

Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional
Faculdade de Engenharia
Universidade Federal Juiz de Fora - MG

Apostila de Resistência dos Materiais II

UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Prof. Elson Magalhães Toledo (emtc@lncc.br)
Prof. Alexandre Abrahão Cury (alexandre.cury@ufjf.br)
Profa. Flávia de Souza Bastos (flavia.bastos@ufjf.br)

Sumário

1	Teoria da Flexão Oblíqua	1
1.1	Introdução	1
1.2	Caracterização da Flexão Oblíqua	3
1.3	Caracterização das Deformações e das Tensões na Flexão Oblíqua	3
1.4	Cálculo das Tensões Normais na Flexão Oblíqua	5
1.4.1	Tensões na Flexão Oblíqua segundo eixos baricêntricos quaisquer	5
1.5	EXEMPLO 1	6
1.5.1	Geometria das massas	7
1.5.2	Cálculo das tensões a partir dos eixos baricêntricos (\equiv principais de inércia neste caso)	7
1.5.3	Diagrama de tensões	8
1.6	EXEMPLO 2	8
1.6.1	Geometria das massas	8
1.6.2	Cálculo das tensões pela projeção de M em eixos quaisquer (eixos não principais de inércia)	10
1.6.3	Diagrama de tensões	11
1.7	EXEMPLO 3	11
1.7.1	Geometria das massas	11
1.7.2	Cálculo das tensões pela projeção de M sobre os eixos baricêntricos (eixos não principais de inércia)	12
2	Teoria da Flexão Composta	13
2.1	Introdução	13
2.2	Ocorrências Usuais	13
2.3	Distribuição de Tensões	13
2.4	Determinação da linha neutra (nn)	15
2.4.1	Equação da linha neutra	15
2.5	EXEMPLO 4	16
2.6	EXEMPLO 5	18
2.7	Núcleo Central de Inércia	20
2.7.1	Conceito	20
2.7.2	Obtenção do Núcleo Central de Inércia	20
2.8	EXEMPLO 6	22
3	Estado Triaxial de Tensões	23
3.1	Introdução	23
3.1.1	Caso da barra sujeita a esforço axial	23
3.2	Tensão: Conceito e Definição	25
3.2.1	Matriz de tensões num ponto	26
3.2.2	Convenção de Sinais	27
3.2.3	Simetria da matriz de tensões	27
3.3	Vetor tensão total num plano qualquer	28
3.3.1	Cálculo das tensões normal e tangencial num plano qualquer	30
3.4	EXEMPLO 7	31
3.5	Tensões Principais	32
3.5.1	Conceito	32
3.5.2	Determinação das tensões principais	32
3.5.3	Invariantes do tensor de tensões	33
3.6	Máxima Tensão Cisalhante	33
3.6.1	Cálculo das tensões tangenciais extremas	35
3.7	Decomposição do tensor de tensões	36
3.8	EXEMPLO 8	37

3.9	EXEMPLO 9	40
3.10	Aplicação ao caso do Estado Plano de Tensões	42
3.10.1	Introdução	42
3.10.2	Caso particular do problema 3D	43
3.10.3	Tensões Principais	44
3.10.4	Tensões Tangenciais Máximas	45
3.10.5	Círculo de Mohr	46
4	Estado de Deformações	53
4.1	Introdução	53
4.1.1	Deslocamentos e Medidas de Deformações	53
4.1.2	Redefinição da medida da deformação linear	54
4.2	Relações Deslocamento \times Deformação	55
4.2.1	Deformações Lineares	55
4.2.2	Deformações Angulares	56
4.2.3	Tensor de Deformação	57
4.3	Cálculo de Deformações numa direção qualquer	57
4.3.1	Deformações Lineares em direções quaisquer	57
4.3.2	Deformações Angulares em planos quaisquer	60
4.4	Deformações Principais no Estado Triaxial de Deformações	61
4.5	EXEMPLO 10 - Estado triaxial de deformação	62
4.6	Estado Plano de Deformações	63
4.6.1	Deformações Normais e Cisalhantes numa Direção Qualquer	63
4.6.2	Deformações Principais no Estado Plano de Deformações	64
4.6.3	Círculo de Mohr para Estado Plano de Deformações	64
4.7	Análise Experimental - <i>Strain-Gages</i>	65
4.8	EXEMPLO 11 - Estado plano de deformação	65
4.9	Lei de Hooke generalizada	67
4.9.1	Ensaio de tração	67
4.9.2	Ensaio de compressão	70
4.9.3	Ensaio de torção	70
4.9.4	Lei de Hooke Generalizada	70
4.10	Continuação do Exemplo 11	71
4.11	EXEMPLO 12 - Estado plano de deformação	72
4.12	Deformação Volumétrica	73
4.12.1	Deformação volumétrica em termos de tensão	74
5	Critérios de Falha	75
5.1	Introdução	75
5.2	Critérios de falha para materiais frágeis	76
5.2.1	Critério de Rankine ou de Coulomb	76
5.2.2	Critério de Mohr	77
5.3	Critérios de falha para materiais dúcteis	78
5.3.1	Critério de Tresca	78
5.3.2	Critério de von Mises	81
5.3.3	Comparativo entre os critérios de Tresca e de von Mises	82
6	Flambagem	85
6.1	Introdução	85
6.2	Carga Crítica de Euler (Casos perfeitos)	87
6.2.1	Caso bi-rotulado	87
6.2.2	Caso engaste-engaste	88
6.2.3	Caso engaste-livre	90
6.2.4	Caso engaste-rótula	91
6.2.5	Resumo	92
6.2.6	Hipérbole de Euler	93
6.3	Casos com Imperfeições Iniciais	93
6.3.1	Barras com Carga Excêntrica	93
6.3.2	Máximo momento fletor - Fórmula secante	95
6.3.3	Colunas com curvatura inicial	96
6.4	Observação Final	97
7	Conteúdos extras	101
7.1	Apêndice - Revisão de Geometria das Massas	101

7.1.1	Rotação de eixos	101
7.1.2	Eixos principais de inércia	102
7.1.3	Momentos principais de inércia	102
7.1.4	Roteiro	102
7.2	Apêndices - Capítulo 1 - Teoria da Flexão Oblíqua	103
7.2.1	Tensões Normais na Flexão Oblíqua	103
7.2.2	Solução alternativa para o exemplo 1	107
7.2.3	Soluções alternativas para o exemplo 2	108
7.2.4	Soluções alternativas para o exemplo 3	111
7.3	Apêndices - Capítulo 2 - Teoria da Flexão Composta	113
7.3.1	Paralelismo entre as LN's da Flexão Oblíqua e da Flexão Composta	113
7.3.2	Análise de tensões	114
7.3.3	Teoria complementar acerca do Núcleo Central de Inércia	114
7.3.4	Propriedade Fundamental da Antipolaridade	115
7.4	Apêndices - Capítulo 3 - Estado Triaxial de Tensões	118
7.4.1	EXEMPLO 1 - Tratamento para o caso da barra a esforço axial	118
7.4.2	Rotação do tensor de tensões	122
7.4.3	Ortogonalidade das direções principais	126
7.4.4	Estacionaridade das Tensões Principais	127
7.4.5	Tensões Octaédricas	128
7.4.6	Equação de um plano	129
7.5	Apêndices - Capítulo 4 - Estado Deformações	130
7.5.1	Rotação do Tensor de Deformação	130
7.6	Apêndices - Capítulo 6 - Flambagem	131
7.6.1	Dimensionamento à flambagem - AISC	131
7.6.2	Flambagem com Grandes Deformações	131
7.6.3	Ação simultânea - normal e momento fletor - Viga-Coluna	132
7.6.4	Métodos numéricos para a determinação de cargas críticas	134
7.7	Apêndice - Estudo da Energia de Deformação	137
7.7.1	Introdução	137
7.7.2	Trabalho de uma força	137
7.7.3	Energia de Deformação para um estado triaxial de tensões	139
7.7.4	Energia de deformação em função dos esforços em barras prismáticas	141
7.7.5	Cálculo do coeficiente k	142

Notas e agradecimentos

Esta apostila contém, em sua maior parte, as notas de aula manuscritas do Prof. Elson Toledo que dedicou parte de sua vida acadêmica ao magistério da disciplina Resistência dos Materiais II na UFJF. Agradecemos a grande colaboração dos Profs. Flávia de Souza Bastos e Alexandre Abrahão Cury, por terem redigido parte deste material e revisado-o, além dos ex-monitores, hoje engenheiros, Laio Arantes pela digitalização completa dos Capítulos 3 e 4, Emerson Galdino pela produção de figuras do Capítulo 1, Lucas Teotônio pelas figuras dos Capítulos 4 e 6 e Bruno Brugnara, pela revisão geral e redação da seção 4.9.



UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Capítulo 1

Teoria da Flexão Oblíqua

1.1 Introdução

O estudo da teoria da flexão de vigas realizado no curso de Resistência dos Materiais I restringe-se ao caso da denominada *flexão reta*, caracterizada pelo fato de o carregamento agir num plano - denominado *plano de solicitação* (PS) - que coincide com um dos eixos principais de inércia da seção transversal, conforme mostrado nas Figs 1.1a e 1.2a. Assim, denominamos **eixo de solicitação** (ss), a direção na qual incide o carregamento (força) e temos que o vetor momento fletor atuante (M) na seção é perpendicular a ss (Figs. 1.1b e 1.2b). Sobre a linha de atuação do vetor momento fletor M , está a **linha neutra** (LN ou nn) desta flexão reta, que é definida pelo lugar geométrico dos pontos da seção onde a tensão normal é nula.

Nas Figs. 1.1 e 1.2 ilustramos as duas possíveis ocorrências de flexão reta em seções retangulares com carregamentos em um plano vertical (Fig. 1.1) ou em um plano horizontal (Fig. 1.2). <https://www.overleaf.com/project/6310f3afaad43975cc2b2f79>

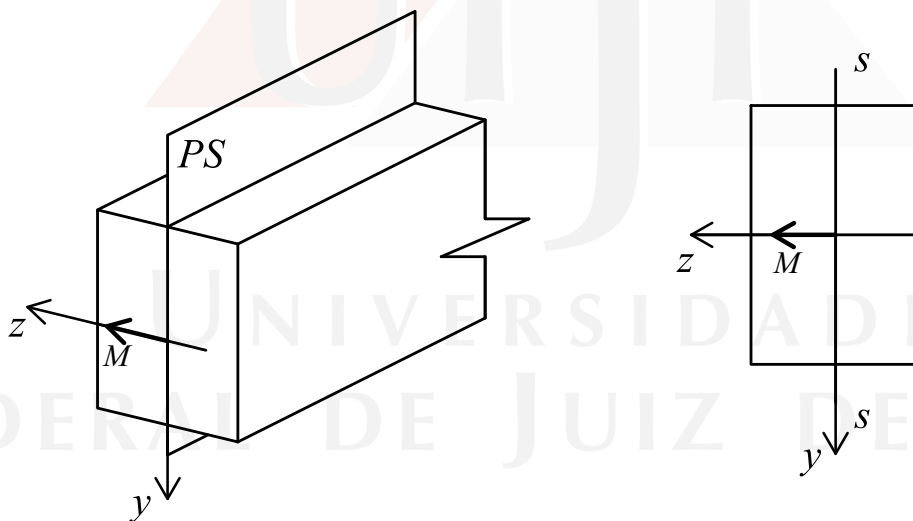


Figura 1.1: Viga retangular em flexão reta - Plano de Solicitação vertical

Para seções T e U constatamos, também, duas possibilidades de ocorrência de flexão reta, conforme ilustram as Figs. 1.3 a 1.5.

Observa-se, nos casos mostrados anteriormente, que o plano em que ocorre a flexão é o mesmo do plano de solicitação. Além disso, $nn \perp ss$, já que estes são os eixos principais de inércia da seção. Por ocorrer em seções com algum eixo de simetria, esta flexão é também designada por alguns autores como **flexão simétrica**.

Ainda como último exemplo, apresentamos o caso de uma viga de seção de abas iguais, com plano de solicitação cortando a seção segundo um dos eixos principais de inércia da seção (Fig. 1.6).

As Figs. 1.7 e 1.8 mostram que, dependendo do plano de solicitação, mesmo seções com dois eixos de simetria (como no caso de seções retangulares) estarão submetidas a um tipo de flexão diferente da descrita anteriormente. Assim, por contraposição, este tipo de flexão é denominado de **flexão assimétrica, oblíqua ou desviada**.

Nestes casos, a **linha neutra nn não é perpendicular ao eixo de solicitação ss** . Assim, a resolução dos problemas de verificação de tensões ou de determinação de máxima carga portante nos obriga a determinar a posição

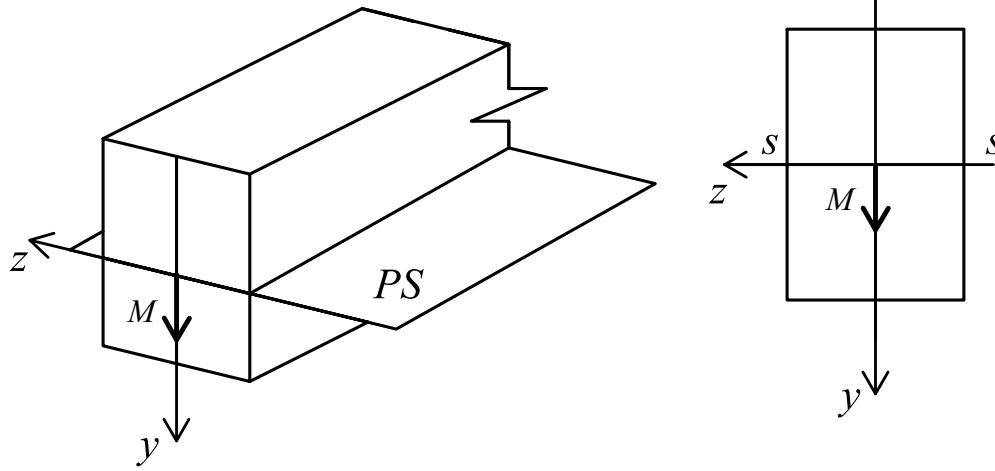


Figura 1.2: Viga retangular em flexão reta - Plano de Solicitação horizontal

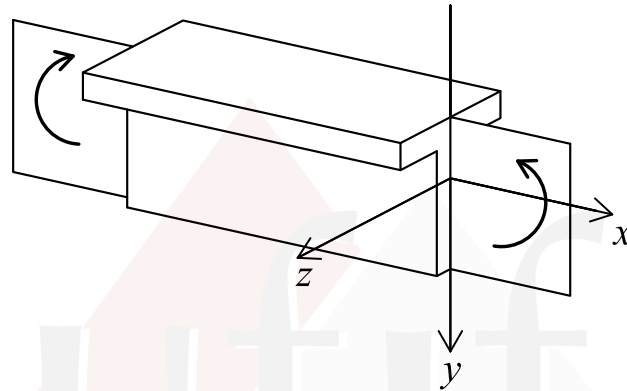


Figura 1.3: Viga T em flexão reta - Plano de Solicitação vertical

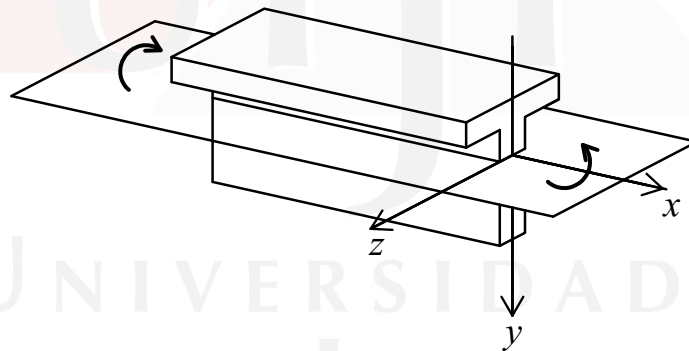


Figura 1.4: Viga T em flexão reta - Plano de Solicitação horizontal



Figura 1.5: a) Viga U com ss - vertical; b) Viga U com ss - horizontal

da linha neutra (nn) a partir do conhecimento da posição do eixo de solicitação (ss), que é dado pelo carregamento.

Além dos casos de ocorrência exemplificados anteriormente em vigas, é importante mencionar o caso de pilares de pórticos espaciais que são frequentemente solicitados por flexão oblíqua combinada com esforço normal, além de peças componentes de estruturas de telhados.

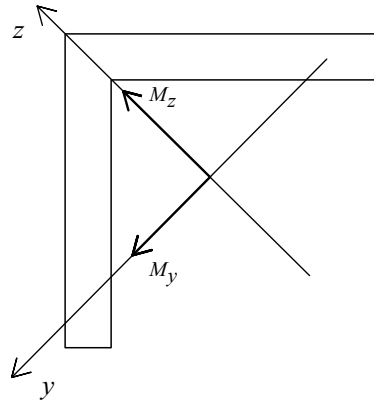


Figura 1.6: Viga cantoneira com abas iguais em flexão reta

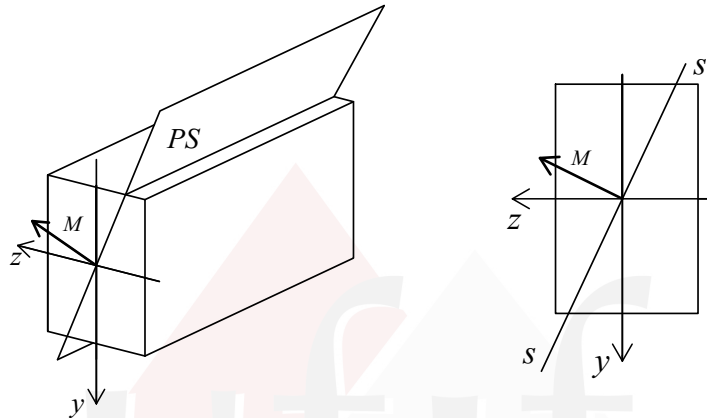


Figura 1.7: Viga retangular em flexão oblíqua - Plano de Solicitação inclinado

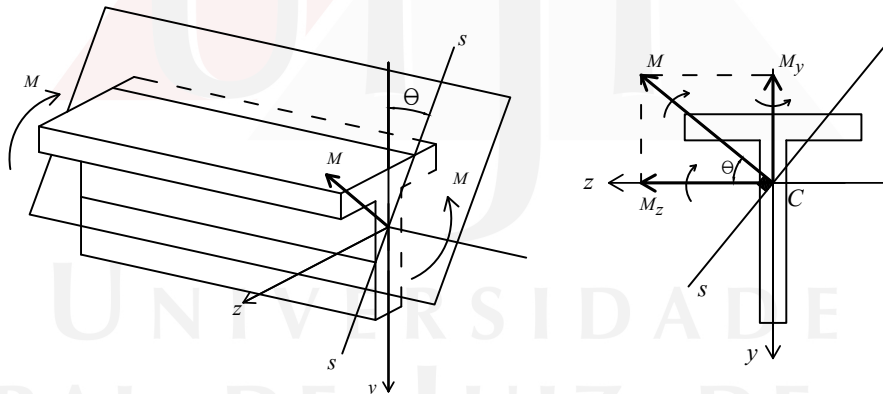


Figura 1.8: Viga T submetida à flexão oblíqua

1.2 Caracterização da Flexão Oblíqua

A flexão oblíqua caracteriza-se quando a redução do sistema de forças de um lado da seção fornecer:

$$N = 0 \quad Q = 0 \quad M_t = 0 \tag{1.1}$$

$$M \neq 0 \rightarrow M = M_y + M_z \text{ (vetorialmente, com } M_y \neq 0 \text{ e } M_z \neq 0) \tag{1.2}$$

onde, na Eq. 1.2, y e z são os eixos principais de inércia da seção considerada e N , Q e M_t são, respectivamente, os esforços normal, cortante e torsor.

1.3 Caracterização das Deformações e das Tensões na Flexão Oblíqua

De modo similar ao que ocorre na flexão reta, assumimos, também, no caso da flexão oblíqua, que as seções transversais, após as deformações, permanecem planas e normais ao eixo longitudinal deformado da peça. As seções giram em torno de um eixo denominado eixo neutro ou linha neutra (nm), não sendo o plano de solicitação o plano de flexão, como ocorre na flexão reta. O eixo da peça, após a deformação, é a linha elástica da flexão.

O eixo de solicitação (ss) é formado pela interseção do plano de solicitação (PS) com o plano da seção zy , onde z e y são os eixos coordenados. Este eixo passa pelo centroide G da seção. **O vetor momento fletor total M atuante**

na seção sempre é perpendicular a ss . No caso da flexão oblíqua, o eixo de solitação **não** coincide com nenhum eixo principal de inércia da seção.

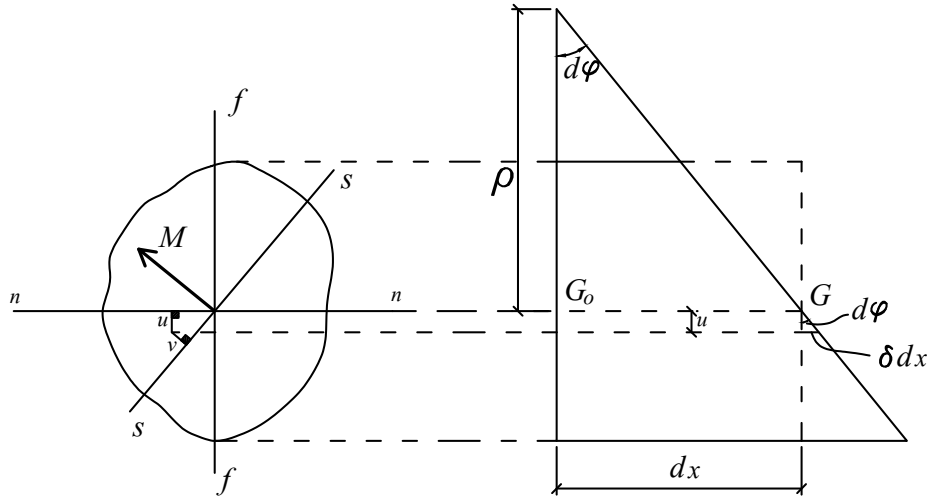


Figura 1.9: Deformações na flexão oblíqua similares a flexão reta

Da Fig. 1.9, definimos:

u - distância de um ponto genérico à linha neutra (nn);

$d\varphi$ - giro (rotação) relativo entre duas seções separadas de dx ;

δdx - alongamento sofrido pela fibra de comprimento dx cuja posição é definida por suas coordenadas u e v ;

ρ - raio de curvatura do trecho de viga de comprimento dx após a deformação.

A seguinte relação, já vista na flexão reta, é também válida para a flexão oblíqua, isto é:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta dx}{dx} = \frac{u \operatorname{tg} d\varphi}{dx} = \frac{u d\varphi}{dx} = \frac{u d\varphi}{ds} = \frac{u}{\rho}$$

Pela Lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \Rightarrow \sigma_x = \frac{E}{\rho} u \quad (1.3)$$

O momento fletor M_n em relação à linha neutra pode ser calculado como sendo a integral dos elementos de força infinitesimais em cada elemento da área da seção, multiplicados pelas distâncias u , previamente definidas. Assim, tem-se:

$$M_n = \int_S u df = \int_S u \frac{E}{\rho} u dS = \frac{E}{\rho} \int_S u^2 dS$$

$$M_n = \frac{EI_n}{\rho} \Rightarrow \frac{M_n}{I_n} = \frac{E}{\rho}$$

onde consideramos E e ρ constantes na seção, $\int_S u^2 dS = I_n$ (por definição) e $df = \sigma_x dS = E\varepsilon_x dS = \frac{E}{\rho} u dS$. Mas, como:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_x}{u}$$

temos então que:

$$\frac{M_n}{I_n} = \frac{\sigma_x}{u}$$

e, conseqüentemente:

$$\sigma_x = \frac{M_n u}{I_n} \quad (1.4)$$

Da Eq. 1.4, constatamos que σ_x é linear em relação a u , uma vez que M_n e I_n são constantes na seção.

1.4 Cálculo das Tensões Normais na Flexão Oblíqua

1.4.1 Tensões na Flexão Oblíqua segundo eixos baricêntricos quaisquer

Como admitimos, por hipótese, que as seções normais planas permanecem planas após as deformações, temos como consequência que a distribuição de tensões também é, conforme a expressão $\sigma_x = \frac{M_n u}{I_n}$, um plano que corta a seção segundo a linha neutra. Desta forma, sendo \bar{y} e \bar{z} eixos baricêntricos quaisquer no plano da seção, podemos escrever que $\sigma_x = a\bar{y} + b\bar{z}$ é a equação do campo de tensões que passa pelo centroide da seção.

A equivalência entre os esforços internos resistentes - tensões - e o esforço externo solicitante - carregamento - está ilustrado nas Figs. 1.10 e 1.11, onde trabalhamos com as componentes do momento fletor segundo os eixos \bar{y} , \bar{z} baricêntricos quaisquer, isto é, que não são necessariamente eixos principais de inércia.

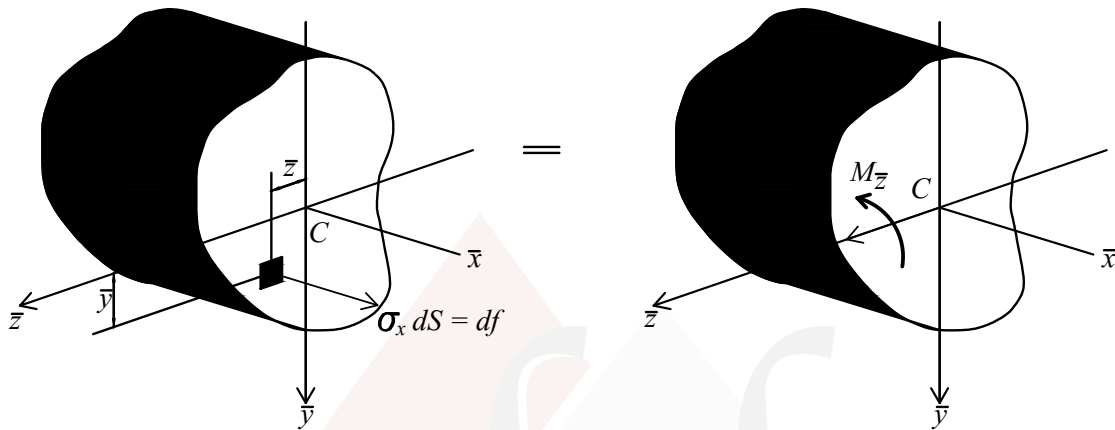


Figura 1.10: Balanço entre ações internas e externas direção \bar{z}

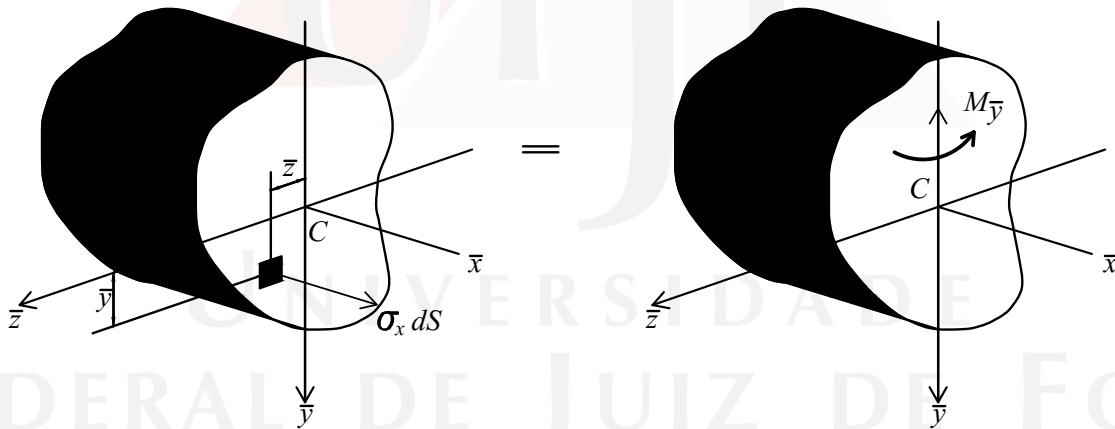


Figura 1.11: Balanço entre ações internas e externas direção \bar{y}

A equivalência entre os momentos fletores das forças internas e os momentos fletores aplicados, segundo um sistema de eixos \bar{y} e \bar{z} , $M_{\bar{y}}$ e $M_{\bar{z}}$ nos dá:

$$proj_{\bar{z}}M = M_{\bar{z}} = \int_S \sigma_x \bar{y} dS = \int_S (a\bar{y} + b\bar{z}) \bar{y} dS = a \int_S \bar{y}^2 dS + b \int_S \bar{y}\bar{z} dS \quad (1.5)$$

$$proj_{\bar{y}}M = M_{\bar{y}} = - \int_S \sigma_x \bar{z} dS = - \int_S (a\bar{y} + b\bar{z}) \bar{z} dS = -a \int_S \bar{y}\bar{z} dS - b \int_S \bar{z}^2 dS \quad (1.6)$$

onde o sinal negativo introduzido na Eq. 1.6 é necessário para tornar coerente o fato de que, para valores de \bar{z} positivos, temos σ_x de tração. Além disso, para valores de $M_{\bar{y}}$ negativos, temos $\sigma_x < 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} M_{\bar{z}} &= aI_{\bar{z}} + bI_{\bar{y}\bar{z}} \\ M_{\bar{y}} &= -aI_{\bar{y}\bar{z}} - bI_{\bar{z}} \end{aligned}$$

que nos fornece o seguinte sistema de equações em relação a a e b :

$$\begin{cases} I_{\bar{z}}a + I_{\bar{y}\bar{z}}b = M_{\bar{z}} \\ -I_{\bar{y}\bar{z}}a - I_{\bar{z}}b = M_{\bar{y}} \end{cases}$$

que pode ser escrito matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} I_{\bar{z}} & I_{\bar{y}\bar{z}} \\ -I_{\bar{y}\bar{z}} & -I_{\bar{y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{\bar{z}} \\ M_{\bar{y}} \end{Bmatrix}$$

cujas resoluções nos fornece:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \frac{1}{I_{\bar{y}\bar{z}}^2 - I_{\bar{z}}I_{\bar{y}}} \begin{bmatrix} -I_{\bar{y}} & -I_{\bar{y}\bar{z}} \\ I_{\bar{y}\bar{z}} & I_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{\bar{z}} \\ M_{\bar{y}} \end{Bmatrix}$$

ou:

$$a = (-M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}}) \frac{1}{I_{\bar{y}\bar{z}}^2 - I_{\bar{z}}I_{\bar{y}}}$$

$$b = (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}}) \frac{1}{I_{\bar{y}\bar{z}}^2 - I_{\bar{z}}I_{\bar{y}}}$$

ou ainda:

$$a = \frac{M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}}}{I_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2}$$

$$b = -\frac{M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}}}{I_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2}$$

Portanto:

$$\sigma_x = \frac{1}{I_{\bar{z}}I_{\bar{y}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2} (M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{y} - (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{z}$$

ou:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{y} - (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{z}\bar{y}}^2} \quad (1.7)$$

A Eq. 1.7 pode ser então usada para a determinação das tensões em qualquer ponto da seção apenas a partir do conhecimento dos momentos fletores, dos momentos de inércia e do produto de inércia desta seção referidos a qualquer sistema de eixos ortogonais baricêntricos, isto é, quando \bar{y} e \bar{z} não são necessariamente os eixos principais de inércia da seção.

1.5 EXEMPLO 1

Para a seção ilustrada na Fig. 1.12, determine a posição da linha neutra (nn), calcule as tensões nos vértices do retângulo e trace o diagrama de tensões referenciados à nn . Dados: $M = 150 \text{ kNm}$; $\alpha = 70^\circ$.

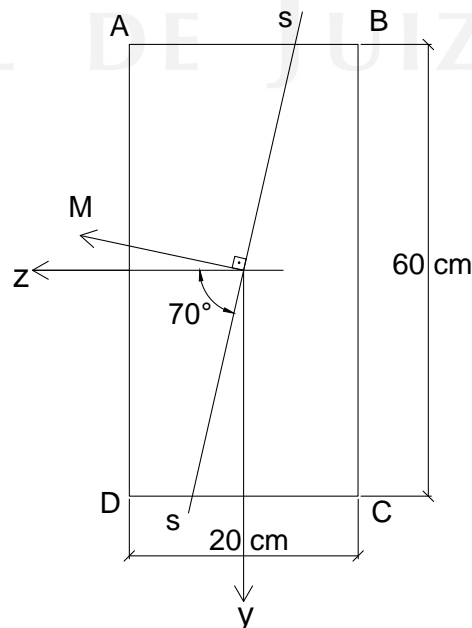


Figura 1.12: Dimensões e solicitação

1.5.1 Geometria das massas

- Cálculo de I_z e I_y :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{200 \times 600^3}{12} = 3600 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{600 \times 200^3}{12} = 400 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

- Definição da posição de nn :

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y}$$

$$\operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} \beta = -\frac{3.600 \times 10^6}{400 \times 10^6}$$

$$\beta = -73,02^\circ$$

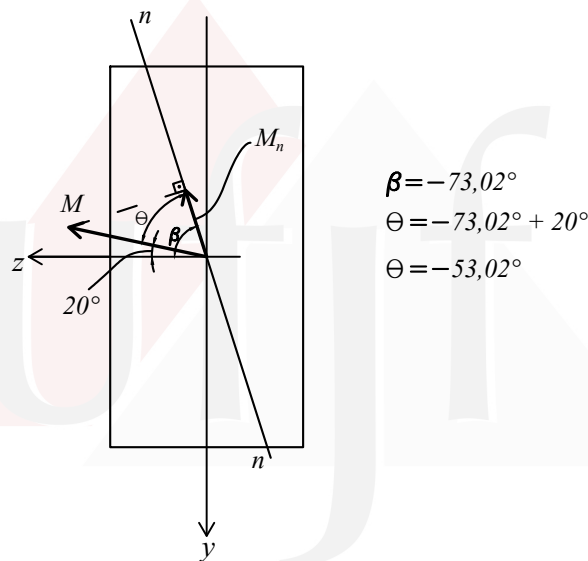


Figura 1.13: Posição da linha neutra e ângulo entre M e nn

1.5.2 Cálculo das tensões a partir dos eixos baricêntricos (\equiv principais de inércia neste caso)

A decomposição do momento fletor nas direções principais é dada por:

$$M_z = M \cos(-20^\circ) = 140,95 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$M_y = M \operatorname{sen}(-20^\circ) = -51,30 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

A expressão para o cálculo das tensões neste caso é dada por:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

que, aplicada para os valores de inércia e momentos fletores já calculados nos fornece:

$$\sigma_x = 0,03915y + 0,1282z$$

As coordenadas dos pontos A , B , C e D segundo o sistema zy são dadas por:

$$\begin{aligned} A: & (y = -300 \ ; \ z = 100) \\ B: & (y = -300 \ ; \ z = -100) \\ C: & (y = 300 \ ; \ z = -100) \\ D: & (y = 300 \ ; \ z = 100) \end{aligned}$$

Logo, os valores das tensões são:

$$\begin{aligned}\sigma_x^A &= \frac{140,95 \times 10^6 \times (-300)}{360.000 \times 10^4} - \frac{-51,30 \times 10^6 \times 100}{40.000 \times 10^4} \Rightarrow \sigma_x^A = 1,08 \text{ MPa} \\ \sigma_x^B &= \frac{140,95 \times 10^6 \times (-300)}{360.000 \times 10^4} - \frac{-51,30 \times 10^6 \times (-100)}{40.000 \times 10^4} \Rightarrow \sigma_x^B = -24,57 \text{ MPa} \\ \sigma_x^C &= \frac{140,95 \times 10^6 \times 300}{360.000 \times 10^4} - \frac{-51,30 \times 10^6 \times (-100)}{40.000 \times 10^4} \Rightarrow \sigma_x^C = -1,08 \text{ MPa} \\ \sigma_x^D &= \frac{140,95 \times 10^6 \times 300}{360.000 \times 10^4} - \frac{-51,30 \times 10^6 \times 100}{40.000 \times 10^4} \Rightarrow \sigma_x^D = 24,57 \text{ MPa}\end{aligned}$$

A equação linha neutra pode ser obtida fazendo-se $\sigma_x = 0$:

$$\sigma_x = 0,03915y + 0,1282z = 0$$

ou:

$$y + 3,275z = 0$$

1.5.3 Diagrama de tensões

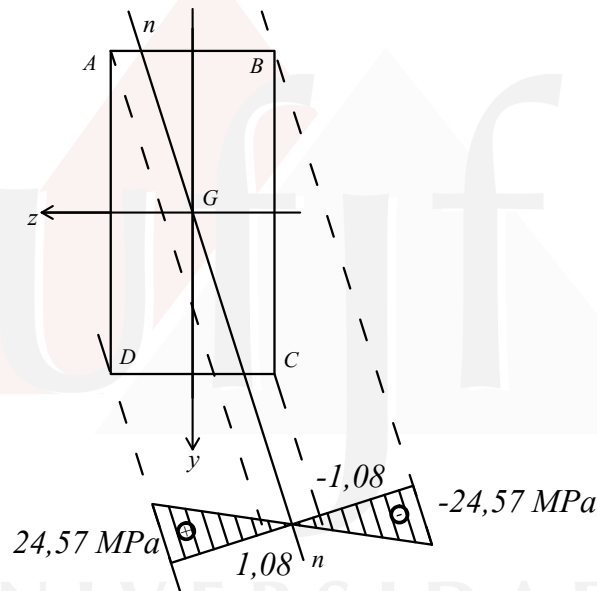


Figura 1.14: Diagrama de tensões

Se desejar, veja formas alternativas para a resolução deste exemplo na seção 7.2.2.

1.6 EXEMPLO 2

Para o perfil L (dimensões em mm) mostrado na Fig. 1.15, determine a posição de nn e as tensões máximas. Dado: $M = 50 \text{ kNm}$.

1.6.1 Geometria das massas

- Cálculo da posição do baricentro (coordenadas \bar{x} e \bar{y}) em relação aos eixos auxiliares x e y :

$$A_1 = 400 \times 50 = 20.000 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 550 \times 50 = 27.500 \text{ mm}^2$$

$$\bar{x}(A_1 + A_2) = A_1x_1 + A_2x_2$$

$$\bar{x}(20.000 + 27.500) = 20.000 \times 200 + 27.500 \times 25 \Rightarrow \bar{x} = 98,68 \text{ mm}$$

$$\bar{y}(A_1 + A_2) = A_1y_1 + A_2y_2$$

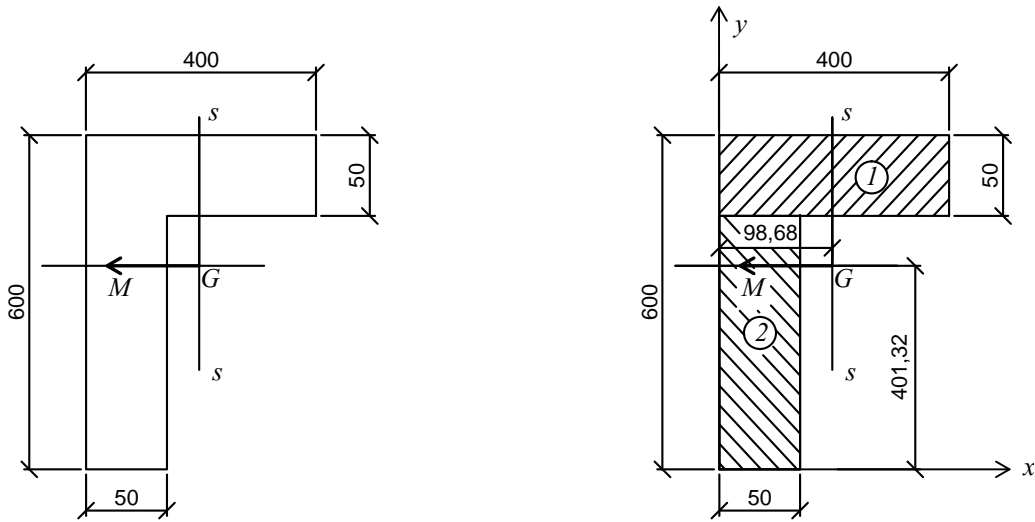


Figura 1.15: a) Geometria e carregamento; b) Eixos Auxiliares - centroide e inércias

$$\bar{y}(20.000 + 27.500) = 20.000 \times 575 + 27.500 \times 275 \Rightarrow \bar{y} = 401,32 \text{ mm}$$

- Determinação das parcelas dos momentos de inércia utilizando o teorema de Steiner para cada uma das partes em que dividimos a seção (calculados, agora, em relação aos eixos baricêntricos \bar{z} e \bar{y}):

$$I_{\bar{z}}^i = I_z^i + A_i \bar{y}_i^2$$

$$I_{\bar{y}}^i = I_y^i + A_i \bar{z}_i^2$$

$$I_{\bar{z}\bar{y}}^i = I_{zy}^i + A_i \bar{z}_i \bar{y}_i$$

Os momentos de inércias da seção serão dados por:

$$I_{\bar{z}} = \sum_{i=1,2} I_{\bar{z}}^i \quad I_{\bar{y}} = \sum_{i=1,2} I_{\bar{y}}^i \quad I_{\bar{z}\bar{y}} = \sum_{i=1,2} I_{\bar{z}\bar{y}}^i$$

Assim, temos:

$$I_{\bar{z}}^1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + A_1 \bar{y}_1^2 = \frac{400 \times 50^3}{12} + 20.000 \times \underbrace{(575 - 401,32)^2}_{173,68} = 6,075 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}}^2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + A_2 \bar{y}_2^2 = \frac{50 \times 550^3}{12} + 27.500 \times \underbrace{(275 - 401,32)^2}_{-126,32} = 11,320 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}} = I_{\bar{z}}^1 + I_{\bar{z}}^2 = 17,395 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{y}}^1 = \frac{h_1 b_1^3}{12} + A_1 \bar{z}_1^2 = \frac{50 \times 400^3}{12} + 20.000 \times \underbrace{(200 - 98,68)^2}_{101,32} = 4,720 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{y}}^2 = \frac{h_2 b_2^3}{12} + A_2 \bar{z}_2^2 = \frac{550 \times 50^3}{12} + 27.500 \times \underbrace{(25 - 98,68)^2}_{-73,68} = 1,550 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{y}} = I_{\bar{y}}^1 + I_{\bar{y}}^2 = 6,27 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}\bar{y}}^1 = 0 + A_1 \bar{z}_1 \bar{y}_1 = 20.000 \times (+101,32) \times (+173,68) = 3,52 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}\bar{y}}^2 = 0 + A_2 \bar{z}_2 \bar{y}_2 = 27.500 \times (-73,68) \times (-126,32) = 2,56 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}\bar{y}} = I_{\bar{z}\bar{y}}^1 + I_{\bar{z}\bar{y}}^2 = 6,08 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

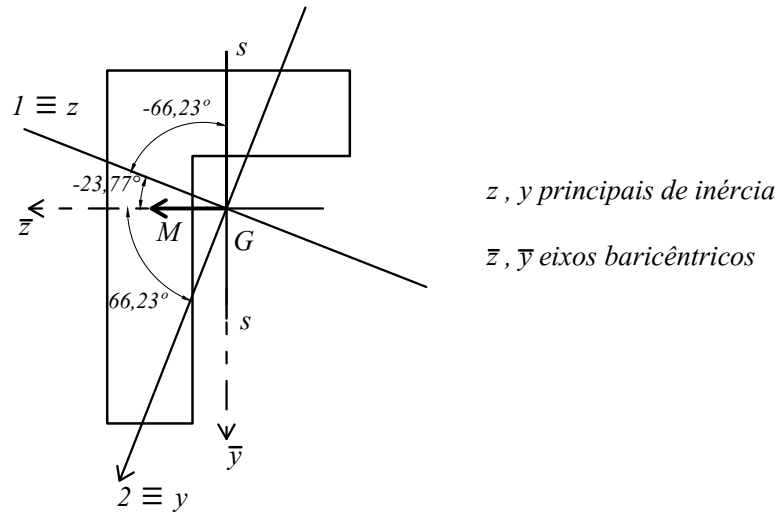


Figura 1.16: Posição dos eixos principais de inércia do perfil

1.6.2 Cálculo das tensões pela projeção de M em eixos quaisquer (eixos não principais de inércia)

Neste caso, utilizamos os momentos de inércia calculados no primeiro item desta resolução, com relação aos eixos baricêntricos \bar{y} e \bar{z} .

Utilizando a expressão:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\bar{z}}I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{y} - (M_{\bar{y}}I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}}I_{\bar{z}\bar{y}})\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{z}\bar{y}}^2}$$

Os momentos de inércia segundo os eixos baricêntricos utilizados na figura inicial devidamente renomeados de eixos \bar{y} e \bar{z} são:

$$\begin{aligned} I_{\bar{z}} &= 17,395 \times 10^8 \text{ mm}^4 \\ I_{\bar{y}} &= 6,27 \times 10^8 \text{ mm}^4 \\ I_{\bar{z}\bar{y}} &= 6,08 \times 10^8 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

As projeções do momento atuante sobre estes eixos são:

$$M_{\bar{z}} = 50 \times 10^6 \text{ Nmm e } M_{\bar{y}} = 0$$

As coordenadas dos pontos mais solicitados neste sistema de eixos são:

$$\begin{aligned} A : \bar{y}_A &= -198,68 \text{ mm} & \bar{z}_A &= 98,68 \text{ mm} \\ B : \bar{y}_B &= 401,32 \text{ mm} & \bar{z}_B &= 48,68 \text{ mm} \end{aligned}$$

- Tensão no ponto A:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{(50 \cdot 10^6 \times 6,27 \cdot 10^8 + 0 \times 6,08 \cdot 10^8)(-198,68) - (0 \times 17,395 \cdot 10^8 + 50 \cdot 10^6 \times 6,08 \cdot 10^8)(98,68)}{(6,27 \cdot 10^8 \times 17,395 \cdot 10^8) - (6,08 \cdot 10^8)^2} \\ \sigma_A &= -12,80 \text{ MPa} \end{aligned}$$

- Tensão no ponto B:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{(50 \cdot 10^6 \times 6,27 \cdot 10^8 + 0 \times 6,08 \cdot 10^8)(401,32) - (0 \times 17,395 \cdot 10^8 + 50 \cdot 10^6 \times 6,08 \cdot 10^8)(48,68)}{(6,27 \cdot 10^8 \times 17,395 \cdot 10^8) - (6,08 \cdot 10^8)^2} \\ \sigma_B &= 15,40 \text{ MPa} \end{aligned}$$

A equação da linha neutra segundo este sistema de eixos pode ser obtida a partir desta mesma expressão, com $\sigma_x = 0$:

$$\sigma_x = \frac{3,135 \times 10^{16}\bar{y} - 3,04 \times 10^{16}\bar{z}}{72,07 \times 10^{16}} = 0$$

$$\sigma_x = 0,0435\bar{y} - 0,0422\bar{z} = 0$$

Assim, a linha ou eixo neutro resulta em:

$$0,0435\bar{y} - 0,0422\bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0,97\bar{z}$$

1.6.3 Diagrama de tensões

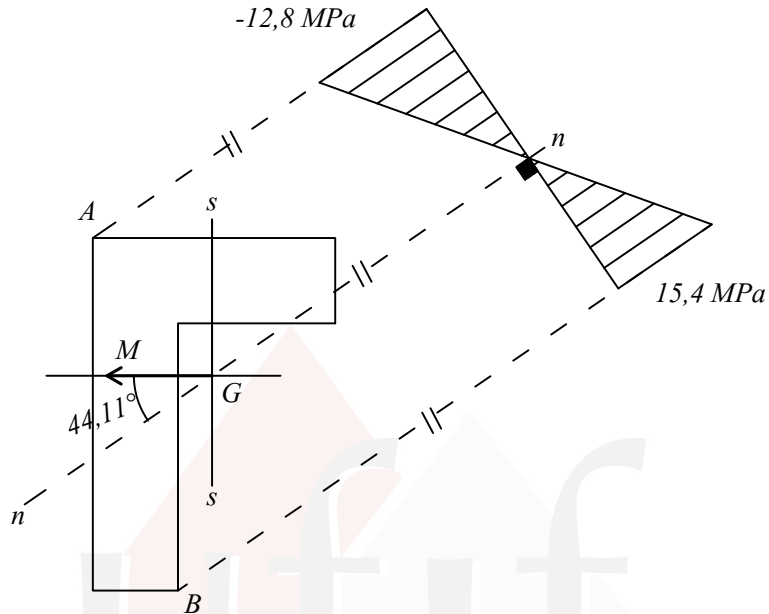


Figura 1.17: Diagrama de tensões

Se desejar, veja formas alternativas para a resolução deste exemplo na seção 7.2.3.

1.7 EXEMPLO 3

Um momento $M = 1,5 \times 10^6$ Nmm age em uma viga engastada e livre, conforme mostra a Fig. 1.18. Determine a tensão no ponto A e a posição da linha neutra.

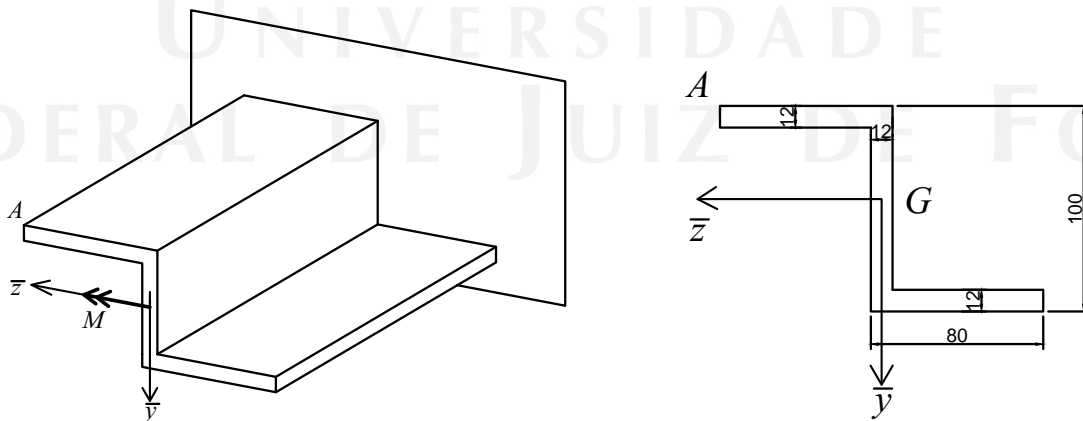


Figura 1.18: Carregamento e geometria da seção

1.7.1 Geometria das massas

- Momentos de inércia e produto de inércia em relação aos eixos \bar{y} e \bar{z} baricêntricos:

$$I_{\bar{z}} = 4.179.136 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{y}} = 3.254.464 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}\bar{y}} = -2.872.320 \text{ mm}^4$$

1.7.2 Cálculo das tensões pela projeção de M sobre os eixos baricêntricos (eixos não principais de inércia)

As projeções do momento atuante nesses eixos são:

$$M_{\bar{z}} = 1,5 \times 10^6 \text{ Nmm e } M_{\bar{y}} = 0$$

Substituindo os valores calculados na Eq. 1.7, vem:

$$\sigma_x = \frac{(1,5 \cdot 10^6 \times 3.254.464 + 0)(-50) - (0 + 1,5 \cdot 10^6 \times (-2.872.320)) \times 74}{(3.254.464 \times 4.179.136) - (-2.872.320)^2} = 13,97 \text{ MPa}$$

A equação de nn é dada por:

$$nn \Rightarrow 0,912\bar{y} + 0,805\bar{z} = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{y} = -0,883\bar{z}$$

Se desejar, veja formas alternativas para a resolução deste exemplo na seção 7.2.4.



Capítulo 2

Teoria da Flexão Composta

2.1 Introdução

Em várias circunstâncias na engenharia, encontramos peças cujas seções estão solicitadas ao mesmo tempo pela ação de momentos fletores e de esforço normal. A este tipo de solicitação denominamos **flexão composta**, que pode ser *reta* ou *oblíqua* conforme a posição do momento fletor em relação aos eixos principais de inércia, como visto anteriormente. Alguns exemplos desta ocorrência estão listados a seguir.

