_1 = 52,97 \text{ MPa}$ ($\theta_1 = 14,87^\circ$); $\sigma_3 = -67,97 \text{ MPa}$ ($\theta_3 = -75,13^\circ$)

(b) $\tau_{\max} = 60,47 \text{ MPa}$; $\sigma_{med} = -7,50 \text{ MPa}$

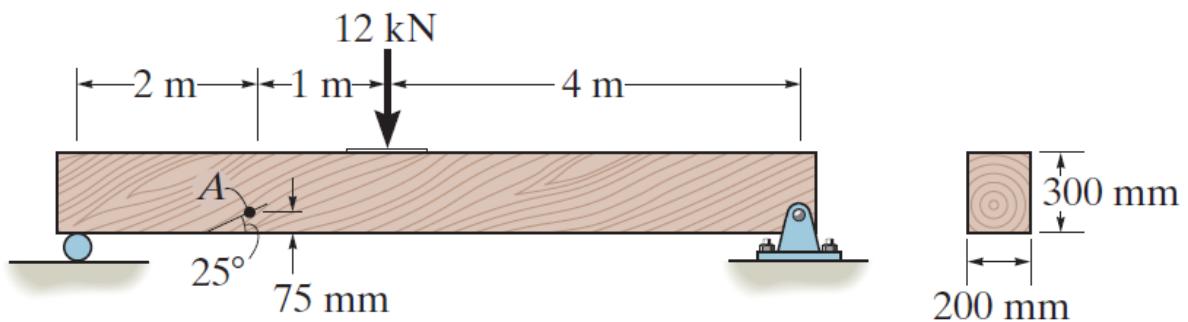
6. O eixo de uma máquina é submetido às ações representadas na figura a seguir. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto H na superfície do eixo, sabendo-se que seu diâmetro é igual a 3,2 cm.



Respostas: $\sigma_1 = 18,66 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -158,55 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 88,60 \text{ MPa}$.

7. Uma viga de madeira está sujeita à força vertical de 12 kN representada na figura a seguir. No ponto A, as fibras da madeira formam um ângulo de 25° com a direção horizontal, conforme mostrado na figura. Para essa situação, calcule:

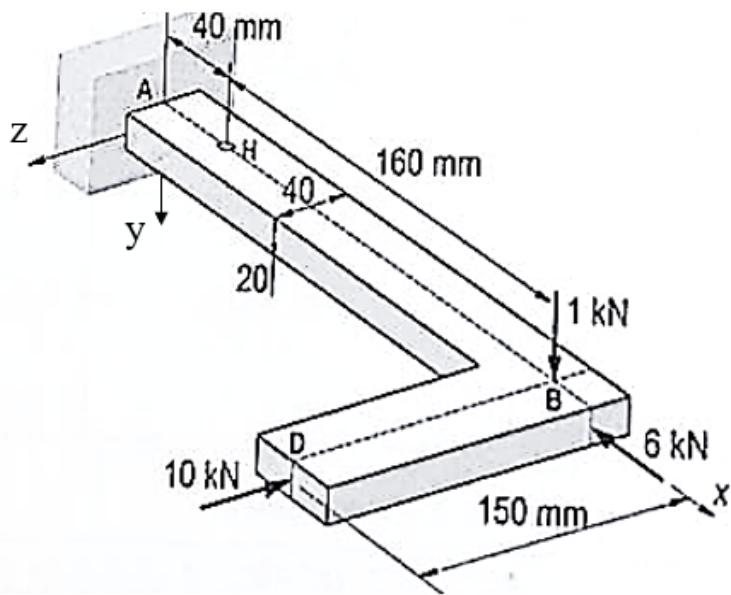
- (a) O valor absoluto das tensões normal e cisalhante que atuam no plano que define a direção das fibras no ponto A;
- (b) O valor das tensões principais e a orientação dos planos em que elas ocorrem.



Respostas:

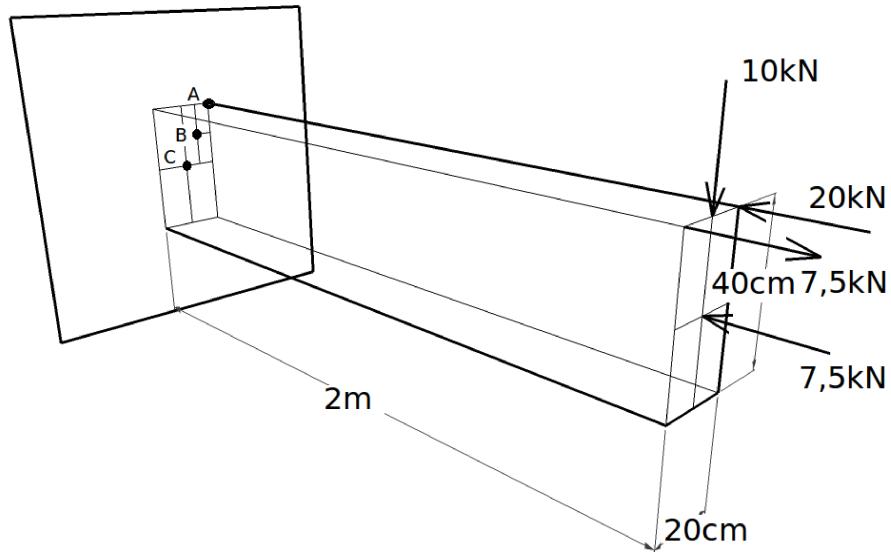
- (a) $\sigma = 0,507 \text{ MPa}$; $\tau = 0,95 \text{ MPa}$
- (b) $\sigma_1 = 2,29 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -0,00721 \text{ MPa}$, $\theta_1 = -3,21^\circ$, $\theta_3 = 86,79^\circ$.

8. Três forças são aplicadas ao componente de máquina ABD mostrado a seguir. A seção transversal no ponto H é retangular de 20 mm x 40 mm, conforme mostrado na figura abaixo. Determine as tensões normais máxima e mínima, além da tensão de cisalhamento máxima no ponto H.



Respostas: $\sigma_1 = 58,51 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -6,01 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 32,26 \text{ MPa}$

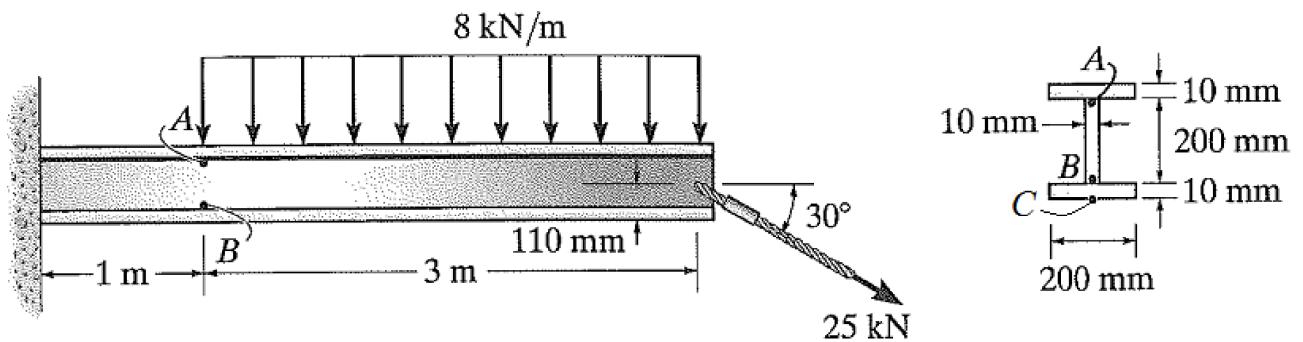
9. Para a viga mostrada na figura abaixo, esboce os círculos de Mohr para os pontos A, B e C, assumindo-se que todos estejam sujeitos a um estado plano de tensão. Indique as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima para cada ponto.



Respostas:

- Ponto A: $\sigma_{xx} = 2 \text{ MPa}$; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = 0$; $\sigma_1 = 2 \text{ MPa}$; $\sigma_3 = 0$; $\tau_{\max} = 1 \text{ MPa}$
- Ponto B: $\sigma_{xx} = 0,875 \text{ MPa}$; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = 0,141 \text{ MPa}$; $\sigma_1 = 0,897 \text{ MPa}$; $\sigma_3 = -0,022 \text{ MPa}$; $\tau_{\max} = 0,460 \text{ MPa}$
- Ponto C: $\sigma_{xx} = -0,25 \text{ MPa}$; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = 0,188 \text{ MPa}$; $\sigma_1 = 0,10 \text{ MPa}$; $\sigma_3 = -0,35 \text{ MPa}$; $\tau_{\max} = 0,225 \text{ MPa}$.