2.2 Ocorrências Usuais

As seguintes situações que podem ocorrer numa estrutura e que resultam em uma flexão composta:

- Pilares de Canto
- Sapatas com cargas excêntricas
- Postes com cargas excêntricas
- Vigas protendidas
- Carga excêntrica num pilar
- Pórticos espaciais com carregamentos espaciais

2.3 Distribuição de Tensões

Para efeito do estudo aqui considerado, cada um dos casos acima mencionados pode ser reduzido e tratado através do caso de uma única carga normal - isto é, carga na direção do eixo da peça - aplicada em um ponto fora do centroide da seção transversal da peça. Esta carga faz com que nesta seção exista um esforço normal cujo valor é o desta carga e que será positivo ou negativo conforme este esforço seja de tração ou compressão. Além disso, por estar aplicada fora do centroide da seção, esta carga também provocará momentos fletores decorrentes de sua excentricidade - que é dada pela distância da linha de ação desta carga ao par de eixos \bar{y} e \bar{z} baricêntricos no plano da seção.

O ponto $C(z_c, y_c)$ da seção onde a carga considerada é aplicada é denominado de *centro de solicitação*. Sendo z e y eixos principais de inércia da seção, a Fig. 2.1 ilustra a ocorrência de uma flexão composta com os elementos acima descritos.

Em qualquer um dos casos de ocorrência de flexão composta, a ação da força aplicada sobre a seção pode ser entendida e devidamente tratada quando fazemos a operação denominada de “redução desta força ao baricentro da seção”.

Esta operação de redução de um sistema de forças (ou de uma força) a um ponto de um corpo, determina a força e o momento resultantes de um sistema de forças aplicado quando calculamos este momento resultante segundo um sistema de eixos que passa pelo centroide deste corpo.

Assim, uma força qualquer com componentes $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$ aplicada em um ponto de coordenadas $C(x_c, y_c, z_c)$ pode ser reduzida a origem deste sistema de coordenadas resultando em uma força com as mesmas componentes de \mathbf{F} e um momento fletor. As componentes deste fletor, resultante da redução desta força à origem do sistema de eixos, são dadas por $\mathbf{M}(M_x, M_y, M_z)$, onde:

$$\begin{cases} M_x = F_z y_c - F_y z_c \\ M_y = F_x z_c - F_z x_c \\ M_z = F_y x_c - F_x y_c \end{cases}$$

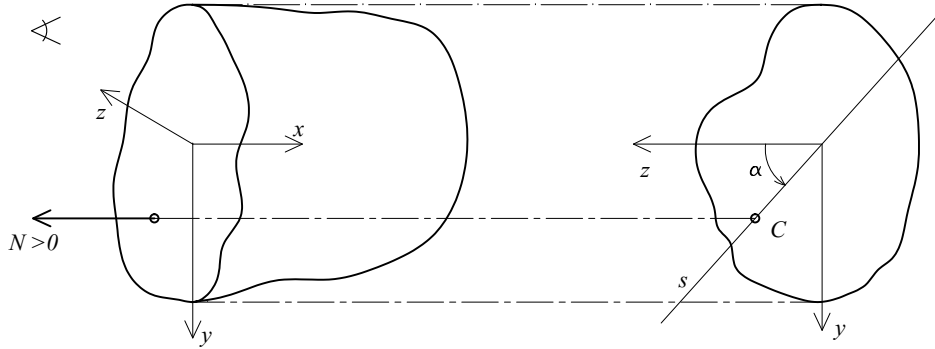


Figura 2.1: Carga excêntrica gerando flexão composta

No caso aqui considerado, temos $F_y = 0$, $F_z = 0$ e $x_c = 0$. Assim, ficamos com:

$$\mathbf{F}(F_x, 0, 0) \equiv (P, 0, 0)$$

Substituindo as componentes de \mathbf{F} e as coordenadas de C na expressão acima, obtemos:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = -Pz_c \\ M_z = Py_c \end{cases}$$

Nas expressões acima, M_y e M_z designam as componentes dos momentos nas direções y e z , respectivamente. Essas componentes são os momentos fletores atuantes na seção de modo que temos os seguintes esforços nesta seção:

$$\begin{cases} N = P & (\text{Se tração: } N \text{ positivo}) \\ M_y = -Nz_c \\ M_z = Ny_c \end{cases}$$

Podemos dizer, então, que o vetor momento fletor total aplicado na seção é dado por:

$$\mathbf{M}(0, -Nz_c, Ny_c)$$

As tensões atuantes na seção devidas a P podem ser então determinadas a partir do princípio da superposição de efeitos, isto é, como a soma das tensões normais devidas ao esforço normal e aos momentos fletores. Se adotarmos os eixos principais de inércia da seção como eixos de referência, podemos escrever imediatamente que:

$$\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^{M_y} + \sigma_x^{M_z} \quad \text{ou} \quad \sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^{M_n}$$

onde:

$$\sigma_x^N = \frac{N}{S} \quad \sigma_x^{M_z} = \frac{M_z y}{I_z} \quad \sigma_x^{M_y} = -\frac{M_y z}{I_y}$$

Assim,

$$\sigma_x = \frac{N}{S} - \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}$$

Como $M_y = -Nz_c$ e $M_z = Ny_c$, temos que:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{Nz_c z}{I_y} + \frac{Ny_c y}{I_z}$$

Sabendo-se que $I_i = \rho_i^2 \cdot S$, onde S é a área da seção e ρ_i o raio de giração, ficamos com:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \left(1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} + \frac{y_c y}{\rho_z^2} \right) \Rightarrow \text{equação de um plano que não passa pela origem} \quad (2.1)$$

Podemos também calcular as tensões utilizando, como na flexão oblíqua pura, a componente do momento fletor total sobre a linha neutra (M_n) e a distância u da fibra analisada à linha neutra da flexão oblíqua pura associada a flexão

composta (eixo n_0n_0). Neste caso, devemos trabalhar com o momento de inércia da seção em relação a este mesmo eixo (n_0n_0) - I_n . Assim, podemos escrever:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_n}{I_n} u \tag{2.2}$$

Finalmente, podemos ainda calcular estas tensões a partir de um sistema de eixos baricêntricos, não principais de inércia, o que vem a ser uma opção muito conveniente em alguns casos. Assim, temos:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{(M_z I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}} I_{z\bar{y}}) \bar{y} - (M_{\bar{y}} I_z + M_z I_{z\bar{y}}) \bar{z}}{I_{\bar{y}} I_z - I_{z\bar{y}}^2} \tag{2.3}$$

A Fig. 2.2 ilustra um exemplo de diagrama de tensão obtido num típico caso de uma peça sujeita a uma flexão composta oblíqua. Observe o princípio de superposição de efeitos mencionado anteriormente.

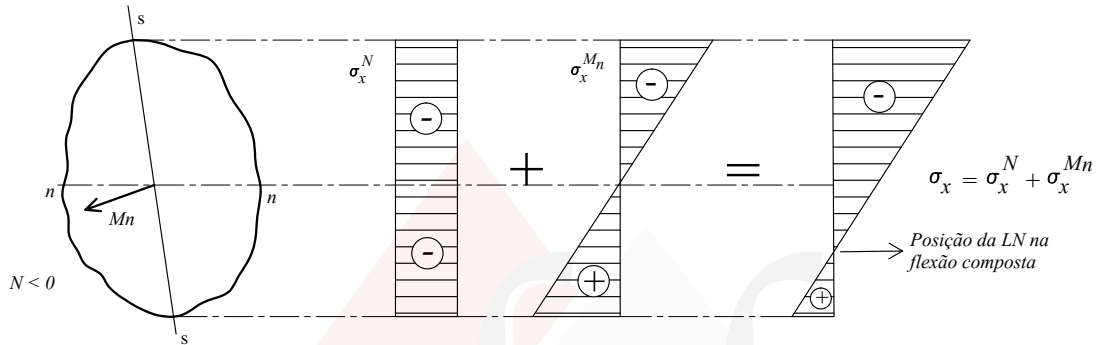


Figura 2.2: Superposição das tensões do esforço normal e do momento fletor

2.4 Determinação da linha neutra (nn)

2.4.1 Equação da linha neutra

Por definição, a linha neutra é o lugar geométrico dos pontos onde a tensão normal é nula, isto é:

$$nn \Leftrightarrow \sigma_x = 0$$

Assim, para encontrarmos sua posição, considerando-se os eixos principais de inércia, basta igualar a Eq. 2.1 a zero. Obtemos, então:

$$1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} + \frac{y_c y}{\rho_z^2} = 0 \tag{2.4}$$

Esta equação é de uma reta não passante pela origem, conforme ilustrado na Fig. 2.3.

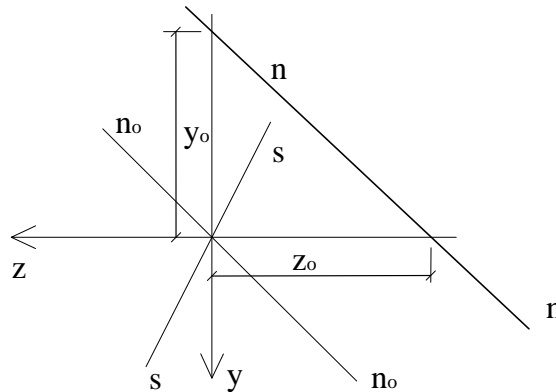


Figura 2.3: Posições dos eixos da flexão pura e composta

É de grande utilidade a determinação dos pontos onde a linha neutra corta os eixos coordenados. Como apresentado na Fig. 2.3, estes valores são denominados de y_0 e z_0 e podem ser calculados utilizando-se a Eq. 2.4 da seguinte forma:

$$\text{Para } z = 0 \Rightarrow y = y_0 \Rightarrow y_0 = -\frac{\rho_z^2}{y_c} \tag{2.5}$$

$$\text{Para } y = 0 \Rightarrow z = z_0 \Rightarrow z_0 = -\frac{\rho_y^2}{z_c} \quad (2.6)$$

Substituindo as Eqs. 2.5 e 2.6 na Eq. 2.4, vem:

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1 \quad (2.7)$$

A Eq. 2.7 é denominada *forma segmentária da LN* da flexão composta e é válida apenas caso os eixos principais de inércia sejam utilizados.

Finalmente, podemos ainda escrever a equação da linha neutra usando um sistema de eixos baricêntricos quaisquer, não principais de inércia, o que vem a ser uma opção muito conveniente em alguns casos. Assim, temos:

$$\sigma_x = \frac{1}{S} + \frac{(I_{\bar{y}}y_c - I_{\bar{z}\bar{y}}z_c)\bar{y} - (I_{\bar{z}}z_c - I_{\bar{z}\bar{y}}y_c)\bar{z}}{I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} - I_{\bar{z}\bar{y}}^2} \quad (2.8)$$

2.5 EXEMPLO 4

Determine o maior valor que a força de tração T , aplicada no ponto C da seção mostrada na Fig. 2.4, pode atingir. Determine, também, o diagrama de tensões final para a carga calculada. Dados: $|\bar{\sigma}_c| = |\bar{\sigma}_t| = 150 \text{ N/cm}^2$.

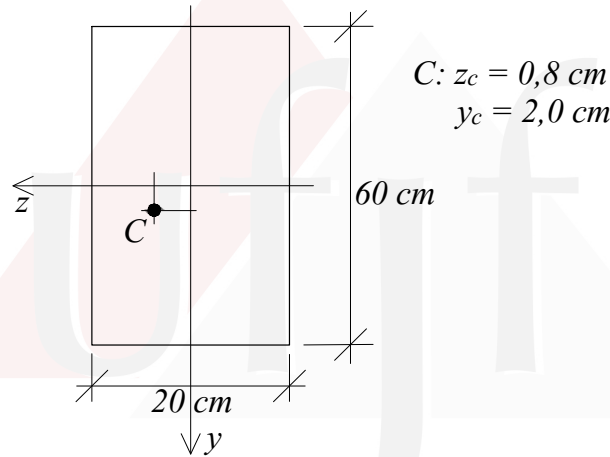


Figura 2.4: Seção e carregamento

Solução:

- Cálculo dos momentos fletores:

Neste caso, temos que $N = T$ e, se admitirmos T em Newton, teremos:

$$\begin{cases} M_y = -Tz_c = -0,8 T \text{ Ncm} \\ M_z = Ty_c = 2,0 T \text{ Ncm} \end{cases}$$

- Análise da distribuição de tensões na seção:

De acordo com a Fig. 2.5, percebe-se que a fibra mais tracionada é, sem dúvida, a fibra I . Além disso, nota-se que a fibra II pode estar sob tensões de tração ou de compressão, dependendo se as tensões devidas a M_y e M_z superarem ou não a tensão provocada pelo esforço normal T .

Calculemos então dois valores limites para T :

- Determinação das parcelas de tensão em I e II provocadas por N , M_y e M_z :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{Ny_c y}{I_z} + \frac{Nz_c z}{I_y}$$

ou:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

- Coordenadas de I e II :

Ponto I - $(z_I, y_I) = (10; 30) \text{ cm}$

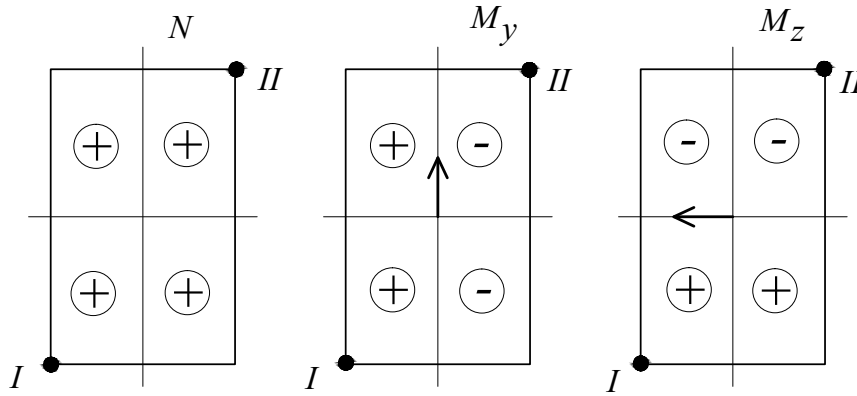


Figura 2.5: Análise de tensões na seção

Ponto II - $(z_{II}, y_{II}) = (-10; -30)$ cm

- Parcela de tensão devido a T :

$$\sigma_N = \frac{T}{1200}$$

$$\begin{cases} \sigma_I^N = +0,000833 T \text{ N/cm}^2 \\ \sigma_{II}^N = +0,000833 T \text{ N/cm}^2 \end{cases}$$

- Parcela de tensão devida a M_z :

$$|\sigma_{M_z}| = \left| \frac{2,0T \times 30}{360.000} \right| = 0,0001667 T \text{ N/cm}^2$$

$$\begin{cases} \sigma_I^{M_z} = +0,0001667 T \text{ N/cm}^2 \\ \sigma_{II}^{M_z} = -0,0001667 T \text{ N/cm}^2 \end{cases}$$

- Parcela de tensão devida a M_y :

$$|\sigma_{M_y}| = \left| \frac{0,8T \times 10}{40.000} \right| = 0,0002 T \text{ N/cm}^2$$

$$\begin{cases} \sigma_I^{M_y} = +0,0002 T \text{ N/cm}^2 \\ \sigma_{II}^{M_y} = -0,0002 T \text{ N/cm}^2 \end{cases}$$

- Tensões totais em I e II:

$$\sigma_I = +0,000833 T + 0,0001667 T + 0,0002 T = 0,0012 T \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_{II} = +0,000833 T - 0,0001667 T - 0,0002 T = 0,0004667 T \text{ N/cm}^2$$

Observamos que, para qualquer valor de T ($T > 0$), temos apenas tensões de tração na peça. Igualando σ_I e σ_{II} à máxima tensão de tração, obtemos dois limites máximos para N . Para efeito de dimensionamento, adotaremos o menor deles para a peça como um todo.

Assim:

$$\sigma_I = |\bar{\sigma}_t| \rightarrow 0,0012 T \leq 150$$

$$T = 125.000 \text{ N ou } 125 \text{ kN}$$

$$\sigma_{II} = |\bar{\sigma}_t| \rightarrow 0,0004667 T \leq 150$$

$$T = 321.429 \text{ N ou } 321,4 \text{ kN}$$

Logo, temos que adotar para o máximo valor de T :

$$T = 125 \text{ kN}$$

- Determinação da LN e do diagrama de tensões:

$$\text{Eq. da LN: } 1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} + \frac{z_c z}{\rho_y^2} = 0$$

- Pontos onde a LN corta os eixos y e z :

$$\text{Para } z = 0 \rightarrow y = y_0 \rightarrow y_0 = -\frac{\rho_z^2}{y_c} = \frac{360.000}{1.200(2,0)} = -150 \text{ cm}$$

$$\text{Para } y = 0 \rightarrow z = z_0 \rightarrow z_0 = -\frac{\rho_y^2}{z_c} = \frac{40.000}{1.200(0,8)} = -41,67 \text{ cm}$$

- Diagrama de Tensões:

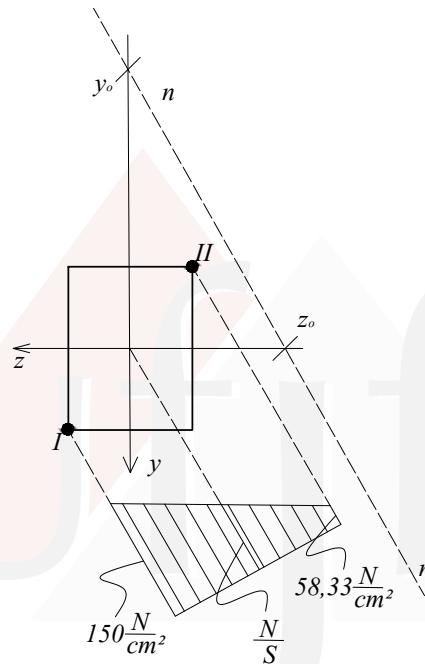


Figura 2.6: Diagrama de tensões

Da Fig. 2.6, constatamos que os pontos onde a LN corta os eixos coordenados y e z indicam que esta não corta a seção. Isto resulta que, para a carga aplicada no centro de solicitação fornecido, temos tensões de um mesmo sinal em todos os pontos da seção. Caso fizéssemos a determinação da LN inicialmente, verificaríamos que não haveria necessidade de calcular T para a fibra II .

2.6 EXEMPLO 5

Sabe-se que para a viga mostrada na Fig. 2.7, o maior valor que a carga Q pode atingir é 15 kN. Este valor está limitado pela máxima tensão de tração do material que constitui a viga. Assim, calcule:

a) O acréscimo que esta carga Q poderá sofrer se uma força de protensão de 80 kN for aplicada, conforme indica a figura.

b) O acréscimo de vão que esta viga poderia cobrir em decorrência da mesma protensão (mantendo-se, porém, o valor original da carga Q).

Dados:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_z = 3,33 \times 10^9 \text{ mm}^4 \\ S = 10^5 \text{ mm}^2 \\ \text{Distância do baricentro à base: } \bar{y} = 400 \text{ mm} \end{array} \right.$$

Solução:

- Cálculo da tensão máxima (sem protensão):

$$M_{max} = M_z = \frac{Q l}{2} = \frac{15 \cdot 10^3 \times 10 \cdot 10^3}{4} = 37,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

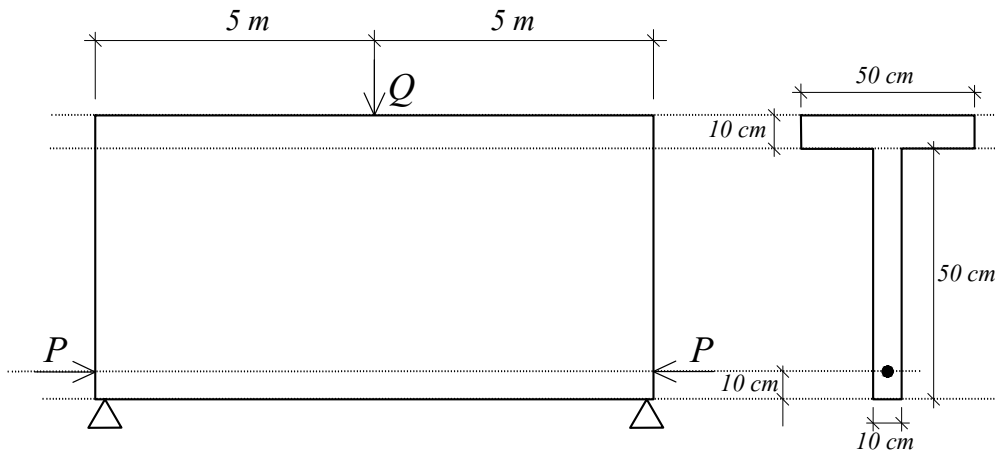


Figura 2.7: Viga com carregamento, geometria da seção e posição da protensão

$$\sigma_{max} = \frac{M_z y_i}{I_z} = \frac{37,5 \cdot 10^6 \cdot 400}{3,33 \cdot 10^9} \Rightarrow \sigma_{max} = 4,50 \text{ MPa}$$

Logo, a máxima tensão de tração atuante na seção não poderá ultrapassar este valor.

Caso a)

Ao aplicarmos uma protensão de $P = 80 \text{ kN}$ na posição indicada na Fig. 2.7, teremos na seção transversal mais solicitada a atuação concomitante de uma carga normal excêntrica com $e = 300 \text{ mm}$, do momento fletor devido à carga vertical Q e do momento fletor provocado pela excentricidade da força de protensão. O diagrama mostrado na Fig. 2.8 ilustra os carregamentos atuantes nesta seção.

O valor do momento fletor provocado pela carga de protensão a ser adicionado ao fletor provocado pela carga Q , na mesma seção, para qualquer um destes casos é dado por:

$$M_z^P = -P \times e = -80 \times 10^3 \times 300 = -24 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

Com a nova carga Q_{novo} , o momento fletor será:

$$M_z^Q = \frac{Q_{novo} l}{2} = \frac{Q_{novo} \times 10 \cdot 10^3}{4} = 2,5 \cdot 10^3 \times Q_{novo} \text{ Nmm}$$

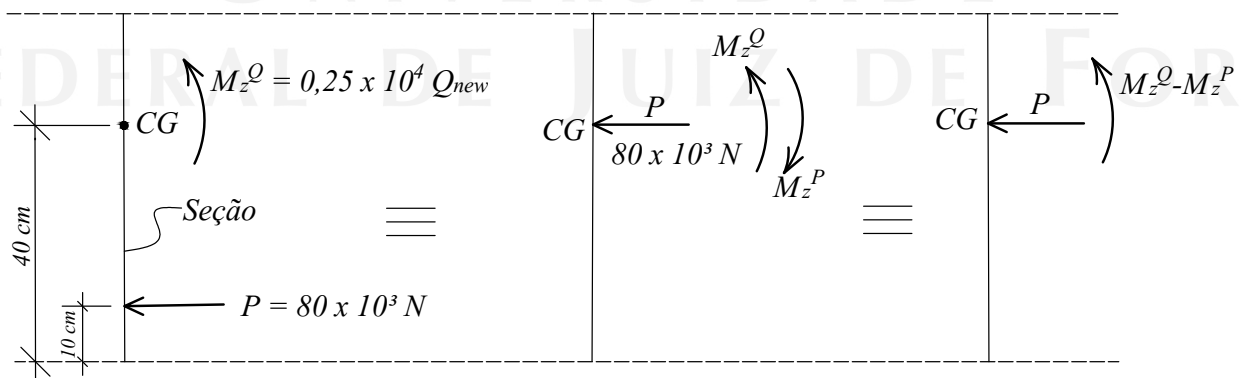


Figura 2.8: Redução dos esforços atuantes ao centroide da seção

Igualando a tensão de tração no ponto mais solicitado ($y_i = 400 \text{ mm}$) ao valor máximo encontrado - caso sem protensão - obtemos a equação que nos permite calcular o novo valor da carga. Assim, temos:

$$4,50 = -\frac{80 \times 10^3}{10^5} + \frac{(2,5 \cdot 10^3 \times Q_{novo} - 24 \cdot 10^6)400}{3,33 \cdot 10^9}$$

donde obtemos:

$$Q_{novo} = 27.266,67 \text{ N ou } 27,27 \text{ kN} \Rightarrow \text{Acréscimo de carga} = 12,27 \text{ kN}$$

Caso b)

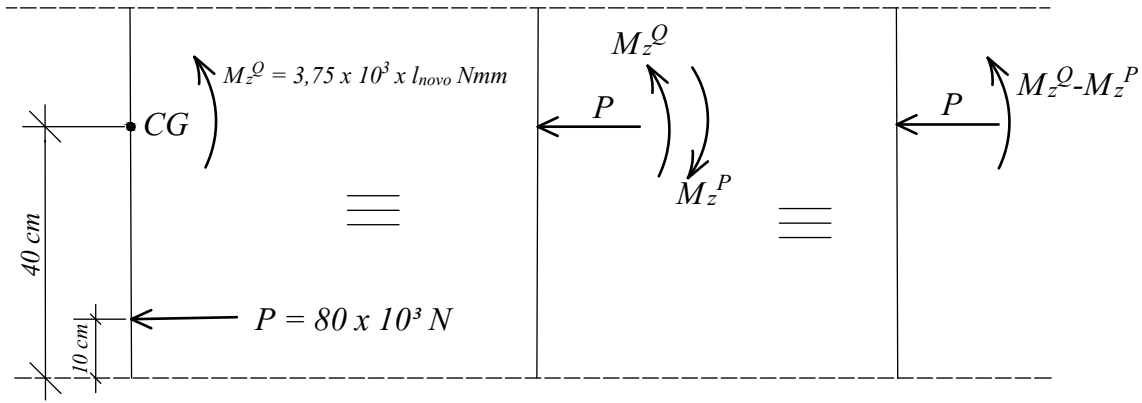


Figura 2.9: Redução dos esforços atuantes ao centroide da seção

A Fig. 2.9 ilustra o esquema de solicitação com a carga Q fixa e variando-se o comprimento original l da viga.

Com o novo comprimento l_{novo} , o momento fletor será:

$$M_z^l = \frac{Q}{2} \frac{l_{novo}}{2} = \frac{15 \cdot 10^3}{2} \frac{l_{novo}}{2} = 3,75 \cdot 10^3 \times l_{novo} \text{ Nmm}$$

Igualando a tensão de tração no ponto mais solicitado ($y_i = 400 \text{ mm}$) ao valor máximo encontrado - caso sem protensão - obtemos a equação que nos permite calcular o novo valor da carga. Assim, temos:

$$4,50 = -\frac{80 \times 10^3}{10^5} + \frac{(3,75 \times 10^3 \times l_{novo} - 24 \times 10^6)400}{3,33 \times 10^9}$$

donde obtemos imediatamente:

$$l_{novo} = 18.177,78 \text{ mm} \implies \text{Acréscimo de comprimento} = 8,18 \text{ m}$$

2.7 Núcleo Central de Inércia

2.7.1 Conceito

Do estudo da flexão composta, observa-se que a posição da linha neutra muda quando o centro de aplicação da carga varia. Este efeito acaba por provocar uma modificação do diagrama de distribuição de tensões, podendo ser bi-triangular, triangular ou trapezoidal. No primeiro caso, temos tensões de tração e compressão ao longo da seção, enquanto que no caso da distribuição trapezoidal, temos tensão de um único sinal em toda a seção e nenhum ponto desta com tensão nula, já que a linha neutra não corta a seção. Entre estas duas possibilidades está o caso do diagrama triangular, quando um conjunto de pontos com tensão nula se reduz a um ponto. O estudo dessas variações de formas para o diagrama de tensões dá origem à definição do **Núcleo Central de Inércia** de uma seção.

O conceito de NCI é fundamental, por exemplo, na verificação da estabilidade de peças constituídas por materiais que só resistem a um tipo de tensão normal, seja de tração ou de compressão.

2.7.2 Obtenção do Núcleo Central de Inércia

A partir da definição do NCI, podemos, no caso de seções com contornos muito ‘irregulares’, determinar esta região a partir de um número finito, porém bastante grande, de tangentes não-secantes à seção da peça. Considerando cada uma destas tangentes como linha neutra, podemos determinar a posição do ponto de aplicação das cargas correspondentes que seriam os pontos do contorno deste núcleo.

Descrevemos, a seguir, de maneira detalhada, os passos a serem cumpridos para a determinação do NCI de uma seção.

Seja a Fig. 2.10 onde apresentamos, para uma seção arbitrária, o ponto C (centro de solicitação) e nn (linha neutra associada à flexão composta originada pela aplicação de uma ‘carga’ neste ponto).

Sabemos que a equação desta LN é dada por:

$$1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} + \frac{y_c y}{\rho_z^2} = 0$$

Dadas as coordenadas de C - (y_c, z_c) , podemos imediatamente determinar nn a partir das coordenadas onde esta corta os eixos y e z , que podem ser obtidos da seguinte forma:

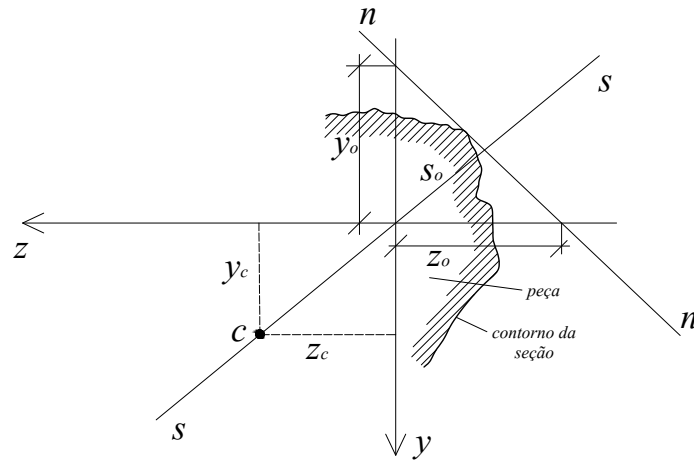


Figura 2.10: Posições relativas - centro de solicitação e a LN da flexão composta

Para $y = 0$ e $z = z_0$, temos:

$$z_0 = -\frac{\rho_y^2}{z_c} \quad (2.9)$$

Para $z = 0$ e $y = y_0$ temos:

$$y_0 = -\frac{\rho_z^2}{y_c} \quad (2.10)$$

Este processo pode ser realizado de forma ‘inversa’, permitindo-nos, a partir de escolhas de linhas neutras hipotéticas, determinar os centros de solicitações associados a estas, o que nos determinaria o NCI da seção. Assim, teríamos o seguinte roteiro:

1. Arbitra-se uma LN tangente não-secante à seção, isto é, uma linha neutra na qual a seção fique toda de um mesmo lado desta tangente (ou que esteja toda contida num dos semiplanos em que a LN divide o plano da figura);
2. Determina-se z_0 e y_0 ;
3. Pelas Eqs.2.9 e 2.10, obtém-se as coordenadas do ponto (z_c, y_c) do contorno do NCI associado a essa LN;
4. Repetem-se estes passos para várias tangentes não-secantes determinando-se um conjunto de pontos suficiente para traçar o NCI da seção.

O processo acima descrito é, em geral, suficiente para os casos correntes da prática da engenharia, onde a maioria das seções são polígonos convexos irregulares nos quais um conjunto finito e pequeno de tangentes não-secantes é fácil de se identificar. Para seções com contornos curvos irregulares e não convexos, é preciso considerar um número grande de tangentes e o traçado do NCI deve ser obtido de maneira aproximada. Para a completude do processo descrito, precisamos de uma propriedade que mostraremos a seguir, denominada “Propriedade Fundamental da Antipolaridade”.

2.8 EXEMPLO 6

Determine o NCI de uma seção retangular, conforme mostrada na Fig. 2.11:

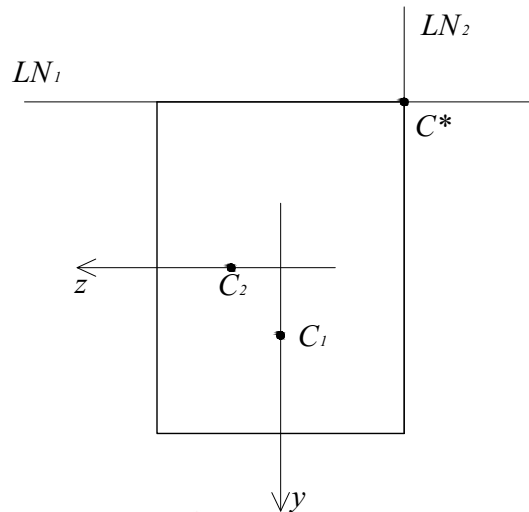


Figura 2.11: LN's para uma seção retangular

- Determinação das coordenadas do centro de solicitação C_1 :

$$LN_1 : n_1 n_1 \Rightarrow 1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} = 0 \quad \text{Para} \quad y = -\frac{h}{2} \Rightarrow y_{c1} = \frac{h}{6} \quad \text{e} \quad z_{c1} = 0$$

- Determinação das coordenadas do centro de solicitação C_2 :

$$LN_2 : n_2 n_2 \Rightarrow 1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} = 0 \quad \text{Para} \quad z = -\frac{b}{2} \Rightarrow z_{c2} = \frac{b}{6} \quad \text{e} \quad y_{c2} = 0$$

Quando a LN for qualquer reta entre $n_1 n_1$ e $n_2 n_2$, passando pelo vértice C^* da seção, seu centro de solicitação estará na reta que une os centros de solicitação C_1 e C_2 .

Para aquelas LN's que passam pela face inferior da seção e pela face lateral esquerda (retas $y = +\frac{h}{2}$ e $z = +\frac{b}{2}$, é fácil constatar que os outros dois pontos do contorno do NCI serão simétricos aos já calculados. Esses quatro pontos, unidos, formam o NCI da seção retangular, como mostrado na Fig. 2.12.

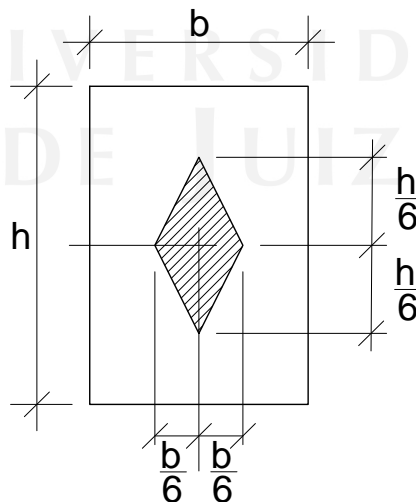


Figura 2.12: NCI de uma seção retangular

Capítulo 3

Estado Triaxial de Tensões

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre o estado triaxial de tensões, bem como sobre o caso particular denominado de estado plano de tensões que ocorre em grande parte de estruturas, tais como as barras. Discutimos, inicialmente, a natureza da grandeza tensão, formalizando a definição da matriz de tensão que evidencia o caráter tensorial desta grandeza. Em seguida, discutimos a transformação das componentes dessa matriz quando mudamos o sistema de eixos ao qual ela está referenciada para então conceituar tensões e direções principais. Apresentamos, ainda, a forma usual de representação do estado de tensão num ponto por intermédio do denominado círculo de Mohr no estado plano de tensões e do tri-círculo de Mohr utilizado no estado triaxial de tensões.

3.1.1 Caso da barra sujeita a esforço axial

Inicialmente, examinamos o caso de uma barra sujeita a um esforço axial, a qual nos permite ressaltar a importância do estudo aqui realizado. Assim, na Figura 3.1, mostramos uma barra sujeita a uma carga axial P , na qual queremos examinar o que ocorre, em termos de tensão, num ponto M de seu interior.

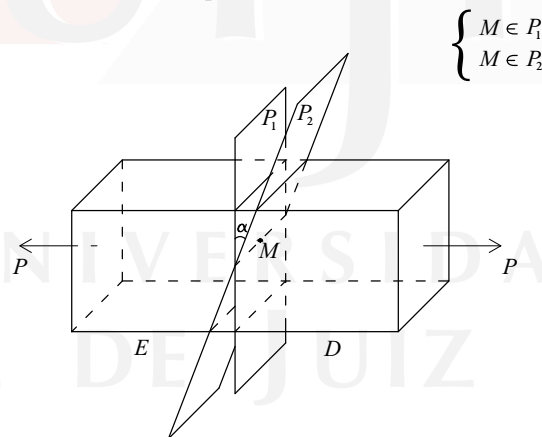


Figura 3.1: Barra sujeita a esforço axial e dois planos de corte passando pelo mesmo ponto M .

As Figs. 3.2 e 3.3, ilustram, separadamente, cada um dos planos de corte mostrados na Fig. 3.1. A Figura 3.2 ilustra a distribuição de tensões p sobre o plano de corte vertical P_1 . Esses planos de corte, denominados de P_1 e P_2 , pertencem a um conjunto de cortes particulares, cujas normais são paralelas às faces laterais da barra. Outros planos de corte diferentes destes existem e não estão sendo considerados no presente estudo.

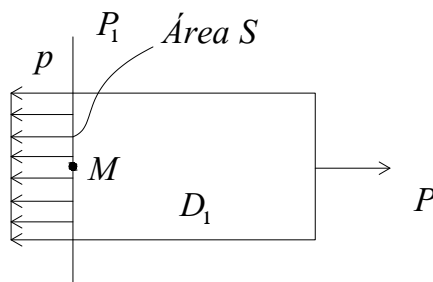


Figura 3.2: Corte passando por M , segundo P_1 .

A Fig. 3.3 ilustra a distribuição de tensões p_1 sobre o plano de corte inclinado P_2 .

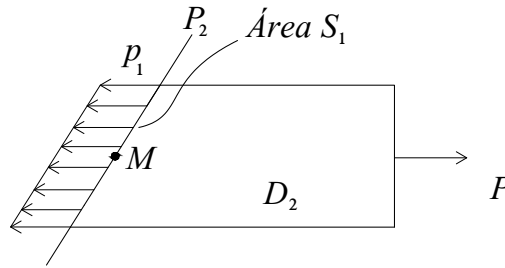


Figura 3.3: Corte segundo o plano P_2 , passando pelo ponto M .

Para cada um destes cortes, assumindo uma distribuição de forças por unidade de superfície, S e S_1 , de p e p_1 temos a seguinte identidade:

$$P = \int_S p dS = \int_{S_1} p_1 dS_1 \tag{3.1}$$

A Fig. 3.4(b) ilustra a decomposição de p_1 nas direções normal e paralela ao plano de corte P_2 . Denotamos, assim, as componentes de p_1 :

- $\sigma_n \rightarrow$ projeção de p_1 sobre o vetor normal \hat{N}
- $\tau_{t_1} \rightarrow$ Projeção de p_1 no plano de corte

Logo, podemos escrever que $p_1 = \sigma_n \hat{N} + \tau_{t_1} \hat{t}$, onde \hat{N} e \hat{t} são unitários das direções normal e paralela ao plano de corte, respectivamente. Fazendo o equilíbrio de forças do prisma D_2 , temos:

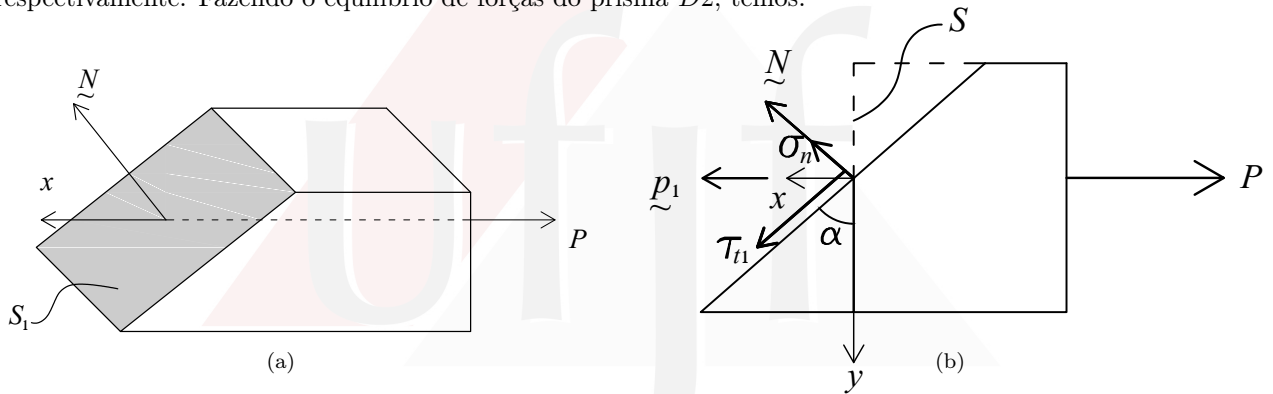


Figura 3.4: Equilíbrio do “prisma” D_2

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow P - \sigma_n S_1 \cos \alpha - \tau_{t_1} S_1 \sin \alpha = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_n S_1 \sin \alpha - \tau_{t_1} S_1 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

onde S_1 é a área da seção transversal definida pelo plano de corte P_2 . Sendo $S_1 = S / \cos \alpha$, obtemos:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{P}{S} \cos^2 \alpha \Rightarrow \sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha & \text{Rel. 1} \\ \tau_{t_1} = \frac{1}{2} \frac{P}{S} \sin 2\alpha \Rightarrow \tau_{t_1} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha & \text{Rel. 2} \end{cases}$$

Estas relações nos permitem determinar p_1 como:

$$p_1 = \sigma_x \cos \alpha \tag{3.2}$$

com $\sigma_x = \frac{P}{S}$.

Conclusões:

- a) O valor da tensão normal num plano com inclinação α pode ser determinado a partir do valor da tensão normal no plano da seção perpendicular ao eixo da peça ($\sigma_x = P/S$) e pelo ângulo α , de acordo com a Rel.1.
- b) Em cada ponto da seção transversal, como visto neste exemplo, existe uma tensão normal e uma tensão tangencial para cada um dos planos que passam por este ponto.
- c) O valor da tensão tangencial total nestes planos também pode ser determinado em função destes mesmos valores de acordo com a Rel.1.

- d) O valor da tensão total pode ser determinado pela Rel.2.
- e) O problema da estabilidade do equilíbrio para barras sujeitas a esforço normal deve ser modificado e passa a se enunciar como: a partir dos valores das tensões normal e tangencial atuantes num ponto, segundo várias direções, qual ou quais desses valores ou quais combinações desses valores devem ser utilizados para que possamos assegurar a integridade desse tipo de peça estrutural.

3.2 Tensão: Conceito e Definição

Seja um corpo em equilíbrio sob a ação das forças indicadas abaixo (concentradas e distribuídas):

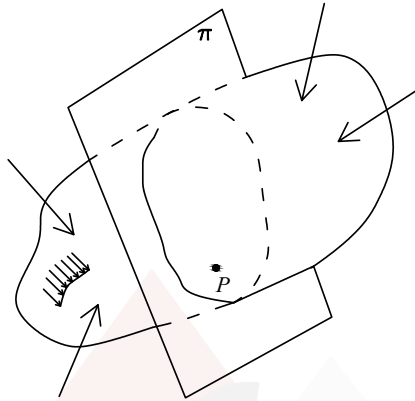


Figura 3.5: Corte em corpo sob ação de forças em equilíbrio.

Para identificar o que denominamos de “estado de tensões” no ponto P , procedemos do seguinte modo: separamos o corpo por um plano π passante por este ponto, como mostrado na Fig. 3.6.

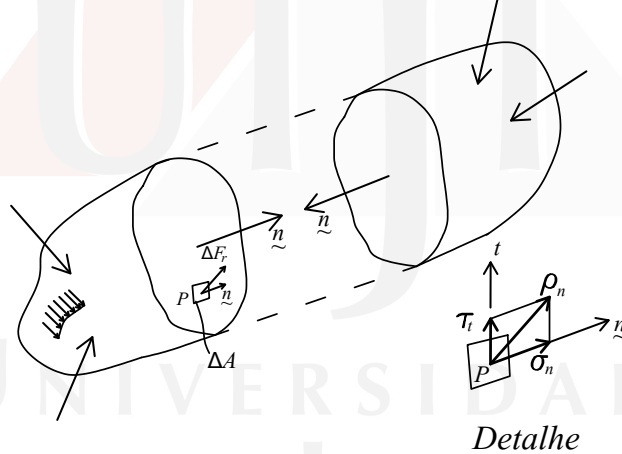


Figura 3.6: Corpo separado com distribuição de tensões no corte.

Definimos, então, o vetor tensão total no ponto P , segundo o plano π , como sendo o vetor $\underline{\rho}_n$ que atua no elemento de área ΔA , tal que:

$$\underline{\rho}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta F}_r}{\Delta A} \quad \underline{\Delta F}_r - \text{Parcela de força sobre o elemento } \Delta A \text{ em torno de } P.$$

$\underline{\rho}_n \rightarrow$ Vetor tensão total no ponto P segundo o plano π (com normal \hat{n})

Examinando o elemento de área ΔA , visto no detalhe da Fig. 3.6, temos que:

$$\underline{\rho}_n = \sigma_n \hat{n} + \tau \hat{t}, \quad \text{com } \hat{n} \text{ e } \hat{t} \text{ são vetores unitários,}$$

onde:

$$\begin{cases} \sigma_n \rightarrow \text{tensão normal em } P \text{ (no plano } \pi), \\ \tau_t \rightarrow \text{tensão tangencial total em } P \text{ (no plano } \pi) \end{cases}$$

Podemos ainda utilizar um par de eixos ortogonais no plano π : \hat{t}_1 e \hat{t}_2 e decompor $\underline{\rho}_n$ de outro modo:

$$\underline{\rho}_n = \sigma_n \hat{n} + \tau_{t_1} \hat{t}_1 + \tau_{t_2} \hat{t}_2$$

onde: $\hat{t}_1, \hat{t}_2 \rightarrow$ eixos ortogonais arbitrários no plano da seção.

$\tau_{t_1}, \tau_{t_2} \rightarrow$ tensões tangenciais resultantes da decomposição de $\underline{\rho}_n$ nestes eixos (vide Fig. 3.7).

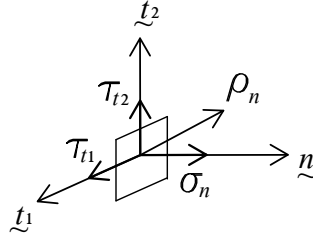


Figura 3.7: Decomposição de ρ_n nas direções n , t_1 e t_2 .

3.2.1 Matriz de tensões num ponto

De modo a poder operar com a grandeza tensão, procedemos de modo sistemático, realizando cortes segundo planos coordenados passando pelo ponto de interesse. Assim, definimos:

a) Plano de corte: **Plano zy**

Normal ao plano: eixo $x \Rightarrow \underline{n} = \hat{i}$

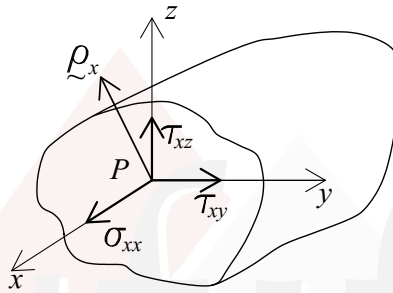


Figura 3.8: Plano de corte paralelo a zy.

O vetor tensão total na direção x fica, portanto, definido por:

$$\underline{\rho}_x = \sigma_{xx}\hat{i} + \tau_{xy}\hat{j} + \tau_{xz}\hat{k}$$

ou simplesmente

$$\underline{\rho}_x = (\sigma_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz})$$

onde empregamos como convenção para os nomes das tensões que o 1º índice indica o eixo da direção normal ao plano de corte e o 2º índice indica o eixo na direção em que esta componente atua.

Na figura acima, o eixo normal ao plano de corte é o eixo x .

b) Plano de corte: **Plano xz**

Normal ao plano: eixo $y \Rightarrow \underline{n} = \hat{j}$

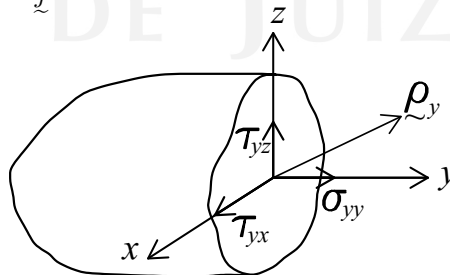


Figura 3.9: Plano de corte paralelo a xz.

O vetor tensão total na direção y fica, portanto, definido por:

$$\underline{\rho}_y = \tau_{yx}\hat{i} + \sigma_{yy}\hat{j} + \tau_{yz}\hat{k}$$

ou simplesmente

$$\underline{\rho}_y = (\tau_{yx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{yz})$$

c) Plano de corte: **Plano xy**

Normal ao plano: eixo $z \Rightarrow \underline{n} = \hat{k}$

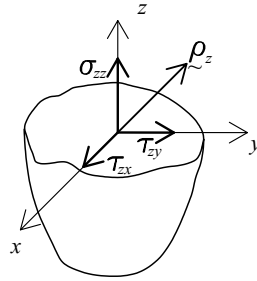


Figura 3.10: Plano de corte paralelo a xy.

O vetor tensão total na direção z fica, portanto, definido por:

$$\underline{\rho}_z = \tau_{zx}\hat{i} + \tau_{zy}\hat{j} + \sigma_{zz}\hat{k}$$

ou simplesmente

$$\underline{\rho}_z = (\tau_{zx} \quad \tau_{zy} \quad \sigma_{zz})$$

Esses nove valores, reunidos, formam uma matriz denominada de matriz de tensões dada por:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Estes valores compõem ou definem o **Estado de Tensões** no ponto P e dizemos que esta matriz descreve o tensor de tensões que atua no ponto.

3.2.2 Convenção de Sinais

Para a representação do estado de tensões num ponto, empregamos as superfícies dos cortes segundo os planos coordenados em torno deste ponto compondo a figura de um cubo em torno deste ponto. Assim, adotamos a seguinte convenção para o sinal das tensões:

- Tensões que atuam nas faces deste cubo cuja normal externa aponta para o sentido positivo dos eixos serão positivas se apontarem na direção destes eixos.
- Tensões que atuam nas faces deste cubo cuja normal externa aponta no sentido contrário ao sentido positivo dos eixos serão positivas se apontarem nas direções contrárias a estes eixos.

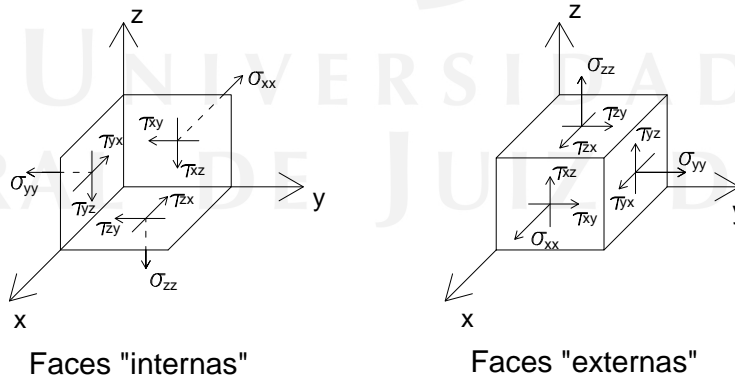


Figura 3.11: Tensões positivas representadas nas faces “internas” ou “externas” do cubo sobre o ponto P .