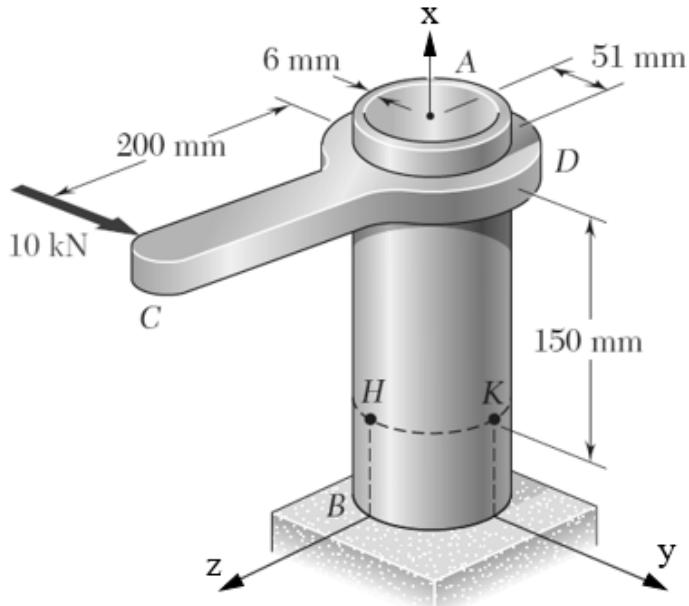
10. Para a viga mostrada na figura abaixo, esboce os círculos de Mohr para os pontos *A*, *B* e *C*, assumindo-se que todos estejam sujeitos a um estado plano de tensão. Indique as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima para cada ponto. O momento de inércia da seção, com relação ao eixo horizontal que passa pelo centroide, é igual a $5,08 \times 10^7 \text{ mm}^4$.



Respostas:

- (a) Ponto *A*: $\sigma_1 = 149,8 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -1,52 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 75,67 \text{ MPa}$.
 (b) Ponto *B*: $\sigma_1 = 1,60 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -142,7 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 72,13 \text{ MPa}$.
 (c) Ponto *C*: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -155,55 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 77,77 \text{ MPa}$.
11. O tubo de aço AB tem 102 mm de diâmetro externo e uma espessura de parede de 6 mm. Sabendo que o braço CD está rigidamente fixado ao tubo, determine:

- (a) as tensões normais máxima e mínima nos pontos *K* e *H*;
 (b) a tensão de cisalhamento máxima nos pontos *K* e *H*.



Respostas:

- a) Ponto *K*: 12,18 MPa, -48,7 MPa; Ponto *H*: 35,4 MPa, -35,4 MPa;
 b) Ponto *K*: 30,5 MPa; Ponto *H*: 35,4 MPa.

PARTE 3 - ESTADOS DE DEFORMAÇÕES E LEI DE HOOKE GENERALIZADA

12. O estado plano de deformações em um ponto é dado por:

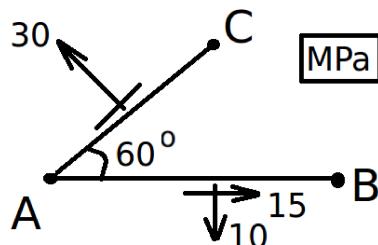
$$\varepsilon_{xx} = 480 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_{yy} = 140 \times 10^{-6}, \quad \gamma_{xy} = -350 \times 10^{-6}$$

Determine as deformações principais, direções principais e a deformação de cisalhamento máxima.

Respostas: $\varepsilon_1 = 554 \times 10^{-6}; \varepsilon_3 = 66 \times 10^{-6}; \theta_1 = -22,9^\circ; \theta_3 = 67,1^\circ; \gamma_{\max} = 488 \times 10^{-6}$

13. Um ponto em estado plano de tensões está sujeito às tensões mostradas na figura abaixo. Para esta situação e considerando $E = 2,10 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$, determine:

- (a) O tensor de tensões tomando AB como direção x ;
- (b) A variação do comprimento de um segmento na direção AC , de comprimento inicial 5 cm.



Respostas:

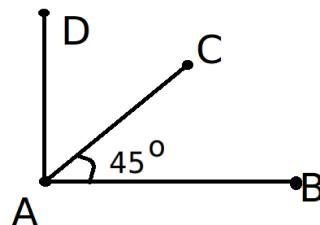
$$(a) \underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 19,35 & -15 \\ -15 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

(b) Variação do comprimento: $-0,23 \text{ mm}$.

14. Mediú-se, em torno de um ponto de uma estrutura, conforme apresentado na figura abaixo, os comprimentos $AB = 10 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ e $AD = 2 \text{ cm}$. Após realizadas essas medições, a estrutura foi submetida à ação de carregamento externo, constatando-se as seguintes variações de comprimento nesses segmentos: os segmentos AB e AC sofreram alongamentos de $0,2 \text{ mm}$ e $0,03 \text{ mm}$, respectivamente, e o segmento AD sofreu um encurtamento de $0,08 \text{ mm}$.

Tomando-se AB como sendo a direção x e considerando $E = 2,10 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$, determine:

- (a) o tensor de deformações
- (b) o tensor de tensões neste ponto.

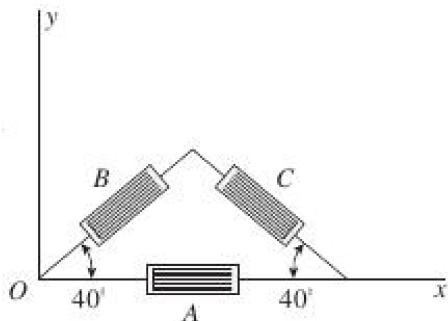


Respostas:

$$(a) \varepsilon_{xx} = 2 \times 10^{-3}; \varepsilon_{yy} = -4 \times 10^{-3}; \varepsilon_{xy} = 2 \times 10^{-3}.$$

$$(b) \sigma_{xx} = 1,846 \text{ MPa}; \sigma_{yy} = -7,846 \text{ MPa}; \tau_{xy} = 3,231 \text{ MPa}.$$

15. As deformações na superfície de um dispositivo de alumínio ($E = 70$ GPa, $\nu = 0,33$) foram medidas por uma roseta de strain-gages mostrada na figura abaixo. As deformações medidas foram: $\varepsilon_A = 1100 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_B = 1496 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_C = 39,44 \times 10^{-6}$. Para essa situação, determine o tensor de deformações e calcule a tensão normal na direção x .

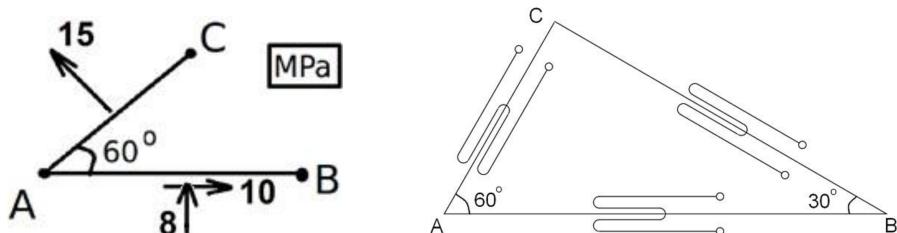


Respostas: $\varepsilon_{xx} = 1100 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_{yy} = 200 \times 10^{-6}$; $\varepsilon_{xy} = 780 \times 10^{-6}$; $\sigma_{xx} = 91,6$ MPa

16. Considere um ponto de uma estrutura sujeito a um estado de tensões conforme mostrado na figura abaixo (à esquerda). Tomando a direção AB como eixo x :

- Construa o círculo de Mohr referente ao estado de tensões no entorno deste ponto;
- Calcule o comprimento final dos segmentos AB , BC e AC , considerando-se a roseta de strain-gages mostrada na figura (à direita).

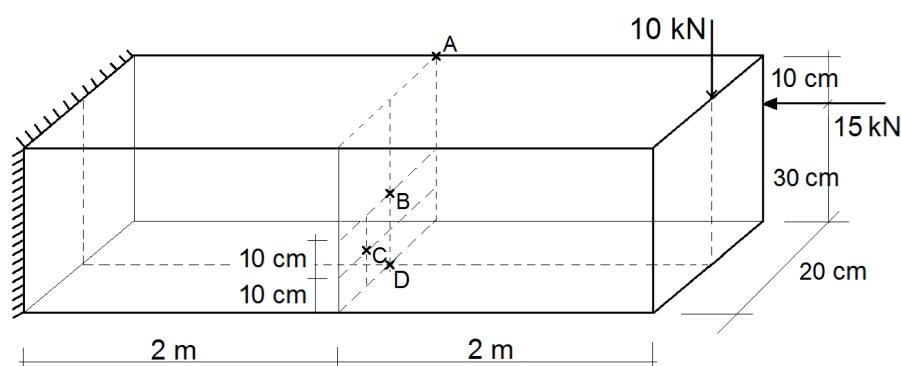
Dados: $E = 2$ GPa, $\nu = 0,3$. Comprimentos iniciais: $AC = 3$ cm e $BC = 4$ cm.