3.2.3 Simetria da matriz de tensões

Sejam dois pontos P e Q distantes de dx na direção x e dy na direção y sujeitos a um estado de tensões no qual as únicas tensões não-nulas atuantes nestes pontos estão representadas na Fig. 3.12:

Como este volume está, por hipótese, em equilíbrio, temos que:

$$\sum M_P = 0 \rightarrow \text{O somatório dos momentos, em relação ao ponto } P, \text{ das forças que atuam neste volume é nulo.}$$

$$\underbrace{\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right)}_{\text{Tensão}} \underbrace{dx dz}_{\text{Área}} \underbrace{dy}_{\text{distância}} - \underbrace{\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx\right)}_{\text{Tensão}} \underbrace{dy dz}_{\text{Área}} \underbrace{dx}_{\text{distância}} = 0$$

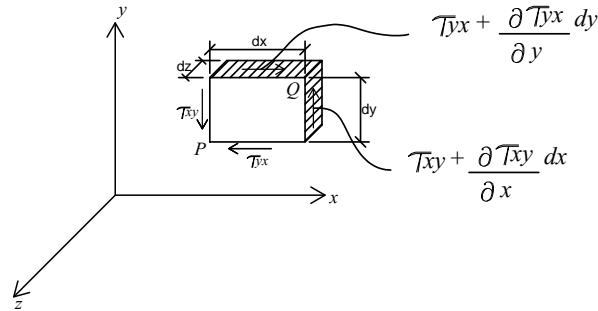


Figura 3.12: Reciprocidade entre as tensões tangenciais.

$$\tau_{yx} dx dz dy + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy^2 dx dz - \tau_{xy} dy dz dx - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx^2 dy dz = 0$$

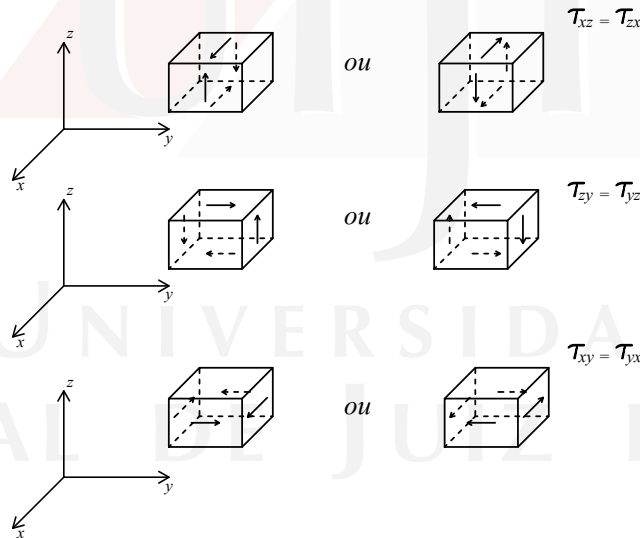
Eliminando os termos de ordem superior e simplificando a expressão acima, tem-se: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$.

Analogamente, podemos concluir que: $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Logo,

$\underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}$ → A transposta da matriz $\underline{\underline{\sigma}}$ é igual a ela mesma e podemos escrever que:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

A matriz de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ é simétrica e dizemos que esta matriz descreve o chamado **tensor de tensões** que atua no ponto e que este tensor é simétrico. Graficamente, constatamos que as tensões tangenciais atuantes em planos ortogonais têm sentidos que são convergentes ou divergentes em relação à aresta de interseção destes planos. Obedecem, deste modo, aos seguintes padrões:



3.3 Vetor tensão total num plano qualquer

Nosso problema a ser tratado agora é: dado o estado de tensões num ponto através do tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ (referido a um sistema de eixos xyz), determinar os valores da tensão total ρ e das tensões normal σ_n e tangencial τ_t num plano arbitrário, conhecido por sua normal \hat{N} . Em outras palavras, dados $\underline{\underline{\sigma}}$ e um plano de corte passando pelo ponto P , definido este plano pelo seu vetor normal \hat{N} de componentes (l, m, n) determinar ρ , σ_n e τ_t . As componentes deste vetor são os cossenos diretores deste vetor, conforme mostrado na Fig. 3.13.

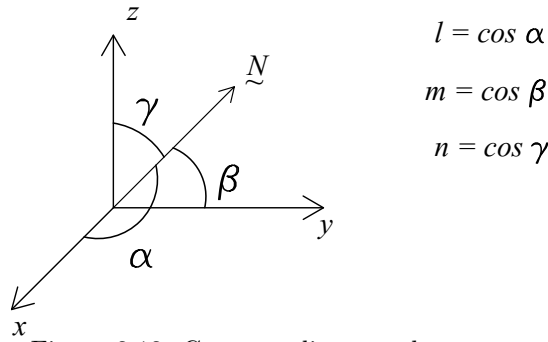


Figura 3.13: Cossenos diretores do vetor normal \underline{N} .

A Fig. 3.14 mostra as tensões atuantes num ponto O e um plano arbitrário cuja normal é o vetor \hat{N} .

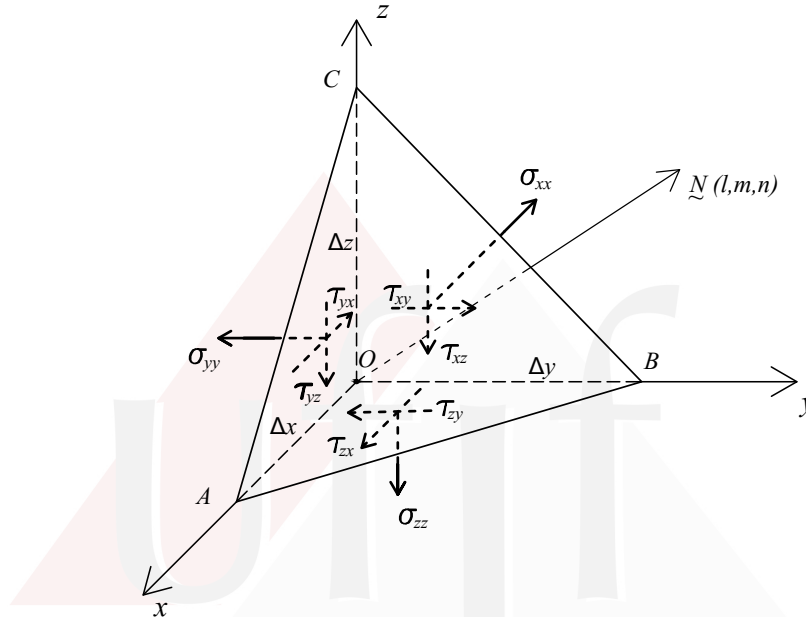


Figura 3.14: Prisma de arestas $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, em torno de um ponto.

Nesta Fig. 3.14, é possível verificar que as áreas dos triângulos AOB, BOC e AOC podem ser calculadas a partir da área do triângulo ABC e dos cossenos diretores l, m e n , a saber:

$$\begin{aligned} \text{Área } \Delta BOC &= \Delta ABC \cdot l; \\ \text{Área } \Delta AOC &= \Delta ABC \cdot m; \\ \text{Área } \Delta AOB &= \Delta ABC \cdot n; \end{aligned}$$

onde o símbolo Δ indica a área do triângulo.

O equilíbrio deste prisma pode ser obtido a partir das equações:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \rho_x(\Delta ABC) &= \underbrace{\sigma_{xx}(\Delta ABC) \cdot l + \tau_{yx}(\Delta ABC) \cdot m + \tau_{zx}(\Delta ABC) \cdot n}_{\text{Forças nas direção } x \text{ nas faces } BOC; AOC; BOA} \end{aligned}$$

Assim,

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \rho_x = \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n$$

Analogamente, podemos calcular ρ_y e ρ_z através das equações $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma F_z = 0$, resultando em:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow \rho_y = \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n \\ \Sigma F_z = 0 &\Rightarrow \rho_z = \tau_{xz}l + \tau_{zy}m + \sigma_{zz}n \end{aligned}$$

Matricialmente, podemos representar as equações acima como:

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

ou

$$\underline{\rho} = \underline{\underline{\sigma}}^T \hat{N}$$

Como $\underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}$, chegamos a:

$$\underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{\sigma}} \hat{N}$$

3.3.1 Cálculo das tensões normal e tangencial num plano qualquer

Na Fig. 3.15, ilustramos a situação das tensões total, tangencial e normal atuantes em um ponto segundo um plano qualquer. Vemos que σ_n é o valor da projeção de $\underline{\underline{\rho}}$ sobre \hat{N} e que τ_t é a tensão tangencial total neste plano e, assim, podemos escrever:

$$\underline{\underline{\rho}}_n = \sigma_n \hat{N} + \tau_t \hat{t}$$

onde \hat{t} é um vetor unitário no plano com normal \hat{N} .

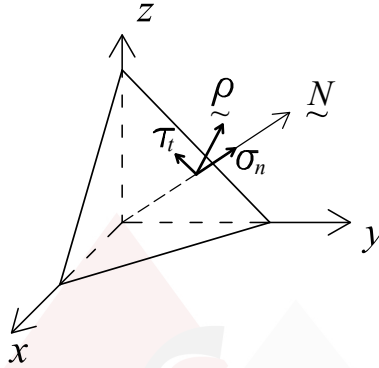


Figura 3.15: Tensões normal e tangencial num plano qualquer.

Então, temos que:

$$\sigma_n = \text{proj}_{\hat{N}} \underline{\underline{\rho}} \quad (\text{projeção de } \underline{\underline{\rho}} \text{ sobre } \hat{N})$$

e

$$|\underline{\underline{\rho}}|^2 = \sigma_n^2 + \tau_t^2 \quad (\text{regra do paralelogramo})$$

A projeção de $\underline{\underline{\rho}}$ sobre \hat{N} sendo $|\hat{N}| = 1$ é dada por:

$$\sigma_n = \text{proj}_{\hat{N}} \underline{\underline{\rho}} = |\underline{\underline{\rho}}| |\hat{N}| \cos \theta = |\underline{\underline{\rho}}| \cos \theta, \quad \text{já que } |\hat{N}| = 1 \text{ e } \theta \text{ é o ângulo entre } \underline{\underline{\rho}} \text{ e } \hat{N}$$

Como por definição,

$$\underline{\underline{\rho}} \cdot \hat{N} = |\underline{\underline{\rho}}| |\hat{N}| \cos \theta = \rho_x l + \rho_y m + \rho_z n$$

Da definição de σ_n como sendo a projeção de $\underline{\underline{\rho}} \cdot \hat{N}$ sobre \hat{N} e da definição do produto interno entre dois vetores, podemos escrever:

$$\sigma_n = \underline{\underline{\rho}} \cdot \hat{N}$$

E a tensão tangencial total neste plano pode ser, então, calculada como:

$$\tau_t = \sqrt{|\underline{\underline{\rho}}|^2 - \sigma_n^2}$$

3.4 EXEMPLO 7

Seja o tensor de tensões mostrado abaixo que define o estado de tensões num ponto de uma estrutura. Pede-se determinar o vetor tensão total, a tensão normal e a tensão tangencial total atuando num plano paralelo ao plano $x + 2y + 2z = 6$ passando por este ponto.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Solução:

Da Geometria Analítica, temos que o vetor normal ao plano em questão é dado por:

$$\underline{N} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ e seu unitário } \underline{\hat{N}} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{Bmatrix}, \text{ pois } |\underline{N}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Logo, os cossenos diretores de $\underline{\hat{N}}$ valem:

$$l = \frac{1}{3}; m = \frac{2}{3}; n = \frac{2}{3}$$

O vetor tensão total neste plano pode ser obtido por:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\hat{N}}$$

Obtemos, assim:

$$\begin{cases} \rho_x = 200 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{2}{3} + 300 \times \frac{2}{3} \\ \rho_y = 400 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{2}{3} \\ \rho_z = 300 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} + 100 \times \frac{2}{3} \end{cases}$$

Logo:

$$\underline{\rho}_n = \{533,33 \quad 133,33 \quad 166,67\} \text{MPa}$$

ou

$$\underline{\rho}_n = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 533,33 \\ 133,33 \\ 166,67 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

- Cálculo da tensão normal:

Fazendo-se produto escalar entre o vetor tensão total e o vetor normal unitário, temos:

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \underline{\hat{N}} = \begin{Bmatrix} 533,33 \\ 133,33 \\ 166,67 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{Bmatrix} = 533,33 \cdot \frac{1}{3} + 133,33 \cdot \frac{2}{3} + 166,67 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{377,78 \text{ MPa}}$$

- Cálculo da tensão tangencial:

Pela regra do paralelogramo, temos que:

$$\tau_n^2 = |\underline{\rho}|^2 - \sigma_n^2$$

onde

$$|\underline{\rho}| = \sqrt{533,33^2 + 133,33^2 + 166,67^2} = 574,46 \text{ MPa}$$

Logo,

$$\tau_n = \sqrt{574,46^2 - 377,78^2}$$

$$\tau_n = \boxed{432,76 \text{ MPa}}$$

3.5 Tensões Principais

3.5.1 Conceito

Tensões principais são valores das tensões normais em torno de um ponto segundo planos onde não existem tensões tangenciais. Os planos nos quais estas tensões atuam são denominados de *planos principais* e as normais que definem estes planos são denominadas de *direções principais*.

Plano Principal \rightarrow direção principal
 \rightarrow tensão principal

3.5.2 Determinação das tensões principais

Supondo que \hat{e} seja uma direção principal, a tensão total neste plano é igual à tensão normal neste plano já que neste plano não existem tensões tangenciais, isto é:

$$\underline{\rho}_e = \sigma_e \hat{e}$$

onde designamos por σ_e a tensão principal atuante neste plano principal. Como $\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \hat{N}$, para este plano temos $\hat{N} = \hat{e}$ e,

$$\underline{\underline{\sigma}} \hat{e} = \underline{\rho}_e = \sigma_e \hat{e}$$

Concluimos então, que em um plano principal devemos ter:

$$\underline{\underline{\sigma}} \hat{e} = \sigma_e \hat{e}$$

Logo,

$$\underline{\underline{\sigma}} \hat{e} = \sigma_e \underline{\underline{\mathbb{I}}} \hat{e}, \quad \text{onde } \underline{\underline{\mathbb{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tensor identidade 3x3

e

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_e \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) \hat{e} = \underline{0}$$

Esta equação descreve um sistema algébrico homogêneo de equações lineares que, para ter solução diferente da solução trivial $\hat{e} = \underline{0}$, requer que:

$$\det \left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_e \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_e & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_e & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

que resulta numa equação do 3º grau na incógnita σ_e :

$$\sigma_e^3 - I_1 \sigma_e^2 + I_2 \sigma_e - I_3 = 0$$

onde:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \det \underline{\underline{\sigma}}$$

Esta equação possui três raízes reais que são as tensões principais:

$$\sigma_e = \sigma_{e1} \quad \sigma_e = \sigma_{e2} \quad \sigma_e = \sigma_{e3}$$

Para cada uma destas soluções podemos calcular a direção do plano associada a cada tensão principal. Assim,

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e1} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) \hat{e}_1 = \underline{0} \Rightarrow \hat{e}_1 \rightarrow \text{determinado}$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e2} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) \hat{e}_2 = \underline{0} \Rightarrow \hat{e}_2 \rightarrow \text{determinado}$$

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e3} \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) \hat{e}_3 = \underline{0} \Rightarrow \hat{e}_3 \rightarrow \text{determinado}$$

3.5.3 Invariantes do tensor de tensões

Seja um estado de tensões num ponto definido por seu tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ que podemos descrever segundo diferentes sistemas de eixos xyz , $x'y'z'$ e 123 (direções principais). Temos então que:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{xyz}; \quad \underline{\underline{\sigma}}^{x'y'z'} \text{ e } \underline{\underline{\sigma}}^{123} \rightarrow \text{Descrevem o mesmo estado de tensões}$$

Para a determinação das tensões principais em torno deste ponto, podemos utilizar qualquer uma das equações abaixo:

$$\begin{cases} \det(\underline{\underline{\sigma}}^{xyz} - \sigma_e \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \sigma_e^3 - I_1 \sigma_e^2 + I_2 \sigma_e - I_3 = 0 \\ \det(\underline{\underline{\sigma}}^{x'y'z'} - \sigma_e \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \sigma_e^3 - I'_1 \sigma_e^2 + I'_2 \sigma_e - I'_3 = 0 \\ \det(\underline{\underline{\sigma}}^{123} - \sigma_e \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow (\sigma_e - \sigma_1)(\sigma_e - \sigma_2)(\sigma_e - \sigma_3) = 0 \end{cases}$$

Como as tensões principais em torno de um ponto são únicas e não dependem do referencial escolhido para descrever o estado de tensões cada uma destas três equações devem ter o que implica em que:

$$I'_1 = I_1 \quad I'_2 = I_2 \quad I'_3 = I_3$$

Estes valores são, então, denominados de **invariantes do tensor de tensões** o que resulta que valem as seguintes relações:

a) Invariância de I_1 :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

b) Invariância de I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'y'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'z'} & \sigma_{z'z'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{y'y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{y'z'} & \sigma_{z'z'} \end{vmatrix} \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 \end{aligned}$$

c) Invariância de I_3 :

$$\det \underline{\underline{\sigma}}^{xyz} = \det \underline{\underline{\sigma}}^{x'y'z'} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

3.6 Máxima Tensão Cisalhante

Buscamos agora a determinação das direções e dos valores das máximas tensões cisalhantes que ocorrem num ponto sujeito a um estado triaxial de tensões o que também será feita a partir das direções principais. Segundo estas direções, o tensor de tensões num ponto escreve-se como:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

A tensão total $\underline{\rho}$ num plano cuja normal é dada por $\hat{N} \rightarrow l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ vale:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \hat{N} = \sigma_1 l \hat{i} + \sigma_2 m \hat{j} + \sigma_3 n \hat{k}$$

A tensão normal neste plano vale

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \hat{N} \therefore \sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

E a tensão tangencial neste plano,

$$\tau^2 = |\underline{\rho}_n|^2 - \sigma_n^2$$

ou

$$\tau^2 = (\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2) - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2$$

Como $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, podemos eliminar l^2 desta equação, já que:

$$l^2 = 1 - m^2 - n^2$$

Assim, obtemos:

$$\tau^2 = (1 - m^2 - n^2)^2 \sigma_1^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - [(1 - m^2 - n^2) \sigma_1 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2]^2$$

A determinação dos valores extremos de τ , quando variamos m e n , pode ser obtido a partir da solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial m} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Derivando-se, primeiramente, com relação a m , vem:

$$2\tau \frac{\partial \tau}{\partial m} = -2[(1 - m^2 - n^2) \sigma_1^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2](-2m\sigma_1 + 2m\sigma_2) - 2m\sigma_1^2 + 2m\sigma_2^2$$

$$\tau \frac{\partial \tau}{\partial m} = m(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) - [m^2(\sigma_2 - \sigma_1) + n^2(\sigma_3 - \sigma_1) + \sigma_1][2m(\sigma_2 - \sigma_1)]$$

Que igualada a zero nos fornece:

$$m(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) - 2m^3(\sigma_2 - \sigma_1)^2 - 2mn^2(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - 2m\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1) = 0$$

Dividindo todos os termos por $(\sigma_2 - \sigma_1) \neq 0$ e reescrevendo esta equação, obtemos:

$$2m \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} - m^2(\sigma_2 - \sigma_1) - n^2(\sigma_3 - \sigma_1) \right] = 0$$

Derivando, agora, com relação a n :

$$\begin{aligned} 2\tau \frac{\partial \tau}{\partial n} &= -2n\sigma_1^2 + 2n\sigma_3^2 - 2[-2n\sigma_1 + 2n\sigma_3](1 - m^2 - n^2)\sigma_1 \\ &\quad + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \\ &= n(\sigma_3^2 - \sigma_1^2) - 2nm^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_1) - 2n^3(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \\ &\quad - 2n\sigma_1(\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned}$$

Que dividida por $(\sigma_3 - \sigma_1) \neq 0$ e igualada a zero, nos fornece:

$$n(\sigma_3 + \sigma_1) - 2nm^2(\sigma_2 - \sigma_1) - 2n^3(\sigma_3 - \sigma_1) - 2n\sigma_1 = 0$$

ou:

$$2n \left[\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} - m^2(\sigma_2 - \sigma_1) - n^2(\sigma_3 - \sigma_1) \right] = 0$$

Temos, então, o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} m \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} - m^2(\sigma_2 - \sigma_1) - n^2(\sigma_3 - \sigma_1) \right] = 0 \\ n \left[\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} - m^2(\sigma_2 - \sigma_1) - n^2(\sigma_3 - \sigma_1) \right] = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

Uma solução para este sistema é dada por:

$$m = 0; n = 0 \Rightarrow l = \pm 1$$

Estes são os cossenos diretores de um dos planos principais cuja tensão tangencial é nula, o que nos indica que uma outra solução deve ser buscada. Assim uma outra solução que satisfaz a primeira destas equações é obtida substituindo-se $m = 0$ no termo entre colchetes da segunda equação:

$$\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2} - n^2(\sigma_3 - \sigma_1) = 0$$

cuja solução é dada por:

$$n^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizando a terceira equação, obtemos:

$$l^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Temos, então, como solução geral deste sistema:

$$\left\{ m = 0; l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

Procedendo de modo análogo e eliminando-se m e n na equação de determinação de τ , obtemos outro conjunto de soluções:

$$\left\{ n = 0; m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

$$\left\{ l = 0; m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

Cada conjunto destes valores define um plano bissetor dos planos principais em torno do ponto.

3.6.1 Cálculo das tensões tangenciais extremas

Determinemos, agora, o valor de τ para $m = 0; l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ e a direção é dada por $\hat{N} = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$, o vetor tensão total será:

$$\underline{\underline{\rho}}_n = \underline{\underline{\sigma}} \hat{N} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\rho}}_n = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1 \quad 0 \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_3 \right\}$$

Cujo módulo vale:

$$|\underline{\underline{\rho}}_n|^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2}$$

A tensão normal neste plano é dada por:

$$\sigma_n = \underline{\underline{\rho}}_n \cdot \hat{N} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \boxed{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}$$

Daí obtemos a tensão tangencial extrema:

$$\tau^2 = |\underline{\underline{\rho}}_n|^2 - \sigma_n^2$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{2} \right) - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2$$

$$\boxed{\tau = \pm \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)}$$

Para as outras soluções obtemos:

$$\text{Para: } l = 0; m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tau = \pm \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right) \text{ e } \sigma_m = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

$$\text{Para: } n = 0; l = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tau = \pm \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) \text{ e } \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

3.7 Decomposição do tensor de tensões

Dado um tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$, é possível decompô-lo do seguinte modo:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_h + \underline{\underline{\sigma}}_D$$

onde: $\underline{\underline{\sigma}}_h \rightarrow$ Tensor de tensões hidrostático;

$\underline{\underline{\sigma}}_D \rightarrow$ Tensor de tensões desviador.

- Determinação das componentes $\underline{\underline{\sigma}}_h$ e $\underline{\underline{\sigma}}_D$:

Definindo-se $\underline{\underline{\sigma}}_D$ como um tensor tal que $tr \underline{\underline{\sigma}}_D = 0$ e, como já visto (para qualquer sistema de eixos):

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Se escolhermos as direções principais de $\underline{\underline{\sigma}}$ para sua descrição, temos:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Logo, podemos escrever:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{bmatrix}$$

Verificação: pela invariância da soma da diagonal principal do tensor de tensões, temos que:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p + (\sigma_1 - p) + (\sigma_2 - p) + (\sigma_3 - p)$$

Escolhendo para $\underline{\underline{\sigma}}_D$ um tensor com traço nulo, vem:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p$$

o que resulta em:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Assim, para qualquer sistema de eixos, temos:

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_h$$

Obs: A parcela $\underline{\underline{\sigma}}_h$ é responsável pela variação de volume, enquanto a parcela $\underline{\underline{\sigma}}_D$, chamada de tensor desviador, é responsável pela mudança de forma, como se verá no estudo das deformações.

Concluindo, podemos afirmar que, se $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$, então:

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - p \end{bmatrix} \text{ com } p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

3.8 EXEMPLO 8

Sejam dados: $\sigma_{xx} = 200\text{MPa}$; $\tau_{xy} = 100\text{MPa}$; $\tau_{xz} = 300\text{MPa}$; $\tau_{yz} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. Determinar as tensões e os eixos principais:

Solução:

a) Montagem e representação do estado de tensões dado:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 100 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

b) Cálculo das tensões principais:

b.1) Pela definição de tensões principais:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_e \underline{\underline{\mathbb{I}}}) = 0$$

onde: $\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow$ tensão principal

$\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow$ tensor de tensões

$$\underline{\underline{\mathbb{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tensor identidade}$$

Logo:

$$\det \begin{bmatrix} 200 - \sigma_e & 100 & 300 \\ 100 & 0 - \sigma_e & 0 \\ 300 & 0 & 0 - \sigma_e \end{bmatrix} = 0$$

Calculando este determinante pela expansão da sua 3ª linha obtemos:

$$300 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 100 & 300 \\ 0 - \sigma_e & 0 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 200 - \sigma_e & 300 \\ 300 & 0 - \sigma_e \end{vmatrix} + (0 - \sigma_e) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 200 - \sigma_e & 100 \\ 100 & 0 - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

$$300(\sigma_e) \times 300 + 0 + (-\sigma_e)[(200 - \sigma_e)(0 - \sigma_e) - 100 \times 100] = 0$$

$$\sigma_e^3 - 200\sigma_e^2 - 10^5\sigma_e = 0$$

cujas raízes são:

$$\begin{cases} \sigma_{e1} = 431,66 \text{ MPa} \\ \sigma_{e2} = 0 \\ \sigma_{e3} = -231,66 \text{ MPa} \end{cases}$$

b.2) Pela equação característica a partir dos invariantes de $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$\sigma_e^3 - I_1\sigma_e^2 + I_2\sigma_e - I_3 = 0$$

onde os invariantes são:

$$I_1 = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 200$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 200 & 300 \\ 300 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -10^5$$

$$I_3 = \det \underline{\underline{\sigma}} = 0$$

Logo, a equação característica é dada por:

$$\sigma_e^3 - 200\sigma_e^2 - 10^5\sigma_e = 0$$

cujas raízes são:

$$\begin{cases} \sigma_{e1} = 431,66 \text{ MPa} \\ \sigma_{e2} = 0 \\ \sigma_{e3} = -231,66 \text{ MPa} \end{cases}$$

Para o cálculo das direções principais, utilizaremos aproximações para σ_{e1} e σ_{e3} fazendo $\sigma_{e1} = 432 \text{ MPa}$ e $\sigma_{e3} = -232 \text{ MPa}$, apenas para facilitar as contas aqui apresentadas.

c) Cálculo das direções principais:

c.1) Para a primeira tensão principal $\sigma_{e1} = 432 \text{ MPa}$, a direção \hat{e}_1 dada pelos cossenos diretores l_1 , m_1 e n_1 deve satisfazer a:

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e1} \underline{\underline{I}} \right) \hat{e}_1 = \underline{\underline{0}} \rightarrow \text{Sistema de equações singular}$$

Isto é:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 100 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 432 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Devendo os valores l_1 , m_1 e n_1 satisfazer a:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

Reescrevendo o sistema acima:

$$\begin{cases} -232l_1 + 100m_1 + 300n_1 = 0 & (1) \\ 100l_1 - 432m_1 + 0n_1 = 0 & (2) \\ 300l_1 + 0m_1 - 432n_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Podemos obter l_1 , m_1 e n_1 de várias maneiras, como mostrado a seguir.

c.1.1) Escolhendo as equações (2) e (3) e tomando n_1 como independente:

$$\begin{cases} 100l_1 - 432m_1 = 0n_1 \\ 300l_1 + 0m_1 = 432n_1 \end{cases}$$

que é uma escolha possível, já que:

$$\det \begin{bmatrix} 100 & -432 \\ 300 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Resolvendo este sistema a partir da segunda destas equações, obtemos:

$$l_1 = \frac{432}{300} n_1$$

que, substituída na primeira, nos dá:

$$100 \times \left(\frac{432}{300} \right) n_1 - 432m_1 = 0$$

$$m_1 = \frac{100}{300} n_1$$

como $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$:

$$\left(\frac{432}{300} n_1 \right)^2 + \left(\frac{100}{300} n_1 \right)^2 + n_1^2 = 1$$

$$n_1 = \pm 0,560 \begin{cases} l_1 = \pm 0,806 \\ m_1 = \pm 0,1865 \end{cases}$$

Temos duas possíveis direções:

$$e \begin{cases} \hat{e}_1 = +0,806\hat{i} + 0,1865\hat{j} + 0,560\hat{k} \\ \hat{e}_1^* = -0,806\hat{i} - 0,1865\hat{j} - 0,560\hat{k} \end{cases}$$

No entanto, observe que $\hat{e}_1 = -\hat{e}_1^*$ e que os planos normais a \hat{e}_1 e a \hat{e}_1^* são os mesmos. Ou seja, tanto \hat{e}_1 quanto \hat{e}_1^* definem o mesmo plano normal a estes vetores!

c.1.2) Escolhendo as mesmas equações (2) e (3) tomando m_1 como independente:

$$\begin{cases} 100l_1 + 0n_1 & = & 432m_1 \\ 300l_1 - 432n_1 & = & 0m_1 \end{cases}$$

que também é uma escolha possível, já que:

$$\det \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 300 & -432 \end{bmatrix} \neq 0$$

Da 1ª destas equações: $l_1 = 4,32m_1$. Substituindo na 2ª equação, vem:

$$300(4,32m_1) - 432n_1 = 0 \Rightarrow n_1 = 3m_1$$

como $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$:

$$(4,32m_1)^2 + m_1^2 + (3m_1)^2 = 1$$

$$m_1 = \pm 0,1867 \begin{cases} l_1 = \pm 0,806 \\ n_1 = \pm 0,560 \end{cases}$$

Obtendo a mesma solução do item c.1.1, isto é:

$$e \begin{cases} \hat{e}_1 = +0,806\hat{i} + 0,1867\hat{j} + 0,560\hat{k} \\ \hat{e}_1^* = -0,806\hat{i} - 0,1867\hat{j} - 0,560\hat{k} \end{cases}$$

Observe que diferenças no 4º algarismo significativo (em m_1) devem-se a aproximações usuais nestes casos.

c.1.3) Escolhendo as mesmas equações tomando l_1 como independente:

$$\begin{cases} -432m_1 + 0n_1 & = & -100l_1 \\ 0m_1 - 432n_1 & = & -300l_1 \end{cases}$$

que é uma escolha possível, já que:

$$\det \begin{bmatrix} -432 & 0 \\ 0 & -432 \end{bmatrix} \neq 0$$

Da 1ª temos : $m_1 = \frac{100}{432}l_1$. Da 2ª, obtemos : $n_1 = \frac{300}{432}l_1$.

Usando $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$:

$$l_1^2 + \left(\frac{100}{432}l_1\right)^2 + \left(\frac{300}{432}l_1\right)^2 = 1$$

$$l_1 = \pm 0,806 \begin{cases} m_1 = \pm 0,1865 \\ n_1 = \pm 0,560 \end{cases}$$

Obtendo-se, mais uma vez, os mesmos vetores dos casos anteriores.

c.2) Para a 2ª direção \hat{e}_2 com $\sigma_{e2} = 0$:

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e2}\underline{\underline{\mathbb{I}}}\right)\hat{e}_2 = \underline{\underline{0}} \quad \text{com} \quad \hat{e}_2 = l_2\hat{i} + m_2\hat{j} + n_2\hat{k}$$

Reescrevendo este sistema:

$$\begin{cases} 200l_2 + 100m_2 + 300n_2 & = & 0 \\ 100l_2 + 0m_2 + 0n_2 & = & 0 \\ 300l_2 + 0m_2 + 0n_2 & = & 0 \end{cases}$$

Tomando a 1ª e a 2ª destas equações:

$$\begin{cases} 200l_2 + 100m_2 & = & -300n_2 & (a) \\ 100l_2 + 0m_2 & = & 0n_2 & (b) \end{cases}$$

De (b), obtemos $100l_2 = 0 \Rightarrow l_2 = 0$:

Aplicando em (a)

$$100m_2 = -300n_2 \Rightarrow m_2 = -3n_2$$

com $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$, obtemos:

$$0^2 + (-3n_2)^2 + n_2^2 = 1$$

$$n_2^2 = 0,1 \Rightarrow n_2 = \pm 0,316$$

Como $m_2 = -3n_2 \rightarrow m_2 = \pm 0,949$

Concluimos que:

$$\begin{cases} \hat{e}_2 = 0\hat{i} - 0,949\hat{j} + 0,316\hat{k} & \text{ou} \\ \hat{e}_2^* = 0\hat{i} + 0,949\hat{j} - 0,316\hat{k} \end{cases}$$

c.3) Para a 3ª direção principal como $\hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3$, tendo \hat{e}_1 e \hat{e}_2 podemos obter \hat{e}_3 através de : $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$.

Pela definição do produto vetorial:

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} & \text{ou} \\ \hat{e}_3 &= \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ \hat{e}_3 &= \begin{vmatrix} 0,1867 & 0,560 \\ -0,949 & 0,316 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 0,806 & 0,560 \\ 0 & 0,316 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 0,806 & 0,560 \\ 0 & -0,949 \end{vmatrix} \hat{k} \\ \hat{e}_3 &= 0,5904\hat{i} - 0,2547\hat{j} - 0,765\hat{k} \end{aligned}$$

Observação final: Verificar que

$$\hat{e}_i^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}_i = \sigma_{ei} \quad \text{para } i = 1, 2, 3!$$

3.9 EXEMPLO 9

Idem ao Exemplo 5 para o tensor de tensões mostrado abaixo.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Cálculo das tensões principais:

$$\begin{aligned} I_1 &= 200 + 0 + 300 = 500 \\ I_2 &= \begin{vmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 300 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 300 \end{vmatrix} = -10000 + 60000 = 50000 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{vmatrix} = -3000000 \end{aligned}$$

Equação característica:

$$\sigma_{ee}^3 - I_1\sigma_{ee}^2 + I_2\sigma_{ee} - I_3 = 0$$

$$\sigma_{ee}^3 - 500\sigma_{ee}^2 + 50000\sigma_{ee} + 3000000 = 0$$

Identificamos na terceira linha da matriz de tensões que a única tensão não nula no plano onde atuam, τ_{xz} , τ_{yz} e σ_{zz} é esta última que caracteriza este plano como um plano principal e esta tensão como uma tensão principal. Logo, podemos fatorar a equação característica de terceiro grau, utilizando a técnica de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & -500 & 50000 & 3000000 \\ \hline 300 & 1 & -200 & -10000 & 0 \end{array}$$

Assim, $\sigma_{ee1} = 300$ MPa. As outras raízes são obtidas da solução da equação:

$$\begin{aligned} \sigma_{ee}^2 - 200\sigma_{ee} - 10000 &= 0 \\ \sigma_{ee} &= \frac{200 \pm 282,84}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ee2} = 241,42 \text{ MPa} \\ \sigma_{ee3} = -41,42 \text{ MPa} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = 300 \text{ MPa} \\ \sigma_{22} = 241,42 \text{ MPa} \\ \sigma_{33} = -41,42 \text{ MPa} \end{array} \right. \end{aligned}$$

-Direções principais -

1ª direção: l_1, m_1, n_1

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 200 - 300 & 100 & 0 \\ 100 & 0 - 300 & 0 \\ 0 & 0 & 300 - 300 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} &= \{0\} \\ \begin{cases} -100l_1 + 100m_1 = 0 \\ 100l_1 - 300m_1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow m_1 = l_1 \\ 100l_1 = 300m_1 &\rightarrow l_1 = m_1 = 0 \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 &\rightarrow n_1 = \pm 1 \rightarrow \hat{e}_1 = \hat{k} \\ \hat{e}_1^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{e}_1 &= 300 \text{ MPa} \end{aligned}$$

2ª direção: l_2, m_2, n_2

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 200 - 241,42 & 100 & 0 \\ 100 & 0 - 241,42 & 0 \\ 0 & 0 & 300 - 241,42 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} &= \{0\} \\ \begin{cases} -41,42l_2 + 100m_2 = 0 \\ 100l_2 - 241,42m_2 = 0 \\ 58,58n_2 = 0 \end{cases} &\therefore n_2 = 0 \\ m_2 &= 0,4142l_2 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 & \\ l_2^2 + 0,1716l_2^2 = 1 &\therefore \begin{cases} l_2 = \pm 0,924 \\ m_2 = \pm 0,383 \end{cases} \\ \hat{e}_2 = 0,924\hat{i} + 0,383\hat{j} & \\ \hat{e}_2^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{e}_2 &= 241,42 \text{ MPa} \end{aligned}$$

3ª direção: l_3, m_3, n_3

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 200 + 41,42 & 100 & 0 \\ 100 & 0 + 41,42 & 0 \\ 0 & 0 & 300 + 41,42 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} &= \{0\} \\ \begin{cases} 241,42l_3 + 100m_3 = 0 \\ 100l_3 + 41,42m_3 = 0 \\ 341,42n_3 = 0 \end{cases} &\therefore n_3 = 0 \\ m_3 &= -2,4142l_3 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 & \\ l_3^2 + 5,828l_3^2 = 1 &\therefore \begin{cases} l_3 = +0,383 \\ m_3 = -0,924 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Adotamos aqui a primeira determinação (positiva) de l_3 obtendo-se um valor negativo de m_3 .

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 &= 0,383\hat{i} - 0,924\hat{j} \\ \hat{e}_3^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{e}_3 &= -41,42 \text{ MPa} \end{aligned}$$

3.10 Aplicação ao caso do Estado Plano de Tensões

3.10.1 Introdução

No início deste capítulo sobre o estudo do estado triaxial de tensões e no Exemplo 2, abordamos um estado de tensões simples denominado “estado uniaxial de tensões” (assim denominado por possuir apenas uma tensão normal não nula quando utilizamos um sistema de eixos conforme o escolhido e apresentado em ambas situações). Mostramos nesse caso como a tensão normal σ_n variava com a normal ao corte considerado (dada por sua inclinação α ou φ em cada um dos casos citados). Por outro lado, na seção imediatamente anterior a esta, abordamos o caso geral do estado de tensões num ponto, apresentando como esta mesma tensão normal σ_n varia com a direção de um plano corte qualquer, sendo este definido pelos cossenos diretores do vetor normal.

Tratamos, agora, de um caso particular denominado de **estado plano de tensões** que ocorre, por exemplo, numa chapa - corpo plano com pequena espessura - cuja hipótese de carregamento inclui somente cargas externas aplicadas no seu plano médio. Se tomarmos o eixo z como sendo normal a este plano médio, este seria o plano xy , não existindo, por hipótese, cargas nas faces desta chapa ou perpendiculares ao seu plano médio. Assim, é razoável admitir que só existam tensões σ_{xx} ; τ_{xy} ; e σ_{yy} . A Fig. 3.16 ilustra esta situação.

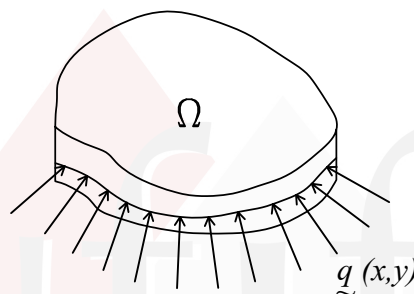


Figura 3.16: Peça em estado plano de tensões

Outra possível ocorrência de um estado plano de tensões ocorre quando todos os pontos de um corpo 3D estão submetidos a um estado de tensões, conforme uma das três possibilidades mostradas na Fig. 3.17. Nesta figura estão também indicados os tensores de tensões e as representações planas em cada caso particular.

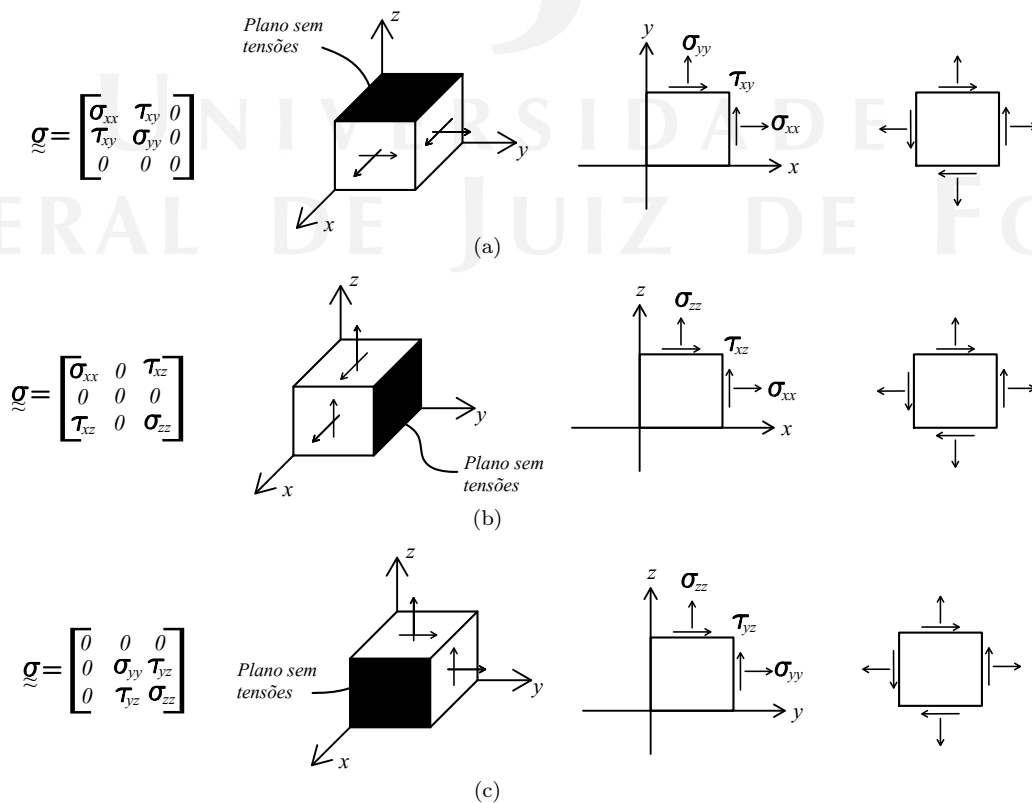


Figura 3.17: Possíveis ocorrências de Estado plano de tensões

3.10.2 Caso particular do problema 3D

Expressões gerais

Vimos que, para o estado triaxial de tensões, as tensões total, normal e tangencial podem ser escritas como:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \times \hat{N} \rightarrow \text{Vetor tensão total}$$

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \hat{N} \rightarrow \text{Tensão normal}$$

$$\tau_t = \sqrt{|\underline{\rho}_n|^2 - \sigma_n^2} \rightarrow \text{Tensão tangencial}$$

No caso de problemas no estado plano de tensões, temos que:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

O vetor normal \hat{N} pode ser escrito segundo a representação ilustrada na Fig. 3.18.

$$\hat{N} = [l_x \quad l_y] = [\cos \alpha \quad \text{sen} \alpha]$$

onde α é o ângulo formado entre \hat{N} e o eixo x.

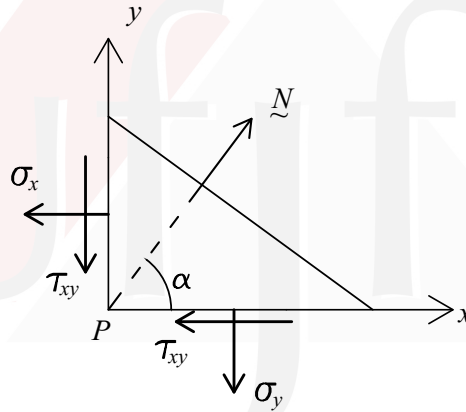


Figura 3.18:

Temos, então:

$$\begin{cases} \rho_{nx} \\ \rho_{ny} \end{cases} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{cases} \cos \alpha \\ \text{sen} \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{nx} = \sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \text{sen} \alpha \\ \rho_{ny} = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \text{sen} \alpha \end{cases}$$

A tensão normal é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \rho_{nx} \cos \alpha + \rho_{ny} \text{sen} \alpha \\ &= (\sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \text{sen} \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \text{sen} \alpha) \text{sen} \alpha \\ &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\tau_{xy} \text{sen} \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \text{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \text{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

Chegamos a:

$$\boxed{\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \text{sen} 2\alpha} \quad (3.4)$$

A tensão tangencial se escreve como:

$$\tau_t = \sqrt{\rho_{nx}^2 + \rho_{ny}^2 - (\rho_{nx} \cos \alpha + \rho_{ny} \operatorname{sen} \alpha)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e expandindo os termos entre parênteses, temos que:

$$\begin{aligned} \tau_t^2 &= \rho_{nx}^2(1 - \cos^2 \alpha) + \rho_{ny}^2(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 2\rho_{nx}\rho_{ny} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ &= \rho_{nx}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \rho_{ny}^2 \cos^2 \alpha - 2\rho_{nx}\rho_{ny} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ &= (\rho_{ny} \cos \alpha - \rho_{nx} \operatorname{sen} \alpha)^2 \end{aligned}$$

$$\tau_t = \rho_{ny} \cos \alpha - \rho_{nx} \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo as expressões de ρ_{nx} e ρ_{ny} na equação anterior, vem:

$$\begin{aligned} \tau_t &= (\tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \operatorname{sen} \alpha) \cos \alpha - (\sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha \\ &= \tau_{xy} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - (\sigma_{xx} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen}^2 \alpha) \end{aligned}$$

O que nos leva a:

$$\tau_t = - \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (3.5)$$

3.10.3 Tensões Principais

A determinação das tensões principais pode ser feita a partir da equação característica para este caso. Sendo

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix},$$

a equação característica que permite calcular as tensões principais escreve-se como:

$$\det \left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_e \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) = 0$$

onde σ_e é a tensão principal e $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$ é o tensor identidade de segunda ordem $\rightarrow \underline{\underline{\mathbb{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ficamos, então, com:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_e & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_e)(\sigma_{yy} - \sigma_e) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma_e^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma_e + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 = 0$$

cujas raízes são:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

Tensões Principais como valores extremos

Derivando-se a Eq. 3.4 em relação a α , vem:

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 0 \rightarrow -2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

o que resulta em:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Duas soluções são possíveis: α_0 e $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$.

Para a determinação do valor de σ_n no plano com α dado pela solução da equação trigonométrica acima, construímos o triângulo mostrado na Fig. 3.19.

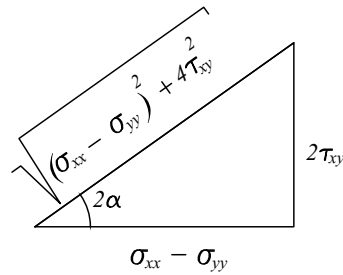


Figura 3.19:

Onde:

$$\text{sen}2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos}2\alpha = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Substituindo as expressões acima na Eq. 3.4, resulta em:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{3.6}$$

Isto mostra que as tensões principais são os valores extremos (máximo e mínimo) entre todas as tensões normais atuantes num ponto.

3.10.4 Tensões Tangenciais Máximas

A determinação dos valores extremos da tensão tangencial em um ponto é obtida derivando-se a Eq. 3.5 em relação a α :

$$\frac{d\tau_t}{d\alpha} = -2\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \text{cos}2\alpha - 2\tau_{xy} \text{sen}2\alpha = 0$$

o que resulta em:

$$\text{tg}2\alpha = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$$

Duas soluções são possíveis: α_0' e $\alpha_0' + \frac{\pi}{2}$.

A determinação dos extremos é feita a partir do triângulo mostrado na Fig. 3.20 (similar ao apresentado anteriormente):

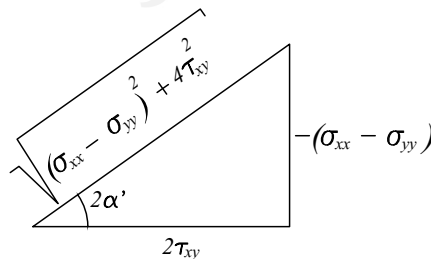


Figura 3.20:

Onde:

$$\text{sen}2\alpha' = \frac{-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos}2\alpha' = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Substituindo as expressões acima na Eq. 3.5, resulta em:

$$\tau_{max/min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Subtraindo-se σ_1 de σ_3 , obtidos na Eq. 3.6, vem:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

donde concluímos que:

$$|\tau_{max}| = |\tau_{min}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Estas expressões são válidas, entretanto, apenas para os casos em que a máxima (ou mínima) tensão cisalhante ocorre no mesmo plano em estudo. Para os casos onde estas tensões ocorrem fora do plano analisado, seus valores são dados por:

$$|\tau_{max}| = |\tau_{min}| = \sigma_1$$

Posição relativa entre as direções de σ_{nmax} e τ_{max}

O ângulo α_0 para o qual as tensões normais são máximas é dado por:

$$\text{tg}(2\alpha_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

E o ângulo α_0' , para o qual as tensões tangenciais são máximas é dado por:

$$\text{tg}(2\alpha_0') = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$$

Multiplicando-se uma expressão pela outra, obtém-se:

$$\text{tg}(2\alpha_0) \text{tg}(2\alpha_0') = -1$$

Logo, $2\alpha_0'$ e $2\alpha_0$ diferem de $\frac{\pi}{2}$, isto é:

$$2\alpha_0 = 2\alpha_0' + \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\alpha_0 = \alpha_0' + \frac{\pi}{4}$$

Logo, concluímos que os planos nos quais ocorrem as tensões normais extremas formam um ângulo de 45° com os planos nos quais as tensões tangenciais são máximas.

3.10.5 Círculo de Mohr

O par (σ_n, τ_t) das tensões normal e tangencial em um plano qualquer, num estado plano de tensões, gera uma figura no plano de coordenadas σ, τ que é conhecida como círculo de Mohr. Temos que σ_n e τ_t podem ser determinados por:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_t = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Fazendo $\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$, temos:

$$\begin{cases} \sigma_n - \sigma_m = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_t = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Elevando cada um dos termos das igualdades anteriores ao quadrado e somando-os obtém-se:

$$(\sigma_n - \sigma_m)^2 + \tau_t^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Chamando $\sigma_n = \sigma$; $\tau_t = \tau$ e $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, chegamos a:

$$(\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 = R^2$$

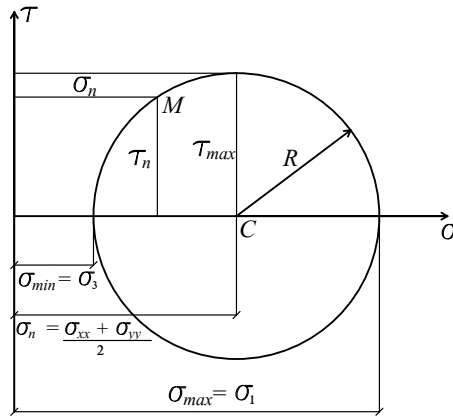


Figura 3.21:

que é a equação de uma circunferência no plano (σ, τ) com centro sobre o eixo σ no ponto $\sigma = \sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$ e cujo raio é o valor de R acima descrito e como mostra a Fig. 3.21.

$M \rightarrow$ Ponto que representa as tensões em torno de P na direção α .

Da Fig. 3.21 constatamos, novamente, que a máxima tensão tangencial vale:

$$\tau_{max} = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Expressão do círculo de Mohr a partir das tensões principais

Considerando como ponto de partida as expressões de σ_n e τ_t obtidas em função de σ_1 e σ_3 , temos:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \\ \tau_t = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{sen} 2\theta \end{cases}$$

Estas expressões são obtidas das expressões anteriormente vistas para σ_n e τ_t nas quais fez-se $\sigma_{xx} = \sigma_1$, $\sigma_{yy} = \sigma_3$, $\tau_{xy} = 0$ e usamos θ no lugar de α . A Fig. 3.22 esclarece o significado dessas expressões.

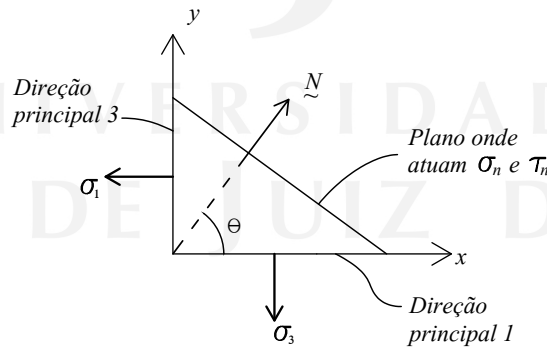


Figura 3.22:

Chamando $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$, $\sigma_n = \sigma$, $\tau_t = \tau$ e elevando ambas as expressões ao quadrado e somando-as, resulta em:

$$(\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

ou

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

que descreve o mesmo círculo desenvolvido anteriormente, já que:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_3 \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = R \end{cases}$$

Casos Particulares

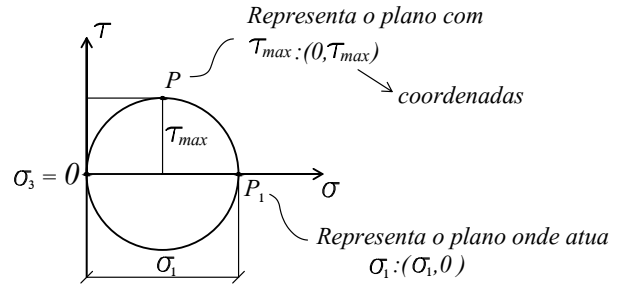
Nesta seção, são mostrados alguns casos particulares do círculo de Mohr para o estado plano de tensões.

i) Estado de tração simples:

Todas as tensões normais em torno do ponto (em qualquer direção) são de tração.

A figura ao lado ilustra o círculo de Mohr para este caso.

Assim, $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$, já que $\sigma_3 = 0$!

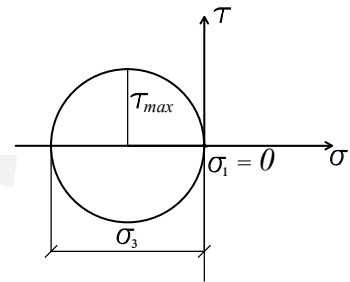


ii) Estado de compressão simples:

Todas as tensões normais em torno do ponto (em qualquer direção) são de compressão.

A figura ao lado ilustra o círculo de Mohr para este caso.

Assim, $\tau_{max} = \frac{\sigma_3}{2}$, já que $\sigma_1 = 0$!

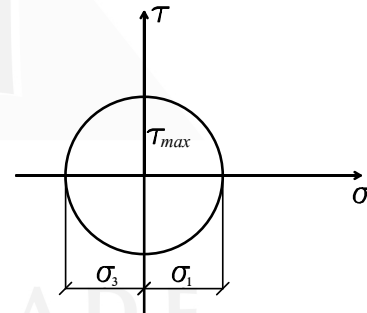


iii) Estado de cisalhamento simples:

Todas as tensões principais são iguais e de sinal contrário.

A figura ao lado ilustra o círculo de Mohr para este caso.

Assim, $\tau_{max} = |\sigma_3| = \sigma_1$.

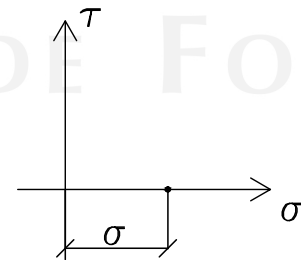


iv) Estado de tensões uniforme ou hidrostático:

Todas as tensões em torno do ponto são normais (de compressão ou tração), não existindo tensões tangenciais em nenhuma direção.

A figura ao lado ilustra este caso.

Assim, $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$ e $\tau = \tau_{max} = 0$.



Tri-Círculo de Mohr

Estudamos agora a representação gráfica das tensões normal e tangencial num plano qualquer em torno de um ponto no estado triaxial de tensões.

Tomamos como ponto de partida a hipótese de que conhecemos as direções principais e as respectivas tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 , isto é:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tensor de tensões referido aos eixos 1, 2, 3 (ou direções 1, 2, 3)}$$

Seja um plano genérico com posição conhecida (com relação a 1, 2, 3) dado por seu vetor normal \hat{N} de componentes designadas aqui por l_1, l_2, l_3 , como mostra a Fig. 3.23.

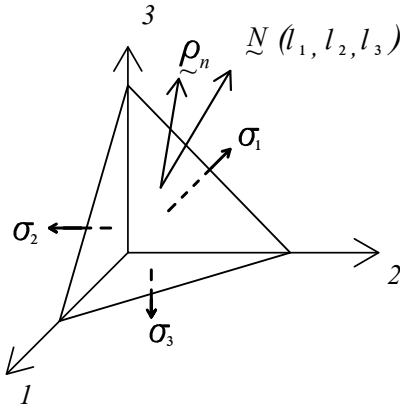


Figura 3.23:

As tensões normal e tangencial neste plano são dadas por:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\sigma} \hat{N} \rightarrow \text{Vetor tensão total neste plano}$$

$$\underline{\rho}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 l_1 \\ \sigma_2 l_2 \\ \sigma_3 l_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \hat{N} \\ \tau_t = \sqrt{|\underline{\rho}|^2 - \sigma_n^2} \end{cases}$$

Donde obtemos:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2}{\sqrt{(\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_2 l_2)^2 + (\sigma_3 l_3)^2}} \\ \tau_t = \frac{\sqrt{(\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_2 l_2)^2 + (\sigma_3 l_3)^2 - \sigma_n^2}}{\sqrt{(\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_2 l_2)^2 + (\sigma_3 l_3)^2}} \end{cases}$$

Examinemos, agora, o conjunto de planos com $l_3 = 0$:

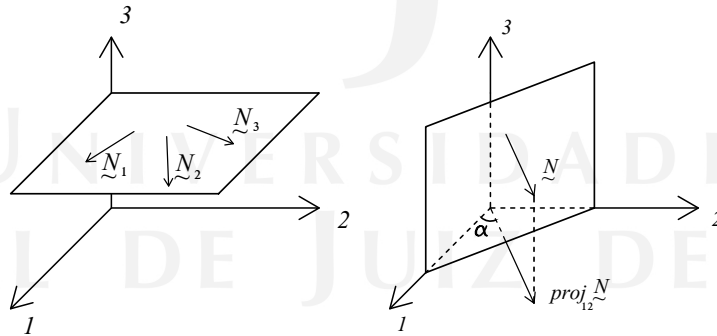


Figura 3.24: Plano genérico com $l_3 = 0$ (planos \parallel a direção 3 e \perp ao plano 1-2)

Neste caso, teríamos:

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 \\ \tau_t = \sqrt{(\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_2 l_2)^2 - \sigma_n^2} \end{cases}$$

Assim, vemos que $l_1 = \cos \alpha$ e $l_2 = \text{sen} \alpha$, o que nos leva a

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \text{sen}^2 \alpha \\ \tau_t^2 = (\sigma_1 \cos \alpha)^2 + (\sigma_2 \text{sen} \alpha)^2 - \sigma_n^2 \end{cases}$$

resultando em:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_t = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \text{sen} 2\alpha \end{cases}$$

e que dá origem a um círculo de Mohr cuja equação é:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_t^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

com centro em $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ e $R = \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ (ver Fig. 3.25).

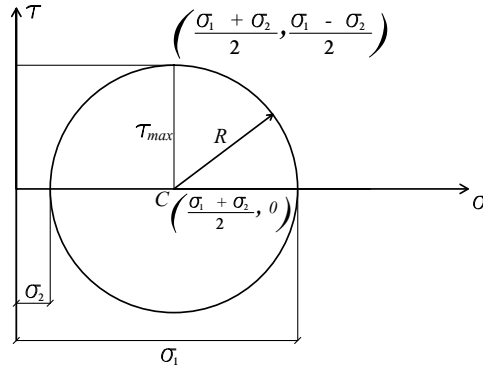


Figura 3.25: Círculo de Mohr com os pares (σ_n, τ_t) para os planos paralelos à direção 3

Examinemos, agora, outro conjunto de planos com $l_2 = 0$. Neste caso, teríamos:

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_3 l_3^2 \\ \tau_t = \sqrt{(\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_3 l_3)^2 - \sigma_n^2} \end{cases}$$

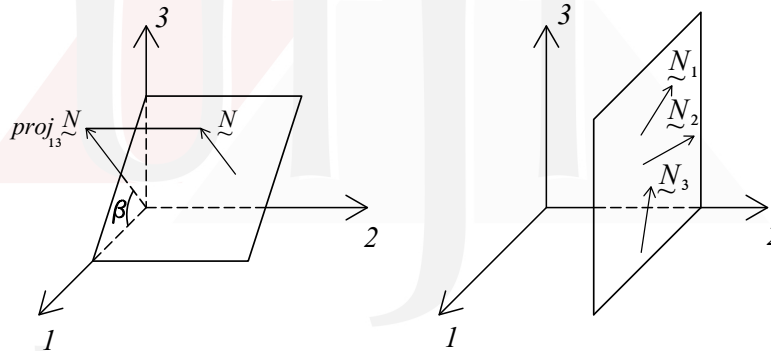


Figura 3.26: Plano genérico com $l_2 = 0$ (planos \parallel a direção 2 e \perp ao plano 1-3)

Assim, temos que $l_1 = \cos \beta$ e $l_3 = \sin \beta$, o que nos leva a

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta \\ \tau_t^2 = (\sigma_1 \cos \beta)^2 + (\sigma_3 \sin \beta)^2 - \sigma_n^2 \end{cases}$$

resultando em:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\beta \\ \tau_t = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta \end{cases}$$

o que dá origem a um círculo de Mohr cuja equação é:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_t^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

com centro em $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ e $R = \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ (ver Fig. 3.27).

Vejamos, finalmente, um último conjunto de planos particulares agora com $l_1 = 0$. Neste caso, teríamos:

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 \\ \tau_t = \sqrt{(\sigma_2 l_2)^2 + (\sigma_3 l_3)^2 - \sigma_n^2} \end{cases}$$

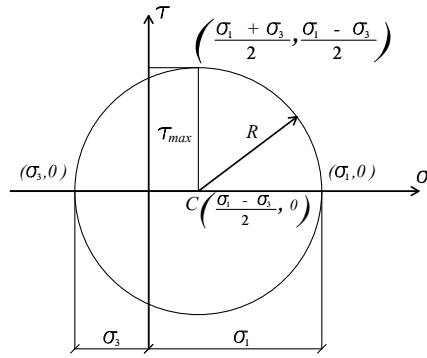


Figura 3.27: Círculo de Mohr com os pares (σ_n, τ_t) para os planos paralelos a direção 2

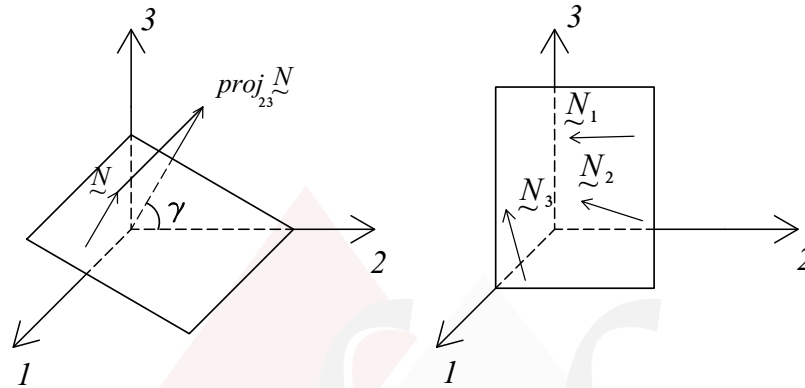


Figura 3.28: Plano genérico com $l_1 = 0$ (planos \parallel a direção 1 e \perp ao plano 2-3)

Para este caso vemos que $l_2 = \cos \gamma$ e $l_3 = \sin \gamma$, o que nos leva a

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \gamma + \sigma_3 \sin^2 \gamma \\ \tau_t^2 = (\sigma_2 \cos \gamma)^2 + (\sigma_3 \sin \gamma)^2 - \sigma_n^2 \end{cases}$$

resultando em:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos 2\gamma \\ \tau_t = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sin 2\gamma \end{cases}$$

o que dá origem a um círculo de Mohr cuja equação é:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_t^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2$$

com centro em $\sigma = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ e $R = \tau_{max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$.

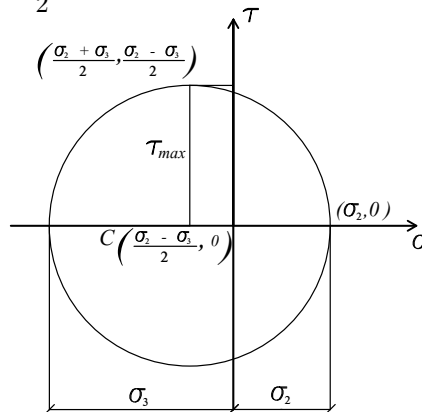


Figura 3.29: Círculo de Mohr com os pares (σ_n, τ_t) para os planos paralelos à direção 1

Os pontos em cada um dos círculos de Mohr obtidos anteriormente representam as tensão normal e tangencial em

planos particulares conforme visto, isto é:

$$\text{Círculo 1: } l_3 = 0 \Rightarrow \sigma_n = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2$$

$$\text{Círculo 2: } l_2 = 0 \Rightarrow \sigma_n = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_3 l_3^2$$

$$\text{Círculo 3: } l_1 = 0 \Rightarrow \sigma_n = \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2$$

Para um plano genérico, tal que $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$ e $l_3 \neq 0$, teríamos:

$$\sigma_n = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2$$

O que nos indica que, ao **círculo 1**, para se obter a expressão geral para σ_n , seria preciso acrescentar na expressão de σ_n e τ_t a parcela $\sigma_3 l_3^2$, do mesmo modo que ao **círculo 2**, precisaríamos acrescentar em σ_n a parcela $\sigma_2 l_2^2$, e ao **círculo 3**, precisaríamos acrescentar em σ_n a parcela $\sigma_1 l_1^2$.

É possível demonstrar que os pares (σ_n, τ_t) obtidos a partir de cada uma destas complementações estão na parte hachurada da Fig.3.30 entre estes três círculos particulares.

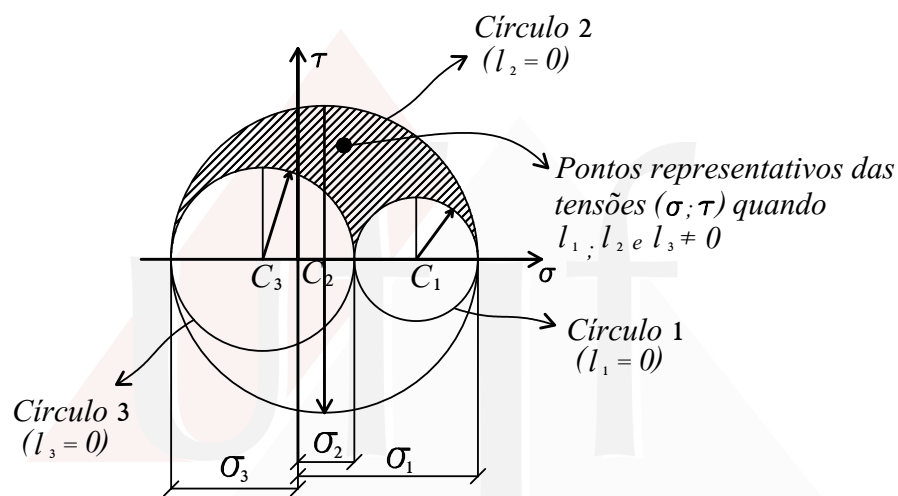


Figura 3.30:

Capítulo 4

Estado de Deformações

4.1 Introdução

Neste capítulo tratamos e definimos o chamado estado de deformação de um corpo, considerando o deslocamento relativo de seus pontos com componentes nos três eixos ortogonais xyz .

Os deslocamentos aqui considerados são aqueles responsáveis pela descrição do movimento de um corpo (ou de cada um dos pontos de um corpo) quando este varia sua forma, isto é, quando são modificadas as posições relativas de seus pontos em decorrência das ações - forças e momentos a ele aplicados. Por deformação, definimos como sendo a medida do movimento relativo entre os pontos desse corpo.

Ao final deste capítulo, verificaremos que as regras de transformação das componentes da tensão devido a uma rotação de eixos são válidas também para as componentes das deformações, já que tanto a tensão quanto a deformação são grandezas de mesma natureza - tensoriais.

4.1.1 Deslocamentos e Medidas de Deformações

Na Fig. 4.1 apresenta-se um corpo que, sob ação de cargas - forças e/ou momentos - tem seus pontos deslocados como o ponto A .

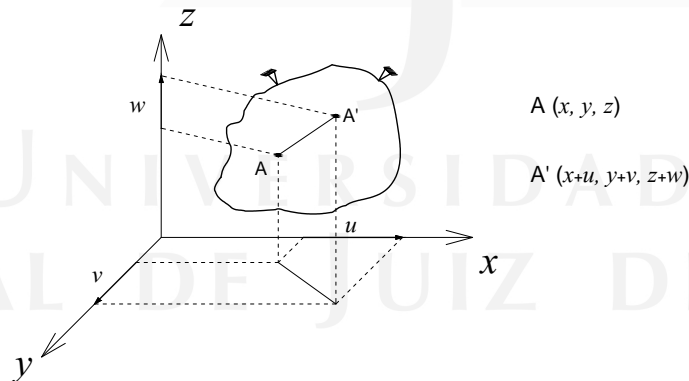


Figura 4.1: AA - vetor deslocamento total do ponto A .

Na Fig. 4.1, u, v, w representam os deslocamentos do ponto A segundo os eixos x, y, z , respectivamente.

Para a medida da intensidade da mudança de forma de um corpo, como ocorre em peças prismáticas submetidas a esforço axial, definimos a deformação linear na direção do segmento AB de comprimento S , conforme ilustra a Fig. 4.2:

$$\epsilon_m = \frac{\Delta S}{S}$$

onde ϵ_m é a deformação linear média no ponto A na direção AB ou alongamento relativo médio no ponto A na direção AB (grandeza análoga à velocidade média na cinemática $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ - onde S representa o espaço percorrido e t designa o tempo), isto é:

$$\epsilon = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}$$

onde ϵ é a deformação linear no ponto A na direção AB ou alongamento relativo no ponto A na direção AB .

Temos ainda a considerar ou observar a existência das variações de ângulos retos formados por segmentos de retas constituídos no corpo que após o equilíbrio deixam de ser retos gerando distorções que denominamos de deformações

angulares definidas por:

$$\lim_{OC=OD \rightarrow 0} (C\hat{O}D - C'\hat{O}D') = \gamma_{C\hat{O}D}.$$

Dizemos que $\gamma_{C\hat{O}D}$ é a deformação angular ou distorção angular do ângulo $C\hat{O}D$ ou ainda no ponto O no plano definido por $C\hat{O}D$. A Figura 4.2 a seguir ilustra, de forma clara, a natureza dessas medidas de deformação.

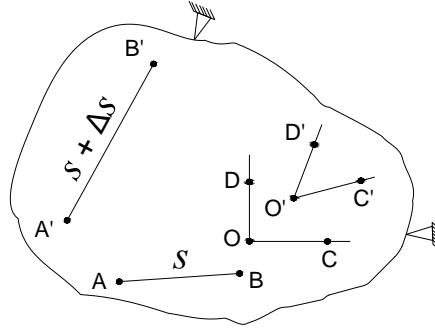


Figura 4.2: Deformações lineares e angulares ou de cisalhamento em torno de um ponto.

Se consideramos as direções coordenadas (segundo eixos coordenados x, y, z), as deformações lineares definidas nas direções desses eixos coordenados seriam dadas por $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$, ou $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Considerando os três planos coordenados xy, xz e yz , teríamos as distorções de ângulos retos que dão origem às deformações angulares ou de cisalhamento segundo estes planos: $\gamma_{xy}; \gamma_{xz}; \gamma_{yz}$. Existem várias outras medidas de deformação utilizadas em diferentes circunstâncias na modelagem de problemas de engenharia. Estas outras medidas são mais ou menos adequadas conforme a magnitude dos deslocamentos e das deformações ocorrentes - se temos grandes ou pequenas deformações, grandes ou pequenos deslocamentos ou ainda se consideramos diferentes formulações (eulerianas ou lagrangianas) na abordagem dos problemas mecânicos. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{Deformação de engenharia:} &\Rightarrow \epsilon_e = \frac{l - l_0}{l_0} \\ \text{Deformação de Green:} &\Rightarrow \epsilon_g = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} \\ \text{Deformação de Almansi:} &\Rightarrow \epsilon_a = \frac{l^2 - l_0^2}{2l^2} \\ \text{Deformação natural ou logarítmica:} &\Rightarrow \epsilon_l = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \end{aligned}$$

Excetuando-se a deformação logarítmica, todas estas medidas tem caráter de média, valendo, portanto, apenas para casos de estado de deformação constante em uma barra de comprimento finito - como o que ocorre com uma barra sujeita a esforço normal constante - ou para um segmento de comprimento finito de um corpo deformável, considerando-se também, neste caso, um estado de deformação constante neste comprimento. Para a efetiva utilização de cada uma dessas medidas em casos de estado de deformação variável, torna-se necessário verificar o que ocorre em torno de um ponto tomando o limite quando os comprimentos marcados a partir deste ponto tendem para zero.

4.1.2 Redefinição da medida da deformação linear

Inicialmente, apresentamos a definição usual da deformação linear tal como ocorre em uma barra sujeita a esforço axial constante. Neste caso, para uma barra como a mostrada na Fig. 4.3 sujeita a um esforço axial constante ($N(x) = \text{constante} \quad \forall 0 \leq x \leq l$) tomamos como medida para a deformação linear o valor do alongamento (ou encurtamento) sofrido pela barra dividido pelo comprimento original da mesma.

Assim, temos para este caso $\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$. Entretanto, observando que o valor do alongamento (ou encurtamento) utilizado nesta definição é o valor do deslocamento sofrido pela extremidade livre da barra subtraído do deslocamento da extremidade impedida de se deslocar, constatamos, chamando de u o deslocamento, que nossa definição $\epsilon_x = \frac{l-l_0}{l_0}$ pode, com a definição do deslocamento u na direção do eixo x ser reescrita como:

$$\epsilon_x = \frac{u(x=l) - u(x=0)}{l_0}$$

que representa apenas a deformação média que ocorre entre o engaste e a extremidade livre da barra e que não serve para medir a deformação quando o esforço normal não for constante ao longo do comprimento da barra.

Devemos, então, substituir esta definição por outra que atenda a ambos os casos - esforço normal constante ou variável. Neste caso, tomando-se em torno do ponto x um trecho de comprimento Δx desta barra, definimos a

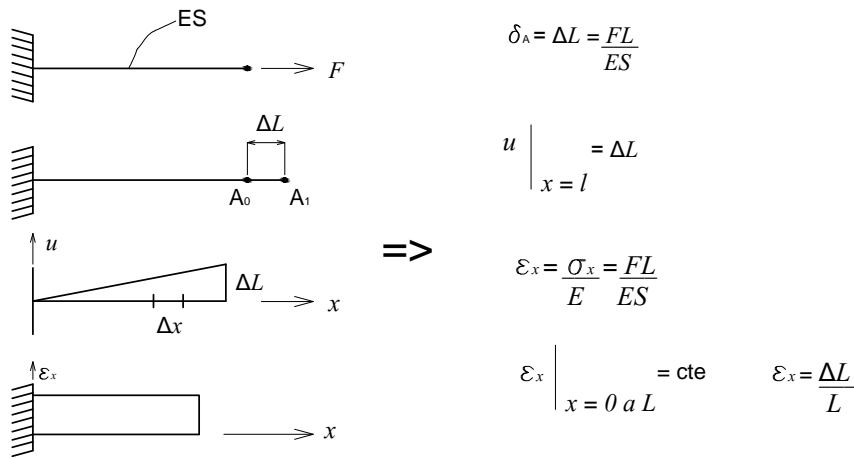


Figura 4.3: Campo de deformações lineares e de deslocamentos numa barra a esforço axial constante.

deformação média neste intervalo como:

$$\epsilon_x |_{medio} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

A partir desta deformação média no intervalo x e $x + \Delta x$, definimos a deformação no ponto x como:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

Logo a medida de deformação linear a ser utilizada é:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

Esta definição, considerada para deformações apenas numa única direção será utilizada em seguida para casos onde temos deslocamentos u, v e w presentes, como ocorre nos casos mais complexos da Mecânica dos Sólidos ou da Resistência dos Materiais no estudo de problemas envolvendo estados triaxiais de tensão.

4.2 Relações Deslocamento × Deformação

Neste item apresentamos a definição formal das medidas de deformação válidas para um estado triaxial de tensão e/ou deformação em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

4.2.1 Deformações Lineares

Inicialmente, consideramos o caso das deformações lineares em torno de um ponto conforme ilustrado na Fig. 4.4, onde são mostrados a projeção sobre um plano coordenado dos deslocamentos ocorrentes em 3 pontos P, A, B de um corpo sujeito a deformações. Desta figura identificamos os seguintes elementos:

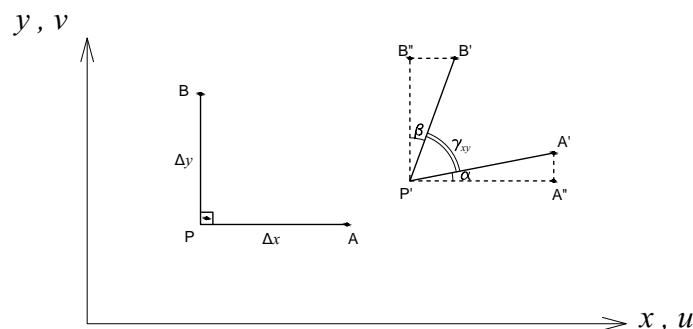


Figura 4.4: Deslocamentos em torno de um ponto projetados num plano paralelo ao plano xy.

Deslocamento de P (u_P): $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$.

Deslocamento de A (u_A): $u(x + \Delta x, y, z), v(x + \Delta x, y, z), w(x + \Delta x, y, z)$.

Deslocamento de B (u_B): $u(x, y + \Delta y, z), v(x, y + \Delta y, z), w(x, y + \Delta y, z)$.

Definimos a deformação linear na direção x como:

$$\epsilon_{xx} = \lim_{|PA| \rightarrow 0} \frac{|P'A'| - |PA|}{|PA|}$$

Admitindo pequenas deformações, vem:

$$|P'A'| \cong |P'A''|$$

e ficamos com:

$$\epsilon_{xx} = \lim_{|PA| \rightarrow 0} \frac{|P'A''| - |PA|}{|PA|}$$

mas:

$$\begin{aligned} |PA| &= \Delta x \\ |P'A''| &= |PA| + u_A - u_P = \Delta x + u_A - u_P \end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + u_A - u_P - \Delta x}{\Delta x} \\ \epsilon_{xx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} \\ \epsilon_{xx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Analogamente, nas direções y e z , temos:

Direção	Desl.	Desl. relativo	Comp. inicial	Deformação
x	u	Δu	Δx	ϵ_{xx}
y	v	Δv	Δy	ϵ_{yy}
z	w	Δw	Δz	ϵ_{zz}

Tabela 4.1: Deformações nas direções xyz

Logo, podemos definir ou adotar como medidas de deformação linear nas direções y e z :

$$\epsilon_{yy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} \Rightarrow \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

4.2.2 Deformações Angulares

Passamos, em seguida, a considerar a deformação angular no plano xy que definimos como sendo a medida da distorção angular sofrida por um ângulo reto neste plano. Com os valores indicados na Fig. 4.4m, definimos, então:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \quad (4.1)$$

Cálculo de α e β :

$$tg\alpha = \frac{|AA''|}{|P'A''|} \quad (4.2)$$

Admitindo pequenas rotações:

$$tg\alpha \cong \bar{\alpha} \cong \frac{|AA''|}{|P'A''|} \quad (4.3)$$

onde $\bar{\alpha}$ é o valor médio da distorção α para valores de Δx e Δy finitos que vale, então:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{|PA| \rightarrow 0} \frac{|AA''|}{|P'A''|} \\ \alpha &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{|PA| + |PA| \frac{\partial v}{\partial x}} \\ \alpha &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x} \end{aligned}$$

Assumindo $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$, então:

$$\Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cong \Delta x$$

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x}$$

O que acarreta $\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$.

De forma análoga, concluímos que $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$ obtendo então:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.4)$$

Procedendo de modo similar nos planos yz e zx , obtemos:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.6)$$

Utilizamos para compor o tensor ou matriz de deformação os seguintes valores:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (4.7)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad (4.8)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \quad (4.9)$$

4.2.3 Tensor de Deformação

Com as definições vistas nas seções anteriores, fica assim definido o tensor de deformações $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Sendo:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.11)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.12)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.13)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.14)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4.15)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (4.16)$$

Considera-se, neste caso, que $\epsilon_{yx} = \epsilon_{xy}$, $\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz}$ e $\epsilon_{zy} = \epsilon_{yz}$, resultando que $\underline{\underline{\epsilon}}$ é um tensor simétrico, isto é $\underline{\underline{\epsilon}}^T = \underline{\underline{\epsilon}}$.

4.3 Cálculo de Deformações numa direção qualquer

4.3.1 Deformações Lineares em direções quaisquer

Consideramos, aqui, um vetor unitário numa direção arbitrária \mathbf{N} num ponto P de um corpo e um segmento PQ que na configuração indeformada, possui comprimento Δn , sendo que após deformação, PQ torna-se $P'Q'$, como indicado na Fig. 4.5. Nosso objetivo é calcular a deformação linear nesta direção \mathbf{N} no ponto P .

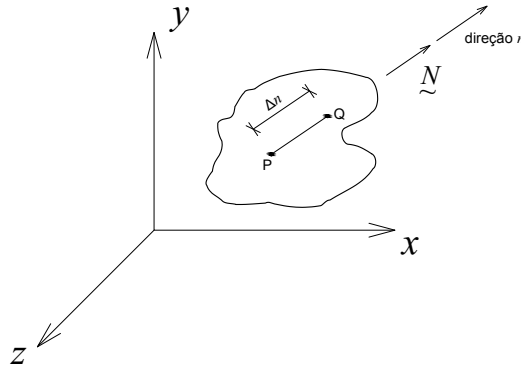


Figura 4.5: Deformação numa direção arbitrária N

\underline{u} - Campo de deslocamentos

Dados \rightarrow $\underline{\epsilon}$ - Tensor de deformações referido a um sistema x, y

\hat{N} - Vetor dos cossenos diretores da direção em que deseja-se determinar a deformação linear ϵ_{nn}

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{N} = [l_{nx} \quad l_{ny} \quad l_{nz}]^T$$

$$\epsilon_{nn} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\delta \Delta n}{\Delta n} = ?$$

$\delta \Delta n \rightarrow$ Variação de comprimento de um segmento $|PQ|$, que está na direção de \hat{N} cujo vetor diretor da direção PQ é:

$$\hat{N} = [l_{nx} \quad l_{ny} \quad l_{nz}]^T \rightarrow \text{direção } PQ$$

A determinação do deslocamento na direção $n \rightarrow u_n$, considerando que $u_n \rightarrow$ é a projeção do campo $\underline{u}(x, y, z)$ na direção n (definida por seu unitário \hat{N}), é dada por:

$$u_n = \underline{u} \cdot \hat{N} \quad (\text{Projeção de } \underline{u} \text{ sobre } \hat{N})$$

onde

$$\underline{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T = [u \quad v \quad w]^T$$

Podemos então escrever, com $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ - unitários das direções x, y e z , respectivamente, que:

$$u_n = u_x(\hat{i} \cdot \hat{N}) + u_y(\hat{j} \cdot \hat{N}) + u_z(\hat{k} \cdot \hat{N}) = u_x l_{nx} + u_y l_{ny} + u_z l_{nz} \tag{4.17}$$

Da definição de deformação:

$$\epsilon_{nn} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{u_n|_Q - u_n|_P}{\Delta n} = \frac{du_n}{dn} \tag{4.18}$$

onde $\Delta n \rightarrow$ comprimento do segmento \overline{PQ} e $\Delta x, \Delta y$ e Δz são as projeções ortogonais de Δn sobre os eixos coordenados.

Mas:

$$\frac{du_n}{dn} = \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u_n}{\partial z} \frac{dz}{dn}$$

Assim, a deformação linear na direção de \hat{N} que é a derivada direcional de \underline{u} nesta direção \hat{N} , pode ser obtida substituindo na equação 4.18 a definição 4.17, sendo dada por:

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dn} &= \frac{\partial}{\partial x} [u_x l_{nx} + u_y l_{ny} + u_z l_{nz}] \frac{dx}{dn} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [u_x l_{nx} + u_y l_{ny} + u_z l_{nz}] \frac{dy}{dn} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [u_x l_{nx} + u_y l_{ny} + u_z l_{nz}] \frac{dz}{dn} \end{aligned} \tag{4.19}$$

substituindo $\frac{dx}{dn}$, $\frac{dy}{dn}$ e $\frac{dz}{dn}$ da equação 4.19 pelos cossenos diretores de \hat{N} : l_{nx} , l_{ny} e l_{nz} respectivamente. teremos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{nn} = & \frac{\partial u_x}{\partial x} l_{nx}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y} l_{ny}^2 + \frac{\partial u_z}{\partial z} l_{nz}^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) l_{nx} l_{ny} \\ & + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) l_{nx} l_{nz} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) l_{ny} l_{nz} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Podemos dizer que:

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) l_{nx} l_{ny} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) l_{nx} l_{ny} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) l_{nx} l_{ny} \quad (4.21)$$

Substituindo o quarto termo de 4.20 pela expressão 4.21 e procedendo de modo análogo para o quinto e sexto termos teremos obtemos de 4.20:

$$\begin{aligned} \epsilon_{nn} = & \frac{\partial u_x}{\partial x} l_{nx}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) l_{nx} l_{ny} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) l_{nx} l_{nz} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) l_{nx} l_{ny} + \frac{\partial u_y}{\partial y} l_{ny}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) l_{ny} l_{nz} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) l_{nx} l_{nz} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) l_{ny} l_{nz} + \frac{\partial u_z}{\partial z} l_{nz}^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Introduzindo as deformações medidas com relação aos eixos xyz na equação 4.22, teremos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{nn} = & \epsilon_{xx} l_{nx}^2 + \epsilon_{xy} l_{nx} l_{ny} + \epsilon_{xz} l_{nx} l_{nz} \\ & + \epsilon_{yx} l_{ny} l_{nx} + \epsilon_{yy} l_{ny}^2 + \epsilon_{yz} l_{ny} l_{nz} \\ & + \epsilon_{zx} l_{nz} l_{nx} + \epsilon_{zy} l_{nz} l_{ny} + \epsilon_{zz} l_{nz}^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

que pode ser expressa na forma matricial como:

$$\epsilon_{nn} = \begin{bmatrix} l_{nx} & l_{ny} & l_{nz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{nx} \\ l_{ny} \\ l_{nz} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

ou ainda:

$$\epsilon_{nn} = \hat{N}^T \underline{\underline{\epsilon}} \hat{N} \quad (4.25)$$

É importante notar que a expressão para determinação de ϵ_{nn} tem exatamente a mesma forma que aquela utilizada para a determinação de σ_{nn} obtida no estudo do estado triaxial de tensões. Considerando que \hat{N} possa indicar as direções de x' , y' ou z' , podemos facilmente ver que as deformações lineares medidas com relação aos eixos $x'y'z'$, podem ser obtidas através desta expressão, conforme mostrado em seguida. Assim, no caso em que \hat{N} seja x' , temos imediatamente:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x'x'} = & \epsilon_{xx} l_{x'x}^2 + \epsilon_{x'x} l_{x'x} l_{x'y} + \epsilon_{xz} l_{x'x} l_{x'z} \\ & + \epsilon_{yx} l_{ny} l_{x'y} + \epsilon_{yy} l_{x'y}^2 + \epsilon_{yz} l_{x'y} l_{x'z} \\ & + \epsilon_{zx} l_{x'z} l_{x'x} + \epsilon_{zy} l_{x'z} l_{x'y} + \epsilon_{zz} l_{x'z}^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Esta expressão pode ser escrita como:

$$\epsilon_{x'x'} = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{x'x} \\ l_{x'y} \\ l_{x'z} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Tomando n como sendo o eixo rotacionado y' em relação a xyz , temos, a partir da equação 4.36:

$$\epsilon_{y'y'} = \begin{bmatrix} l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{y'x} \\ l_{y'y} \\ l_{y'z} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Procedendo de modo análogo para eixo rotacionado z' obtemos:

$$\epsilon_{z'z'} = \begin{bmatrix} l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{z'x} \\ l_{z'y} \\ l_{z'z} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

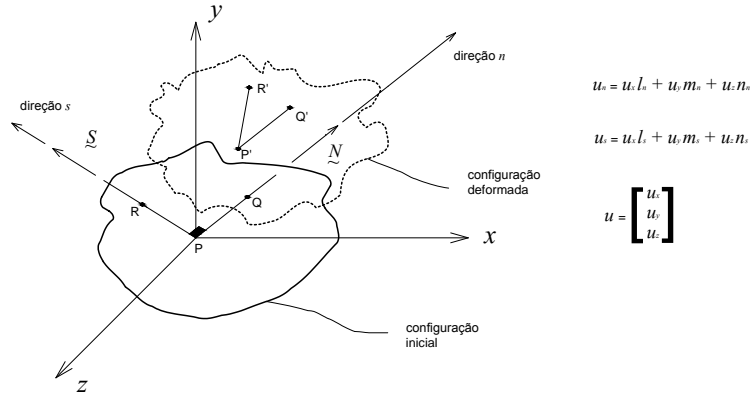


Figura 4.6: Deformação cisalhante no plano definido por S e N

4.3.2 Deformações Angulares em planos quaisquer

Podemos agora considerar duas direções ortogonais no ponto P , \hat{N} e \hat{S} , conforme figura 4.6. Os segmentos PQ e PR tem comprimentos Δn e Δs , respectivamente, no estado indeformado.

Após deformação, os pontos P , Q e R tornam-se P' , Q' e R' , com alteração do ângulo entre os segmentos definidos por estes pontos, caracterizando deformação cisalhante no plano definido por PQ e PR (ou por \hat{N} e \hat{S}) como:

$$\epsilon_{ns} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) \quad (4.30)$$

Expressando u_n e u_s em termos das componentes de deslocamento, temos:

$$\begin{aligned} u_n &= \underline{u} \cdot \hat{N} = u_x l_{nx} + u_y l_{ny} + u_z l_{nz} = \sum_i u_i l_{ni} \\ u_s &= \underline{u} \cdot \hat{S} = u_x l_{sx} + u_y l_{sy} + u_z l_{sz} = \sum_i u_i l_{si} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Logo, podemos escrever:

$$\epsilon_{ns} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial s} (u_x l_{nx} + u_y l_{ny} + u_z l_{nz}) + \frac{\partial}{\partial n} (u_x l_{sx} + u_y l_{sy} + u_z l_{sz}) \right]$$

Entretanto:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial s} = \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{dn} \end{cases}$$

que são válidas para $i = x, y$ ou z . Aplicando estas relações a Eq. 4.30 de ϵ_{ns} e considerando-se que:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= l_{sx} & \frac{dy}{ds} &= l_{sy} & \frac{dz}{ds} &= l_{sz} \\ \frac{dx}{dn} &= l_{nx} & \frac{dy}{dn} &= l_{ny} & \frac{dz}{dn} &= l_{nz} \end{aligned}$$

Onde o índice i do somatório assume os valores x, y e z . Substituindo as expressões em 4.31 em 4.30, ficamos com:

$$\epsilon_{ns} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_i u_i l_{ni} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\sum_i u_i l_{si} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial s} l_{ni} + \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial n} l_{si} \right\} \quad (4.32)$$

onde $\frac{\partial u_i}{\partial s}$ e $\frac{\partial u_i}{\partial n}$ são derivadas direcionais e podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial s} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{dn} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Substituindo 4.33 em 4.32, temos:

$$\epsilon_{ns} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right] l_{ni} + \sum_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{dn} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{dn} \right] l_{si} \right\} \quad (4.34)$$

Utilizando as expressões de definição dos cossenos diretores das direções \hat{N} e \hat{S} , podemos substituir na equação 4.34, realizar o somatório e reordenar os termos obtidos resultando na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ns} = & \frac{\partial u_x}{\partial x} l_{nx} l_{sx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) l_{nx} l_{sy} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) l_{nx} l_{sz} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) l_{ny} l_{sx} + \frac{\partial u_y}{\partial y} l_{ny} l_{sy} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) l_{ny} l_{sz} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) l_{nz} l_{sx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) l_{nz} l_{sy} + \frac{\partial u_z}{\partial z} l_{nz} l_{sz} \end{aligned} \quad (4.35)$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ns} = & \epsilon_{xx} l_{nx} l_{sx} + \epsilon_{xy} l_{nx} l_{sy} + \epsilon_{xz} l_{nx} l_{sz} \\ & + \epsilon_{yx} l_{ny} l_{sx} + \epsilon_{yy} l_{ny} l_{sy} + \epsilon_{yz} l_{ny} l_{sz} \\ & + \epsilon_{zx} l_{nz} l_{sx} + \epsilon_{zy} l_{nz} l_{sy} + \epsilon_{zz} l_{nz} l_{sz} \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ns} = & \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} l_{sx} + \epsilon_{xy} l_{sy} + \epsilon_{xz} l_{sz} \\ \epsilon_{yx} l_{sx} + \epsilon_{yy} l_{sy} + \epsilon_{yz} l_{sz} \\ \epsilon_{zx} l_{sx} + \epsilon_{zy} l_{sy} + \epsilon_{zz} l_{sz} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} l_{nx} \\ l_{ny} \\ l_{nz} \end{Bmatrix} \\ \epsilon_{ns} = & [l_{sx} \quad l_{sy} \quad l_{sz}] \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{nx} \\ l_{ny} \\ l_{nz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

finalmente, na forma matricial:

$$\epsilon_{ns} = \hat{S}^T \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} \hat{N} \quad (4.37)$$

Tomando n e s como um par de eixos rotacionados $x' y'$ em relação a xyz , temos, a partir da equação 4.36:

$$\epsilon_{x'y'} = [l_{x'x} \quad l_{x'y} \quad l_{x'z}] \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{y'x} \\ l_{y'y} \\ l_{y'z} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Se tomamos n e s como um par de eixos rotacionados $x' z'$ em relação a xyz , temos, a partir desta mesma equação 4.36:

$$\epsilon_{x'z'} = [l_{x'x} \quad l_{x'y} \quad l_{x'z}] \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{z'x} \\ l_{z'y} \\ l_{z'z} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Com n e s sendo um par de eixos rotacionados $y' z'$ em relação a xyz , temos, partindo novamente desta equação 4.36:

$$\epsilon_{y'z'} = [l_{y'x} \quad l_{y'y} \quad l_{y'z}] \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{z'x} \\ l_{z'y} \\ l_{z'z} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

4.4 Deformações Principais no Estado Triaxial de Deformações

Definimos direções principais do tensor de deformação como as direções segundo as quais o tensor de deformação $\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}$ é diagonal e denominamos essas direções por 1, 2, 3 (direções principais; as deformações nessas direções chamamos de deformações principais. Neste caso temos:

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$$

e

$$\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Como no plano cuja normal é uma direção principal não existem distorções angulares, o vetor de “deformações” nesse(s) plano(s) só possuirá a componente na direção normal a este plano principal, isto é, o que, como no caso do estado triaxial de tensões, nos permite escrever que:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{\chi}}_e &= \epsilon_e \underline{\underline{\chi}}_e \\ \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{\chi}}_e - \epsilon_e \underline{\underline{\chi}}_e &= \mathbf{0} \\ (\underline{\underline{\epsilon}} - \epsilon_e \underline{\underline{\mathbb{I}}}) \underline{\underline{\chi}}_e &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

onde denominamos por ϵ_e uma deformação principal e por $\underline{\underline{\chi}}_e$ a direção principal, e como no caso da determinação das direções principais de $\underline{\underline{\sigma}}$, esta equação só terá soluções diferentes da trivial se:

$$\det(\underline{\underline{\epsilon}} - \epsilon_e \underline{\underline{\mathbb{I}}}) = 0$$

Logo, considerando um estado de deformações geral num ponto P do corpo para determinar as deformações principais, é preciso satisfazer esta equação, onde $\underline{\underline{\epsilon}}$ é o tensor de deformações, ϵ_e é a incógnita deformação principal e $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$ é a matriz identidade de ordem 3×3 . Temos então:

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon_e & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - \epsilon_e & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} - \epsilon_e \end{bmatrix} = 0 \quad (4.41)$$

que dá origem a equação cúbica:

$$\epsilon_e^3 - J_1 \epsilon_e^2 + J_2 \epsilon_e - J_3 = 0 \rightarrow \text{Equação característica} \quad (4.42)$$

onde J_1 , J_2 e J_3 são denominados de invariantes do tensor de deformação que são dados por:

$$J_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (4.43)$$

$$J_2 = \det \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$J_3 = \det \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Resolvendo a equação 4.42, ficam determinadas as três deformações principais. Para determinação das respectivas direções principais, é necessário que se resolva o sistema abaixo três vezes, isto é, para cada valor de deformação principal substituindo ϵ_e :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon_e & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - \epsilon_e & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} - \epsilon_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{nx} \\ l_{ny} \\ l_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Dessa forma, ficam determinadas as componentes l_{nx} , l_{ny} e l_{nz} do vetor diretor (unitário) da respectiva direção principal.

4.5 EXEMPLO 10 - Estado triaxial de deformação

Dados dois tensores de deformação, referidos a dois sistemas de eixos xyz e $x'y'z'$, pergunta-se: $\underline{\underline{\epsilon}}$ e $\underline{\underline{\epsilon}}'$ representam o mesmo estado de deformação?

Dados:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 500 & 300 & 0 \\ 300 & 400 & -100 \\ 0 & -100 & 200 \end{bmatrix}_{xyz} \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}_{x'y'z'} \cdot 10^{-6}$$

Solução:

Para que $\underline{\underline{\epsilon}}$ e $\underline{\underline{\epsilon}}'$ representam o mesmo estado de deformação é necessário que seus invariantes sejam iguais. Para $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\begin{aligned} J_1 &= 1100 \cdot 10^{-6} \\ J_2 &= (110000 + 100000 + 70000) \cdot 10^{-6} = 28 \cdot 10^{-2} \\ J_3 &= 24 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} = 17 \end{aligned}$$

Para $\underline{\underline{\epsilon}}'$:

$$\begin{aligned} J'_1 &= 1100 \cdot 10^{-6} \\ J'_2 &= (180000 + 120000 + 60000) \cdot 10^6 = 36 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

Como $J_2 \neq J'_2 \Rightarrow \underline{\underline{\epsilon}}$ e $\underline{\underline{\epsilon}}'$ não representam o mesmo estado de deformação.

4.6 Estado Plano de Deformações

Assim como o Estado Plano de Tensões é um caso especial do estado triaxial de tensões, o mesmo ocorre aqui. Para efeito deste estudo, vamos considerar, por exemplo, o caso em que as únicas deformações diferentes de zero sejam apenas as deformações: ϵ_{xx} , ϵ_{xy} e ϵ_{yy} .

Supomos, neste caso, um tensor de deformação da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.6.1 Deformações Normais e Cisalhantes numa Direção Qualquer

Supondo que sejam conhecidas as deformações ϵ_{xx} , ϵ_{xy} e ϵ_{yy} em torno de um ponto P , sendo as demais componentes de deformação nulas, para avaliar as deformações $\epsilon_{x'x'}$, $\epsilon_{x'y'}$ e $\epsilon_{y'y'}$, com $x'y'$ rotacionados de um ângulo θ em relação a xy conforme figura 4.7, basta aplicar as equações 4.24 e 4.36.

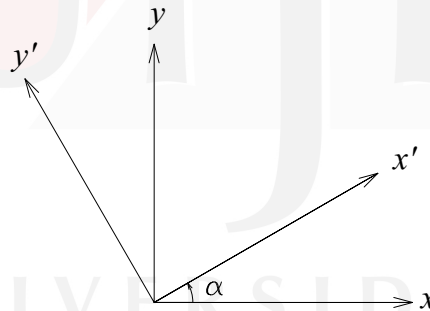


Figura 4.7: Rotação dos eixos x e y

Estas equações, reescritas abaixo, determinam as deformações lineares e angulares nas direções \hat{N} e \hat{S} e tomando a direção nn como sendo uma direção x' e ss como sendo uma direção y' podem ser aplicadas ao caso particular aqui considerado. Neste caso $\epsilon_{nn} \rightarrow \epsilon_{x'x'}$ e $\epsilon_{ns} \rightarrow \epsilon_{x'y'}$.

Sabemos que:

$$\epsilon_{nn} = \hat{N}^T \underline{\underline{\epsilon}} \hat{N}$$

e

$$\epsilon_{ns} = \hat{S}^T \underline{\underline{\epsilon}} \hat{N}$$

Essas expressões reduzem-se deste modo, neste caso particular, às seguintes relações:

$$\begin{cases} \epsilon_{x'x'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \epsilon_{x'y'} = \frac{\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}}{2} \sin 2\theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta \end{cases} \quad (4.47)$$

A expressão para a determinação de $\epsilon_{y'y'}$ pode ser facilmente obtida a partir da primeira destas relações quando substituirmos θ por $\theta + \frac{\pi}{2}$, resultando em:

$$\epsilon_{y'y'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta - \epsilon_{xy} \sin 2\theta \quad (4.48)$$

4.6.2 Deformações Principais no Estado Plano de Deformações

Para a determinação das deformações principais neste caso utilizamos:

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon_e & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - \epsilon_e \end{bmatrix} = 0$$

onde ϵ_e são as deformações principais. O cálculo do determinante acima resulta em:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{xx} - \epsilon_e)(\epsilon_{yy} - \epsilon_e) - \epsilon_{xy}^2 &= 0 \\ \epsilon_e^2 - (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\epsilon_e + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2 &= 0 \\ \epsilon_e &= \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\epsilon_{1,3} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2} \quad (4.50)$$

Assim, ficam definidas duas deformações principais.

Para localizar as direções principais em relação aos eixos xy com deformações conhecidas, partimos da derivada da expressão de $\epsilon_{x'x'}$ com relação a θ que igualada a zero nos fornece o ângulo segundo o qual temos um valor extremo para ϵ_{xx} . A partir deste ângulo podemos determinar os valores das deformações principais com esta mesma expressão de $\epsilon_{x'x'}$. Obtemos então:

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \quad (4.51)$$

Esta equação trigonométrica possui duas soluções θ_{p1} e $\theta_{p3} = \theta_{p1} + \frac{\pi}{2}$ que, substituídas na primeira das equações 4.47 nos fornece as deformações principais.

4.6.3 Círculo de Mohr para Estado Plano de Deformações

Do mesmo modo como ocorre no estudo do estado plano de tensões, as duas equações 4.47, que determinam um conjunto de deformações, sugerem a utilização do círculo de Mohr para a representação gráfica do estado de deformação em torno de um ponto. Neste caso, na abscissa são representadas as deformações normais e na ordenada as deformações cisalhantes. Verificamos isto procedendo de modo similar ao caso do estado plano de tensões definidas no capítulo anterior:

$$\begin{cases} \epsilon_{x'x'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ \epsilon_{x'y'} = \frac{\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

que podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \epsilon_{x'x'} - \epsilon_m = \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \\ \epsilon_{x'y'} = -\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros das duas equações acima e somando-os obtemos:

$$(\epsilon_{x'x'} - \epsilon_m)^2 + \epsilon_{x'y'}^2 = \left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2 \quad (4.52)$$

com $\epsilon_m = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2}$.

A Eq. 4.52 é a equação de uma circunferência com centro no eixo dos $\epsilon_{x'x'}$ no ponto de abscissa ϵ_m e cujo raio é:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

No círculo de Mohr (Fig. 4.8, do mesmo modo que no caso do estudo do estado de tensões em torno de um ponto, podemos representar as deformações principais em torno do ponto, bem como a máxima deformação cisalhante. Além disso, todos os pares de deformação linear e cisalhante para o conjunto de todas as direções no plano considerado podem ser considerados.

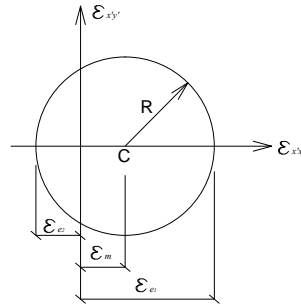


Figura 4.8: Círculo de Mohr para o Estado Plano de deformações

4.7 Análise Experimental - Strain-Gages

As relações das deformações em direções quaisquer em função das componentes do tensor de deformação em problemas planos, permite-nos resolver questões da análise experimental de estruturas, já que torna possível, a partir de medidas de deformações, estabelecer os valores das tensões ocorrentes em um ponto.