Respostas:

- $\sigma_1 = 15,39$ MPa, $\sigma_3 = -12,27$ MPa, $\tau_{\max} = 13,83$ MPa;
- $AB = 5,034$ cm, $BC = 4,037$ cm, $AC = 2,975$ cm.

17. A viga engastada e livre, de seção retangular $20\text{ cm} \times 40\text{ cm}$, está sujeita a duas cargas concentradas, conforme mostrado na figura abaixo. Trace os círculos de Mohr para os pontos A , B , C e D , indicando, em cada círculo, os valores das máximas tensões normais e tangenciais. Considere x o eixo longitudinal da viga e y e z as direções transversais.



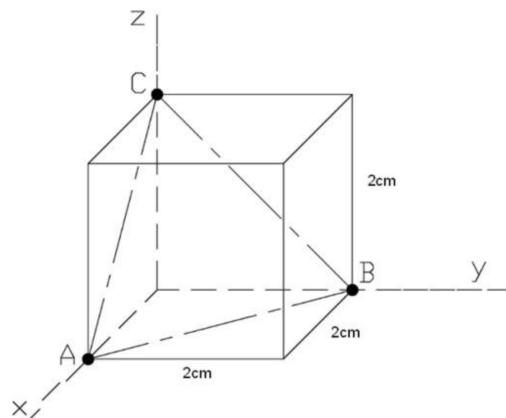
Respostas:

- (a) Ponto A: $\sigma_1 = 2,72 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{\max} = 1,36 \text{ MPa}$;
- (b) Ponto B: $\sigma_1 = 0,116 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -0,303 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 0,21 \text{ MPa}$;
- (c) Ponto C: $\sigma_1 = 0,012 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -1,65 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 0,83 \text{ MPa}$;
- (d) Ponto D: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -3,66 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 1,83 \text{ MPa}$.

18. O tensor de tensões (valores em MPa) em um ponto P , em relação ao sistema de eixos xyz , é mostrado abaixo. Sabendo-se que a tensão tangencial medida no plano que passa pelos pontos A , B e C de um cubo de 2 cm de aresta é nula, determine:

- (a) o valor de x para que haja tração na direção z , além do valor da tensão normal ao plano ABC ;
- (b) a deformação volumétrica no entorno do ponto P , considerando $E = 30 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,40$.

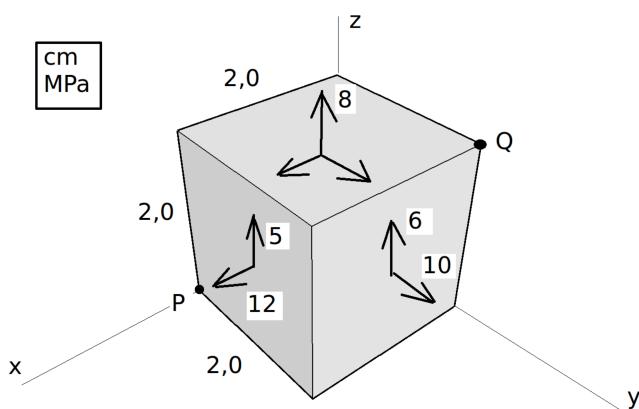
$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 \\ -12 & 0 & \mathbf{x} \end{bmatrix}$$



Respostas:

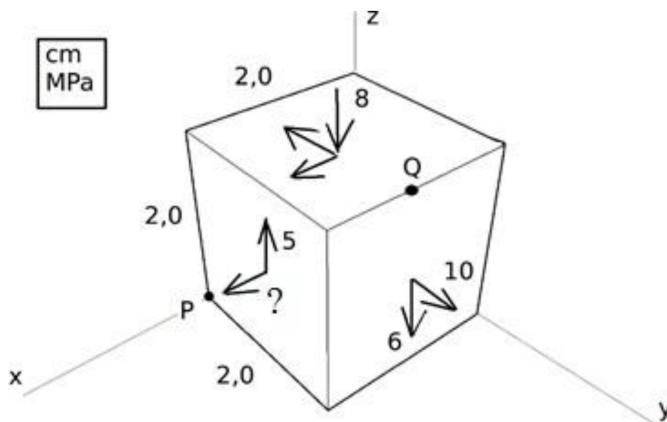
- (a) 18 MPa e 6 MPa, respectivamente;
- (b) 0,00028.