As deformações lineares em torno de um ponto podem ser medidas por dispositivos denominados de *strain-gages* ou extensômetros a partir da variação de sua resistência elétrica.

Os *strain-gages* são constituídos por um filamento fino, normalmente protegido por plástico ou folha metálica, que é firmemente colado no ponto da superfície livre de um corpo onde deseja-se medir deformações. Após aplicação do carregamento, o corpo se deforma, assim como o extensômetro, provocando neste uma variação de sua resistência elétrica, que pode ser correlacionada com a variação de seu comprimento. Utilizando as relações de um circuito elétrico denominado Ponte de Wheatstone, essa variação da resistência pode ser determinada e a deformação linear na direção do *strain-gage* pode ser conhecida.

A partir das medidas das deformações lineares medidas em três direções, podemos determinar o estado de deformação no ponto considerado. Para tanto, utiliza-se um agrupamento de três desses dispositivos organizados em um conjunto denominado *roseta*. As figuras 4.9(a) e 4.9(b) mostram três rosetas bastante utilizadas, nas quais são medidas deformações em direções variando de 0° a 120°. Deve-se notar que as rosetas são pequenas em relação ao corpo o suficiente para que suas deformações representem o estado de deformação em um ponto.

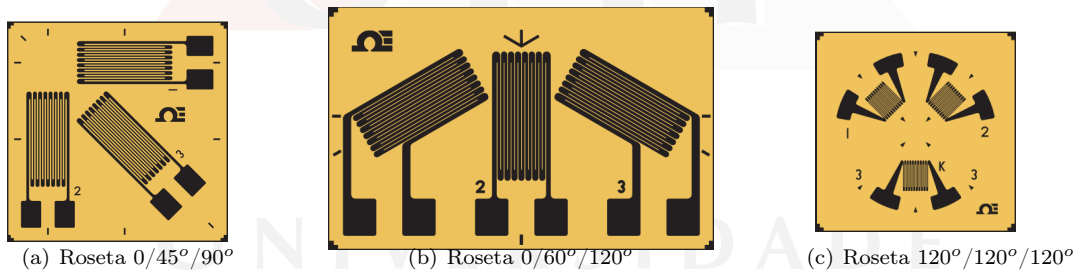


Figura 4.9: Tipos comerciais de rosetas de strain-gages

Para o cálculo de ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{xy} , considerando que foram medidos os valores das deformações ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 em três diferentes direções indicadas por suas posições θ_1 , θ_2 , e θ_3 , na equação 4.47, obtém-se um sistema de três equações e três incógnitas que, resolvido, fornece-nos o estado de deformação em torno do ponto.

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta_1 + \epsilon_{xy} \sin 2\theta_1 \tag{4.53}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta_2 + \epsilon_{xy} \sin 2\theta_2 \tag{4.54}$$

$$\epsilon_3 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta_3 + \epsilon_{xy} \sin 2\theta_3 \tag{4.55}$$

Assim, ficam definidas ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{xy} , permitindo que as deformações principais sejam calculadas.

4.8 EXEMPLO 11 - Estado plano de deformação

Mediu-se, no entorno de um ponto, por meio de uma roseta de *strain-gages*, conforme apresentado na Fig.4.10, as seguintes deformações lineares:

- na direção 1: $\epsilon_1 = 0.001$,
- na direção 2: $\epsilon_2 = 0.003$,

- na direção 3: $\epsilon_3 = -0.002$.

Pede-se, tomando a direção 1 como x , determinar as componentes do tensor de deformações neste ponto. Determine, também, as deformações principais.

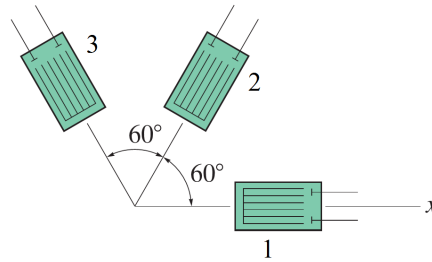


Figura 4.10: Roseta 0-60°-120°.

Solução:

$$\begin{cases} \text{Direção 1} \Rightarrow \theta_1 = 0^\circ & \rightarrow \epsilon_{xx} = 0.001 \\ \text{Direção 2} \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ & \rightarrow \epsilon_2 = 0.003 \\ \text{Direção 3} \Rightarrow \theta_3 = 120^\circ & \rightarrow \epsilon_3 = -0.002 \end{cases}$$

Para o cálculo de ϵ_{yy} e ϵ_{xy} utilizaremos a equação:

$$\epsilon_{x'x'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta$$

substituindo $\epsilon_{x'x'} = 0.003$ para $\theta = 60^\circ$ e $\epsilon_{x'x'} = -0.002$ para $\theta = 120^\circ$.

Assim, tem-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} 0.003 = \frac{0.001 + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{0.001 - \epsilon_{yy}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \epsilon_{xy} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ -0.002 = \frac{0.001 + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{0.001 - \epsilon_{yy}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \epsilon_{xy} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $\epsilon_{yy} = 0.0003333$ e $\epsilon_{xy} = 0.0028868$.

O tensor de deformações é dado por:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.0028868 \\ 0.0028868 & 0.0003333 \end{bmatrix}$$

Deformações principais:

Usando a expressão:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

chegamos aos valores: $\epsilon_1 = 0.0035726$ e $\epsilon_2 = -0.0022393$. (Verifique!)

4.9 Lei de Hooke generalizada

Nota dos autores: a presente seção contém elementos extraídos da Apostila de Resistência dos Materiais 1 da UFJF.

O estabelecimento das relações entre tensões e deformações se dá por meio de ensaios experimentais simples envolvendo apenas uma componente do tensor de tensões por vez. A realização de ensaios nas 3 direções ortogonais é de extrema complexidade. Dessa forma, as correlações entre as tensões e as correspondentes deformações são observadas mediante os ensaios de tração, de compressão e de torção, realizados separadamente.

4.9.1 Ensaio de tração

Um corpo de prova (CP) é uma amostra de material a ser testado, constituída de uma barra reta de seção constante (comprimento L , diâmetro D e área A , na configuração inicial), semelhante à barra ilustrada na Figura 4.11.

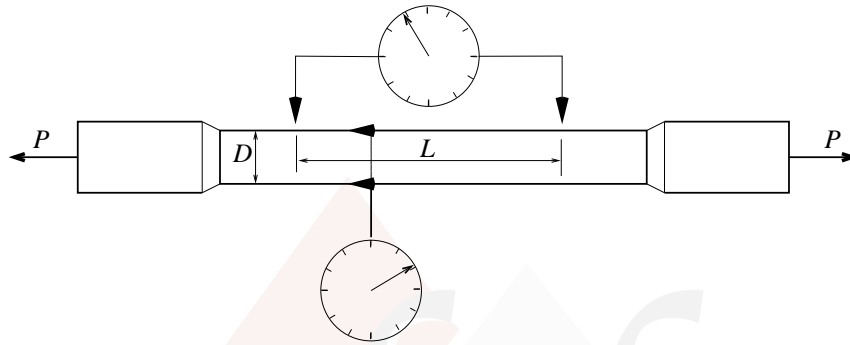


Figura 4.11: Corpo de prova de um ensaio de tração

O ensaio consiste em aplicar ao CP uma carga P axial de tração que aumenta lenta e gradualmente (carga “estática”), medindo-se a carga P , a variação do comprimento L e do diâmetro D do CP até a sua ruptura.

O tensor de tensões associado a este problema, considerando a carga aplicada na direção paralela ao eixo x , é apresentado na equação 4.56.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

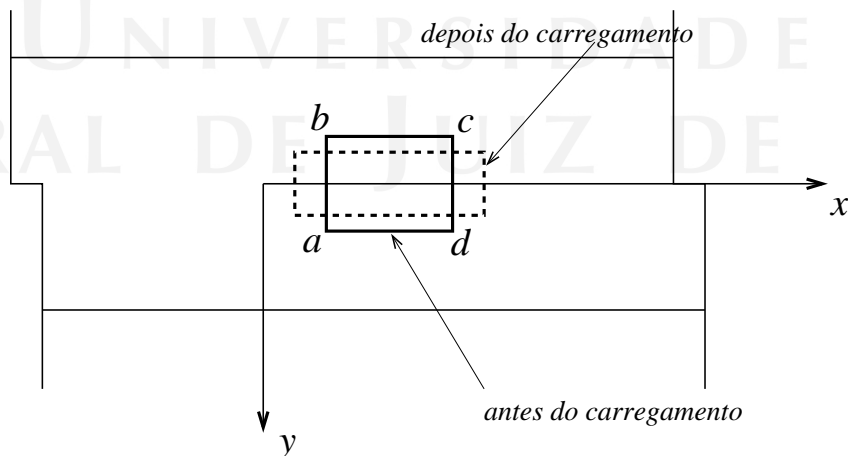


Figura 4.12: Deformação no ensaio de tração

Observando o retângulo $abcd$ contido no plano xy antes e depois da aplicação da carga, conforme mostrado na Figura 4.12, é possível identificar que sua configuração após o tracionamento não sofre distorções angulares. O que ocorre é um alongamento dos lados bc e ad e um encurtamento dos lados ab e cd , caracterizando o surgimento das deformações ϵ_x e ϵ_y . Obviamente, caso tivesse sido escolhido o plano xz para análise, seria verificado o surgimento das deformações ϵ_x e ϵ_z .

Generalizando, caso o referencial adotado tivesse como eixo longitudinal do CP a direção y ou z pode-se concluir que:

- σ_x causa ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z ;
- σ_y causa ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z ;
- σ_z causa ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z ;

O próximo passo é relacionar matematicamente estas tensões e suas correspondentes deformações, o que pode ser feito no ensaio de tração. A realização deste ensaio consiste em acoplar ao CP uma máquina de ensaio e tracioná-lo continuamente. Durante o ensaio, mede-se a carga P de tração, o alongamento ΔL da parte do CP contida entre as extremidades de um extensômetro (L) e a variação do diâmetro do CP ΔD conforme mostrado na Figura 4.13.

Com os dados do ensaio, é possível inicialmente traçar um gráfico contendo no eixo vertical a carga P e no eixo horizontal o alongamento ΔL , conforme mostrado na Figura 4.13(a). Através de uma mudança de variáveis, pode-se facilmente chegar a uma relação entre a tensão $\sigma_x = \frac{P}{A}$ e a deformação $\epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$, de acordo com o gráfico da Figura 4.13(b). Este gráfico, que relaciona ϵ_x e σ_x , é chamado diagrama tensão-deformação.

A forma do diagrama tensão deformação depende do tipo de material. Existem materiais de comportamento linear, ou pelo menos com uma região linear (aço, alumínio), e de comportamento não-linear (maioria das borrachas).

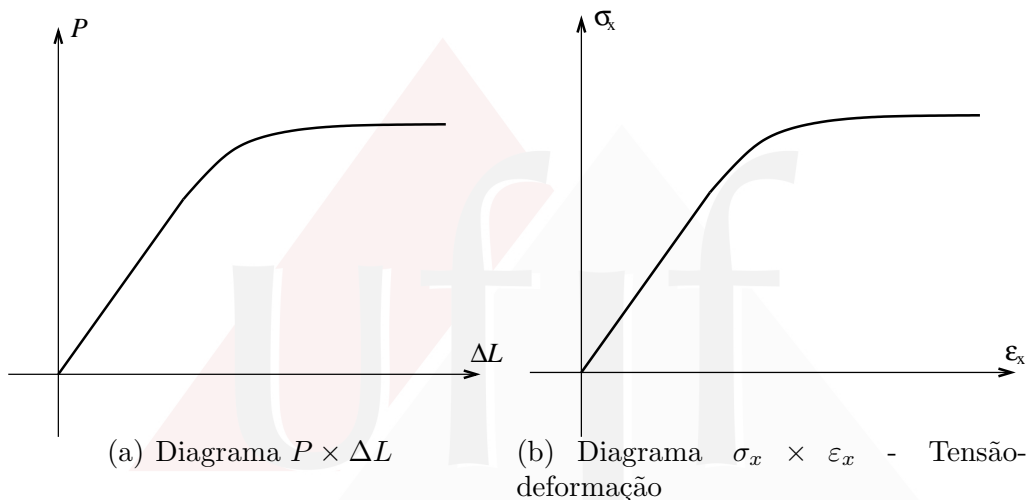


Figura 4.13: Exemplos de diagramas do ensaio de tração

As Figuras 4.14 mostram 3 tipos de diagramas tensão \times deformação obtidos dos ensaios. Em função das características desses diagramas, pode-se classificar os materiais em função seu comportamento, ou seja:

- (a) Material frágil (concreto, vidro): a ruptura (ponto R) se dá para valores $\epsilon_x < 5\%$;
- (b) Material dúctil sem patamar de escoamento definido (aços especiais com alto teor de carbono). A ruptura (ponto R) se dá para valores $\epsilon_x \gg 5\%$ e o material não apresenta patamar de escoamento, onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante;
- (c) Material dúctil com escoamento definido (aços comuns, com baixo teor de carbono). A ruptura (ponto R) se dá para valores $\epsilon_x \gg 5\%$ e o material apresenta patamar de escoamento (trecho entre os pontos 3 e 4), onde há aumento de deformação com a tensão aproximadamente constante.

Destacam-se destes gráficos alguns pontos importantes, que são:

I. – limite de proporcionalidade, que define o nível de tensão a partir do qual o material deixa de ter comportamento linear. Dentre os materiais de comportamento linear, observa-se na Figura 4.14 os 3 tipos mais comuns de diagramas tensão-deformação.

II. – limite de elasticidade. Quando o CP é carregado acima deste limite, não retorna a sua configuração inicial quando descarregado. Acima deste ponto passam a existir deformações permanentes ou plásticas. No aço os limites de elasticidade e proporcionalidade são muito próximos, tanto que normalmente não se faz muita diferença entre esses dois níveis de tensão. Materiais que possuem estes dois limites muito próximos são chamados de materiais elásticos lineares.

III. – tensão ou ponto de escoamento. O limite de elasticidade e o limite de proporcionalidade são difíceis de se determinar com precisão. Em razão disso, os engenheiros utilizam a tensão ou ponto de escoamento que caracteriza o início do comportamento não linear elástico.

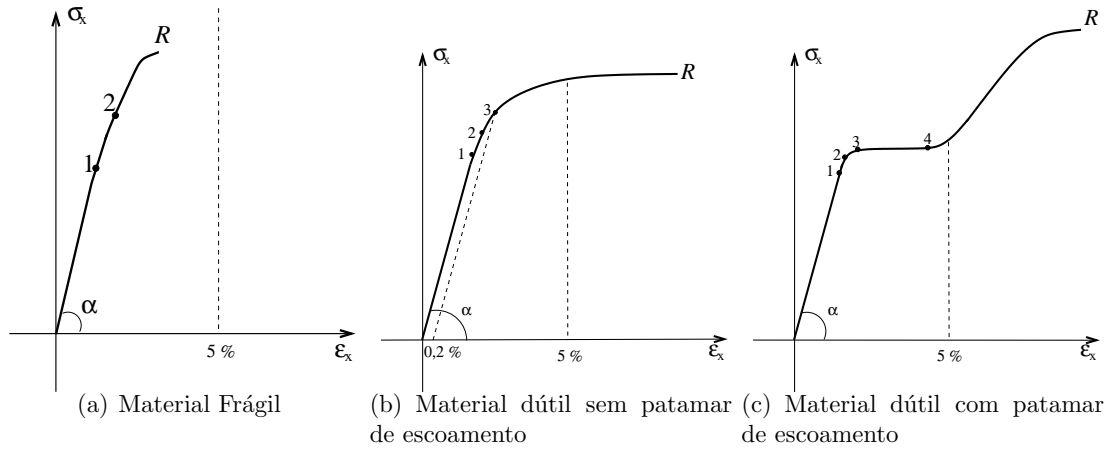


Figura 4.14: Exemplos de diagramas do ensaio de tração

Em aços com baixo teor de carbono, este ponto é obtido diretamente da curva tensão-deformação (ver ponto 3 da Figura 4.14(c)). Já para aços especiais com alto teor de carbono, este ponto é arbitrado como sendo a tensão que provoca uma pequena deformação residual de 0,2 % após o descarregamento.

Durante a fase elástica, ou seja, para níveis de tensões até o limite de elasticidade (ou tensão de escoamento para efeitos práticos) a relação entre a tensão σ_x e a deformação ϵ_x pode ser escrita na forma:

$$\sigma_x = \operatorname{tg} \alpha \epsilon_x = E \epsilon_x, \quad (4.57)$$

onde $E = \operatorname{tg} \alpha$ é o coeficiente angular da reta conhecido como Módulo de Elasticidade Longitudinal ou Módulo de Young.

A equação 4.57 mostra que para materiais trabalhando em regime elástico linear, tem-se que a tensão é diretamente proporcional à deformação. Esta relação é conhecida como lei de Hooke, em homenagem a Robert Hooke que obteve esta proporcionalidade há mais de 300 anos.

Além de gerar deformações ϵ_x , a tensão σ_x aplicada ao CP, conforme já destacado neste texto, gera deformações lineares nas direções transversais (ϵ_y e ϵ_z). Tomando-se então a razão entre a medida obtida para a variação do diâmetro (ΔD) e o diâmetro inicial (D) do CP, pode-se escrever:

$$\epsilon_y = \frac{\Delta D}{D} \quad (4.58)$$

$$\epsilon_z = \frac{\Delta D}{D} \quad (4.59)$$

Conhecidos os valores de ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z (obtidos experimentalmente com as medidas dos extensômetros), é possível estabelecer as relações:

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \text{constante} = -\nu \quad (4.60)$$

$$\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = \text{constante} = -\nu \quad (4.61)$$

onde ν é denominado de **Coefficiente de Poisson** e é uma característica física do material.

Alternativamente as equações 4.60 e 4.61 podem ser escritas na forma:

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x \quad (4.62)$$

$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x \quad (4.63)$$

Substituindo a equação 4.57 na equação 4.63, chega-se às relações entre tensões normais e deformações transversais:

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.64)$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4.65)$$

Resumindo, caso estivessem atuando simultaneamente σ_x , σ_y e σ_z , ter-se-ia:

$$\epsilon_x = +\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (4.66)$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (4.67)$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (4.68)$$

Fica claro que a característica de isotropia do material reduz sensivelmente o número de constantes elásticas que relacionam tensão com deformação. O estudo detalhado de cada fase do ensaio de tração é feito no curso de Laboratório de Resistência dos Materiais.

4.9.2 Ensaio de compressão

É semelhante ao ensaio de tração, mas o CP deve ter dimensões adequadas para se evitar a flambagem. Para materiais metálicos os CPs devem ser de tal forma que a razão L/D deve se situar entre 2 e 4 (ou entre 3 e 8, segundo alguns autores).

O ensaio de compressão do aço apresenta um diagrama semelhante ao ensaio de tração na fase elástica. Admite-se que as constantes elásticas E e ν obtidas experimentalmente são as mesmos para tração ou compressão. O estudo detalhado de cada fase do ensaio de compressão é feito no curso de Laboratório de Resistência dos Materiais.

4.9.3 Ensaio de torção

O ensaio de torção é uma alternativa ao ensaio de cisalhamento face às dificuldades que apresentam este último na aplicação de cisalhamento puro num CP.

Este ensaio consiste em aplicar um torque num CP, analisando as distorções angulares, conforme Figura 4.15.

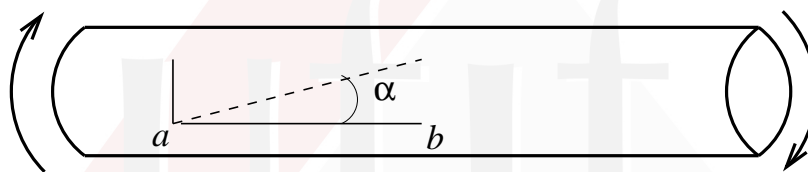


Figura 4.15: Ensaio de torção

Verifica-se experimentalmente que, para pequenas deformações, a variação da dimensão do segmento ab da Figura 4.15 pode ser desprezada. Consequentemente, as deformações medidas no ensaio de torção são distorções angulares.

De forma análoga ao ensaio de tração, é possível se obter um diagrama tensão-deformação, porém neste caso relacionando tensões cisalhantes com distorções angulares. Este diagrama, para materiais elásticos lineares, também segue a lei Hooke conforme equação que segue:

$$\tau_{xy} = \operatorname{tg} \alpha \gamma_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad (4.69)$$

onde G é o **Módulo de Elasticidade Transversal** e é uma outra característica do material.

Finalmente, uma vez observado experimentalmente que tensões tangenciais τ_{xy} causam apenas distorções angulares γ_{xy} , completa-se as relações entre tensões cisalhantes e distorções angulares:

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (4.70)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (4.71)$$

Mais uma vez, a característica de isotropia reduziu o número de constantes elásticas do problema.

4.9.4 Lei de Hooke Generalizada

Após se analisar os ensaios de tração e torção, verifica-se que foram introduzidas três constantes elásticas, que são características do material: E , G e ν . Pode-se demonstrar (Mecânica dos Sólidos I) que apenas duas destas constantes elásticas são independentes, conforme indica equação 4.72:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.72)$$

Considerando tudo o que foi explorado individualmente nos ensaios de tração, compressão e torção, é possível correlacionar tudo isso em uma única expressão. Para isso, tem-se a Lei de Hooke generalizada. Conforme foi dito,

a lei de Hooke generalizada trata de forma mais ampla das relações existentes entre as tensões e as deformações. A expressão 4.73, conhecida como lei de Hooke generalizada, permite estabelecer a relação de deformação e tensão considerando um estado triaxial.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

Onde E é o Módulo de Elasticidade Longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson do material. Note que estão sendo utilizadas as distorções angulares (γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz}) e não as componentes cisalhantes do tensor de deformação (ϵ_{xy} , ϵ_{xz} , ϵ_{yz}). Lembrando que a relação entre essas grandezas é dada por: $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$. Caso seja interessante encontrar as tensões a partir das deformações, é possível inverter a expressão 4.73. Como resultado, a expressão 4.74 resulta nas tensões para um estado triaxial.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

Em problemas relacionados a leituras de deformação (*strain-gages*), é muito comum assumir que os pontos em questão estejam sujeitos a um Estado Plano de Tensão. Para esse estado, as formulações da Lei de Hooke ficam simplificadas, a saber:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.75)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

As expressões 4.73, 4.74, 4.75, 4.76 são válidas para materiais homogêneos e isotrópicos, isto é, que possuem as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todas as direções. A matriz que multiplica o vetor de deformações é chamada de **Matriz Constitutiva do material**.

Algumas observações importantes devem ser destacadas:

- Um estado uniaxial de tensão gera um estado triaxial de deformação;
- Quanto maior a rigidez do material (maior E), menores as deformações, para um mesmo nível de tensão;
- O efeito Poisson se caracteriza pelo sinal negativo nas deformações que ocorrem nas direções transversais à direção da solitação;
- Para materiais comumente utilizados na Engenharia Civil e Mecânica, o coeficiente de Poisson possui valores entre 0,2 e 0,4. Existem materiais especiais, entretanto, que admitem até mesmo valores negativos.

4.10 Continuação do Exemplo 11

Determine as tensões σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} no entorno do ponto em análise. Dados: $E = 2.1$ GPa e $\nu = 0.3$.

Utilizando a Lei de Hooke e assumindo-se que o ponto está sujeito a um estado plano de tensões, temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

substituindo os valores de E e ν , e lembrando que $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = 0.0057736$, temos que:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2.54 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 1.46 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 4.66 \text{ MPa} \end{cases}$$

4.11 EXEMPLO 12 - Estado plano de deformação

Sabendo-se que o prisma mostrado abaixo está sujeito a um estado de tensões conforme indicado na Fig.4.16, pede-se determinar o novo valor do comprimento que liga os pontos P e Q. Dados: $E = 2.1 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.4$.

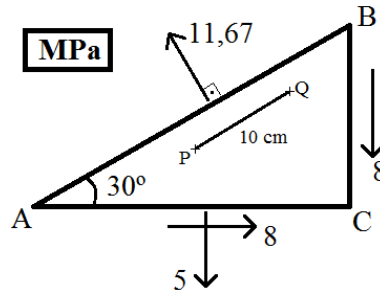


Figura 4.16: Prisma

Solução:

Se considerarmos a direção de AC como sendo coincidente ao eixo x, o estado de tensão (plano) nos pontos do prisma serão dados por:

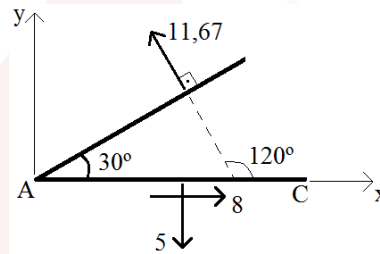


Figura 4.17: Estado de tensão

Onde:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 5 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= -8 \text{ MPa} \\ \sigma_{xx} &\rightarrow \text{desconhecido} \end{aligned}$$

No entanto, sabe-se que o valor da tensão normal num plano cuja normal \hat{N} é $\hat{N} = \{\cos 120^\circ; \sin 120^\circ\}$ vale $\sigma_n = 11.67 \text{ MPa}$.

A partir da expressão do cálculo de σ_n do estudo do estado plano de tensões, temos:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

donde conhecemos σ_{yy} , τ_{xy} , σ_n e α . Logo,

$$11.67 = \frac{\sigma_{xx} + 5}{2} + \frac{\sigma_{xx} - 5}{2} \cos 240^\circ - 8 \sin 240^\circ$$

o que nos permite obter imediatamente:

$$\sigma_{xx} = 3.97 \text{ MPa}$$

O tensor de tensões no ponto fica então definido:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 3.97 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Da lei de Hooke generalizada, temos que:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Aplicando ao caso em questão, temos:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2.1 \times 10^3} \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.97 \\ 5 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

Resultando em:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 0.938 \times 10^{-3} \\ \epsilon_{yy} &= 1.625 \times 10^{-3} \\ \gamma_{xy} &= -10.667 \times 10^{-3} \rightarrow \epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = -5.333 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

A deformação na direção de \overline{PQ} pode ser determinada, então, por:

$$\epsilon_{nn} = \hat{N}_{|\overline{PQ}|}^T \times \underline{\underline{\epsilon}} \times \hat{N}_{|\overline{PQ}|}$$

onde $\hat{N}_{|\overline{PQ}|}$ é o vetor que indica a direção de $|\overline{PQ}|$ e é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{N}_{|\overline{PQ}|} &= \cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j} \\ \hat{N}_{|\overline{PQ}|} &= 0.866\hat{i} + 0.5\hat{j} = \{0.866 \ 0.5\} \end{aligned}$$

Assim, tem-se:

$$\epsilon_{nn} = \{0.866 \ 0.5\} \begin{bmatrix} 0.938 & -5.333 \\ -5.333 & 1.625 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} 0.866 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

Equivalentemente podemos escrever:

$$\epsilon_{nn} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \epsilon_{xy} \sin 2\alpha$$

donde temos:

$$\epsilon_{nn} = \left[\left(\frac{0.938 + 1.625}{2} \right) + \left(\frac{0.938 - 1.625}{2} \right) \cos 60^\circ - 5.333 \times \sin 60^\circ \right] \times 10^{-3}$$

Para ambos casos, temos que:

$$\epsilon_{nn} = -3.509 \times 10^{-3}$$

O novo comprimento $|\overline{PQ}|$ pode ser obtido através de:

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}|^{novo} &= |\overline{PQ}| + \epsilon_{nn} |\overline{PQ}| \\ |\overline{PQ}|^{novo} &= 10 - 3.509 \times 10^{-3} \times 10 \end{aligned}$$

donde obtemos:

$$|\overline{PQ}|^{novo} = 9.96481 \text{ cm}$$

4.12 Deformação Volumétrica

Além das medidas de deformação que compõe o tensor de deformação, uma outra medida de interesse é a chamada deformação volumétrica que mede a variação relativa de um cubo de arestas dx , dy e dz retirado em torno de um ponto. Para um cubo de arestas dx , dy e dz , após o equilíbrio, estas arestas variam seu comprimento de acordo com:

$$dx' = dx(1 + \epsilon_{xx}) \quad dy' = dy(1 + \epsilon_{yy}) \quad dz' = dz(1 + \epsilon_{zz})$$

O volume inicial do cubo é $V_0 = dxdydz$, enquanto o volume deformado é dado por $V_1 = dx'dy'dz'$ e podemos então definir uma nova medida de deformação que é a deformação volumétrica dada como:

$$\epsilon_V = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Ficamos então com:

$$\epsilon_V = \frac{dx(1 + \epsilon_{xx})dy(1 + \epsilon_{yy})dz(1 + \epsilon_{zz}) - dxdydz}{dxdydz}$$

ou:

$$\epsilon_V = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz}$$

Para pequenas deformações, podemos afirmar que:

$$\boxed{\epsilon_V = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}}$$

4.12.1 Deformação volumétrica em termos de tensão

Usando a Lei de Hooke Generalizada (eq. 4.75), temos:

$$\epsilon_V = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Logo:

$$\epsilon_V = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - \frac{2\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

e:

$$\epsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

ou:

$$\epsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}$$

com $\text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$.

Constatamos então que, para tensores com $\text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = 0$ não existem variações de volume no sólido, mas apenas mudança de forma.



Capítulo 5

Critérios de Falha

5.1 Introdução

Quando, em um dado projeto de engenharia, necessita-se especificar um material para a composição de uma estrutura ou sistema estrutural, deve-se levar em consideração a intensidade das tensões atuantes. Como cada material apresenta uma capacidade própria de resistir a um dado estado de tensão, torna-se necessária a imposição de um limite superior ao estado de tensão no material de forma a definir, configurar e prevenir a falha do material.

Os materiais de uso corrente em engenharia podem ser, normalmente, classificados em dois grandes grupos segundo sua capacidade de absorção de deformação. O primeiro deles, denominado frágil, abrange os materiais que falham sob níveis de deformação consideravelmente pequenos. O outro grupo, que envolve materiais cujas deformações no instante da falha são significativamente maiores que nos materiais frágeis, é denominado dúctil. Existem alguns materiais, como o concreto, que apresentam características comuns dos dois grupos no instante da falha. Costuma-se referenciar materiais como o concreto e outros materiais cimentícios e cerâmicos, como quase frágeis.

Quando materiais dúcteis são considerados, a falha é usualmente caracterizada pelo início do escoamento do material, enquanto nos materiais frágeis, a falha é caracterizada pela ruptura frágil do material (no concreto, esses defeitos são observados conjuntamente: ruptura frágil à tração e ruptura dúctil à compressão).

Esses tipos de falhas são prontamente detectados caso o elemento estrutural esteja sujeito a um estado uniaxial de tensões, como em uma barra tracionada ou comprimida. Porém, a avaliação sobre a falha do material torna-se mais complexa quando estão sujeitos a estados bi e triaxiais de tensões. Para ilustrar a complexidade dos problemas bi e tridimensionais, devem ser considerados os elementos estruturais apresentados na Fig. 5.1, os quais estão submetidos a diferentes sollicitações. A questão que pode ser colocada é a seguinte: qual elemento irá falhar primeiro?

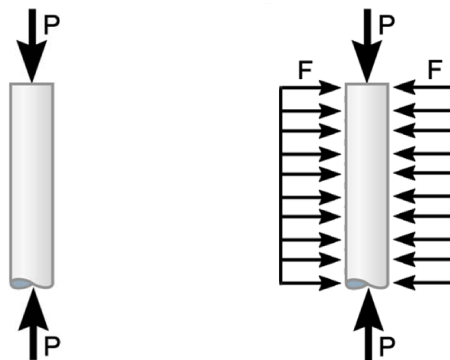


Figura 5.1: Elementos submetidos a estados unidimensionais e bidimensionais de tensão

Analisando-se os dois casos mostrados na Fig. 5.1, observa-se que para a estrutura na qual atua a força de confinamento F (à direita), a ruptura irá ocorrer sob valores de carregamento P mais elevados se comparado ao da outra estrutura ilustrada à esquerda. Esse aumento na capacidade de resistência da estrutura deve-se à presença do confinamento gerado pela força F . Usando a mesma ideia, reforços estruturais podem ser concebidos, em que pilares e vigas podem ser revestidos (“encamisados”) com fibra de carbono, com o objetivo de se gerar o confinamento.

Deve-se salientar, também, que heterogeneidades e falhas iniciais podem fazer com que o material comporte-se de forma frágil ou dúctil, segundo o estado de tensão atuante. Assim, a capacidade resistente dos materiais é o resultado de uma combinação de efeitos, o que torna árdua a tarefa de formular matematicamente a previsão dos estados limites em situações mais complexas de sollicitação. No entanto, identificar estados de sollicitação que possam exceder a capacidade de resistência dos materiais é uma tarefa de grande importância para a realização de projetos seguros. Portanto, é preciso buscar bases ou critérios que permitam efetuar tal julgamento. Para tal, podem ser utilizados

critérios de resistência, ou critérios de ruptura, ou ainda critérios de falha, para avaliar se o estado de tensão em um ponto ultrapassa ou não a resistência do material.

O objetivo de um critério de resistência é permitir a identificação de situações de ruptura local considerando, inclusive, combinações mais complexas de sollicitações (estados planos e triaxiais de tensões). Baseando-se em hipóteses plausíveis sobre o fenômeno responsável pela ruptura, um dado critério pode ser expresso matematicamente na forma de uma função que relaciona componentes do tensor de tensões à resistência ou parâmetros de resistência do material. Tal função pode ainda ser escrita em termos das tensões principais, representada numa forma implícita como:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq 0 \quad (5.1)$$

sendo que a função f determina o limite entre as regiões de falha e segurança. Se a Eq. 5.1 for atendida, tem-se o *domínio de segurança estrutural*.

Na sequência deste capítulo serão apresentados alguns critérios de resistência comumente utilizados em aplicações de engenharia. Deve-se destacar que estes critérios serão brevemente apresentados nestas notas. Para maiores detalhes sobre as formulações, o leitor pode recorrer a livros que tratam da teoria da plasticidade (**buscar referências!!**).

5.2 Critérios de falha para materiais frágeis

5.2.1 Critério de Rankine ou de Coulomb

Este critério de ruptura foi proposto por Rankine, em meados do século XIX, tendo por objetivo a previsão da falha de corpos formados por materiais frágeis. Os materiais frágeis são aqueles em que, na iminência da ruptura, observa-se a ausência de deformações plásticas e baixos níveis de deformação. A ruptura desses materiais quase sempre ocorre de forma brusca, ou seja, após um determinado nível de sollicitação, ocorre a fratura do corpo. Materiais como vidros, ferro fundido e fibras são considerados frágeis.

Nos materiais frágeis, a ruptura ocorre quando a máxima tensão principal alcança a resistência última do material. Assim, em materiais frágeis submetidos a um ensaio de tração uniaxial, a falha ocorrerá quando a tração aplicada, σ_1 ultrapassar a tensão última do material, σ_r . No caso de uma barra sollicitada por uma torção pura, por exemplo, a falha ocorrerá em um plano inclinado de 45° com o eixo da barra. A falha ocorrerá nessa posição uma vez que é nessa inclinação que atuam as tensões principais σ_1 , como indica a ilustração apresentada na Fig. 5.2.

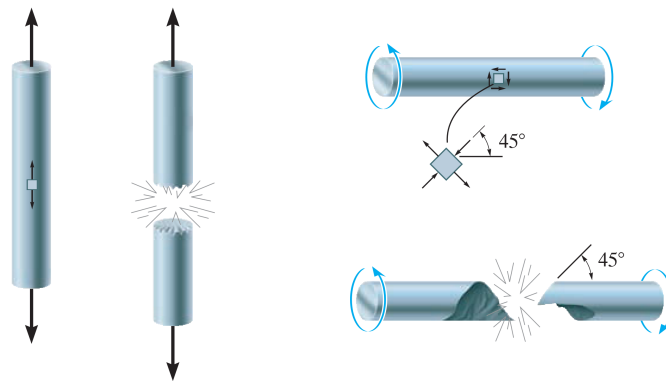


Figura 5.2: Ruptura de materiais frágeis a dois diferentes tipos de sollicitação - tração (esq.) e torção (dir.)

Esse critério, também conhecido como teoria da máxima tensão normal, estabelece que um material frágil falhará quando uma das tensões principais atuantes no material atingir um valor limite igual à tensão normal última que o material resiste quando sujeito a uma tração simples. Matematicamente, esse critério pode ser expresso por:

$$|\sigma_1| \leq \sigma_r ; |\sigma_3| \leq \sigma_r \quad (5.2)$$

Quando problemas no estado plano de tensão são considerados, o critério de Rankine possui uma representação gráfica no plano, a qual está ilustrada na Fig. 5.3.

Os pontos representativos do estado de tensão no corpo que se encontram internamente posicionados no quadrado apresentado na Fig. 5.3 estarão em condição de segurança. Do contrário, tem-se configurada a falha.

No contexto tridimensional, a representação gráfica do critério de Rankine resulta em um cubo, se ilustrado no espaço das tensões principais, com centro no ponto onde as tensões principais são nulas tendo comprimento de aresta igual a $2\sigma_r$ (vide Fig. 5.4). A condição de segurança é observada se o ponto representativo do estado de tensão localiza-se internamente a este cubo.

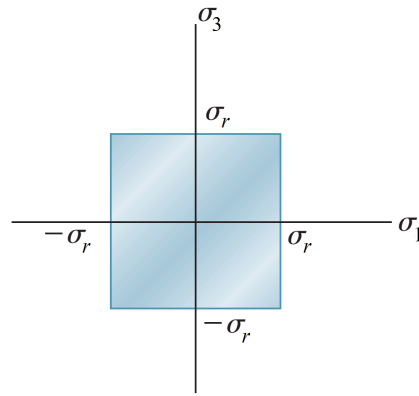


Figura 5.3: Representação gráfica do critério Rankine para o estado plano de tensão

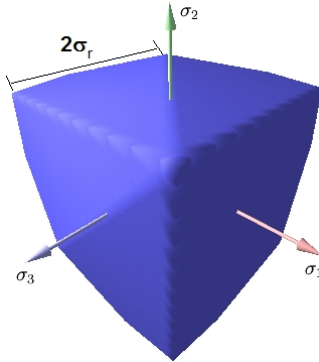


Figura 5.4: Representação gráfica do critério Rankine para o estado triaxial de tensão

5.2.2 Critério de Mohr

Este critério de ruptura foi proposto em 1900 para a previsão da falha de materiais frágeis que possuem tensões resistentes últimas diferentes quando solicitados à tração e à compressão. Alguns materiais frágeis rompem diferentemente quando submetidos a estados de tensão sob tração e sob compressão. Dentre estes materiais, destaca-se o concreto ciclópico (sem aço), largamente utilizado em obras civis.

Para a utilização do critério de ruptura de Mohr, devem ser conhecidas as tensões últimas do material quando este é submetido a:

- um estado de tração uniaxial, $(\sigma_r)_t$;
- um estado de compressão uniaxial, $(\sigma_r)_c$;
- um estado de cisalhamento puro, τ_r .

Os valores de $(\sigma_r)_t$, $(\sigma_r)_c$ e τ_r podem ser obtidos por meio de ensaios experimentais que representem as condições 1 a 3 apresentadas anteriormente. Em seguida, traçam-se os círculos de Mohr para cada uma das condições de carregamento citadas. A representação dos círculos de Mohr para estas condições pode ser visualizada na Fig. 5.5. Os círculos A, B, C representam estados de tensão na ruptura de 2, 1, 3, respectivamente.

Os três círculos de Mohr apresentados na Fig. 5.5 delimitam uma envoltória de estados de tensão admissível. Essa envoltória é obtida tangenciando-se os círculos de Mohr para as condições 1 a 3. Se essa envoltória for delimitada por uma simples reta, este critério recebe o nome de critério de Mohr-Coulomb. Assim, se o estado de tensão atuante no corpo em análise gerar um círculo de Mohr completamente contido no interior da envoltória, o estado de tensão é admissível e, portanto, o corpo encontra-se em segurança. Caso contrário, tem-se a falha.

Para problemas de estado plano de tensão, ou seja $\sigma_2 = 0$, o critério de Mohr possui a representação gráfica mostrada na Fig. 5.6. Verifica-se que este critério leva em consideração as diferentes resistências do material quando solicitado à tração e à compressão.

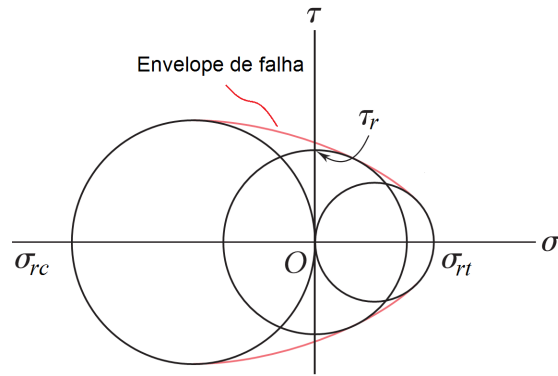


Figura 5.5: Círculos de Mohr para o tracado do critério de ruptura de Mohr

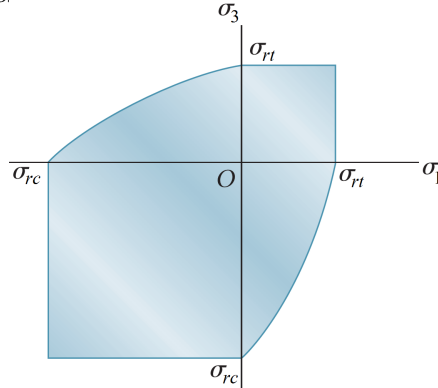


Figura 5.6: Representação gráfica do critério de Mohr para o caso plano de tensão

Para o estado plano de tensão, o critério pode ser expresso matematicamente como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_3 < 0 \quad \implies \sigma_1 > -(\sigma_r)_c \text{ e } \sigma_3 > -(\sigma_r)_c \\ \text{Se } \sigma_1 \text{ e } \sigma_3 > 0 \quad \implies \sigma_1 < (\sigma_r)_t \text{ e } \sigma_3 < (\sigma_r)_t \\ \text{Se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_3 > 0 \quad \implies \sigma_3 < \frac{(\sigma_r)_t}{(\sigma_r)_c} \sigma_1 + (\sigma_r)_t \\ \text{Se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_3 < 0 \quad \implies \sigma_3 > \frac{(\sigma_r)_c}{(\sigma_r)_t} \sigma_1 - (\sigma_r)_c \end{array} \right.$$

De modo geral, o critério de Mohr-Coulomb pode ser escrito na seguinte forma:

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (5.3)$$

onde c representa a coesão do material e ϕ o ângulo de atrito. Ambos os parâmetros podem ser determinados experimentalmente.

Reescrevendo a Eq. 5.3 utilizando as tensões principais, obtém-se:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \cos \phi = c - \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \operatorname{sen} \phi \right] \operatorname{tg} \phi$$

Assim, para o caso geral pode-se escrever o critério de Mohr Coulomb como:

$$\sigma_1 (1 + \operatorname{sen} \phi) - \sigma_3 (1 - \operatorname{sen} \phi) \leq 2c \cos \phi \quad (5.4)$$

Se a Eq.5.4 for atendida, observa-se a condição de segurança. O critério de Mohr-Coulomb possui uma representação tridimensional interessante, mostrada na Fig. 5.7. Esta figura é resultante de um hexágono irregular definido no espaço das tensões principais. Observa-se a condição de segurança caso o ponto representativo do estado de tensão em estudo se encontre posicionado internamente ao hexágono.

5.3 Critérios de falha para materiais dúcteis

5.3.1 Critério de Tresca

Esse critério de resistência foi desenvolvido por Henri Tresca em 1868, sendo largamente utilizado nos dias atuais para a previsão da falha de pontos pertencentes a materiais dúcteis. Nesses materiais, a falha é frequentemente observada

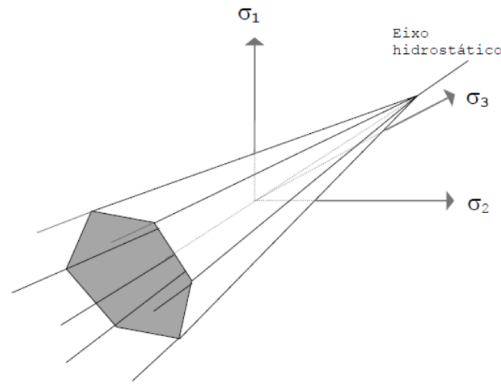


Figura 5.7: Representação gráfica do critério de Mohr para o caso tridimensional

quando a estrutura entra em regime de escoamento. Na fase de escoamento, o estado de tensão atuante supera o limite elástico do material causando, assim, deformações permanentes na estrutura.

Durante o escoamento ocorre o deslizamento dos cristais constituintes do material, os quais são ordenados aleatoriamente, ao longo de seus planos de contato. Esse deslizamento é provocado pelas tensões de cisalhamento atuantes no corpo, como indica a Fig. 5.8, e a deformação permanente decorre da acomodação dos cristais em sua nova posição.

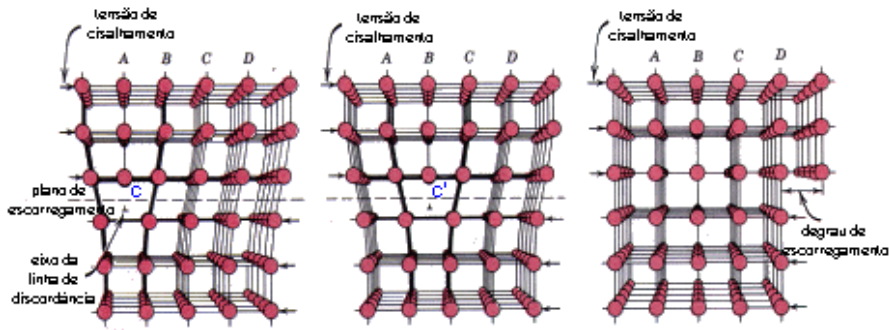


Figura 5.8: Deslizamento dos cristais do material

Esse fenômeno é facilmente observado em ensaios experimentais de tração uniaxial em barras de aço, onde a falha ocorre em um plano inclinado de 45° com o plano de atuação de carga, como mostrado na Fig. 5.9. Conseqüentemente, parece intuitivo que esse critério de ruptura deva relacionar a condição de falha à tensão de cisalhamento resistente do material, uma vez que a falha ocorre nos planos onde as tensões de cisalhamento são máximas.

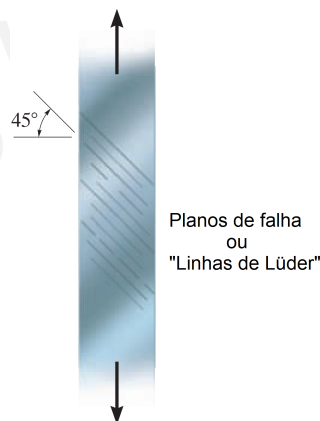


Figura 5.9: Planos de falha em materiais dúcteis

Segundo Tresca, a teoria da máxima tensão cisalhante ou critério de Tresca, estabelece que o escoamento do material inicia-se quando a tensão cisalhante máxima absoluta atuante no material atinge a tensão cisalhante que causa o escoamento, no mesmo material, ao ser submetido apenas a uma tração axial. Dessa forma, esse critério pode ser expresso como:

$$\tau_{max} \leq \tau_{resistente}$$

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \leq \frac{\sigma_e}{2}$$

que nos dá:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_e \tag{5.5}$$

onde σ_e é a tensão de escoamento do material quando submetido a um ensaio de tração uniaxial. Quando a Eq. 5.5 é atendida, observa-se a condição de segurança. Se o problema analisado é do tipo plano de tensão, as expressões apresentadas na Eq. 5.5 possuem uma representação gráfica. Considerando que o sistema de coordenadas seja definido pelas tensões principais, a Eq. 5.5 assume a representação gráfica mostrada na Fig. 5.10.

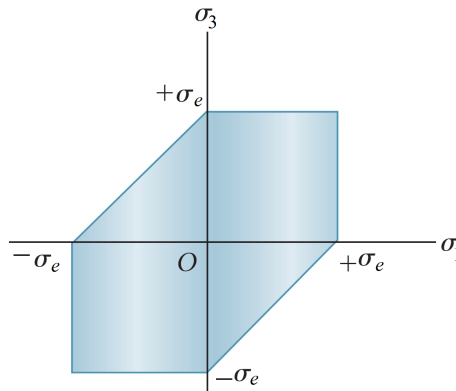


Figura 5.10: Representação gráfica do critério de Tresca para o estado plano de tensões

A partir da Fig. 5.10, constata-se que os pontos representativos do estado de tensão atuante que encontram-se dentro do polígono hexagonal estão em condição de segurança. Já os pontos que estão posicionados fora do polígono representam estados de tensão impossíveis de serem observados, já que a falha estrutural ocorrerá antes de o ponto sair da superfície de falha.

Considerando-se, ainda, o estado plano de tensões, podemos reescrever a Eq. 5.5 substituindo-se os termos σ_1 e σ_3 , respectivamente, por:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \quad (5.6)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2} \quad (5.7)$$

Assim, tem-se:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

e o critério de Tresca em função do estado de tensões no entorno do ponto se escreve como:

$$\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_e \quad (5.8)$$

Caso $\sigma_{yy} = 0$, a Eq. 5.8 se simplifica a:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_e \quad (5.9)$$

Se problemas tridimensionais forem considerados, a representação gráfica da Eq. 5.5 assume a forma de uma superfície hexagonal no espaço, caso esta seja representada considerando um sistema de coordenadas definido pelas tensões principais, como indica a Fig. 5.11.

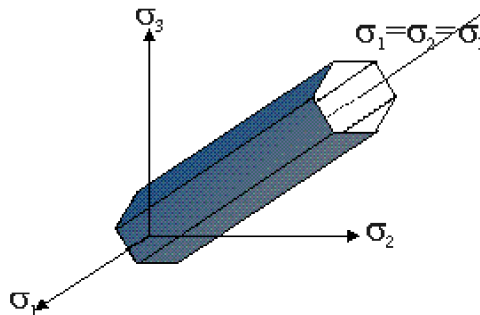


Figura 5.11: Representação gráfica do critério de Tresca para o estado triaxial de tensões

O eixo no qual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ é conhecido como eixo hidrostático, sendo que o centro de gravidade da seção transversal desta superfície hexagonal localiza-se ao longo deste eixo. Se o ponto representativo do estado de tensão em análise localiza-se internamente à superfície mostrada na Fig. 5.11, tem-se condição de segurança. Caso contrário, observa-se a condição de falha.

5.3.2 Critério de von Mises

Esse critério de ruptura, também conhecido na literatura como teoria da máxima energia de distorção, foi proposto independentemente por Von Mises e Hency. Embora existam dois pesquisadores envolvidos em seu desenvolvimento, esse critério carrega apenas o nome do primeiro deles. Esse critério de ruptura, o qual foi concebido com base em evidências experimentais, é largamente utilizado na previsão da falha de materiais dúcteis.

Segundo ensaios experimentais realizados em laboratório, observou-se que alguns materiais não atingiam o escoamento quando submetidos a estados hidrostáticos de tensão. Nessa condição, as tensões normais atuantes nas faces do elemento são idênticas e dadas por $\sigma_{med} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$. Como nesse caso o escoamento não é observado, conclui-se que a energia de deformação produzida pelo estado hidrostático de tensões deve ser desconsiderada para a caracterização da falha.

Conseqüentemente, segundo as premissas deste critério, o escoamento de um material dúctil ocorre quando a energia de distorção por unidade de volume do material for igual ou superior à energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando ele atinge o escoamento em um ensaio de tração. Sabe-se que a energia de deformação total é dada por:

$$u = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (5.10)$$

A Eq. 5.10 representa a área sob a curva $\sigma \times \epsilon$ para um material de comportamento mecânico elástico linear. Considerando o estado de tensão escrito com base nas tensões principais, a energia de deformação total, Eq. 5.10, pode ser reescrita como:

$$u = \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \epsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \epsilon_3 \quad (5.11)$$

Usando as expressões da lei de Hooke generalizada, a Eq. 5.11 assume a seguinte forma:

$$u = \frac{1}{2E} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] \quad (5.12)$$

Como a Eq. 5.12 representa a energia de deformação total, deve-se subtrair a contribuição referente ao estado hidrostático de tensões, o qual experimentalmente não representa contribuição para a falha. Para tal fim, deve-se subtrair $\sigma_{med} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ de cada tensão principal atuante no problema. Efetuando este procedimento, obtém-se a energia de distorção por unidade de volume a qual pode ser escrita como:

$$u_{distorção} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (5.13)$$

Na condição de falha, a energia de distorção $u_{distorção}$ dada pela Eq. 5.13 deve ser igual à energia de distorção da falha de um corpo uniaxialmente carregado. Quando o corpo encontra-se uniaxialmente carregado tem-se que $\sigma_1 = \sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Assim, a Eq. 5.13 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_{distorção}^{uniaxial} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_e - 0)^2 + (\sigma_e - 0)^2 + (0 - 0)^2] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_e^2 \quad (5.14)$$

Considerando a condição de falha, pode-se escrever que:

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq \frac{1+\nu}{3E} \sigma_e^2 \quad (5.15)$$

que, simplificando, nos dá:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sqrt{2} \sigma_e \quad (5.16)$$

A Eq. 5.16 representa a expressão geral do critério de von Mises. Para problemas planos de tensão, ou seja, $\sigma_2 = 0$, a equação do critério de von Mises pode ser particularizada como:

$$\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 \leq \sigma_e^2 \quad (5.17)$$

Com base nos conhecimentos da geometria analítica, constata-se que a expressão apresentada na Eq. 5.17 representa uma elipse no sistema de coordenadas das tensões principais, como mostra a Fig. 5.12. O domínio de segurança é representado pelo conjunto de pontos pertencentes ao interior do contorno da elipse. Já os pontos exteriores à elipse representam estados de tensão não possíveis, já que a falha do corpo ocorrerá antes destes estados de tensão serem atingidos.

Considerando-se, ainda, o estado plano de tensões, podemos reescrever a Eq. 5.17 substituindo-se os termos σ_1 e σ_3 pelas Eqs. 5.6 e 5.7, respectivamente.

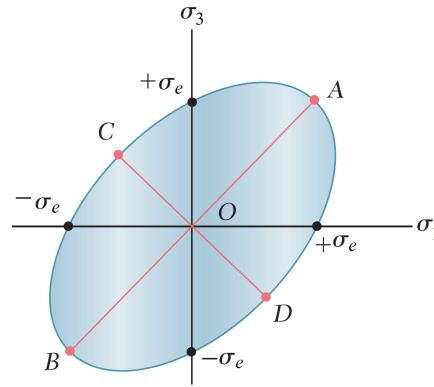


Figura 5.12: Representação gráfica do critério de Von Mises para o estado plano de tensões

Assim, após algumas manipulações algébricas, chega-se a seguinte expressão:

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_e \quad (5.18)$$

Caso $\sigma_{yy} = 0$, a Eq. 5.18 se simplifica a:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_e \quad (5.19)$$

Para problemas tridimensionais, a representação gráfica da Eq. 5.17, conforme os conhecimentos da geometria analítica, resulta em um cilindro, se representado no sistema de referência definido pelas tensões principais, com o centro de gravidade de sua seção transversal localizado ao longo do eixo hidrostático, como mostra a Fig. 5.13. Os pontos localizados de forma interna ao cilindro indicam estados de tensão em segurança, enquanto pontos externos ao cilindro indicam estados de tensão que induzem a falha do material. Deve-se salientar que o critério de Von Mises leva em consideração a influência da tensão principal intermediária, σ_2 , o que não é feito pelo critério de Tresca.

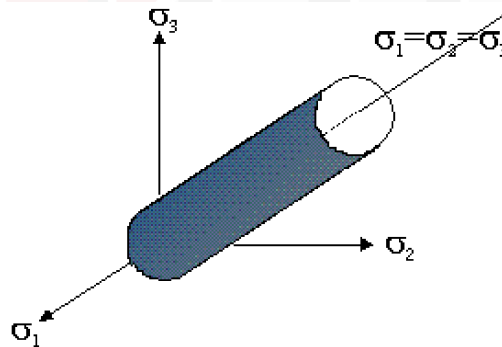


Figura 5.13: Representação gráfica do critério de Von Mises para o estado triaxial de tensões

5.3.3 Comparativo entre os critérios de Tresca e de von Mises

Os critérios de resistência de Tresca e Von Mises, discutidos anteriormente, foram propostos para a previsão da falha de corpos formados por materiais dúcteis.

Entretanto, existe uma ligeira diferença entre a previsão da condição de falha dada por ambos os critérios em situações em que o corpo em análise encontra-se solicitado por um estado de cisalhamento puro.

Para a visualização de tal diferença, os dois critérios de resistência podem ser representados conjuntamente no plano das tensões principais assumindo-se um estado plano de tensão. Esta representação é mostrada na Fig. 5.14.

Observa-se, na Fig. 5.14, que os critérios concordam entre si sobre a previsão da falha quando uma das tensões principais no plano é nula. Porém, para os demais pontos existem pequenas diferenças. Em especial, é interessante discutir a diferença na previsão do cenário de falha entre os critérios quando um estado de cisalhamento puro atua sobre o corpo em análise. Nessa condição, constata-se que o critério de von Mises admite um estado de tensão aproximadamente 15% mais elevado que o previsto pelo critério de Tresca. Resultados experimentais em corpos-de-prova submetidos à torção pura (situação em que tem-se um estado de cisalhamento puro) indicam que o critério de Von Mises é mais preciso na previsão de falha.

Em análises tridimensionais, a representação conjunta das superfícies de falha dos critérios de Tresca e Von Mises resulta na Fig. (4.9). Verifica-se que a superfície cilíndrica de Von Mises circunscreve a superfície hexagonal de Tresca, sendo que a diferença máxima entre elas ocorre na presença de estados de tensão relacionados ao cisalhamento

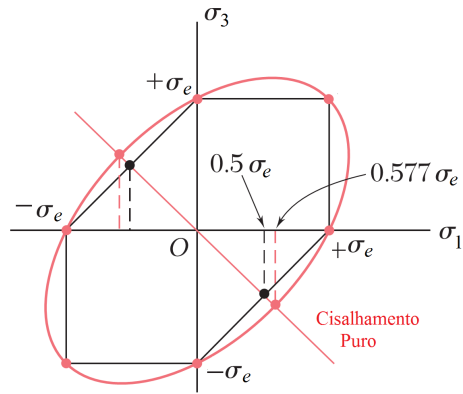


Figura 5.14: Representação gráfica dos critérios de Tresca e Von Mises para o estado plano de tensões

puro. Além disso, observa-se que as superfícies são coincidentes nos pontos de derivadas não contínuas pertencentes à superfície de Tresca.

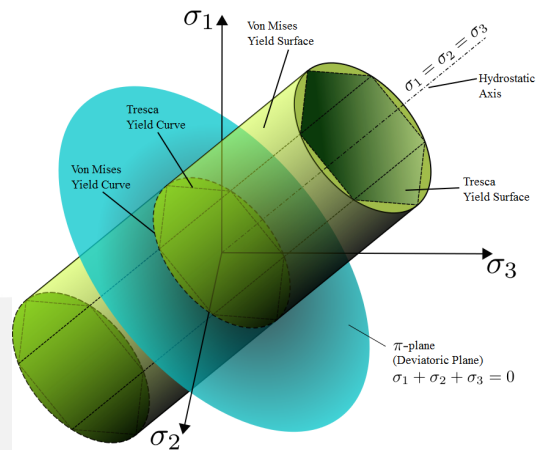


Figura 5.15: Representação gráfica dos critérios de Tresca e Von Mises para o estado triaxial de tensões



UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Capítulo 6

Flambagem

6.1 Introdução

Por estabilidade, entende-se a propriedade que um sistema possui de retornar ao seu estado original após ter sido deslocado da sua posição de equilíbrio. Um sistema que não possui essa propriedade é classificado como instável, dizendo-se, nesse caso, que ocorreu uma perda de estabilidade. Nas condições reais de serviço de uma estrutura, podem existir diversas causas produzindo deslocamentos que afastem um sistema do seu estado de equilíbrio original. Um sistema que perde estabilidade pode comportar-se de diferentes maneiras, existindo geralmente uma transição para uma nova posição de equilíbrio, sendo que essa transição pode ser acompanhada de grandes deslocamentos e, conseqüentemente, com o desenvolvimento de grandes deformações ou de deformações plásticas que podem provocar o colapso completo da estrutura.

Em alguns casos a estrutura pode continuar trabalhando satisfazendo as suas funções básicas após a perda de estabilidade, como por exemplo ocorre em peças de paredes delgadas comuns em estruturas metálicas existentes na engenharia civil e muito mais comumente na engenharia aeronáutica e na engenharia mecânica.

A perda de estabilidade em corpos elásticos pode ser ilustrada por uma série de exemplos conforme apresentados nas figuras que seguem neste texto.

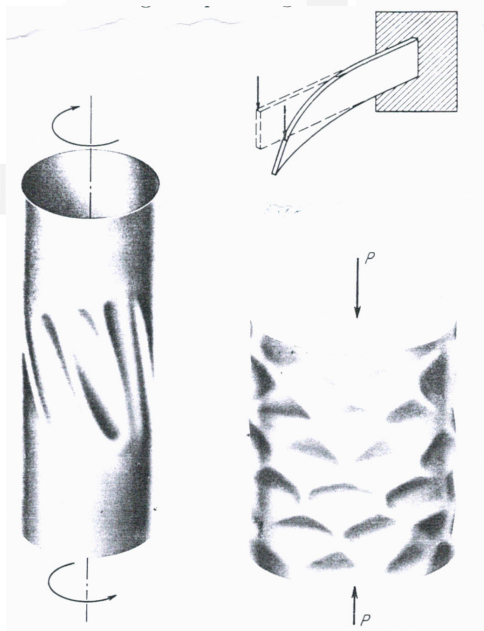


Figura 6.1: Casca cilíndrica: a compressão e a torção; flambagem lateral de vigas

O caso mais simples deste comportamento é a perda de estabilidade de uma barra comprimida quando, para um determinado valor da força de compressão, esta barra pode não manter a configuração retilínea de equilíbrio e curvar-se (fletir) lateralmente. Um tubo de paredes delgadas sob pressão externa pode perder sua estabilidade e o formato circular de sua seção transversal transformar-se em uma elipse, perdendo rigidez, ainda que as tensões nas paredes estejam longe de atingir o limite de escoamento no momento da flambagem. O mesmo tubo pode também perder estabilidade sob ação de uma compressão axial e outro fenômeno desta natureza pode ocorrer quando este mesmo tubo é submetido a um esforço de torção. Nas Figs. 6.1 e 6.2 ilustramos estes comportamentos.

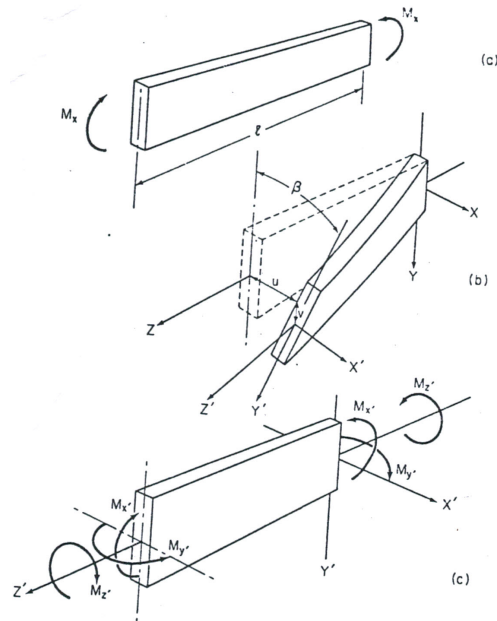


Figura 6.2: Detalhe de barra com instabilidade lateral

É interessante observar que existe uma grande variedade de comportamentos deste tipo na mecânica das estruturas. Consta-se que o fenômeno da instabilidade ocorre em estruturas leves de paredes delgadas, tais como cascas de paredes finas, muros delgados e vigas-parede. Daí o fato de que ao se projetar uma estrutura com essas características exigir-se, além da análise usual de verificações de tensões, uma análise de estabilidade tanto dos componentes isolados, quanto de todo o sistema. Na construção aeronáutica, por exemplo, é comum que, para evitar comportamentos instáveis, núcleos de paredes sejam enrijecidos com seções especiais (enrijecedores). O núcleo enrijecido adquire grande estabilidade a um relativo pequeno peso.

Para a análise da estabilidade em cada um dos casos acima exemplificados é necessário a escolha de um modelo físico representativo da realidade, um modelo matemático e um esquema de cálculo que pode ser descrito da seguinte forma: assume-se que o sistema seja ideal. Assim, para o caso de uma peça sujeita a compressão, por exemplo, admitimos o seu eixo como perfeitamente reto e consideramos o material totalmente homogêneo, além das forças perfeitamente centradas. Para o caso de uma casca cilíndrica, consideramos sua forma como perfeita e, para este sistema ideal, admite-se um deslocamento da posição de equilíbrio usual obtendo-se uma configuração diferente desta para aplicação das equações de equilíbrio da mecânica, o que nos permite investigar a possibilidade da existência de configurações de equilíbrio diferentes da trivial.

Este é, em linhas gerais, o procedimento adotado nas análises aqui apresentadas e que nos permitem determinar valores de cargas críticas de barras submetidas a esforço de compressão.

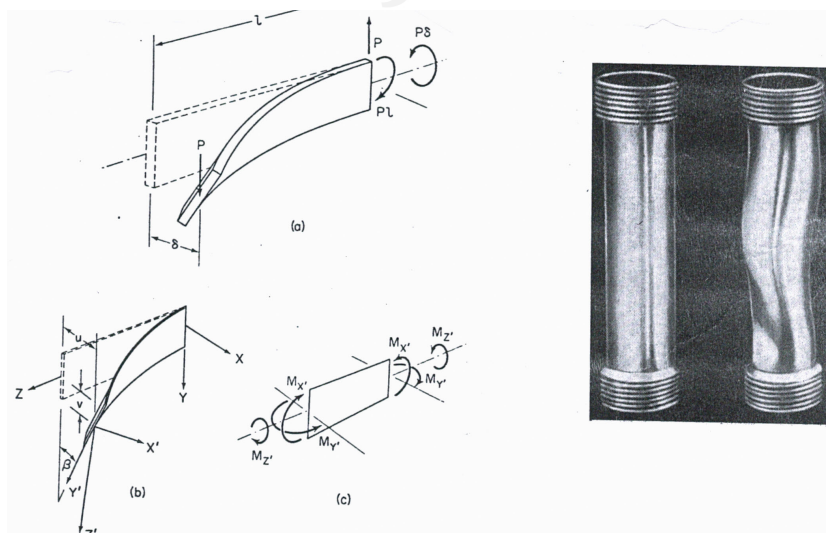


Figura 6.3: Barra com instabilidade lateral

6.2 Carga Crítica de Euler (Casos perfeitos)

6.2.1 Caso bi-rotulado

Inicialmente, apresentamos o caso de uma barra bi-rotulada sujeita a uma carga de compressão, partindo-se do princípio que exista ou que seja possível uma configuração de equilíbrio diferente da retilínea. Este procedimento é repetido para as demais condições de apoio nos itens subsequentes.

Neste caso, como nos outros, trabalhamos então com as seguintes hipóteses:

- A barra é perfeitamente retilínea;
- A carga é perfeitamente centrada;
- Os deslocamentos e as deformações são pequenos;
- O material obedece à lei de Hooke: $\sigma < \sigma_p$ (tensão limite de proporcionalidade).

Tomando-se o eixo x com origem na extremidade inferior da barra e o eixo y como a deflexão lateral da barra, suposta em equilíbrio na configuração fletida, a equação diferencial para este problema pode ser obtida a partir da determinação do momento fletor localizado a uma distância x do apoio, conforme indicado na Fig. 6.4:

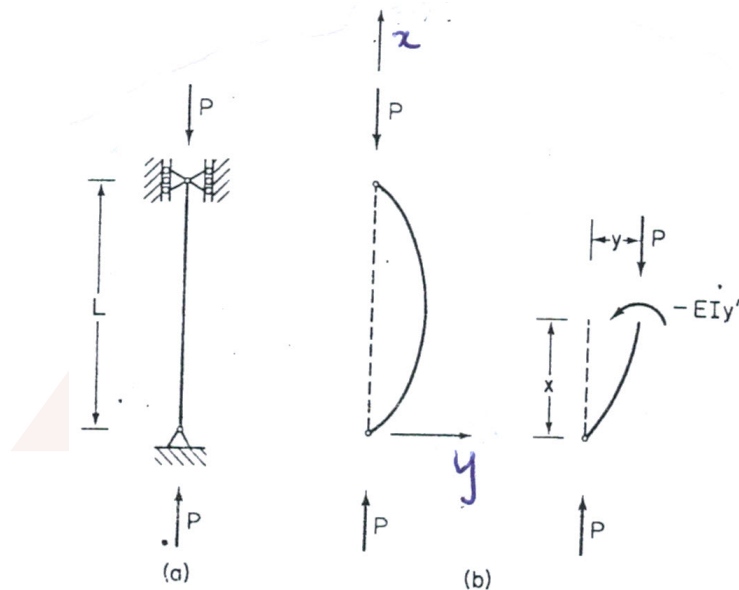


Figura 6.4: Barra bi-rotulada

$$M(x) = Py \quad (6.1)$$

Da teoria da flexão, sabemos que o momento fletor em uma determinada seção de uma barra é proporcional à curvatura da viga nesta seção e que, em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, pode se escrever como:

$$\frac{M(x)}{EI} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (6.2)$$

Igualando a Eq. 6.1 à Eq.6.2, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} = 0$$

Definindo $k^2 = \frac{P}{EI}$, podemos escrever:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \quad (6.3)$$

Esta é a equação diferencial de equilíbrio para a barra em questão, sujeita às condições de contorno definidas a partir dos tipos de apoios que, para o caso considerado - apoios simples - são descritos pelas relações:

$$y = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad (6.4)$$

$$y = 0 \quad \text{em} \quad x = l \quad (6.5)$$

A solução completa desta equação, que nos fornece a posição de equilíbrio desta barra expressa pela função $y = f(x)$, é dada por:

$$y(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$

Fazendo uso da primeira das condições de contorno acima descritas obtemos:

$$y = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \rightarrow B = 0 \quad (6.6)$$

Assim a equação da linha elástica desta barra fica:

$$y(x) = A \operatorname{sen} kx$$

A segunda condição de contorno nos fornece:

$$y = 0 \quad \text{em} \quad x = l \rightarrow A \operatorname{sen}(kl) = 0 \quad (6.7)$$

que para ser satisfeita requer que

$$\operatorname{sen} kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

Em função da definição de k , obtemos os valores da carga para cada uma destas soluções da equação:

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (6.9)$$

Temos, então, as diversas configurações de equilíbrio possíveis para $n = 1, n = 2, \dots$:

$$n = 1 \Rightarrow k = \frac{\pi}{l} \Rightarrow y_1 = A \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x \Rightarrow P_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (6.10)$$

$$n = 2 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{l} \Rightarrow y_2 = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} x \Rightarrow P_2 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (6.11)$$

⋮

O menor valor de P_n neste caso ($n = 1$) é denominado de Carga Crítica de Euler ou carga crítica P_{cr} ou ainda carga de flambagem:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (6.12)$$

Como existem infinitos valores de I para uma dada seção, adotamos $I = I_{min}$ para o cálculo da menor carga de flambagem e reescrevemos:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (6.13)$$

Conclui-se, desta forma, que para valores de P menores que P_{crit} , a única configuração possível de equilíbrio é a configuração retilínea. Para o valor da carga $P = P_{crit}$ a barra pode ter outra configuração de equilíbrio, diferente da reta, que é descrita pela senoide $y = A \operatorname{sen} kx$. Não nos é possível, no entanto, com este estudo, tal como aqui realizado, determinar o valor da amplitude A desta configuração de equilíbrio (que é a linha elástica da barra). Apesar disto, este é um resultado importante, já que nas estruturas usuais da engenharia compostas de barras é necessário, para o seu adequado funcionamento, que barras que estejam sujeitas à compressão se equilibrem preferencialmente sem mudança da retilinearidade de sua geometria.

6.2.2 Caso engaste-engaste

Examinamos, em seguida, o que ocorre para uma diferente condição dos apoios analisando uma barra bi-engastada. A equação diferencial para este problema pode ser escrita a partir da determinação do momento fletor a uma distância x do apoio conforme ilustra a Fig. 6.5 abaixo.

O momento fletor na seção do corte mostrado na Fig. 6.5, calculado pelas forças abaixo da seção é dado por:

$$M(x) = Py - M_0 \quad (6.14)$$

A relação entre a curvatura e o momento fletor permite escrever que:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x) = -(Py - M_0) \quad (6.15)$$

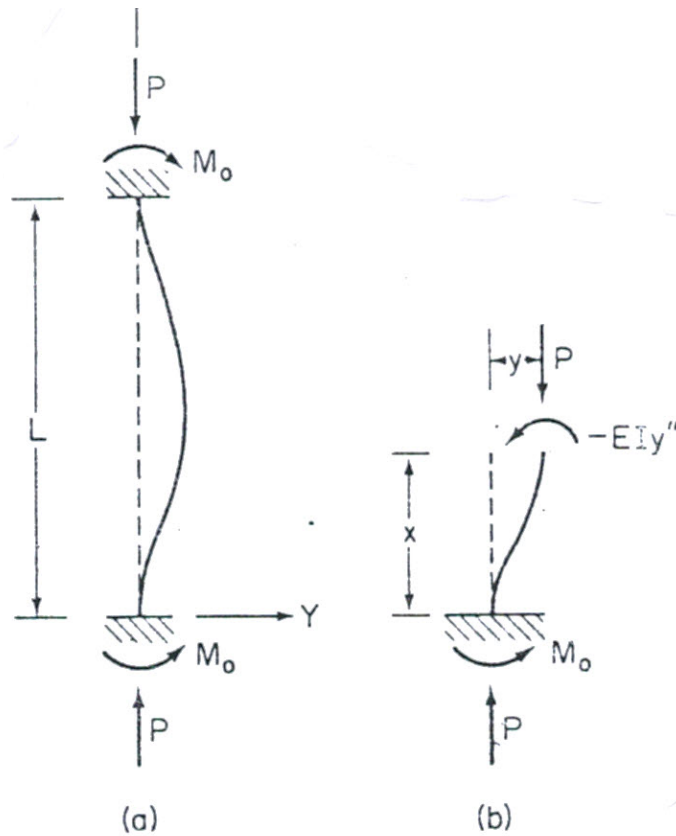


Figura 6.5: Caso engaste-engaste

Utilizando as mesmas definições para k^2 e $M(x)$ do item anterior podemos escrever esta equação como:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = \frac{M_0}{EI} \quad (6.16)$$

ou,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{M_0}{EI} \quad (6.17)$$

Neste caso, as condições de contorno são dadas por $y(0) = y(l) = 0$, pois estabelecem que os deslocamentos nesse apoio são nulos e que $y'(0) = 0$, pois a rotação no engaste inferior é nula.

A solução completa desta equação diferencial é dada pela soma das soluções da equação diferencial homogênea associada a uma solução particular, isto é $y = y_h + y_p$. A solução homogênea, como já vimos anteriormente, é dada por:

$$y_h = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$

Uma solução particular para este caso é dada por:

$$y_p = \frac{M_0}{k^2 EI} = \frac{M_0}{P}, \text{ uma vez que } k^2 = \frac{P}{EI}$$

Nossa solução pode então ser escrita como:

$$y(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + \frac{M_0}{P}$$

A derivada desta solução é dada por:

$$y'(x) = Ak \cos kx - Bk \operatorname{sen} kx$$

Fazendo uso da condição de contorno $y'(0) = 0$, obtemos $A = 0$, isto é:

$$y' = 0 \text{ em } x = 0 \rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = B \cos kx + \frac{M_0}{P} \quad (6.18)$$

e utilizando a condição de contorno $y(0) = 0$, obtemos:

$$y = 0 \text{ em } x = 0 \rightarrow B = -\frac{M_0}{P} \quad (6.19)$$

A equação da deflexão lateral se escreve, então, como:

$$y(x) = \frac{M_0}{P}(1 - \cos kx)$$

Utilizando uma outra condições de contorno para este problema, isto é, para o engaste superior, podemos escrever que:

$$y = 0 \quad \text{em} \quad x = l \rightarrow \frac{M_0}{P}(1 - \cos kl) = 0 \quad (6.20)$$

como $\frac{M_0}{P} \neq 0$, obtemos imediatamente:

$$1 - \cos kl = 0 \quad (6.21)$$

que resulta em:

$$\cos kl = 1 \Rightarrow kl = 2n\pi \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.22)$$

de onde temos que:

$$k^2 = \frac{4n^2\pi^2}{l^2} \quad (6.23)$$

Da definição de k^2 chegamos então a:

$$\frac{P}{EI} = \frac{4n^2\pi^2}{l^2} \quad (6.24)$$

E finalmente a:

$$P = 4n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (6.25)$$

O menor valor de P neste caso ($n = 1$) é o da carga crítica de Euler para este problema:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(l/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (6.26)$$

6.2.3 Caso engaste-livre

Consideremos, agora, o caso com uma extremidade engastada e outra livre. Da Fig. 6.6, o momento fletor na seção do corte pode ser calculado pelas forças abaixo da seção como:

$$M(x) = P(y - \delta) \quad (6.27)$$

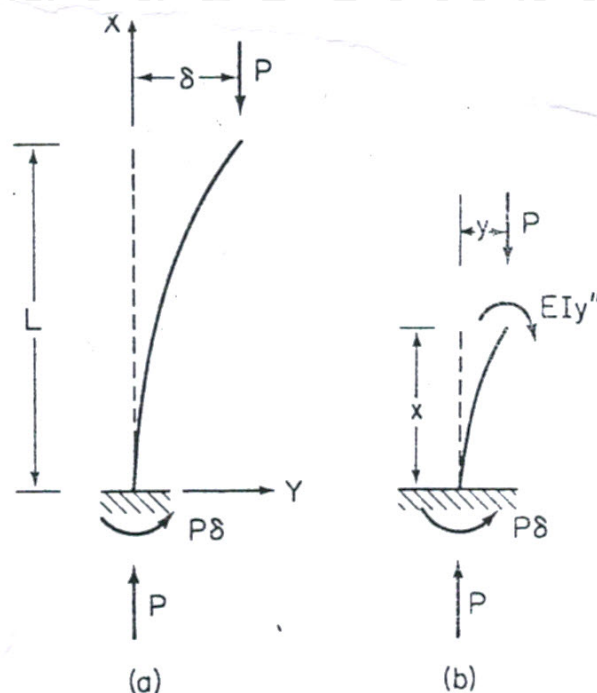


Figura 6.6: Caso engaste-livre

Utilizando a relação entre a curvatura e o momento fletor, temos a seguinte equação diferencial de equilíbrio:

$$-EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(y - \delta) \quad (6.28)$$

que resulta na seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{P\delta}{EI} \quad (6.29)$$

onde $k^2 = \frac{P}{EI}$.

Neste caso, as condições de contorno são dadas por $y(0) = y'(l) = 0$, pois estabelecem que o deslocamento e a rotação no engaste são nulos e $y(l) = \delta$, pois estabelece que o deslocamento na extremidade superior - livre - vale δ .

A solução desta equação é dada pela soma de uma solução particular com a solução da equação homogênea:

$$y(x) = y_h + y_p = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + \delta \quad (6.30)$$

A condição de contorno $y(0) = 0$ nos fornece imediatamente que $B = -\delta$ e a condição $y'(0) = 0$ resulta em $A = 0$. Assim, chegamos a seguinte equação da deflexão lateral:

$$y(x) = \delta(1 - \cos kx) \quad (6.31)$$

Finalmente, considerando a condição $y(l) = \delta$, obtemos $kl = n\frac{\pi}{2}$ e, para $n = 1$, obtém-se:

$$y(x) = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \quad (6.32)$$

Logo, a carga crítica de Euler, neste caso, é dada por:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2} = \frac{0.25\pi^2 EI_{min}}{l^2} \quad (6.33)$$

6.2.4 Caso engaste-rótula

Como nos casos anteriores, partimos da igualdade entre o momento fletor numa seção determinado pelas ações aplicadas na barra e o momento fletor nesta mesma seção dado pela relação entre este e a curvatura da viga. A Fig. 6.7 ilustra os elementos necessários para este procedimento.

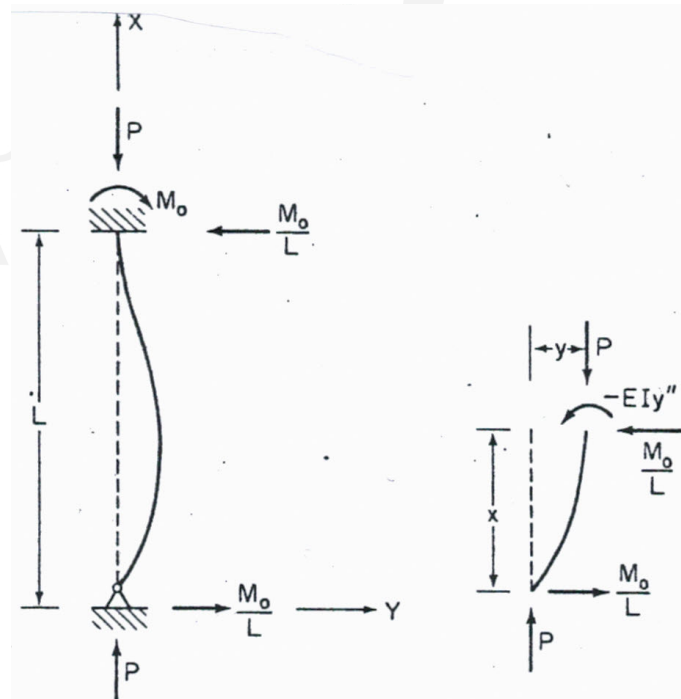


Figura 6.7: Caso engaste-rótula

O momento fletor na seção do corte calculado pelas forças abaixo desta é dado por:

$$M(x) = Py - \frac{M_0}{l} x \quad (6.34)$$

Através da relação entre a curvatura e o momento fletor, temos a seguinte equação diferencial de equilíbrio:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = \frac{M_0}{EI} \frac{x}{l} \quad (6.35)$$

As condições de contorno dadas por $y(l) = y'(l) = 0$, estabelecem que o deslocamento e a rotação no engaste são nulos e $y(0) = 0$, estabelece que o deslocamento na extremidade inferior é nulo.

A solução desta equação é dada pela soma de uma solução particular com a solução da equação homogênea:

$$y(x) = y_h + y_p = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + \frac{M_0}{k^2 EI} \frac{x}{l} \quad (6.36)$$

A consideração da condição de contorno $y(0) = 0$ resulta que $B = 0$ e da condição $y'(l) = 0$, obtemos:

$$A = -\frac{M_0}{P} \left[\frac{1}{kl \cos kl} \right] \quad (6.37)$$

A última condição de contorno nos fornece:

$$y(l) = 0 \Rightarrow \frac{M_0}{P} \left[1 - \frac{\operatorname{sen} kl}{kl \cos kl} \right] = 0 \quad (6.38)$$

que resulta na seguinte equação:

$$1 - \frac{\operatorname{tg}(kl)}{kl} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(kl) = kl \quad (6.39)$$

A solução desta equação é dada por $kl = 4,4934$, donde obtemos a linha elástica para este caso:

$$y(x) = \frac{M_0}{P} \left[\frac{x}{l} - \frac{\operatorname{sen} kx}{kl \cos kl} \right]$$

O menor valor de P (carga crítica de Euler) é então dado por:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{(0,7l)^2} = \frac{2,046\pi^2 EI}{l^2} \quad (6.40)$$

A forma final desta deformada fica então:

$$y(x) = \frac{M_0}{P} \left[\frac{x}{l} - 1,02 \operatorname{sen} \left(4,4934 \frac{x}{l} \right) \right] \quad (6.41)$$

6.2.5 Resumo

Do estudo apresentado nos itens anteriores, organizamos um quadro resumo dos valores das cargas críticas de Euler para diferentes condições de apoio nas extremidades das barras.

Condição dos apoios	l_{fl}	Carga crítica
rótula/rótula	l	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$
engaste/engaste	$l/2$	$\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$
engaste/livre	$2l$	$\frac{0,25\pi^2 EI}{l^2}$
engaste/rótula	$0,7l$	$\frac{2,046\pi^2 EI}{l^2}$

O comprimento l_{fl} é denominado de comprimento de flambagem e é diferente para cada caso de condição de contorno. Podemos, então, usar a expressão genérica para a carga crítica dada por:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_{fl}^2}$$

Para cada caso utilizamos a mesma expressão para o cálculo da carga crítica, mudando apenas o comprimento de flambagem que depende das condições dos apoios extremos.

6.2.6 Hipérbole de Euler

No caso de barras sujeitas a esforço de compressão, além da verificação da máxima tensão de compressão, torna-se necessário verificar a tensão de acordo com a previsão de ocorrência da flambagem. Para tal, utilizamos, em regime elástico linear ($\sigma < \sigma_p$), a hipérbole de Euler.

Como a carga de Euler vale:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_{fl}^2}$$

podemos obter o valor da tensão no instante da flambagem (no regime da elasticidade linear):

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al_{fl}^2} \Rightarrow \sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{fl}^2} \quad (6.42)$$

onde $\lambda = \frac{l_{fl}}{\rho}$ é denominado *coeficiente de esbeltez* da peça, sendo $\rho^2 = \frac{I}{A}$ o raio de giração e A a área da seção transversal da barra.

A curva dos pontos $\sigma_{crit} \times \lambda$ descreve uma hipérbole denominada de Hipérbole de Euler, como mostrado na Fig. 6.8.

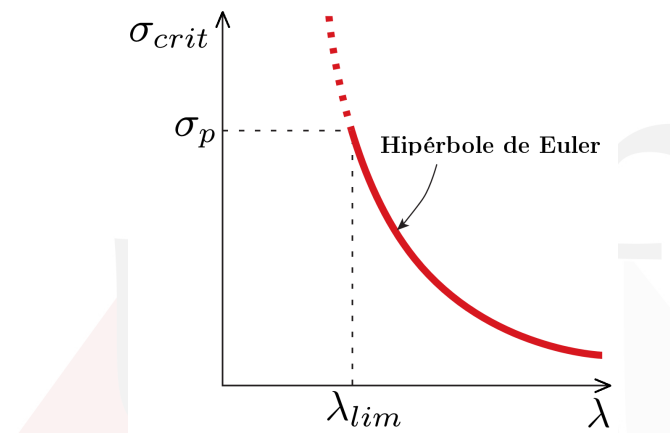


Figura 6.8: Hipérbole de Euler

6.3 Casos com Imperfeições Iniciais

6.3.1 Barras com Carga Excêntrica

Consideramos, em seguida, casos em que temos colunas imperfeitas, como acontece usualmente na prática. Inicialmente, consideremos uma barra sujeita a um esforço axial de compressão, em que a carga não é aplicada no baricentro da seção, acarretando uma excentricidade conforme mostramos na Fig. 6.9. A equação diferencial para este problema pode ser escrita a partir da determinação do momento fletor localizado a uma distância x do apoio.

Sendo:

$$M(x) = P(e + y) \quad (6.43)$$

Utilizando a definição usual de k^2 podemos escrever:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2(e + y) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 e \quad (6.44)$$

A solução da homogênea e a solução particular para esta equação diferencial são dadas por:

Solução homogênea:

$$y_h = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx$$

Solução particular:

$$y_p = -e$$

A solução completa desta equação fica então:

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx - e$$

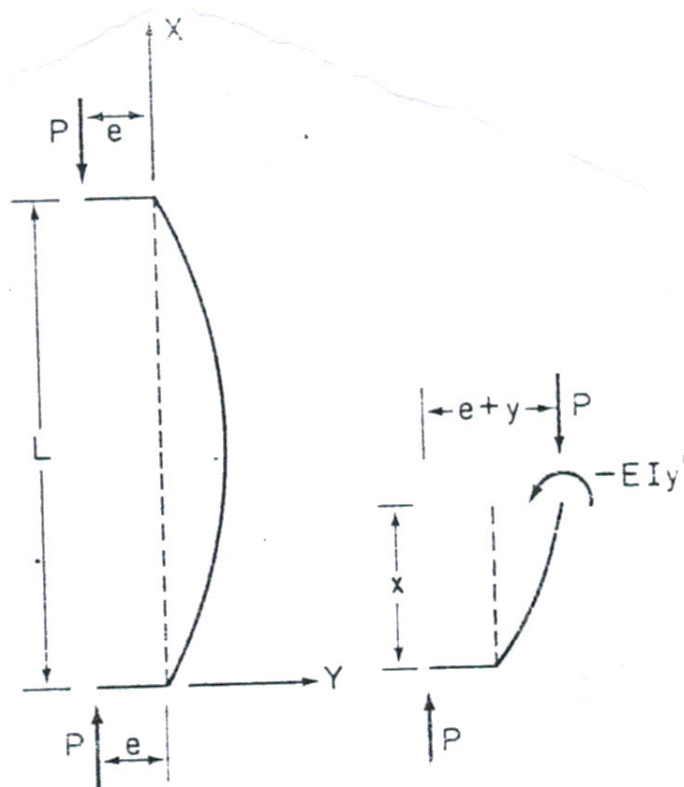


Figura 6.9: Caso com imperfeição - Carga Excêntrica

A partir das condições de contorno para o caso de barras bi-rotuladas, temos:

$$y = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \rightarrow C_2 = e$$

$$y = 0 \quad \text{em} \quad x = l \rightarrow C_1 = e \operatorname{tg} \frac{kl}{2}$$

A equação da linha elástica fica, então:

$$y(x) = e \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} \operatorname{sen} kx + \cos kx - 1 \right) \quad (6.45)$$

sendo, como nos casos anteriores:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Conhecendo-se a excentricidade e e a carga P é possível calcular $y(x)$ para $x = l/2$ (meio do vão), onde a deflexão é máxima:

$$y(l/2) = \delta_{max} = e \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} \operatorname{sen} \frac{kl}{2} + \cos \frac{kl}{2} - 1 \right)$$

$$y(l/2) = \delta_{max} = e \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}} \operatorname{sen} \frac{kl}{2} + \cos \frac{kl}{2} - 1 \right)$$

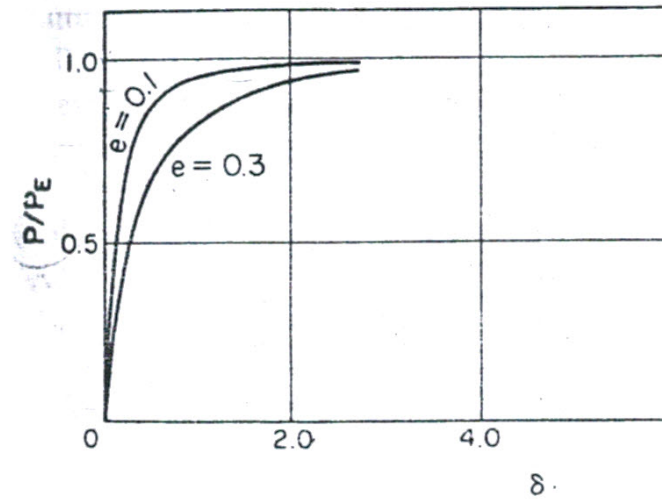
$$\delta_{max} = e \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}} + \cos \frac{kl}{2} - 1 \right)$$

$$\delta_{max} = e \left(\sec \frac{kl}{2} - 1 \right)$$

Substituindo-se o valor de k , temos que:

$$\delta_{max} = e \left\{ \sec \left\{ \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{crit}}} \right\} - 1 \right\} \quad (6.46)$$

O comportamento (Curva $P \times \delta$) neste caso, para cargas inferiores a carga crítica pode ser visto na Fig. 6.10.

Figura 6.10: Curva $P \times \delta$ - Carga Excêntrica

6.3.2 Máximo momento fletor - Fórmula secante

Para este caso em particular, podemos calcular o máximo momento fletor, que ocorre no meio do vão. De posse deste valor, é possível determinar a expressão denominada de “Fórmula da Secante”. O máximo momento fletor é, portanto, dado por:

$$M_{max} = M(x = l/2) = P(e + \delta_{max})$$

$$M_{max} = Pe \sec \frac{kl}{2}$$

A tensão máxima pode ser calculada como:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}}{W}$$

onde W é o módulo de resistência a flexão da seção transversal da barra, que é dado por:

$$W = \frac{I}{c}$$

sendo c é a distância da fibra mais solicitada à linha neutra da flexão pura.

Ficamos, então, com:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{W} \sec \frac{kl}{2}$$

Como o raio de giração é definido por:

$$\rho^2 = \frac{I}{A}$$

obtemos:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{\rho^2} \sec \frac{kl}{2} \right)$$

A partir do valor de k , podemos escrever então que:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{\rho^2} \sec \left(\frac{l}{2\rho} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (6.47)$$

que é a denominada fórmula secante para barras com carregamento excêntrico. O termo $\frac{ec}{\rho^2}$ é denominado *índice de excentricidade*. A Fig. 6.11 ilustra o comportamento $\sigma \times \lambda$ para diversos índices de excentricidade. Cabe ressaltar que, quando este índice é nulo, recaímos na Hipérbole de Euler (carregamentos axiais).

Se limitarmos a tensão máxima ao valor da tensão de escoamento (no caso de uma peça de aço, por exemplo), isto é, fazendo

$$\sigma_{max} = \sigma_e \quad \text{que ocorre quando} \quad P = P_e$$

obtemos, então:

$$\frac{P_e}{A} = \frac{\sigma_e}{1 + \frac{ec}{\rho^2} \sec \left(\frac{l}{2\rho} \sqrt{\frac{P_e}{EA}} \right)}$$

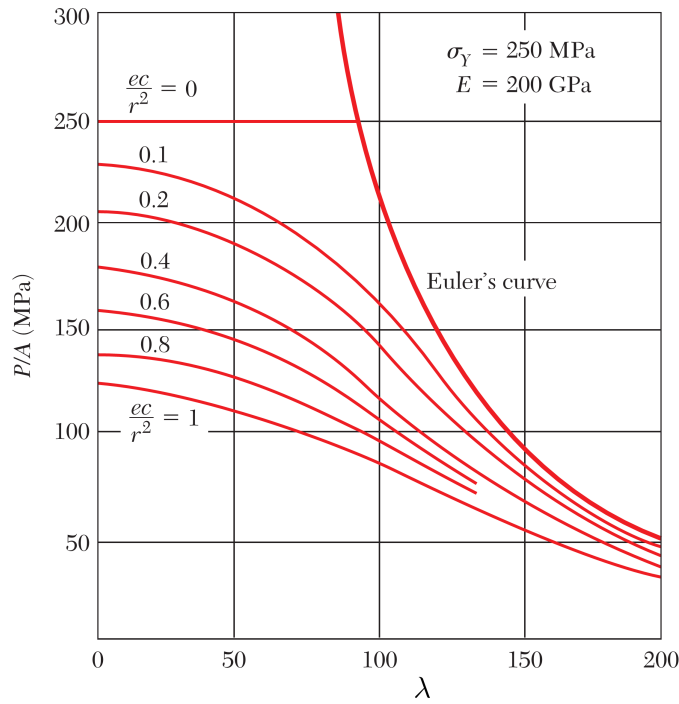


Figura 6.11: Curva $\sigma \times \lambda$ - Carga Excêntrica

Esta expressão pode ser utilizada para a determinação da máxima carga P_e que uma barra sujeita a compressão pode suportar. Por ser uma equação não-linear, torna-se necessária a aplicação de métodos numéricos, como por exemplo o Método de Newton-Raphson, para a sua solução. Outros algoritmos ou procedimentos iterativos podem também ser utilizados.

6.3.3 Colunas com curvatura inicial

Neste caso, consideramos a coluna inicialmente com uma pequena curvatura dada por uma função y_0 , lembrando que as extremidades da coluna são bi-rotuladas (ver Fig. 6.12).

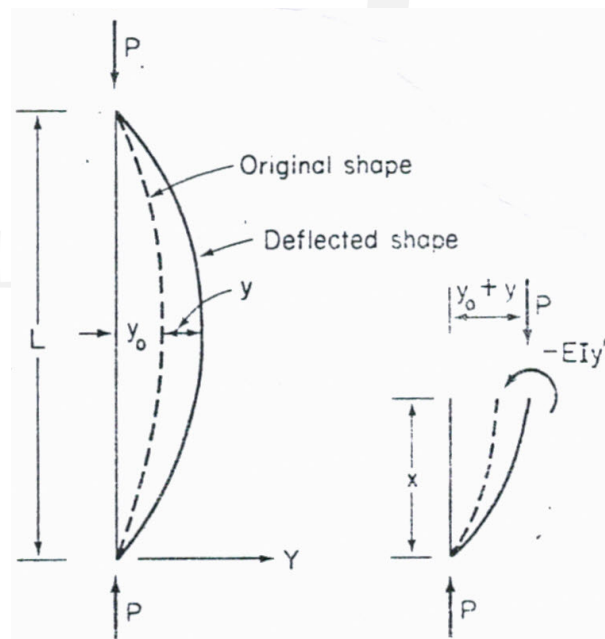


Figura 6.12: Caso com imperfeição - Colunas com curvatura inicial

A equação diferencial usada para determinar a equação da linha elástica após aplicada uma carga de compressão P será:

$$EIy'' + P(y_0 + y) = 0$$

Admitindo, como exemplo, que $y_0 = a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$ (valor arbitrário da curvatura inicial no caso aqui tratado), a solução

desta equação é dada por:

$$y = \frac{\alpha}{1 - \alpha} a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

sendo $\alpha = \frac{P}{P_{crit}}$,

$$y_{total} = y_0 + y = \frac{a}{1 - \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$$

O máximo valor de δ que ocorre quando $x = l/2$ é dado por:

$$y(x = \frac{l}{2}) = \delta = \frac{a}{1 - \frac{P}{P_{crit}}}$$

A Fig. 6.13 ilustra as curvas $P \times \delta$ obtidas para diferentes curvaturas iniciais (diferentes valores da amplitude da curvatura inicial dadas pelo valor de a).

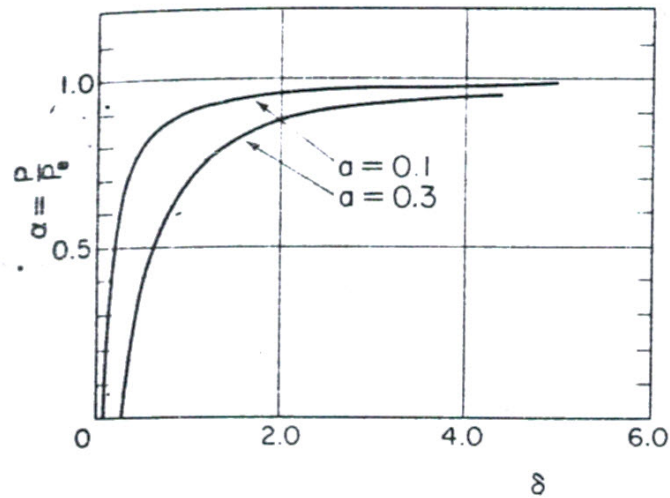


Figura 6.13: Curva $P/P_{crit} \times \delta/l$ - Colunas com curvatura inicial

6.4 Observação Final

Outros tipos de flambagem podem ocorrer em estruturas de barras, conforme foi mostrado no início deste capítulo: flambagem lateral e outros. Assim é que barras sujeitas apenas a flexão podem assumir configuração de equilíbrio torcida. Para peças contínuas onde não sejam válidas as hipóteses de deformação usuais em barras devemos trabalhar com as equações diferenciais de equilíbrio em termos das tensões e dos deslocamentos. Este estudo é o que constitui o que usualmente se denomina “Análise não linear geométrica” sendo que neste caso precisamos incluir novas definições das deformações que passam a depender de forma não-linear com os deslocamentos. Novas medidas de deformação e de tensão são necessárias para a realização deste estudo.



UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Bibliografia recomendada

A seguir, algumas indicações de bibliografia para complementação dos estudos e do conteúdo apresentado nesta apostila:

- BEER, Ferdinand, JOHNSTON, E. Russell. Resistência dos Materiais. 5a edição. Mc Graw Hill.
- GERE, James M e GOODNO, Barry J. Mecânica dos Materiais. 7a edição. Editora Cengage Learning.
- TIMOSHENKO, Stephen, GERE, James. Mecânica dos Sólidos; vols. 1 e 2. LTC editora.
- POPOV, Egor Paul. Resistência dos Materiais. PHB editora.
- HIBBELER, R.C. Resistência dos Materiais. 7a edição. Pearson.
- UGURAL, Ansel C., Mecânica dos Materiais. 1a edição. LTC.





UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Capítulo 7

Conteúdos extras

7.1 Apêndice - Revisão de Geometria das Massas

7.1.1 Rotação de eixos

Dados os momentos e produto de inércia com relação ao par de eixos $\{x, y\}$: I_x, I_y, I_{xy} , e o ângulo α obter I_u, I_v e I_{uv} - momentos e produto de inércia com relação ao par de eixos $\{u, v\}$, a partir das definições de momentos de inércia:

$$I_x = \int_S y^2 dS \quad I_y = \int_S x^2 dS \quad I_{xy} = \int_S xy dS$$

$$I_u = \int_S v^2 dS \quad I_v = \int_S u^2 dS \quad I_{uv} = \int_S uv dS$$

Relação entre os pares de coordenadas $\{x, y\}$ e $\{u, v\}$:

$$\begin{aligned} u &= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ v &= y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} I_u &= \int_S (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)^2 dS \\ I_v &= \int_S (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 dS \\ I_{uv} &= \int_S (y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha)(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) dS \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \operatorname{sen}^2 \alpha - I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{7.3}$$

$$I_v = I_y \cos^2 \alpha + I_x \operatorname{sen}^2 \alpha + I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{7.4}$$

$$I_{uv} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{7.5}$$

como:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

obtemos:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{7.6}$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{7.7}$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \tag{7.8}$$

7.1.2 Eixos principais de inércia

I_u : Definição do máximo, mínimo.

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = 0 = (I_y - I_x) \operatorname{sen}2\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha \quad (7.9)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (7.10)$$

Usando(20):

$$\operatorname{ sinal de } \left\{ \frac{d^2 I_u}{d\alpha^2} \right\} = \operatorname{ sinal de } \left\{ \frac{I_{xy}}{\operatorname{sen}2\alpha} \right\} > 0 \text{ para um } \alpha < 0 \text{ para outro } \alpha. \quad (7.11)$$

7.1.3 Momentos principais de inércia

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (7.12)$$

7.1.4 Roteiro

1. Escolher um sistema de eixos arbitrário e conveniente para a determinação do baricentro e inércias da seção.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i S_i}{\sum_{i=1}^n S_i}$$

2. Dividir a seção em partes cujos centros de gravidade, momentos de inércia e produto de inércia com relação a eixos locais paralelos ao par de eixos do item anterior sejam conhecidos.

3. Determinar a posição do baricentro da seção composta por estas partes a partir da escolha de um par de eixos arbitrário escolhido convenientemente.