19. O estado de tensões em torno de um ponto de uma estrutura é representado pelo sólido de tensões mostrado na figura abaixo. Para esta situação, calcule o novo comprimento do segmento que liga os pontos P e Q . Considere $E = 2,10 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$.



Resposta: 34,72 mm

20. O estado de tensões em torno de um ponto de uma estrutura é dado pelas tensões indicadas na figura abaixo. Sabendo-se que o comprimento do segmento PQ , deformado, é 2,9833 cm, determine o valor de σ_{xx} , considerando $E = 2$ GPa e $\nu = 0,3$.



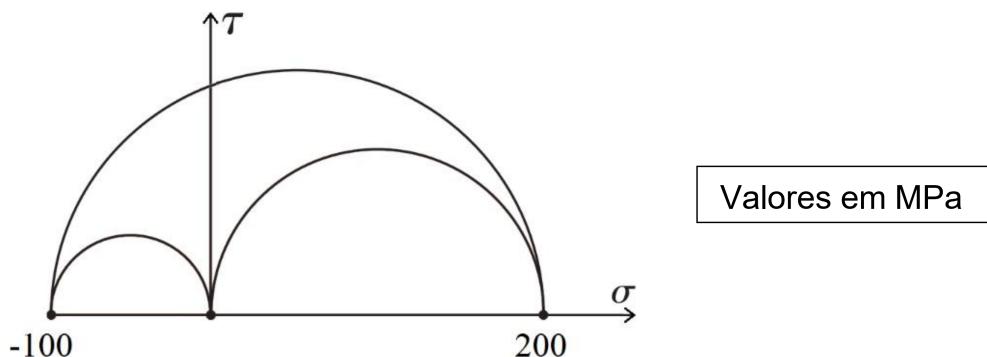
Resposta: $\sigma_{xx} = 12$ MPa.

21. Um cubo de volume inicial $V_0 = 900$ cm 3 , constituído por um material linear elástico, homogêneo e isotrópico, foi colocado dentro de uma câmara hidráulica e sujeito a um estado triaxial de compressão uniforme de 8 MPa. A redução de volume ocorrida foi de 9 cm 3 .

O mesmo sólido, em um ensaio separado do anterior, foi submetido a uma tensão tangencial $\tau_{xy} = 3$ MPa, causando uma distorção angular igual a 0,005. Determine o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν do material.

Respostas: $E = 1,44$ GPa e $\nu = 0,20$.

22. A figura abaixo ilustra o tri-círculo de Mohr referente a um ponto de uma estrutura de aço ($E = 200$ GPa e $\nu = 0,30$). Para esta situação:



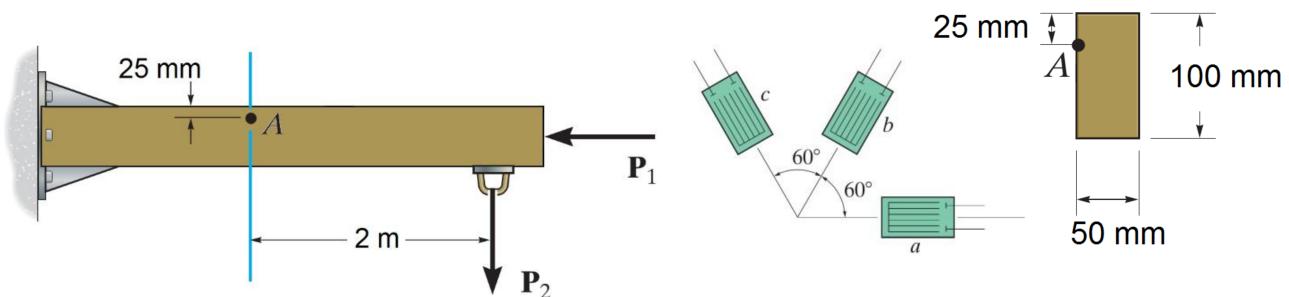
- (a) calcule as deformações lineares nas direções x , y e z , tomando-se x como direção principal onde atua uma tensão normal de tração e sabendo-se que $\sigma_{zz} = 3\sigma_{yy}$;

- (b) verifique se o estado de tensão representado pelo tensor $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 170 & -90 & 0 \\ -90 & -70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ MPa é equivalente ao ilustrado pelo tri-círculo de Mohr.