4. Utilizar o Teorema de Steiner para calcular os momentos de inércia e produto de inércia da seção inteira a partir das somas das contribuições de cada uma de suas partes.

$$I_{\bar{y}} = \sum [I_{\bar{y}_i} + S_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2] \quad (7.13)$$

$$I_{\bar{x}} = \sum [I_{\bar{x}_i} + S_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2] \quad (7.14)$$

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \sum [I_{\bar{x}_i\bar{y}_i} + S_i(\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y})] \quad (7.15)$$

5. Determinar a posição dos eixos principais de inércia da seção e os valores dos momentos principais de inércia.

$$\operatorname{tg}2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (7.16)$$

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{2} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \left\{ \frac{I_{xy}}{\operatorname{sen}2\theta_1} \right\} < 0, & \quad \theta_1 \Rightarrow I_1 \text{ e } \theta_2 \Rightarrow I_2 \\ \text{Caso contrário} & \quad \theta_1 \Rightarrow I_2 \text{ e } \theta_2 \Rightarrow I_1 \end{aligned}$$

7.2 Apêndices - Capítulo 1 - Teoria da Flexão Oblíqua

7.2.1 Tensões Normais na Flexão Oblíqua

Cálculo com M_n

Na Fig. 7.1 apresentamos a situação na seção de uma viga que nos permite descrever como se estabelece o equilíbrio interno existente entre as tensões normais no plano da seção e os esforços atuantes na mesma, a partir da definição da condição de solitação expressa pelas Eqs. 1.1 e 1.2.

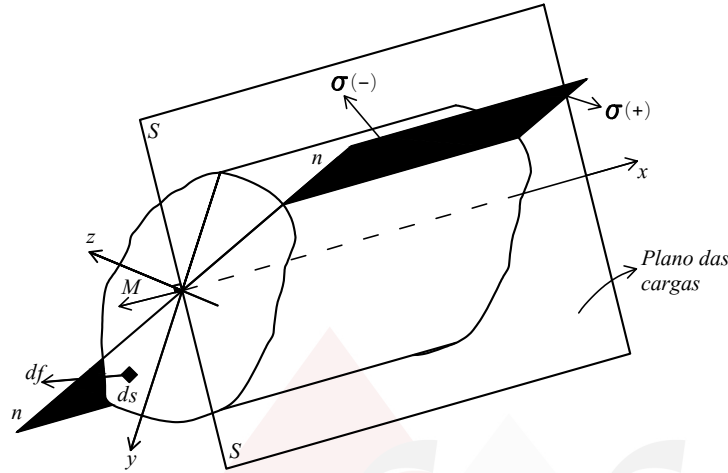


Figura 7.1: Situação no plano da seção

Este equilíbrio pode ser descrito pelas equações de equivalência estática, mostradas a seguir:

$$N = \int_S df = \int_S \sigma_x dS \quad (7.18)$$

$$M_n = \int_S udf = \int_S u\sigma_x dS \quad (7.19)$$

$$M_s = \int_S vdf = \int_S v\sigma_x dS \quad (7.20)$$

1. O esforço normal na seção, neste caso, nulo, pode ser obtido pela soma dos elementos de força em cada elemento de área da seção, isto é:

$$df = \sigma_x dS = E\varepsilon_x dS = \frac{E}{\rho} u dS \Rightarrow \frac{\sigma_x}{u} = \frac{E}{\rho}$$

$$N = \int_S df = \int_S \frac{E}{\rho} u dS = \frac{E}{\rho} \int_S u dS = 0$$

que nos permite concluir que:

$$\int_S u dS = M_{S_n} = \bar{u}S = 0 \Rightarrow \bar{u} = 0$$

Nesta última expressão, M_{S_n} é o momento estático da área da seção em relação à linha neutra e \bar{u} é a distância do centro de massa (área) S à linha neutra. Isto nos permite concluir que, de fato, tal como tomado como hipótese, esta linha é baricêntrica, ou seja, nn passa pelo centroide da seção (G).

2. O momento fletor M_n (em relação à linha neutra) das tensões normais atuantes é igual à componente (projeção) do momento fletor solitante nesta linha, isto é:

$$M_n = \int_S udf = \int_S u \frac{E}{\rho} u dS = \frac{E}{\rho} \int_S u^2 dS$$

$$M_n = \frac{EI_n}{\rho} \Rightarrow \frac{M_n}{I_n} = \frac{E}{\rho}$$

onde consideramos E e ρ constantes na seção e que $\int_S u^2 dS = I_n$ (por definição). Mas, como:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_x}{u}$$

temos então que:

$$\frac{M_n}{I_n} = \frac{\sigma_x}{u}$$

e, conseqüentemente:

$$\sigma_x = \frac{M_n u}{I_n} \quad (7.21)$$

Da Eq. 7.21, constatamos que σ_x é linear em relação a u , uma vez que M_n e I_n são constantes na seção e não dependem nem de u , nem de v . Além disso, pode-se constatar que a distribuição de σ_x no campo da seção é um plano (seja nas coordenadas u e v ou quaisquer outros pares de eixos escolhidos sobre a seção).

3. O momento fletor M_{ss} (em relação ao eixo de solicação) das tensões normais atuantes é nulo, isto é:

$$M_{ss} = \int_S v df = \int_S v \frac{E}{\rho} u dS = \frac{E}{\rho} \int_S v u dS = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho} I_{ns} &= 0 \\ I_{ns} &= 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

Neste caso, I_{ns} é o produto de inércia em relação aos eixos nn e ss (que não são perpendiculares!). Isto significa que nn e ss são eixos conjugados da elipse central de inércia da seção. Conhecido o momento fletor e, conseqüentemente, o eixo ss na seção, podemos determinar a posição da linha neutra nn a partir da Eq. 7.22. Além disso, a flexão oblíqua pode ser, então, tratada de modo similar ao caso de uma flexão reta em relação à nn utilizando-se a Eq. 7.21 para o cálculo das tensões normais.

A partir da Eq. 7.21 é possível calcular as tensões normais em qualquer ponto da seção e determinar onde ocorrem as tensões máximas na peça - bem como os seus respectivos valores - bastando, para isto, determinar os valores extremos de u .

Entretanto, diferentemente do que ocorre na flexão reta, precisamos calcular, inicialmente, a posição de nn para, em seguida, determinar o momento de inércia da seção em relação a este eixo neutro (I_n), bem como o valor de M_n , que é a projeção do momento sobre nn .

Na seção a seguir apresentamos como determinar a posição da linha neutra a partir do conhecimento dos eixos principais de inércia da seção e do eixo de solicação, que é determinado pelo carregamento.

Posição relativa: Eixo de solicação \times Linha Neutra

A Eq. 7.22 deduzida anteriormente permite-nos identificar a linha neutra e o eixo de solicação como eixos conjugados da elipse central de inércia da seção. Desta forma, partindo-se de que $I_{ns} = 0$, podemos demonstrar que, conhecendo-se y e z - **eixos principais de inércia da seção** - a posição de nn e ss em relação aos eixos principais de inércia obedece à seguinte expressão:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y}$$

Da Fig. 7.2, onde os ângulos α e β , indicam, respectivamente, as posições do eixo de solicação ss e da linha neutra nn em relação ao eixo z principal, podemos obter as seguintes relações:

$$v = y \cos \alpha - z \operatorname{sen} \alpha \quad (7.23)$$

$$u = z \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta \quad (7.24)$$

Sabemos que:

$$I_{ns} = \int_S v u dS \Rightarrow \text{Produto de inércia em relação aos eixos } nn \text{ e } ss$$

daí:

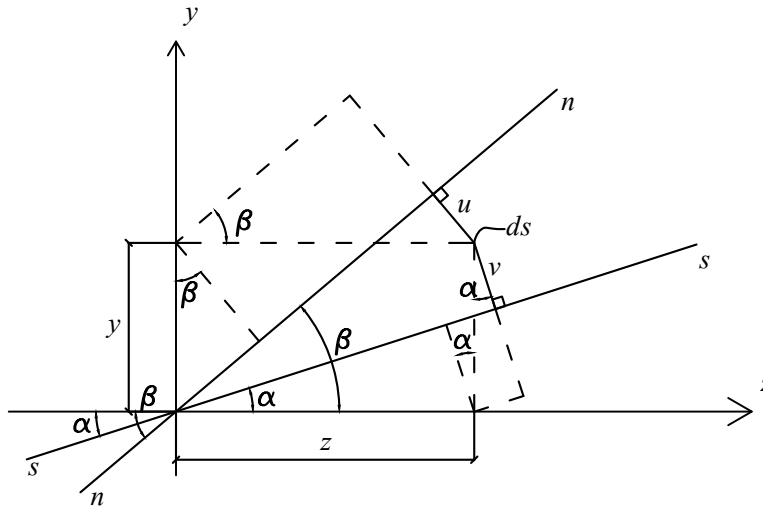
$$I_{ns} = \int (z \operatorname{sen} \beta - y \cos \beta)(y \cos \alpha - z \operatorname{sen} \alpha) dS$$

ou:

$$I_{ns} = \int (zy \operatorname{sen} \beta \cos \alpha - z^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha - y^2 \cos \beta \cos \alpha + zy \cos \beta \operatorname{sen} \alpha) dS$$

Como z e y são eixos principais de inércia, temos que $I_{zy} = 0$. Assim:

$$I_{ns} = -I_z \cos \alpha \cos \beta - I_y \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Figura 7.2: Relação entre coordenadas u, v e y, z

Sendo $I_{ns} = 0$ (vide Eq. 7.22), podemos concluir que:

$$\frac{\text{sen} \alpha \text{ sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = -\frac{I_z}{I_y}$$

que resulta imediatamente em:

$$\boxed{\text{tg} \alpha \text{ tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y}} \quad (7.25)$$

Flexão reta como caso particular da flexão oblíqua

As expressões que determinam a posição da linha neutra e o cálculo das tensões normais a partir do eixo de solicação ss nos possibilitam entender a flexão reta como um caso particular da flexão oblíqua. Assim, sendo y e z eixos principais de inércia, temos dois possíveis casos particulares:

a) Quando $M = M_z$, então o eixo y será o eixo de solicação (ss) e, neste caso, $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \beta = 0$, o que nos leva a concluir que o eixo z é a linha neutra nn e que

$$M_n = M_z, \quad I_n = I_z \Rightarrow \sigma_x = \frac{M_n u}{I_n} = \frac{M_z y}{I_z}$$

b) Quando $M = M_y$, então o eixo z será o eixo de solicação (ss) e, neste caso, $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = \pi/2$, o que nos leva a concluir que o eixo y é a linha neutra nn e que

$$M_n = M_y, \quad I_n = I_y \Rightarrow |\sigma_x| = \frac{M_n u}{I_n} = \frac{M_y z}{I_y}$$

Tensões na Flexão Oblíqua com eixos principais

Se \bar{y} e \bar{z} são eixos principais de inércia, temos $I_{zy} = 0$ e a Eq. 1.7 se reescreve como:

$$\sigma_x = \frac{I_y M_z y - I_z M_y z}{I_z I_y}$$

ou

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z} \quad (7.26)$$

A Fig. 7.3 ilustra como a tensão na flexão oblíqua pode ser, então, considerada como uma superposição dos casos particulares de duas flexões retas, onde $M = M_y$ e $M = M_z$, desde que y e z sejam eixos principais de inércia. Deve-se observar que a parcela da tensão normal devida a M_y na Eq. 7.26 tem sinal negativo, pois quando $M_y > 0$, nos pontos onde $z > 0$ esta parcela de σ_x deve ser negativa (o que representa corretamente o que ocorre na seção).

Diagrama de Tensões

O diagrama de tensões na flexão oblíqua pode ser determinado com o conhecimento da posição da linha neutra conforme mostra a Fig. 7.4.

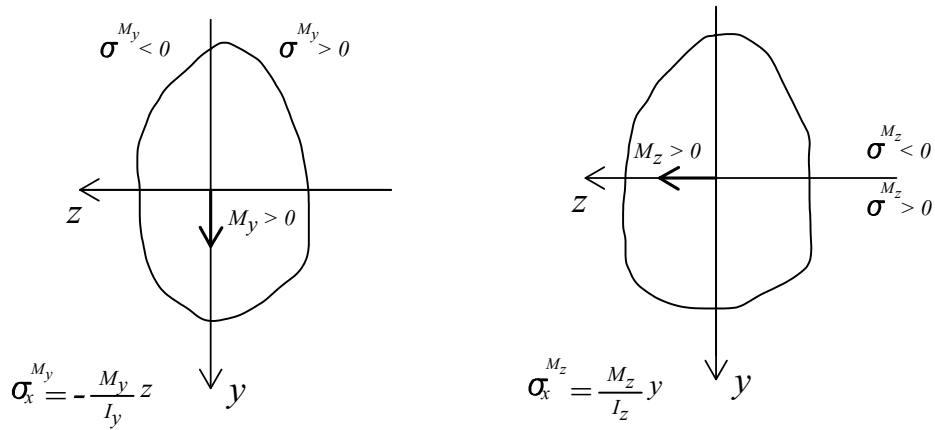


Figura 7.3: Semelhança de expressões entre flexão reta e oblíqua

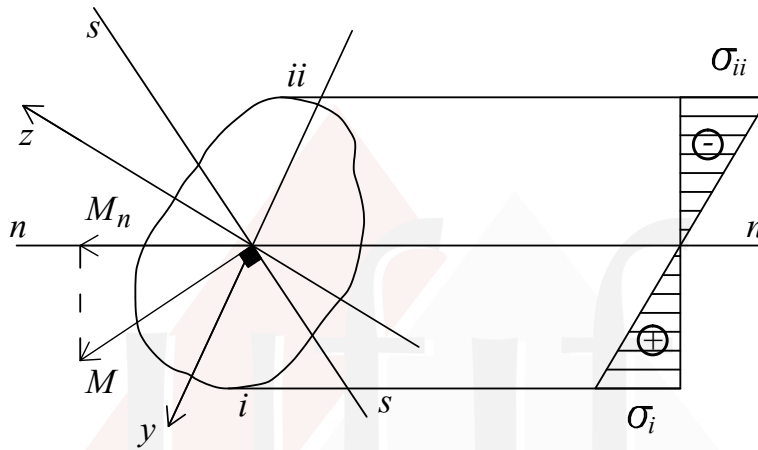


Figura 7.4: Aspecto do diagrama de tensões

Verificação da Estabilidade

De modo similar ao que ocorre na flexão reta, a verificação da estabilidade consiste em comparar e assegurar que as máximas tensões normais atuantes sejam menores ou iguais aos valores admissíveis - $\bar{\sigma}_t$ e $\bar{\sigma}_c$ - para o material que constitui a estrutura em análise. Desta forma, definindo-se u_i e u_{ii} como sendo as distâncias dos pontos mais solicitados da seção em relação à linha neutra, temos que satisfazer às seguintes restrições:

$$\sigma_i = \frac{M_n u_i}{I_n} \leq \bar{\sigma}_t \rightarrow \text{tração} \quad \text{e} \quad |\sigma_{ii}| = \left| \frac{M_n u_{ii}}{I_n} \right| \leq |\bar{\sigma}_c| \rightarrow \text{compressão} \quad (7.27)$$

Entretanto, diferentemente do que ocorre na flexão reta, no caso da flexão oblíqua é necessário calcular, primeiramente, a posição da linha neutra para, em seguida, identificar, visual ou analiticamente, os pontos da seção mais distantes a ela (onde ocorrem as tensões extremas - máxima e mínima). Observe que para aplicar as relações acima, não utilizamos nenhum sinal, ficando sua utilização dependente da identificação prévia de qual(is) o(s) ponto(s) onde ocorre(m) a(s) máxima(s) tensão(ões) de tração e de compressão.

Máximo Momento Fletor

A partir da definição da posição da linha neutra e, conseqüentemente, das fibras mais solicitadas através de suas distâncias a nn , podemos calcular a máxima capacidade portante, isto é, o máximo momento fletor (M_{max}) a que uma seção pode ser submetida:

$$M_{max_i} = \frac{\bar{\sigma}_t I_n}{u_i} \quad \text{e} \quad |M_{max_{ii}}| = \left| \frac{\bar{\sigma}_c I_n}{u_{ii}} \right| \quad (7.28)$$

onde M_{max} é o menor dos dois valores M_{max_i} e $M_{max_{ii}}$, sendo $\bar{\sigma}_t$ e $\bar{\sigma}_c$ os valores extremos do diagrama de tensões (ou valores extremos de tensões atuantes na seção).

7.2.2 Solução alternativa para o exemplo 1

Cálculo das tensões pela equação $\sigma_x = \frac{M_n u}{I_n}$

- Cálculo de M_n e I_n :

$M_n \Rightarrow$ projeção de M sobre a LN.

$$M_n = M \cos(-73,02^\circ + 20^\circ) = 150 \cos(-53,02^\circ) = 90,23 \text{ kNm} = 90,23 \times 10^3 \times 10^3 \text{ Nmm}$$

$I_n \Rightarrow$ momento de inércia em relação a LN.

$$I_n = I_z \cos^2 \beta + I_y \sin^2 \beta = 3600 \times 10^6 \cos^2(-73,02^\circ) + 400 \times 10^6 \sin^2(-73,02^\circ) = 672,92 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Podemos calcular as distâncias dos pontos extremos da seção à linha neutra pela equação da distância de um ponto a uma reta. A equação da linha neutra neste caso é dada por:

$$y = \operatorname{tg}(-73,02^\circ)z$$

ou:

$$y + 3,275z = 0$$

A expressão que determina a distância d de um ponto de coordenadas (y_D, z_D) a uma reta cuja equação é $ay + bz + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ay_D + bz_D + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Assim, teríamos, neste caso, para o ponto A ($y = -300; z = 100$):

$$u_A = \left| \frac{-300 + 3,275(100)}{\sqrt{1^2 + 3,275^2}} \right| = 8,03 \text{ mm}$$

e para o ponto B ($y = -300; z = -100$):

$$u_B = \left| \frac{-300 + 3,275(-100)}{\sqrt{1^2 + 3,275^2}} \right| = 183,25 \text{ mm}$$

Cálculo das tensões normais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_A = \frac{M_n u_A}{I_n} = \frac{90,23 \times 10^6 \times 8,03}{672,92 \times 10^6} = 1,08 \text{ MPa} \\ \sigma_B = -\frac{M_n u_B}{I_n} = -\frac{90,23 \times 10^6 \times 183,25}{672,92 \times 10^6} = -24,57 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\sigma_C = -\sigma_A = -1,08 \text{ MPa} \quad \sigma_D = -\sigma_B = 24,57 \text{ MPa}$$

que é o mesmo resultado obtido na seção 1.5.2.

7.2.3 Soluções alternativas para o exemplo 2

Cálculo das tensões máximas utilizando os eixos principais de inércia

- Determinação da posição dos eixos principais de inércia:

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{-2I_{z\bar{y}}}{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}}$$

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{-2(6,08 \times 10^8)}{17,395 \times 10^8 - 6,27 \times 10^8} = -1,093$$

$$2\theta = -47,54^\circ \Rightarrow \theta = -23,77^\circ$$

Assim, a posição dos eixos principais de inércia é dada pelos ângulos: $\theta_1 = -23,77^\circ$ e $\theta_2 = 90^\circ - 23,77^\circ = 66,23^\circ$.

- Cálculo dos momentos principais de inércia I_1 e I_2 :

Utilizando as expressões:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}$$

onde fizemos $I_z = I_{\bar{z}}$, $I_y = I_{\bar{y}}$ e $I_{zy} = I_{z\bar{y}}$, obtemos:

$$I_1 = 2007 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = 359,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Utilizando a expressão:

$$I_u = I_z \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - I_{zy} \operatorname{sen}2\theta$$

com $\theta_1 = -23,77^\circ$, obtemos $I_u = 2007 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Assim, identificamos os eixos principais de inércia da seção, passando a denominar a direção 1 como z .

A Fig. 7.5 ilustra as posições desses eixos principais de inércia em relação aos eixos baricêntricos, bem como as posições dos novos eixos y e z a serem usados na determinação da posição da linha neutra e no cálculo das tensões normais.

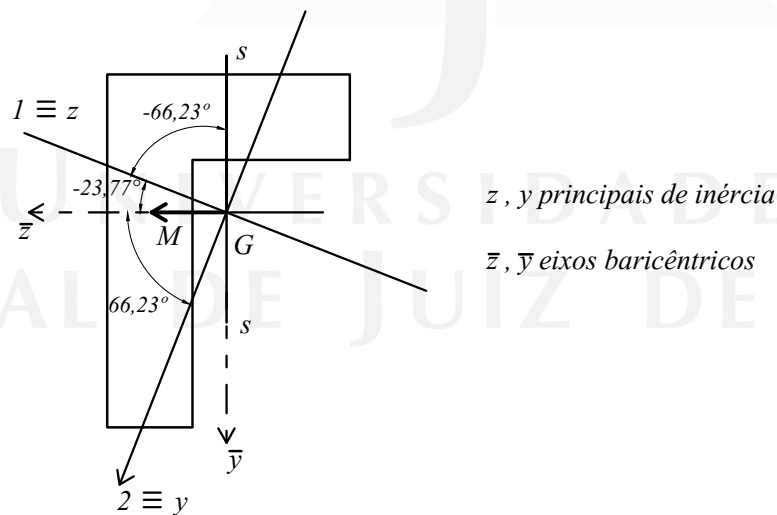


Figura 7.5: Posição dos eixos principais de inércia do perfil

- Determinação da posição da LN:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -\frac{I_z}{I_y}$$

$$\operatorname{tg}(-66,23^\circ) \operatorname{tg}\beta = -\frac{2007 \times 10^6}{359,2 \times 10^6} \Rightarrow \beta = 67,88^\circ$$

- Cálculo de M_y e M_z (projeções de M sobre os eixos principais y e z):

$$M_z = M \operatorname{sen}(66,23^\circ) = 45,76 \text{ kNm}$$

$$M_y = M \operatorname{cos}(66,23^\circ) = 20,15 \text{ kNm}$$

- Cálculo das tensões máximas:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

De acordo com a Fig. 7.6, as tensões máximas ocorrerão nos pontos $A(-198,68; 98,68)$ e $B(401,32; 48,68)$ (cujas coordenadas estão definidas em relação aos eixos baricêntricos \bar{y} e \bar{z} , respectivamente), pois estes pontos são aqueles mais distantes em relação à LN. É importante ressaltar que o ângulo de $44,11^\circ$ marcado nesta figura **não** é o ângulo β .

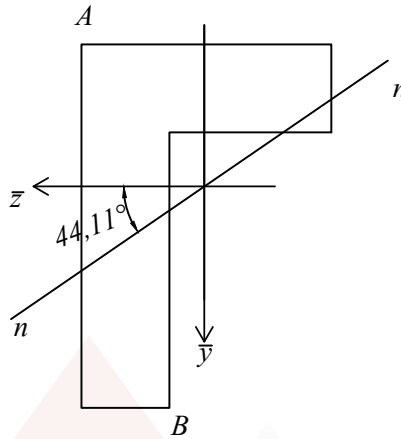


Figura 7.6: Posição da LN e coordenadas dos pontos mais distantes

Para o cálculo de y_A, z_A e y_B, z_B em relação aos eixos principais y e z , podemos utilizar as expressões da determinação de distância de ponto a reta como mostrado a seguir, onde obtemos as equações dos eixos principais (eixo y e eixo z) como as retas $z = 0$ e $y = 0$ no sistema $\{\bar{z}, \bar{y}\}$.

- Coordenadas de A e B com relação ao sistema $\{\bar{z}, \bar{y}\}$:

$$\begin{aligned} A : z_A = 98,68 \text{ mm} & \quad y_A = -600 + 401,32 = -198,68 \text{ mm} \\ B : z_B = 48,68 \text{ mm} & \quad y_B = 401,32 \text{ mm} \end{aligned}$$

Logo:

$$\text{Reta } z : \text{tg}(-23,77^\circ) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \Rightarrow \bar{y} + 0,44\bar{z} = 0$$

$$\text{Reta } y : \text{tg}(66,23^\circ) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \Rightarrow \bar{y} - 2,27\bar{z} = 0$$

Distância a $z \Rightarrow$ coordenada y referente aos eixos principais:

$$A : \left| \frac{0,44(98,68) - 198,68}{\sqrt{1^2 + 0,44^2}} \right| = 142,11 \Rightarrow y_A = -142,11 \text{ mm}$$

$$B : \left| \frac{0,44(48,68) + 401,32}{\sqrt{1^2 + 0,44^2}} \right| = 386,94 \Rightarrow y_B = 386,94 \text{ mm}$$

Distância a $y \Rightarrow$ coordenada z referente aos eixos principais:

$$A : \left| \frac{-2,27(98,68) - 198,68}{\sqrt{1^2 + 2,27^2}} \right| = 170,40 \Rightarrow z_A = 170,40 \text{ mm}$$

$$B : \left| \frac{-2,27(48,68) + 401,32}{\sqrt{1^2 + 2,27^2}} \right| = 117,24 \Rightarrow z_B = -117,24 \text{ mm}$$

Logo, as tensões máximas serão:

$$\sigma_A = \frac{45,76 \times 10^6(-142,11)}{2007 \times 10^6} - \frac{20,15 \times 10^6(170,40)}{359,2 \times 10^6} \Rightarrow \sigma_A = -12,80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 0,0228(386,94) - 0,0561(-117,24) \Rightarrow \sigma_B = 15,40 \text{ MPa}$$

Cálculo das tensões pela projeção de M sobre a LN

De acordo com a Fig. 7.6, temos que:

$$M_n = M \cos \underbrace{(44, 11^\circ)}_{67,88^\circ - 23,77^\circ} = 35,90 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

$$I_n = I_z \cos^2(44, 11^\circ) + I_y \sin^2(44, 11^\circ) - I_{zy} \sin(2 \cdot 44, 11^\circ) \Rightarrow I_n = 592,82 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

ou, utilizando os momentos principais de inércia e o ângulo β determinado anteriormente:

$$I_n = I_1 \cos^2(67,88^\circ) + I_2 \sin^2(67,88^\circ) \Rightarrow I_n = 592,82 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

A equação de nn , referenciada aos eixos baricêntricos é dada por:

$$nn \Rightarrow \bar{y} - 0,97\bar{z} = 0$$

As coordenadas do ponto A são: $z_A = 98,68 \text{ mm}$ e $y_A = -198,68 \text{ mm}$

$$u_A = \left| \frac{-198,68 - 0,97(98,68)}{\sqrt{1^2 + 0,97^2}} \right| = 211,32 \text{ mm}$$

As coordenadas do ponto B são: $z_B = 48,68 \text{ mm}$ e $y_B = 401,32 \text{ mm}$:

$$u_B = \left| \frac{401,32 - 0,97(48,68)}{\sqrt{1^2 + 0,97^2}} \right| = 254,17 \text{ mm}$$

Cálculo das tensões:

$$\sigma_A = \frac{M_n u_A}{I_n} = \frac{35,90 \times 10^6 (211,32)}{592,82 \times 10^6} \Rightarrow \sigma_A = -12,80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{M_n u_B}{I_n} = \frac{35,90 \times 10^6 (254,17)}{592,82 \times 10^6} \Rightarrow \sigma_B = 15,40 \text{ MPa}$$

7.2.4 Soluções alternativas para o exemplo 3

Cálculo das tensões máximas utilizando os eixos principais de inércia

- Momentos principais de inércia:

$$I_1 = \frac{I_{\bar{z}} + I_{\bar{y}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}})^2 + 4I_{\bar{z}\bar{y}}^2} = 6.626.091 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{I_{\bar{z}} + I_{\bar{y}}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}})^2 + 4I_{\bar{z}\bar{y}}^2} = 807.508 \text{ mm}^4$$

- Determinação da posição dos eixos principais de inércia:

$$\text{tg}2\theta = -\frac{2I_{\bar{z}\bar{y}}}{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}} = \frac{-2(-2.872.320)}{4.179.136 - 3.254.464}$$

$$\theta_1 = 40,43^\circ \therefore \theta_2 = 130,43^\circ$$

Uma maneira alternativa àquela apresentada no Exemplo 2 de se verificar que $\theta_1 \Rightarrow I_1$ e, conseqüentemente, $\theta_2 \Rightarrow I_2$, pode ser feita a partir da expressão:

$$\text{Se } \left\{ \frac{I_{\bar{z}\bar{y}}}{\text{sen}2\theta_1} \right\} < 0, \quad \theta_1 \Rightarrow I_1 \text{ e } \theta_2 \Rightarrow I_2$$

Caso contrário $\theta_1 \Rightarrow I_2$ e $\theta_2 \Rightarrow I_1$

Portanto, para este exemplo, tem-se que $\theta_1 \Rightarrow I_1$ e que $\theta_2 \Rightarrow I_2$ (verifique!). Assim, definimos $I_z \equiv I_1$ e $I_y \equiv I_2$.

Decomposição dos momentos segundo os eixos principais de inércia, segundo a Fig. 7.7:

$$M_z \equiv M_1 = M \cos(40,43^\circ) = 1.141.798 \text{ Nmm}$$

$$M_y \equiv M_2 = -M \text{sen}(40,43^\circ) = -972.778 \text{ Nmm}$$

- Distância dos pontos mais solicitados a LN:

Uma maneira alternativa de se obter as coordenadas do ponto *A* em relação aos eixos principais de inércia pode ser feita a partir da mudança de coordenadas, utilizando o ângulo de rotação (θ) entre os eixos:

$$y = \bar{y} \cos \theta - \bar{z} \text{sen} \theta \quad (7.29)$$

$$z = \bar{y} \text{sen} \theta + \bar{z} \cos \theta \quad (7.30)$$

onde \bar{y} e \bar{z} são as coordenadas do ponto segundo os eixos baricêntricos e y e z as coordenadas referidas aos eixos principais de inércia. Assim,

$$y = -50 \cos(40,43^\circ) - 74 \text{sen}(40,43^\circ) = -86,05 \text{ mm}$$

$$z = -50 \text{sen}(40,43^\circ) + 74 \cos(40,43^\circ) = 23,90 \text{ mm}$$

- Cálculo das tensões:

$$\sigma_A = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_A = \frac{1.141.798 \times (-86,05)}{6.626.091} - \frac{(-972.778) \times 23,90}{807.508} = 13,97 \text{ MPa}$$

- Posição da linha neutra:

$$\text{tg} \alpha \text{tg} \beta = -\frac{I_1}{I_2}$$

$$\text{tg} \underbrace{(49,57^\circ)}_{90^\circ - 40,43^\circ} \text{tg} \beta = -\frac{6.626.091}{807.508}$$

$$\beta = -81,86^\circ$$

A Fig. 7.7 ilustra a posição dos eixos principais de inércia, bem como a posição da linha neutra.

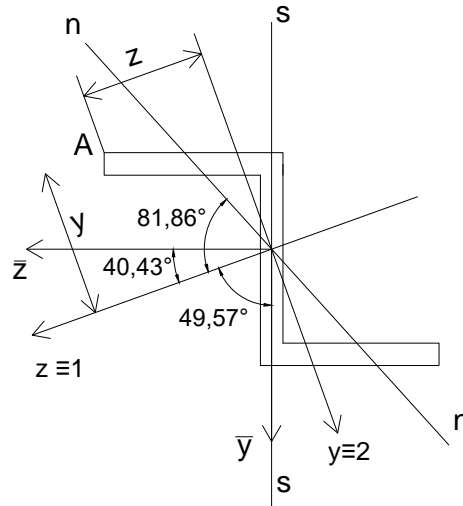


Figura 7.7: Coordenadas dos pontos mais distantes da LN

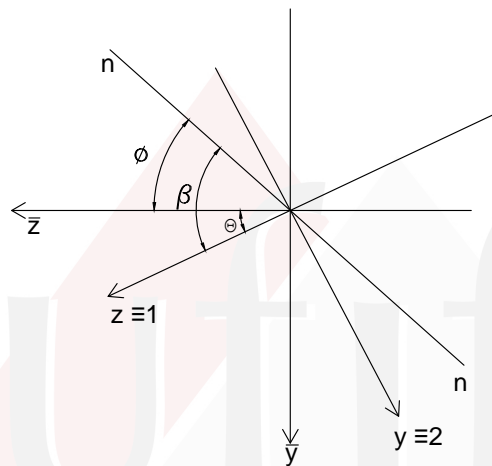


Figura 7.8: Posição dos eixos

Cálculo das tensões pela projeção de M sobre a LN

Determinação do ângulo formado entre o eixo z principal e nn :

$$\phi = \beta - \theta = -81,86^\circ - (-40,43^\circ) = -41,43^\circ$$

- Projeção de M sobre nn :

$$M_n = M_0 \cos \phi = 1.124.647 \text{ Nmm}$$

- Cálculo do momento de inércia em relação a nn :

$$I_n = I_1 \cos^2 \beta + I_2 \sin^2 \beta$$

$$I_n = 6.626.091 \cos^2(-81,86^\circ) + 807.508 \sin^2(-81,86^\circ)$$

$$I_n = 924.161 \text{ mm}^4$$

- As coordenadas do ponto A em relação aos eixos baricêntricos são: $z_A = 74 \text{ mm}$ e $y_A = -50 \text{ mm}$

$$u_A = \left| \frac{-50 + 0,883(74)}{\sqrt{1^2 + 0,883^2}} \right| = 11,50 \text{ mm}$$

- Cálculo da tensão normal:

$$\sigma_A = \frac{M_n \cdot u}{I_n} = \frac{1.124.647 \times 11,50}{924.161} \approx 13,97 \text{ MPa}$$

7.3 Apêndices - Capítulo 2 - Teoria da Flexão Composta

7.3.1 Paralelismo entre as LN's da Flexão Oblíqua e da Flexão Composta

Uma vez determinada a equação da linha neutra da flexão composta, podemos constatar seu paralelismo com a linha neutra da flexão oblíqua a esta associada.

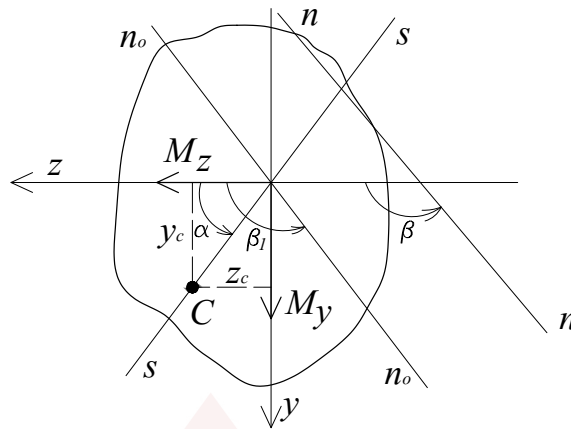


Figura 7.9: Posição da linha neutra da flexão composta

Na Fig. 7.9, sendo β e β_1 as inclinações, com relação ao eixo principal z , das LN's da flexão composta oblíqua e da flexão pura oblíqua, respectivamente, podemos provar que $\beta_1 = \beta$. Da teoria da flexão pura oblíqua, sabe-se que:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{I_z}{I_y}$$

Porém, da mesma Fig. 7.9, observamos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_c}{z_c}$$

Como mostrado na Eq. 2.4, a equação da LN na flexão composta é dada por:

$$1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} + \frac{y_c y}{\rho_z^2} = 0$$

o que nos permite escrever:

$$y = \frac{-\rho_z^2}{y_c} \left(1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} \right) = a + bz$$

onde b é a inclinação da LN com relação ao eixo principal z .

O valor de b pode então ser calculado através da derivada desta equação, isto é:

$$b = \operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dz} = -\frac{\rho_z^2 z_c}{y_c \rho_y^2}$$

onde $\rho_z^2 S = I_z$ e $\rho_y^2 S = I_y$.

Multiplicando o numerador e denominador pela área da seção - S - obtemos:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-I_z z_c}{I_y y_c} = \frac{-I_z}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{I_z}{I_y} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

donde conclui-se que:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y}$$

Como

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{I_z}{I_y}$$

tem-se imediatamente que $\beta_1 = \beta$, ficando deste modo perfeitamente identificada a posição da LN da flexão oblíqua composta, possuindo a mesma inclinação da LN da flexão oblíqua pura (esforço normal nulo).

7.3.2 Análise de tensões

A resolução dos problemas de verificação de estabilidade e do cálculo da máxima capacidade portante da seção pode ser tratada de modo similar ao realizado na flexão oblíqua pura. Ou seja, a partir do diagrama de tensões, busca-se as fibras mais distantes da linha neutra onde ocorrem os máximos valores destas tensões.

A Fig. 7.10 ilustra os valores máximos de tensão normal (tração e compressão) atuantes na seção. Observe que no centroide da seção o valor da tensão normal é dado por $\frac{N}{S}$, já que as parcelas devidas aos momentos fletores são nulas.

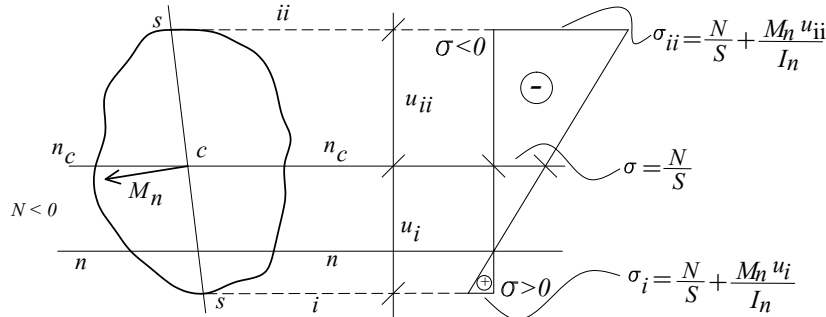


Figura 7.10: Distribuição de tensões na flexão composta

7.3.3 Teoria complementar acerca do Núcleo Central de Inércia

Seja a seção de uma viga sollicitada por uma flexão composta, dada por uma carga normal N aplicada no ponto C , com uma excentricidade e e que provoca o momento M , como mostra a Fig. 7.11. A linha que une o centroide da seção ao ponto C define o eixo de sollicitação ss e n_0n_0 indica a linha neutra da flexão pura provocada pelo momento M . Por último, nn representa a linha neutra da flexão composta. O ângulo θ é o ângulo entre a linha neutra da flexão e o eixo de sollicitação. Os demais elementos mostrados nesta figura já foram definidos anteriormente.

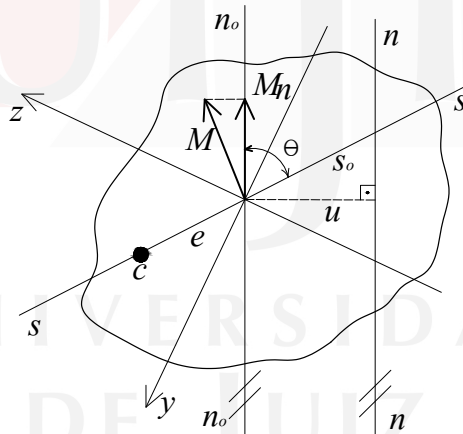


Figura 7.11: Esquema da flexão composta na seção

Partindo da expressão da tensão normal da flexão composta em função de M_n , I_n e da distância $-u$ da fibra analisada à linha neutra da flexão pura, vem:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_n u}{I_n}$$

Da Fig. 7.11, temos que:

$$M_n = M \text{ sen}\theta, \text{ onde } M = Ne$$

onde e é a distância, sobre o eixo de sollicitação, do ponto de aplicação da carga N à origem dos eixos. Assim, obtemos:

$$M_n = Ne \text{ sen}\theta$$

que, substituída na equação da LN ($\sigma_x = 0$), nos fornece:

$$\frac{N}{S} + \frac{N(e \text{ sen}\theta)u}{I_n} = 0$$

Ainda da Fig. 7.11, temos que:

$$u = s_0 \text{ sen}\theta$$

onde s_0 é a distância da interseção da LN com o eixo de solicação à origem dos eixos. A utilização desta última expressão resulta em:

$$\frac{N}{S} + \frac{Ne \operatorname{sen}^2 \theta s_0}{\rho_n^2 S} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{e \operatorname{sen}^2 \theta s_0}{\rho_n^2} = 0$$

chegando-se finalmente a:

$$es_0 = \frac{-\rho_n^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \Rightarrow es_0 = -r_n^2 \tag{7.31}$$

A Eq. 7.31 relaciona a distância do ponto de aplicação da carga e e a distância do ponto onde a linha neutra corta o eixo de solicação s , ao baricentro, medidas sobre este eixo. A Fig. 7.12 mostra como varia o ponto de passagem da linha neutra quando a carga se desloca sobre ss . Observe que r_n é uma constante, cujo valor está definido pela inércia da seção ρ_n^2 e pela posição do centro de solicação.

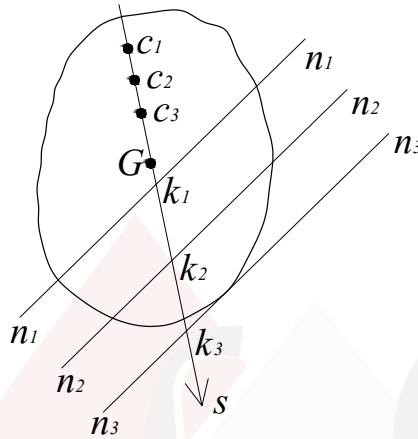


Figura 7.12: Variação da LN com a posição do centro de solicação

Nesta figura são válidas as relações:

$$\begin{cases} \frac{|GK_1|}{|GC_1|} \cdot \frac{|GC_1|}{|GC_1|} = -r_n^2 \\ \frac{|GK_2|}{|GC_2|} \cdot \frac{|GC_2|}{|GC_2|} = -r_n^2 \\ \vdots \\ \frac{|GK_i|}{|GC_i|} \cdot \frac{|GC_i|}{|GC_i|} = -r_n^2 \end{cases}$$

onde o sinal negativo da expressão deve ser interpretado entendendo-se que o centro de solicação e o ponto de passagem da linha neutra estão sempre em lados opostos do eixo de solicação dividido pelo baricentro (Propriedade da Antipolaridade), isto é:

- $n_1 n_1 \rightarrow$ Posição da LN quando o centro de solicação está em C_1 . Neste caso, temos fibras comprimidas e tracionadas;
- $n_2 n_2 \rightarrow$ Posição da LN quando o centro de solicação está em C_2 . Neste caso, temos fibras comprimidas e tracionadas;
- $n_3 n_3 \rightarrow$ Posição da LN quando o centro de solicação está em C_3 . Neste caso, temos somente fibras comprimidas.

Concluimos, então, que pontos do tipo C_3 delimitam uma região da seção da peça chamada **Núcleo Central de Inércia** (ou NCI) e que este ponto é um ponto do contorno deste núcleo. Para outros pontos situados sobre ss mais próximos do baricentro $C < C_3$, a linha neutra é externa à seção e as tensões na seção são de tração ou de compressão para todos seus pontos. Quando $C \equiv G$, a linha neutra não corta a seção e temos o caso da tração ou compressão pura com tensões de mesmo sinal e iguais em todos pontos da seção.

7.3.4 Propriedade Fundamental da Antipolaridade

Sejam, para uma seção arbitrária, um centro de solicação $C(y_c, z_c)$ de um carregamento e nn , a linha neutra associada a flexão composta originada pela aplicação de uma carga neste ponto. Seja, ainda, um ponto $C'(y_{c'}, z_{c'})$, um ponto qualquer de nn . Finalmente, consideremos $n'n'$ uma reta passante pelo ponto C , como mostra a Fig. 7.13.

Temos, então, que a equação de nn (LN associada ao centro de solicação C) é dada por:

$$nn \Rightarrow 1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} + \frac{y_c y}{\rho_z^2} = 0$$

Nessas condições, podemos mostrar que, se $C' \in nn$ então $C \in n'n'$, onde $n'n'$ é a LN associada ao centro de solicação C' .

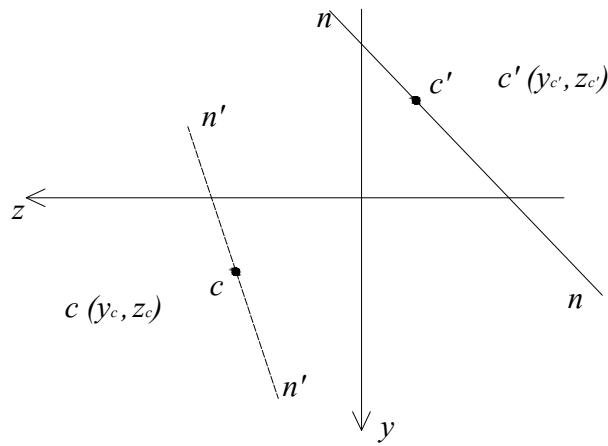


Figura 7.13: Propriedade da antipolaridade - I

Se $C' \in nn$, então as coordenadas de C' satisfazem a equação de nn e vale a seguinte igualdade:

$$C' \in nn \Rightarrow 1 + \frac{z_c z_{c'}}{\rho_y^2} + \frac{y_c y_{c'}}{\rho_z^2} = 0 \tag{7.32}$$

Por outro lado, a equação de $n'n'$ é:

$$1 + \frac{z z_{c'}}{\rho_y^2} + \frac{y y_{c'}}{\rho_z^2} = 0$$

Se $C \in n'n'$, então esta última expressão deve ser verdadeira quando: $z = z_c$ e $y = y_c$, o que de fato acontece, já que esta é a igualdade (7.32) que sabemos ser válida. Assim, fica provada a Propriedade Fundamental da Antipolaridade.

Daí poderemos constatar que, conforme indicado na Fig. 7.14, quando o centro de solicitação se desloca de C' para C'' as linhas neutras associadas a estes centros de solicitação giram em torno de C .

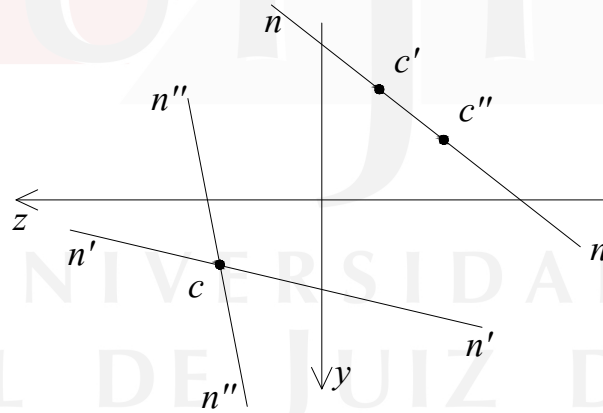


Figura 7.14: Propriedade da antipolaridade - II

Esta propriedade pode ser então utilizada de modo inverso, da seguinte maneira: dadas duas tangentes não-secantes a uma seção que passam por um ponto desta seção, como mostra a Fig 7.15, podemos, a partir dos centros de solicitação associados a estas tangentes consideradas como linhas neutras, determinar a posição de todos os centros de solicitação quando passamos de t_1 a t_2 , que estarão sobre a reta que une C_1 a C_2 .

Na Fig. 7.15 ilustramos a aplicação da propriedade da antipolaridade na construção do NCI de uma seção. Observe que, nesta figura, t_1 , t_2 e t_i são linhas neutras correspondentes a cargas que estão aplicadas na fronteira do NCI, designando-se por t_i todas as linhas neutras entre t_1 e t_2 .

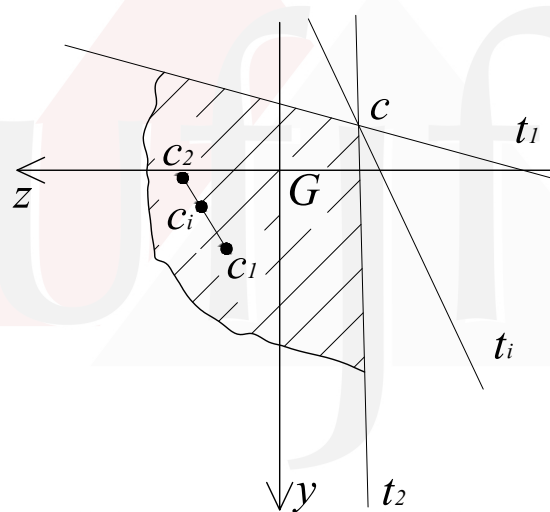


Figura 7.15: Aplicação da propriedade da antipolaridade

7.4 Apêndices - Capítulo 3 - Estado Triaxial de Tensões

7.4.1 EXEMPLO 1 - Tratamento para o caso da barra a esforço axial

Consideremos neste problema uma barra (exemplificada aqui, com seção transversal retangular) idealmente sujeita a um esforço normal constante conforme mostra a Fig. 7.16, onde apresentamos o sistema de eixos xyz adequado para o estudo. O exemplo aqui considerado é o mesmo já estudado no início deste capítulo.

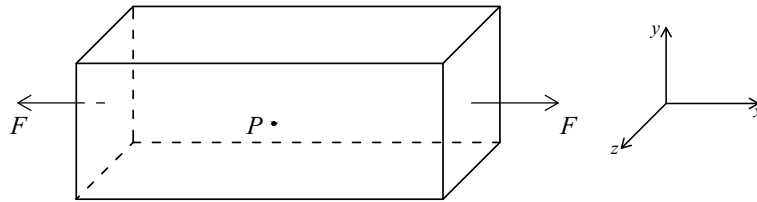


Figura 7.16:

Objetivo Determinar as tensões σ_n e τ_t em planos particulares cuja normal é dada por $\hat{N} = \{-\cos\alpha \ \text{sen}\alpha \ 0\}$, conforme indica a Fig. 7.17.

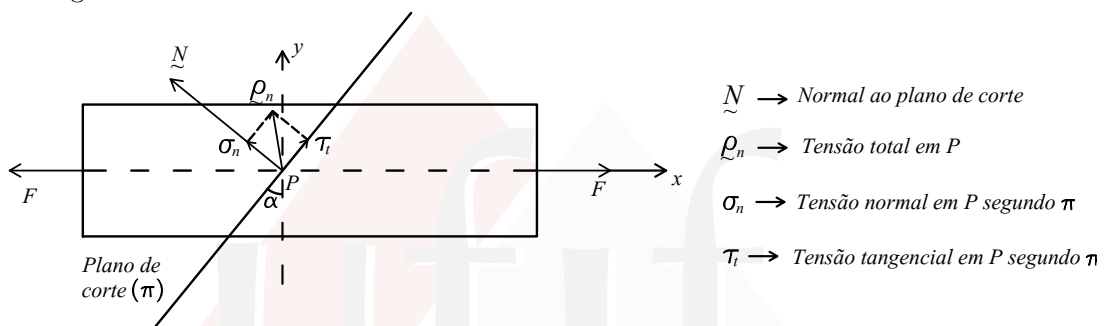


Figura 7.17:

Solução Parte I - Estado de tensões em planos inclinados conforme indicados

Para a determinação de σ_n e τ_t , procedemos com a realização de cortes em torno do ponto $P(x, y, z)$, segundo os planos coordenados xy , xz e yz com o objetivo de determinar o tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ neste ponto, segundo o sistema xyz . Assim, considerando \hat{N} o vetor normal a cada um desses planos de corte, temos as seguintes possibilidades:

a) \hat{N} na direção x

$$\hat{N} = \hat{i} \text{ (unitário da direção } x \text{)}$$

Neste caso, o plano de corte é paralelo ou é o próprio plano yz e

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_N = \underline{\rho}_x &= \sigma_{xx}\hat{i} + \tau_{xy}\hat{j} + \tau_{xz}\hat{k} \text{ ou} \\ \underline{\rho}_x &= \{\sigma_{xx} \ \tau_{xy} \ \tau_{xz}\} \end{aligned}$$

b) \hat{N} na direção y

$$\hat{N} = \hat{j} \text{ (unitário da direção } y \text{)}$$

Neste caso, o plano de corte é paralelo ou é o próprio plano xz e

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_N = \underline{\rho}_y &= \tau_{yx}\hat{i} + \sigma_{yy}\hat{j} + \tau_{yz}\hat{k} \text{ ou} \\ \underline{\rho}_y &= \{\tau_{yx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{yz}\} \end{aligned}$$

c) \hat{N} na direção z

$$\hat{N} = \hat{k} \text{ (unitário da direção } z \text{)}$$

Neste caso, o plano de corte é paralelo ou é o próprio plano xy e

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_N = \underline{\rho}_z &= \tau_{zx}\hat{i} + \tau_{zy}\hat{j} + \sigma_{zz}\hat{k} \text{ ou} \\ \underline{\rho}_z &= \{\tau_{zx} \ \tau_{zy} \ \sigma_{zz}\} \end{aligned}$$

Para o primeiro destes planos - yz - quando $\hat{N} = \hat{j}$, o plano de corte é a seção transversal (\perp ao eixo da peça) usual do estudo do esforço normal. Para qualquer ponto P desta seção, temos:

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S}; \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

onde S é a área da seção.