Respostas:

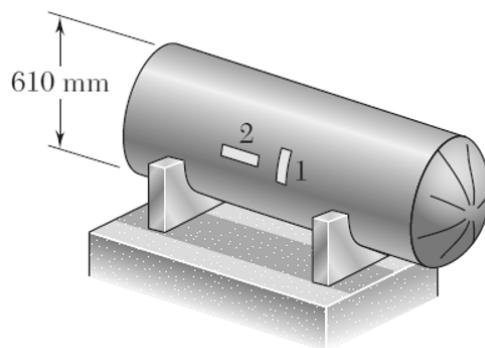
- (a) $\varepsilon_{xx} = 0,001155$, $\varepsilon_{yy} = -0,0003125$, $\varepsilon_{zz} = -0,0006375$;
 (b) Sim, pois os invariantes são idênticos.

23. Considere a viga de aço ($E = 200$ GPa e $\nu = 0,30$), engastada e livre, mostrada na figura abaixo. Sabendo-se que os *strain-gages* colados no ponto A medem $\varepsilon_a = 30 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 17,5 \times 10^{-6}$ e $\varepsilon_c = -16 \times 10^{-6}$, determine os valores de \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 .



Respostas: $P_1 = 763,49$ kN e $P_2 = 13,22$ kN.

24. Um tanque cilíndrico (diâmetro interno de 610 mm e espessura de parede de 19 mm) armazena um gás sob pressão. Os *strain-gages* 1 e 2, colados sobre a superfície do tanque nas direções transversal e longitudinal (ver figura a seguir), indicaram deformações de 255μ e 60μ , respectivamente.



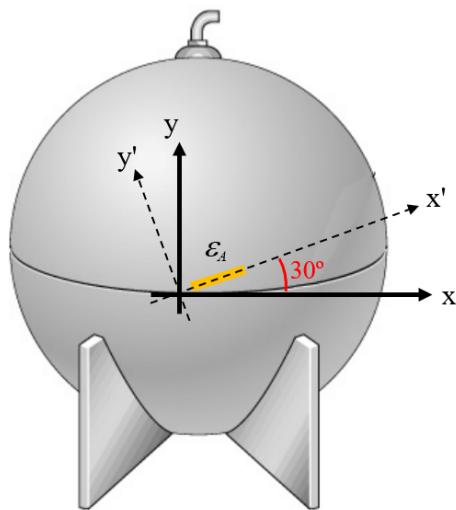
Sabendo-se que o tanque é feito de um material com módulo de elasticidade transversal $G = 77,2$ GPa, determine:

- o valor da pressão manométrica dentro do tanque;
- o coeficiente de Poisson ν e o módulo de elasticidade E do material;
- as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto onde os *strain-gages* foram colados;
- as deformações principais e a deformação de cisalhamento máxima no ponto onde os *strain-gages* foram colados;

Respostas:

- $3,75$ MPa;
- $\nu = 0,30$, $E = 200,72$ GPa;
- $\sigma_1 = 60,2$ MPa, $\sigma_2 = 30,1$ MPa, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{\max} = 30,1$ MPa;
- $\varepsilon_1 = 255 \mu$, $\varepsilon_2 = 60 \mu$, $\varepsilon_3 = -135 \mu$, $\gamma_{\max} = 390 \mu$.

25. Na superfície de um tanque esférico de parede fina pressurizado, um *strain-gage* ε_A , colado na direção indicada na figura, forneceu a leitura de $819 \mu\varepsilon$. O tanque é feito de um material com coeficiente de Poisson igual a 0,29 e módulo de elasticidade longitudinal igual a 200 GPa.
- Calcule a pressão interna no tanque;
 - Calcule a máxima tensão de cisalhamento e esboce o tricírculo de Mohr que representa o estado de tensões onde o *strain-gage* ε_A está colado.



Respostas:

- 4,614 MPa;
- 115,35 MPa.