Logo,

$$\rho_y = \left\{ \frac{F}{S} \quad 0 \quad 0 \right\}$$

Para $\hat{N} = \hat{j}$, os possíveis planos de cortes separam a barra em partes cujo equilíbrio (de cada parte) indica, aponta ou sugere a não existência de tensões normais ao plano de corte ou tangencial (no plano de corte) conforme mostra a Fig. 7.18.

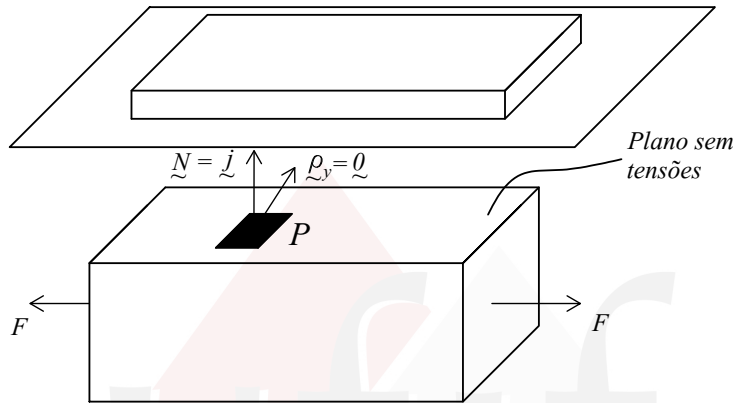


Figura 7.18: Corte por planos como normal $N = j$.

Constatamos então, que, para qualquer plano como este, teremos sempre em qualquer ponto P um vetor tensão total ρ_y que é nulo:

$$\rho_y = \tau_{yx}\hat{i} + \sigma_{yy}\hat{j} + \tau_{yz}\hat{k} = 0$$

ou $\rho_y = \{0 \quad 0 \quad 0\}$

Vejamos como ocorre algo similar para os cortes segundo o plano xy , quando $\hat{N} = \hat{k}$:

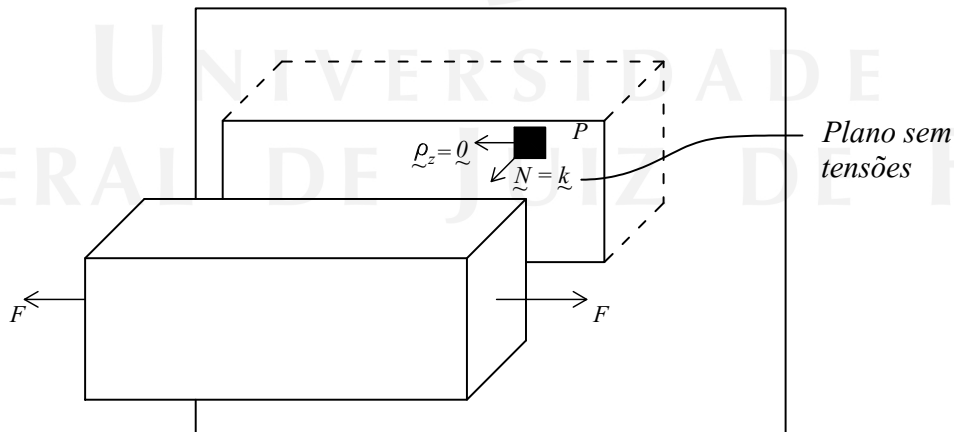


Figura 7.19: Corte por planos como normal $N = k$.

Novamente, para qualquer ponto P neste plano de corte, temos $\rho_z = 0$, isto é:

$$\rho_z = \tau_{zx}\hat{i} + \tau_{zy}\hat{j} + \sigma_{zz}\hat{k} = 0$$

ou $\rho_z = \{0 \quad 0 \quad 0\}$

Assim, compondo estes resultados, o tensor de tensões em qualquer ponto P de coordenadas xyz da barra sujeita a esforço axial é dado por:

$$\tilde{\sigma}^{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{F}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\tilde{\sigma}^{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$. Este estado de tensões pode ser representado pelo sólido de tensões mostrado na Fig. 7.20.

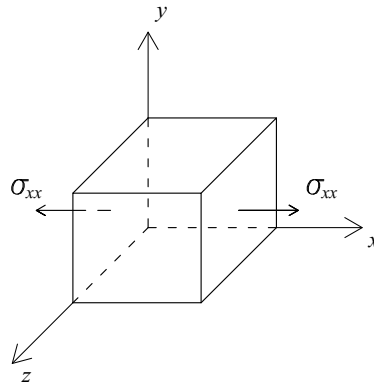


Figura 7.20: Estado de Tensão em todos os pontos da barra sujeita a esforço axial.



UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Parte II - Cálculo das tensões normal e tangencial nos planos inclinados indicados

Procedemos, a seguir, com a determinação de σ_n e τ_t a partir do cálculo de $\underline{\rho}_N$, quando $\hat{N} = \{-\cos \alpha \quad \text{sen} \alpha \quad 0\}$ e $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{xyz}$, através da relação $\underline{\rho}_n = \underline{\sigma} \hat{N}$.

Ficamos, então, com:

$$\underline{\rho}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ \text{sen} \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_{nx} \\ \rho_{ny} \\ \rho_{nz} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\rho}_N = \{-\sigma_{xx} \cos \alpha \quad 0 \quad 0\}$$

A tensão σ_n vale, então:

$$\sigma_n = \underline{\rho}_N \cdot \hat{N} = \sigma_{xx} (-\cos \alpha)(-\cos \alpha)$$

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha}$$

A tensão tangencial neste plano pode ser obtida através da relação:

$$\boxed{\tau_t^2 = |\underline{\rho}_n|^2 - \sigma_n^2}$$

o que resulta em:

$$\boxed{\tau_t = \frac{\sigma_{xx}}{2} \text{sen} 2\alpha}$$

Parte III - Cálculo das tensões máximas, normal e tangencial neste conjunto de planos inclinados

Determinemos os valores máximos das tensões normais quando variamos α :

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = \sigma_{xx} \cdot 2 \cos \alpha (-\text{sen} \alpha)$$

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 \cos \alpha \text{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \text{sen} 2\alpha = 0,$$

cujas soluções são $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Vemos que para $\sigma_{xx} > 0$ temos:

$$\left. \frac{d^2 \sigma_n}{d\alpha^2} \right|_{\alpha_1=0} < 0$$

e que

$$\left. \frac{d^2 \sigma_n}{d\alpha^2} \right|_{\alpha_2=\frac{\pi}{2}} > 0$$

Logo, para $\alpha_1 = 0$, temos $\sigma_{n_{max}}$ e, para $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, temos $\sigma_{n_{min}}$:

$$\sigma_{n_{max}} = \sigma_{xx} \quad \text{e} \quad \sigma_{n_{min}} = 0$$

Para as tensões tangenciais, temos:

$$\frac{d\tau_t}{d\alpha} = \sigma_{xx} \cos 2\alpha$$

$$\frac{d\tau_t}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

e constatamos imediatamente que:

$$\left. \frac{d^2 \tau_t}{d\alpha^2} \right|_{\alpha_1=\frac{\pi}{4}} < 0 \Rightarrow \text{para } \alpha_1 = \frac{\pi}{4} \rightarrow \tau_{t \max}$$

O vetor normal a este plano é dado por:

$$\hat{N}_{\alpha_1=\frac{\pi}{4}} = \left\{ \cos \frac{\pi}{4} \quad \text{sen} \frac{\pi}{4} \quad 0 \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\}$$

O vetor tensão total pode ser então obtido a partir da multiplicação do tensor $\underline{\underline{\sigma}}$ pelo vetor normal definido anteriormente:

$$\underline{\rho}_n \Big|_{\alpha_1 = \frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\sigma}} \hat{N}_{\alpha_1 = \frac{\pi}{4}} = \sigma_{xx} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i}$$

A tensão normal neste plano é dada por:

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \hat{N} = \frac{\sigma_{xx}}{2}$$

e a tensão tangencial máxima é calculada como:

$$\tau_t^2 = |\underline{\rho}_n|^2 - \sigma_n^2$$

resultando em

$$\tau_{t_{\max}} = \frac{\sigma_{xx}}{2}$$

Os resultados aqui obtidos já tinham sido vistos no início deste capítulo. Com este exemplo, mostramos a utilidade e generalidade das relações do estudo do estado triaxial de tensões aplicados ao caso simples (uniaxial) já considerado anteriormente.

7.4.2 Rotação do tensor de tensões

Nosso problema aqui pode ser descrito como: Seja um sistema de eixos xyz e o estado de tensões num ponto dado pelo tensor de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ referidos a este sistema de eixos; determinar as componentes deste tensor em relação a um outro sistema de eixos - $x'y'z'$ - denotado por $\underline{\underline{\sigma}}'$.

Rotação de vetores no plano

Inicialmente, determinamos e relembramos como é realizado o procedimento para mudar a descrição de vetores, em duas dimensões, quando fazemos um giro no sistema de eixos utilizados inicialmente para sua descrição. Assim, dado dois sistemas de eixos xy e $x'y'$ e um ponto $Q(x,y)$ de coordenadas xy no primeiro sistema, queremos determinar as coordenadas deste mesmo ponto no sistema $x'y'$ que está girado de um ângulo α com relação ao primeiro sistema de coordenadas. Este problema pode ser associado ao problema para obtenção das componentes de um vetor \underline{v} com origem na origem do sistema de eixos e outra extremidade no ponto Q quando adotamos o sistema $x'y'$. Em outras palavras, buscamos determinar \underline{v}' , isto é: se $\underline{v} = x\hat{i} + y\hat{j}$ como obter $\underline{v}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}'$?

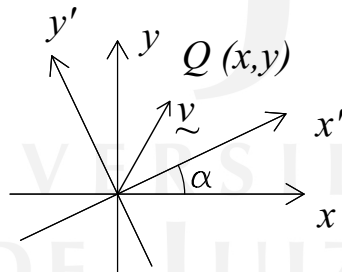


Figura 7.21: Vetor $\underline{v} = \underline{v}'$ e Sistemas xy e $x'y'$

Na Fig. 7.21, \underline{v} e \underline{v}' designam o mesmo vetor medido nos sistemas xy e $x'y'$. As relações entre os unitários das direções

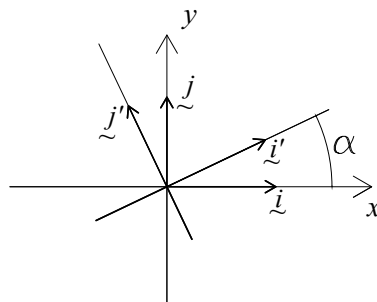


Figura 7.22: Posição relativa dos sistemas de eixos

$xy - \hat{i}, \hat{j}$ - e os das direções $x'y' - \hat{i}', \hat{j}'$ - podem ser obtidas imediatamente da Fig. 7.22:

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix}$$

ou:

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \end{Bmatrix} = \underline{\underline{R}} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} \quad \underline{\underline{R}} \rightarrow \text{matriz } 2 \times 2$$

Esta relação invertida nos fornece:

$$\begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{R}}^T \begin{Bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \end{Bmatrix} \tag{7.33}$$

O que mostra que, neste caso, $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$. Matrizes com esta característica são denominadas “matrizes ortogonais” e a matriz $\underline{\underline{R}}$ é chamada de **matriz de rotação**. A partir destas relações, podemos escrever que,

$$\underline{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \quad \text{e} \quad \underline{v}' = v_{x'} \hat{i}' + v_{y'} \hat{j}' \tag{7.34}$$

Substituindo (7.33) em (7.34), vem:

$$\begin{aligned} \underline{v} &= v_x (\cos \alpha \hat{i}' - \text{sen} \alpha \hat{j}') + v_y (\text{sen} \alpha \hat{i}' + \cos \alpha \hat{j}') \\ &= (v_x \cos \alpha + v_y \text{sen} \alpha) \hat{i}' + (v_y \cos \alpha - v_x \text{sen} \alpha) \hat{j}' \end{aligned}$$

Como \underline{v} e \underline{v}' representam (descrevem) o mesmo vetor, temos que:

$$\begin{cases} v'_x = v_x \cos \alpha + v_y \text{sen} \alpha \\ v'_y = v_y \cos \alpha - v_x \text{sen} \alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} v'_x \\ v'_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

isto é:

$$\underline{v}' = \underline{\underline{R}} \underline{v}$$

Dai, obtemos imediatamente que

$$\underline{v} = \underline{\underline{R}}^T \underline{v}'$$

Extensão para o caso tridimensional - Rotação de vetores no espaço

Sejam os sistemas de eixos xyz e $x'y'z'$ mostrados na Fig. 7.23.

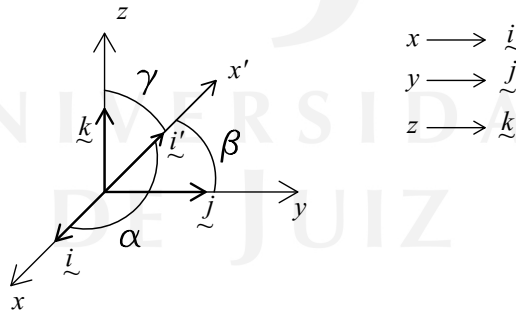


Figura 7.23: Posição de x' com relação a xyz

Para o novo eixo $x' \rightarrow \hat{i}'$ temos que:

$$\hat{i}' = l_{x'x} \hat{i} + l_{x'y} \hat{j} + l_{x'z} \hat{k}$$

onde $l_{x'x} = \cos \alpha$, $l_{x'y} = \cos \beta$, $l_{x'z} = \cos \gamma$ são os cossenos diretores de x' com relação a a cada um dos eixos do sistema xyz .

$$l_{x'x} = \hat{i}' \cdot \hat{i} \quad l_{x'y} = \hat{i}' \cdot \hat{j} \quad l_{x'z} = \hat{i}' \cdot \hat{k}$$

e

$$\hat{i}' \cdot \hat{j} = \cos(\widehat{x', y}) \quad \text{ou} \quad \cos(\widehat{i', j})$$

$$\hat{i}' \cdot \hat{k} = \cos(\widehat{x', z}) \quad \text{ou} \quad \cos(\widehat{i', k})$$

Aqui, $(\widehat{x', x})$ denota o ângulo entre x' e $x \equiv$ ângulo entre \hat{i}' e \hat{i} . Escolhendo outros dois eixos y' e z' perpendiculares a x' , teríamos:

$$\hat{j}' = l_{y'x} \hat{i} + l_{y'y} \hat{j} + l_{y'z} \hat{k}$$

onde:

$$\begin{aligned}l_{y'x} &= \cos(\hat{j}', \hat{i}) = \hat{j}' \cdot \hat{i} \rightarrow \cos(\widehat{y', x}) \\l_{y'y} &= \cos(\hat{j}', \hat{j}) = \hat{j}' \cdot \hat{j} \rightarrow \cos(\widehat{y', y}) \\l_{y'z} &= \cos(\hat{j}', \hat{k}) = \hat{j}' \cdot \hat{k} \rightarrow \cos(\widehat{y', z})\end{aligned}$$

De modo similar para z' , teríamos:

$$\hat{k}' = l_{z'x}\hat{i} + l_{z'y}\hat{j} + l_{z'z}\hat{k} \quad \text{onde:}$$

$$\begin{aligned}l_{z'x} &= \cos(\hat{k}', \hat{i}) = \hat{k}' \cdot \hat{i} \rightarrow \cos(\widehat{z', x}) \\l_{z'y} &= \cos(\hat{k}', \hat{j}) = \hat{k}' \cdot \hat{j} \rightarrow \cos(\widehat{z', y}) \\l_{z'z} &= \cos(\hat{k}', \hat{k}) = \hat{k}' \cdot \hat{k} \rightarrow \cos(\widehat{z', z})\end{aligned}$$

Ficamos, então, com:

$$\begin{cases} \hat{i}' = l_{x'x}\hat{i} + l_{x'y}\hat{j} + l_{x'z}\hat{k} \\ \hat{j}' = l_{y'x}\hat{i} + l_{y'y}\hat{j} + l_{y'z}\hat{k} \\ \hat{k}' = l_{z'x}\hat{i} + l_{z'y}\hat{j} + l_{z'z}\hat{k} \end{cases}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{Bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{Bmatrix} \quad \text{onde } \underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \\ l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} \\ l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} \end{bmatrix}$$

Para um vetor \underline{v} qualquer, teríamos

$$\begin{aligned}\underline{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad \text{e} \\ \underline{v}' &= v_{x'}\hat{i}' + v_{y'}\hat{j}' + v_{z'}\hat{k}'\end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo ao caso bidimensional, obtemos:

$$\underline{v} = \underset{\sim}{R}^T \underline{v}'$$

Para obtermos as componentes de \underline{v}' com relação às componentes de \underline{v} , utilizamos a propriedade de que $\underset{\sim}{R}^{-1} = \underset{\sim}{R}^T$ ($\underset{\sim}{R}$ é ortogonal).

Ortogonalidade de $\underset{\sim}{R}$

Esta propriedade decorre da preservação do produto interno quando mudamos de sistema. Sejam $\underline{u}, \underline{v}$ em xyz e $\underline{u}', \underline{v}'$ em $x'y'z'$, temos que:

$$\begin{aligned}\underline{u} \cdot \underline{v} &= |\underline{u}||\underline{v}| \cos \theta && \text{e} \\ \underline{u}' \cdot \underline{v}' &= |\underline{u}'||\underline{v}'| \cos \theta && \text{logo} \\ \underline{u} \cdot \underline{v} &= \underline{u}' \cdot \underline{v}', && \text{já que } |\underline{u}| = |\underline{u}'| \text{ e } |\underline{v}| = |\underline{v}'|\end{aligned}$$

Partindo dessa premissa, temos que:

$$\begin{aligned}\underline{u} \cdot \underline{v} &= \underline{u}' \cdot \underline{v}' \\ \underset{\sim}{R}^T \underline{u}' \cdot \underset{\sim}{R}^T \underline{v}' &= \underline{u}' \cdot \underline{v}' \\ \underline{u}' \cdot (\underset{\sim}{R}^T)^T \underset{\sim}{R}^T \underline{v}' &= \underline{u}' \cdot \underline{v}' \\ \underline{u}' \cdot \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{R}^T \underline{v}' &= \underline{u}' \cdot \underline{v}' \Rightarrow \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{\mathbb{I}} \\ \underset{\sim}{R}^T &= \underset{\sim}{R}^{-1}\end{aligned}$$

onde $\underset{\sim}{\mathbb{I}}$ é a matriz identidade. Daí, concluímos que $\underline{v}' = \underset{\sim}{R} \underline{v}$

Aplicação ao estado triaxial de tensões

Podemos aplicar estas relações aos vetores $\underline{\rho}_n$ e \hat{N} para obter:

$$\underline{\rho} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\rho}' \quad \text{e} \quad \underline{\rho}' = \underline{\underline{R}} \underline{\rho}$$

$$\hat{N} = \underline{\underline{R}}^T \hat{N}' \quad \text{e} \quad \hat{N}' = \underline{\underline{R}} \hat{N}$$

Sabemos que

$$\underline{\rho} = \underline{\underline{\sigma}} \hat{N} \quad (\text{em } xyz) \quad \text{e} \quad \underline{\rho}' = \underline{\underline{\sigma}}' \hat{N}' \quad (\text{em } x'y'z')$$

Da primeira destas equações, obtemos:

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\rho}' = \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}}^T \hat{N}' \quad \text{que, pré-multiplicada por } \underline{\underline{R}}, \text{ resulta em}$$

$$\underline{\underline{R}} \underline{\underline{R}}^T \underline{\rho}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}}^T \hat{N}'$$

$$\text{ou } \underline{\rho}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}}^T \hat{N}'$$

Tendo em vista a segunda expressão acima, podemos concluir que:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}}^T$$

Esta relação pode ser invertida, fornecendo-nos:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\sigma}}' \underline{\underline{R}}$$

Estas duas expressões nos permitem passar o tensor de tensões de um sistema a outro.

Exemplo numérico

Dado o estado de tensões num ponto definido pelo tensor mostrado abaixo,

$$\underline{\underline{\sigma}} = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

a) Determinar $\sigma_{x'x'}$; $\tau_{x'y'}$ e $\tau_{x'z'}$ sendo as direções $x'y'z'$ definidas pelos vetores:

$$\begin{aligned} x' &\rightarrow 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \\ y' &\rightarrow \hat{i} - \hat{j} \\ z' &\rightarrow \hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k} \end{aligned}$$

b) Determinar $\underline{\underline{\sigma}}'$ referido a $x'y'z'$.

c) Determinar a tensão tangencial total na face com normal x' .

Solução:

a) Os unitários das direções $x'y'z'$ podem ser obtidos imediatamente:

$$\underline{i}' = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \quad \therefore \quad \underline{i}' = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

$$\underline{j}' = \frac{\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \quad \therefore \quad \underline{j}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

$$\underline{k}' = \frac{\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} \quad \therefore \quad \underline{k}' = \frac{\hat{i}}{\sqrt{18}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{18}} - \frac{4}{\sqrt{18}}\hat{k}$$

As tensões pedidas podem ser obtidas a partir das equações abaixo:

$$\sigma_{x'x'} \rightarrow \text{é a tensão normal no plano cuja normal é } \hat{N}' = \underline{i}' \text{ sendo portanto a projeção de } \underline{\rho}_{x'} \text{ sobre } x'(\underline{i}')$$

$\tau_{x'y'}$ \rightarrow é a tensão tangencial na direção de y' , no plano cuja normal é $\hat{N}' = \underline{i}'$, sendo portanto a projeção de $\underline{\rho}_{x'}$ sobre $y'(\underline{j}')$

$\tau_{x'z'} \rightarrow$ é a tensão tangencial na direção de z' , no plano cuja normal é $\hat{N} = \hat{i}'$, sendo portanto a projeção de $\underline{\rho}_{x'}$ sobre $z'(\hat{k}')$

Determinando $\underline{\rho}_{x'}$ pela expressão $\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \hat{N}$ com $\hat{N} = \hat{i}'$

$$\underline{\rho}_{x'} = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right\}$$

A tensão normal neste plano pode ser obtida pela projeção:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_{x'} &= \frac{400}{3} \hat{i} - \frac{100}{3} \hat{j} + 200 \hat{k} \\ \sigma_{x'x'} &= \underline{\rho}_{x'} \cdot \hat{i}' = \left(\frac{400}{3} \hat{i} - \frac{100}{3} \hat{j} + 200 \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \hat{i} + \frac{2}{3} \hat{j} + \frac{1}{3} \hat{k} \right) \\ &\boxed{\sigma_{x'x'} = 133,3 \text{ MPa}} \end{aligned}$$

De modo similar, podemos obter $\tau_{x'y'} = \underline{\rho}_{x'} \cdot \hat{j}'$ e $\tau_{x'z'} = \underline{\rho}_{x'} \cdot \hat{k}'$, o que resulta em:

$$\tau_{x'y'} = 117,85 \text{ MPa e } \tau_{x'z'} = -165 \text{ MPa}$$

b) Cálculo de $\underline{\underline{\sigma}}'$ - Componentes do tensor de tensão segundo $x'y'z'$

Neste caso, utilizamos a relação

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{R}}^T$$

onde

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

O que resulta em:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}' &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\sigma}}' &= \begin{bmatrix} 133,33 & 117,85 & -165 \\ 117,85 & 0 & -33,33 \\ -165 & -33,33 & -133,33 \end{bmatrix} \text{ MPa} \end{aligned}$$

c) A tensão tangencial total no plano que tem como normal o eixo x' ou $\hat{N} = \hat{i}'$ pode ser obtida através de suas componentes $\tau_{x'y'}$ e $\tau_{x'z'}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tau_t &= \sqrt{\tau_{x'y'}^2 + \tau_{x'z'}^2} \\ \tau_t &= \sqrt{117,85^2 + (-165)^2} \\ \tau_t &= 202,76 \text{ MPa} \end{aligned}$$

7.4.3 Ortogonalidade das direções principais

Vejamos, agora, a posição relativa entre as direções principais.

Sejam $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{e1}, \hat{e}_1 \\ \sigma_{e2}, \hat{e}_2 \end{array} \right.$ duas tensões principais e suas respectivas direções.

Podemos afirmar que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}_1 = \sigma_{e1} \hat{e}_1 \quad (a) \\ \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}_2 = \sigma_{e2} \hat{e}_2 \quad (b) \end{array} \right.$$

Pré-multiplicando (a) por \hat{e}_2^T obtém-se:

$$\hat{e}_2^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}_1 = \sigma_{e1} \hat{e}_2^T \hat{e}_1$$

Transpondo ambos os termos:

$$\hat{e}_1^T \underline{\underline{\sigma}}^T \hat{e}_2 = \sigma_{e1} \hat{e}_1^T \hat{e}_2$$

Como $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$, vem:

$$\hat{e}_1^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}_2 = \sigma_{e1} \hat{e}_1^T \hat{e}_2$$

Utilizando a relação (b) nesta última equação, obtemos:

$$\hat{e}_1^T \sigma_{e2} \hat{e}_2 = \sigma_{e1} \hat{e}_1^T \hat{e}_2$$

o que resulta em:

$$\hat{e}_1^T \hat{e}_2 (\sigma_{e2} - \sigma_{e1}) = 0$$

Como, em geral, $\sigma_{e2} \neq \sigma_{e1}$, devemos ter que:

$$\hat{e}_1^T \hat{e}_2 = 0 \Rightarrow \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \quad \text{logo} \quad \hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 !$$

Analogamente, podemos provar que:

$$\hat{e}_1 \perp \hat{e}_3 \quad \text{e} \quad \hat{e}_2 \perp \hat{e}_3$$

donde conclui-se que as direções principais em torno de um ponto são ortogonais.

7.4.4 Estacionaridade das Tensões Principais

Apresentamos agora a principal característica e propriedade dessas tensões principais em torno de um ponto mostrando que elas são os valores extremos (máximo ou mínimo) dentre todas as tensões normais em torno deste ponto. Para tal consideremos o tensor de tensões num ponto descrito segundo suas direções principais que é dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

O vetor tensão total num plano que tem sua normal com relação a estas direções principais indicado por \hat{N} vale:

$$\underline{\underline{\rho}}_n = \underline{\underline{\sigma}}^{123} \hat{N} \quad \text{com} \quad \hat{N} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

Logo,

$$\underline{\underline{\rho}}_n = \{ \sigma_1 l \quad \sigma_2 m \quad \sigma_3 n \}^T$$

A tensão normal neste plano vale:

$$\sigma_n = \underline{\underline{\rho}}_n \cdot \hat{N} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

Como $l^2 = 1 - m^2 - n^2$, podemos escrever:

$$\sigma_n = (1 - m^2 - n^2)\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$$

Para determinar os valores máximos (extremos) de σ_n , utilizamos as relações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_n}{\partial m} = 0 \Rightarrow 2m(\sigma_2 - \sigma_1) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial n} = 0 \Rightarrow 2n(\sigma_3 - \sigma_1) = 0 \end{cases}$$

Obtemos como solução: $m = 0$; $n = 0$ e $l^2 = 1 \Rightarrow l = \pm 1$. Logo, a direção principal $l = \pm 1$ é uma direção na qual o valor de σ_n é um extremo, mostrando que σ_1 é um destes valores. Podemos eliminar m e n da equação de σ_n e obter resultados similares, mostrando que σ_1 , σ_2 e σ_3 são os valores extremos das tensões normais em torno de um ponto.

7.4.5 Tensões Octaédricas

Determinamos, neste item, um conjunto de tensões especiais empregado em um critério de resistência que são as tensões octaédricas. Estas tensões são aquelas que ocorrem em planos que estão igualmente inclinados com relação aos planos principais em torno de um ponto. Assim, por definição, os cossenos diretores de um plano octaédrico são obtidos através da seguinte relação: se $\hat{N} = l_1\hat{i} + l_2\hat{j} + l_3\hat{k}$ é um vetor normal a um plano octaédrico, tem-se:

$$l_1 = l_2 = l_3 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

já que $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ e $l_1 = l_2 = l_3$. Existem, portanto, 8 vetores normais que definem os 8 planos octaédricos em torno de um ponto, a saber:

$$\begin{aligned}\hat{N}_{oct}^1 &= \left\{ +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \right\} \\ \hat{N}_{oct}^2 &= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \right\} \\ \hat{N}_{oct}^3 &= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \right\} \\ \hat{N}_{oct}^4 &= \left\{ +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\} \\ \hat{N}_{oct}^5 &= \left\{ +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \right\} \\ \hat{N}_{oct}^6 &= \left\{ +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\} \\ \hat{N}_{oct}^7 &= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\} \\ \hat{N}_{oct}^8 &= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}\end{aligned}$$

A Fig. 7.24 ilustra 4 desses planos e o plano octaédrico referente a \hat{N}_{oct}^1 (1º quadrante). O tensor de tensões referido

Os eixos 1, 2, 3 desta
figura são as direções
principais em torno do
ponto

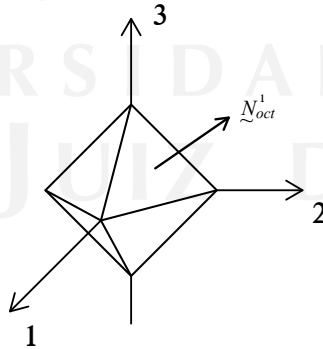


Figura 7.24:

a estes eixos principais é dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow \text{tensões principais}$$

O cálculo da tensão total octaédrica no plano com \hat{N}_{oct}^1 pode então ser obtida:

$$\begin{aligned}\rho_n^{oct} &= \underline{\underline{\sigma}} \hat{N}_{oct}^1 \\ \rho_n^{oct} &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

E a tensão normal como:

$$\sigma_n^{oct} = \underline{\rho}_n^{oct} \cdot \hat{N}_{oct}^1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3\} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resultando em:

$$\sigma_n^{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Como $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ é um invariante do tensor de tensões, podemos afirmar que:

$$\sigma_n^{oct} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

A tensão tangencial octaédrica pode então ser calculada:

$$\tau_{oct} = \sqrt{|\underline{\rho}_n^{oct}|^2 - (\sigma_n^{oct})^2}$$

ou

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2}$$

Logo,

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

Como as máximas tensões tangenciais em torno de um ponto valem:

$$\tau_{12}^{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_{13}^{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{23}^{max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

podemos afirmar que:

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(\tau_{12}^{max})^2 + (\tau_{13}^{max})^2 + (\tau_{23}^{max})^2}$$

Se efetuarmos estas determinações para qualquer um dos \hat{N}_{oct} obtemos estes mesmos valores!

7.4.6 Equação de um plano

Da Fig. 7.25, temos:

$$\begin{cases} x, y, z \rightarrow \text{Ponto genérico do plano } \pi \\ x_p, y_p, z_p \rightarrow \text{ponto genérico do plano (P) dado} \\ \hat{N} = x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k} \rightarrow \text{Vetor normal ao plano (não necessariamente unitário!)} \end{cases}$$

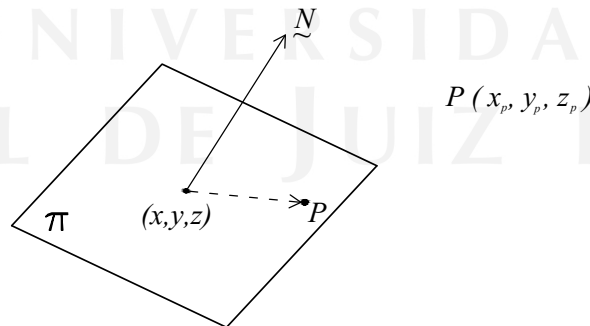


Figura 7.25:

Um vetor genérico pertencente ao plano π é dado por:

$$\underline{v}_{plano} = (x - x_p)\hat{i} + (y - y_p)\hat{j} + (z - z_p)\hat{k}$$

A condição de ortogonalidade entre \underline{v}_{plano} e \hat{N} fornece:

$$\begin{aligned} \underline{v}_{plano} \cdot \hat{N} &= 0. \text{ Assim,} \\ (x - x_p)x_n + (y - y_p)y_n + (z - z_p)z_n &= 0 \text{ ou} \\ x_n x + y_n y + z_n z + (x_p x_n - y_p y_n - z_p z_n) &= 0 \end{aligned}$$

Como a equação genérica do plano é $Ax + By + Cz = D$, dada esta equação, é possível obter um vetor normal a este como $\underline{v} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ (não unitário).

7.5 Apêndices - Capítulo 4 - Estado Deformações

7.5.1 Rotação do Tensor de Deformação

As equações 4.27, 4.28 e 4.29, para a determinação das deformações lineares num sistema de eixos $x'y'z'$ podem, imediatamente serem reescritas de forma conveniente como:

$$\epsilon_{x'x'} = \hat{N}_{x'}^T \underline{\underline{\epsilon}}_{x'} \hat{N}_{x'} \quad (7.35)$$

$$\epsilon_{y'y'} = \hat{N}_{y'}^T \underline{\underline{\epsilon}}_{y'} \hat{N}_{y'} \quad (7.36)$$

$$\epsilon_{z'z'} = \hat{N}_{z'}^T \underline{\underline{\epsilon}}_{z'} \hat{N}_{z'} \quad (7.37)$$

Para a determinação das deformações angulares num sistema de eixos $x'y'z'$ podemos, imediatamente reescrever as equações 4.38, 4.39 e 4.40 de forma conveniente:

$$\epsilon_{x'y'} = \hat{N}_{x'}^T \underline{\underline{\epsilon}}_{y'} \hat{N}_{y'} \quad (7.38)$$

$$\epsilon_{x'z'} = \hat{N}_{x'}^T \underline{\underline{\epsilon}}_{z'} \hat{N}_{z'} \quad (7.39)$$

$$\epsilon_{y'z'} = \hat{N}_{y'}^T \underline{\underline{\epsilon}}_{z'} \hat{N}_{z'} \quad (7.40)$$

Matricialmente, podemos englobar esses dois conjuntos de relações ficando com:

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{x'y} & l_{x'z} \\ l_{y'x} & l_{y'y} & l_{y'z} \\ l_{z'x} & l_{z'y} & l_{z'z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{x'x} & l_{y'x} & l_{z'x} \\ l_{x'y} & l_{y'y} & l_{z'y} \\ l_{x'z} & l_{y'z} & l_{z'z} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

ou de forma simplificada:

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\underline{R}}^T \quad (7.42)$$

Esta expressão nos permite, dado $\underline{\underline{\epsilon}}$ segundo um sistema de eixos xyz obter $\underline{\underline{\epsilon}}$ referido ou medido noutro sistema de eixos $x'y'z'$. tendo em vista o caráter de matriz ortogonal de $\underline{\underline{R}}$ pode-se concluir que:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{\epsilon}}' \underline{\underline{R}} \quad (7.43)$$

As expressões acima mostradas representam ou definem a mudança ou transformação de um tensor de deformação referido a um sistema de eixos ortogonais quando modificamos, através de uma rotação, este sistema. Deve-se observar a semelhança com as expressões já obtidas no estudo da transformação do tensor de tensão.

7.6 Apêndices - Capítulo 6 - Flambagem

7.6.1 Dimensionamento à flambagem - AISC

O dimensionamento de pilares de aço com carga excêntrica pode ser feito como uma flexão composta adotando-se uma tensão admissível (σ_{adm}) obtida a partir da tensão de escoamento do aço (σ_y) pela seguinte relação:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{F.S.} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{lim}} \right)^2 \right]$$

onde F.S. designa o fator de segurança que deve ser adotado e que varia com o índice de esbeltez do pilar de acordo com a seguinte expressão:

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{\lambda}{\lambda_{lim}} - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{lim}} \right)^3$$

sendo o valor de λ_{lim} o valor limite de esbeltez obtido através da Hipérbole de Euler quando $\sigma_{crit} = \sigma_y/2$ e λ é o índice de esbeltez do pilar considerado.

7.6.2 Flambagem com Grandes Deformações

Finalmente, para examinar com mais acuidade o que ocorre com colunas sujeitas a compressão, podemos realizar um estudo mais apurado do problema, o que nos permite determinar como é o comportamento para cargas maiores que a carga de Euler.

Para este estudo, não podemos trabalhar com a expressão simplificada dada por:

$$-\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (7.44)$$

na qual o termo da direita é uma aproximação da expressão da curvatura quando $\frac{dy}{dx} \ll 1$, que é válida apenas na hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Quando esta aproximação não pode ser adotada, temos que substituir $\frac{d^2y}{dx^2}$ das equações diferenciais anteriores pelo valor correto da curvatura $\frac{d\theta}{ds}$.

Então, considerando:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}$$

ficamos, então, com a seguinte equação diferencial:

$$EI \frac{d\theta}{ds} + Py = 0$$

$$\frac{d\theta}{ds} + k^2 y = 0$$

Desenvolvendo esta equação diferencial, ficamos com:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 \sin\theta = 0$$

Obtemos para a flecha máxima por unidade de comprimento $\frac{\delta}{l}$ em $x = \frac{l}{2}$:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{2p}{\pi \sqrt{\frac{P}{P_{crit}}}}$$

onde p é uma variável auxiliar que depende das condições de contorno do problema.

Na Fig. 7.27 ilustramos o gráfico desta relação, que nos permite constatar o comportamento de uma coluna para cargas maiores que a carga crítica.

Na tabela abaixo indicamos alguns valores deste comportamento valendo apenas ressaltar a sua característica não-linear.

$\frac{P}{P_{crit}}$	1	1.0157	1.063	1.152
$\frac{\delta}{l}$	0	0.110	0.211	0.296

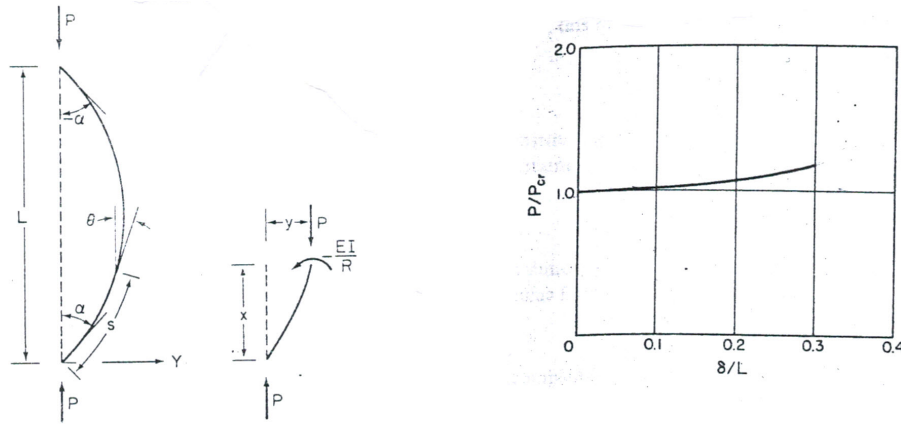


Figura 7.26: Comportamento pós-crítico de uma coluna

7.6.3 Ação simultânea - normal e momento fletor - Viga-Coluna

Apresentamos, neste item, o estudo de uma barra sob a ação simultânea de esforço normal e momento fletor com vistas a esclarecer os limites da aplicabilidade do princípio da superposição em casos de pilares submetidos a estes tipos de esforços.

Consideremos, para tanto, a barra mostrada na Fig. 7.27 sujeita a uma carga lateral Q e a um esforço de compressão P .

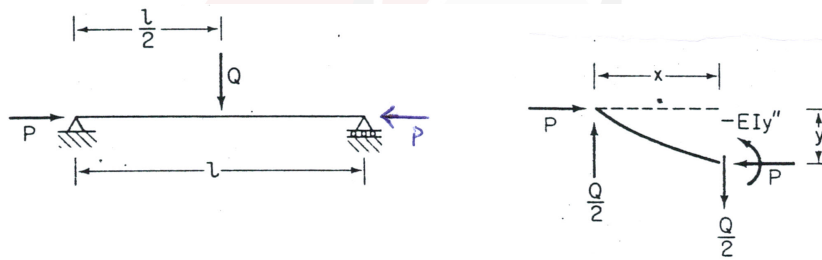


Figura 7.27: Barra sujeita a esforço normal e carga lateral

A expressão do momento fletor para esta viga é dada pelas seguintes equações:

$$M_1(x) = \frac{Qc}{l}x + Py \quad \text{para } 0 \leq x \leq l - c$$

$$M_2(x) = \frac{Q(l-c)}{l}(l-x) + Py \quad \text{para } l - c \leq x \leq l$$

As equações diferenciais que determinam os dois ramos da linha elástica para este caso são dadas por:

$$EIy_1'' = -M_1(x) = -\frac{Qc}{l}x - Py \quad (a)$$

$$EIy_2'' = -M_2(x) = -\frac{Q(l-c)}{l}(l-x) - Py \quad (b)$$

Fazendo, como nos casos das barras do estudo de carga crítica de Euler:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (7.45)$$

obtemos para o primeiro trecho a seguinte equação (a):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k^2 y_1 = -\frac{Qc}{EI}x \quad (7.46)$$

cujas soluções é dada por:

$$y_1 = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx - \frac{Qc}{Pl}x \quad (7.47)$$

e para o segundo trecho (equação (b)):

$$y_2 = C \cos kx + B \operatorname{sen} kx - \frac{Q(l-c)(l-x)}{Pl} \quad (7.48)$$

Neste caso, temos como condições de contorno as seguintes restrições:

$$y(x=0) = 0 \quad (7.49)$$

$$y(x=l) = 0 \quad (7.50)$$

Devemos também satisfazer às seguintes condições de compatibilidade que representam as restrições que as soluções tenham a mesma flecha e a mesma derivada (rotação) no ponto de aplicação da carga:

$$y_1(x=l-c) = y_2(x=l-c) \quad (7.51)$$

$$y_1'(x=l-c) = y_2'(x=l-c) \quad (7.52)$$

As soluções das equações diferenciais para cada trecho são dadas, respectivamente, por:

$$y_1 = \frac{Q \operatorname{sen} kc}{Pk \operatorname{sen} kl} \operatorname{sen} kx - \frac{Qc}{Pl}x \quad (7.53)$$

$$y_2 = \frac{Q \operatorname{sen} k(l-c)}{Pk \operatorname{sen} kl} \operatorname{sen} k(l-x) - \frac{Q(l-c)(l-x)}{Pl}x \quad (7.54)$$

Para o caso particular de uma carga lateral aplicada no meio do vão ($x = c = l/2$), temos que:

$$y\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{Q}{2Pk} \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right) \quad (7.55)$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3} \quad (7.56)$$

onde $u = \frac{kl}{2}$, o que nos permite escrever:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_0 \chi(u) \quad (7.57)$$

onde y_0 é o valor da flecha no meio do vão quando $P = 0$. Este valor é determinado pela equação da linha elástica para este caso, conforme visto no estudo e determinação da linha elástica:

$$y_0 = \frac{Ql^3}{48EI} \quad (7.58)$$

e a função $\chi(u)$ é dada por:

$$\chi(u) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (7.59)$$

onde

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (7.60)$$

é a carga crítica de Euler ou de flambagem, logo:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (7.61)$$

e observamos que, quando

$$P \rightarrow P_{cr} \Rightarrow y\left(\frac{l}{2}\right) \rightarrow \infty \quad (7.62)$$

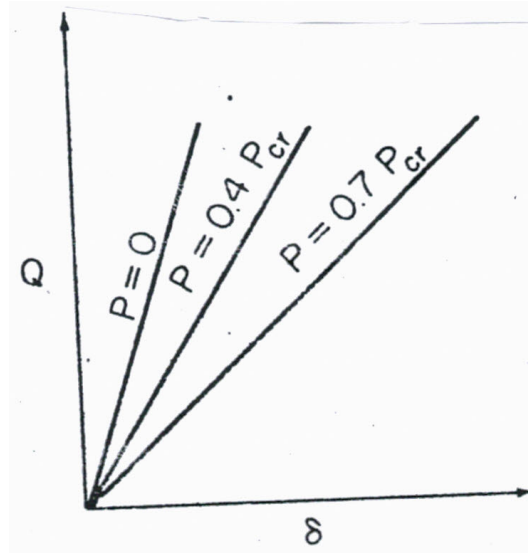


Figura 7.28: Variação da carga lateral com a flecha ($P \times y(l/2)$), sob a influência de esforço normal

$$P \rightarrow 0 \Rightarrow y\left(\frac{l}{2}\right) \rightarrow y_0 \quad (7.63)$$

Na Fig. 7.28 apresentamos o gráfico da variação da flecha no meio do vão com a carga lateral quando aplicamos nesta barra cargas de compressão medidas com relação ao valor da carga crítica para esta barra.

Desta figura podemos concluir que:

1 - Para um mesmo valor de Q , com o aumento de P , a viga perde rigidez a flexão lateral devido a atuação desta carga de compressão P .

2 - A reta obtida para o valor $P = 0$ é dada por $Q = \frac{48EI}{l^3}y$, resultado clássico da flexão (flecha no meio do vão para uma viga bi-apoiada com carregamento aplicado neste ponto).

7.6.4 Métodos numéricos para a determinação de cargas críticas

Método das Diferenças Finitas

Nesta seção discutimos e apresentamos os principais aspectos da metodologia denominada de método das diferenças finitas, largamente utilizada na resolução de equações diferenciais como aquelas que precisamos resolver para o cálculo de cargas críticas em barras comprimidas.

Este método tem sua aplicação indicada quando temos barras com seções e/ou materiais variáveis, o que pode tornar a solução das equações diferenciais aqui consideradas extremamente difícil e/ou impossível. A alta disponibilidade e eficiência dos recursos computacionais colocados atualmente fazem deste método uma ferramenta cada vez mais utilizada nesses casos.

Neste método, substituímos a equação diferencial por uma equação de diferenças finitas que, aplicadas a pontos discretos do domínio, permite-nos substituir a equação diferencial por um sistema de equações algébrico linear cuja solução são os valores da solução nestes pontos discretos escolhidos.

Diferentes e possíveis aproximações para o cálculo da derivada de y num desses pontos discretos x_i , que denominamos de $y'(x_i)$ podem ser determinadas a partir dos valores de y nos pontos vizinhos a este, que são os pontos x_{i+1} e x_{i-1} , da seguinte forma:

- Diferença “avançada” - forward

$$y'(x_i) \cong \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (7.64)$$

- Diferença “atrasada” - backward

$$y'(x_i) \cong \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (7.65)$$

- Diferença “central”

$$y'(x_i) \cong \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (7.66)$$

A derivada segunda, $y''(x_i)$, utilizando-se a aproximação de diferença central, pode também ser determinada como:

$$y''(x_i) \cong \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} \quad (7.67)$$

Determinação de cargas críticas

Passamos, agora, a aplicação do método das diferenças finitas a determinação de valores aproximados de cargas críticas nos restringindo, aqui, ao caso de barras bi-rotuladas. Neste caso, pretendemos resolver a seguinte equação diferencial:

$$y''(x) + \frac{P}{EI}y(x) = 0 \quad (7.68)$$

que, com $k^2 = \frac{P}{EI}$, é equivalente a:

$$y''(x) + k^2y(x) = 0 \quad (7.69)$$

Neste caso, substituiremos a Eq. 7.67 na equação diferencial acima, tendo como condições de contorno $y(0) = y(L) = 0$. Como buscamos resolver casos com inércia/material variável(is), a aplicação da aproximação de diferença central para nossa equação diferencial no ponto x_i , escreve-se:

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{Py(x_i)}{E(x_i)I(x_i)} = 0 \quad (7.70)$$

ou, de maneira mais reduzida:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} + \frac{Py_i}{E_i I_i} = 0 \quad (7.71)$$

No caso de determinação de carga crítica aqui tratado vemos que recaímos em sistemas de equações algébricas lineares que são sistemas homogêneos que requerem para que tenhamos soluções diferentes da trivial que o determinante da matriz deste sistema seja nulo o que então nos permite o cálculo dos valores aproximados da carga de Euler procurada. Além disto, é preciso ressaltar que quanto maior a quantidade de pontos em que dividimos a barra, este resultado muda e se aproxima cada vez mais do valor exato do problema. Todo o processo é ilustrado com um exemplo, mostrando-se inclusive, com este exemplo esta melhora na aproximação resultante da inclusão de mais pontos na divisão da barra.

Neste caso, seguimos o procedimento a seguir enunciado como roteiro a ser seguido.

1. Dividir o comprimento da barra ($0 \leq x \leq L$), em n partes: tantas quanto necessárias para uma boa determinação de nossa aproximação;
2. Aplicar a fórmula da diferença central (Eq. 7.71) nos pontos da divisão, obtendo um sistema de equações algébricas linear que relaciona os valores de y nos pontos da divisão;
3. Aplicar as condições de contorno do problema no sistema montado;
4. Resolver o sistema de equações algébricas obtido, determinando o valor da linha elástica nos pontos da divisão.

Exemplo de Aplicação

Consideramos aqui o caso de uma barra birrotulada de comprimento l e módulo de elasticidade constante E e inércia mínima I igual para todo o comprimento da barra. Inicialmente, dividimos a barra em dois trechos de comprimento igual a $l/2$, resultando, portanto em 3 pontos de coordenadas $x_0 = 0$, $x_1 = l/2$ e $x_2 = l$ nos quais as flechas são dadas por y_0 , $y_1 = l/2$ e y_2 . Aplicamos a Eq.7.71 para cada ponto de nossa divisão.

- Para o ponto $i = 0$, temos:

$$\frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{(\frac{l}{2})^2} + \frac{P}{EI}y_0 = 0$$

como o valor da flecha y_{-1} está fora da barra, esta equação deve ser descartada.

- Para o ponto $i = 1$, temos:

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(\frac{l}{2})^2} + \frac{P}{EI}y_1 = 0 \quad (7.72)$$

- Para o ponto $i = 2$, temos:

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{(\frac{l}{2})^2} + \frac{P}{EI}y_2 = 0$$

como o valor da flecha y_3 está fora da barra, esta equação deve ser descartada.

Utilizando-se, portanto, apenas a Eq. 7.72 e mais as condições de contorno para este problema, que são $y_0 = y_2 = 0$, obtemos imediatamente:

$$0 - 2y_1 + 0 + \frac{Pl^2}{4EI}y_1 = 0 \quad (7.73)$$

O que resulta em:

$$y_1 \left(\frac{Pl^2}{4EI} - 2 \right) = 0 \quad (7.74)$$

Que para ter solução de $y_1 \neq 0$ fornece:

$$\frac{Pl^2}{4EI} - 2 = 0 \Rightarrow P = \frac{8EI}{l^2} \quad (7.75)$$

Tendo em vista que a solução exata (analítica) para este caso é dada por $P_{crit} = \frac{pi^2 EI}{l^2}$, observa-se, assim, uma diferença de 19% em relação à solução exata para este caso.

Consideremos, agora, 3 divisões da barra em trechos de comprimento igual a $l/3$, resultando, portanto em 3 pontos de coordenadas $x_0 = 0$, $x_1 = l/3$, $x_2 = 2l/3$ e $x_3 = l$ nos quais as flechas são dadas por y_0 , y_1 , y_2 e y_3 . Aplicamos a Eq.7.71 nos pontos x_1 e x_2 de nossa divisão, apenas, pois para x_0 e x_3 recairemos em valores de deflexões fora da barra, como visto anteriormente. Assim, temos:

- Para o ponto $i = 1$:

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{\left(\frac{l}{3}\right)^2} + \frac{P}{EI}y_1 = 0 \quad (7.76)$$

- Para o ponto $i = 2$:

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{\left(\frac{l}{3}\right)^2} + \frac{P}{EI}y_2 = 0 \quad (7.77)$$

A aplicação das condições de contorno (no caso $y_0 = y_3 = 0$) resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (\lambda - 2)y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - (\lambda - 2)y_2 = 0 \end{cases}$$

onde $\lambda = \frac{P}{EI\left(\frac{l}{3}\right)^2}$. Este sistema para ter solução diferente da trivial requer que:

$$(\lambda - 2)^2 - 1 = 0$$

cuja menor solução fornece $P = \frac{9EI}{l^2}$.

Este resultado difere apenas em 9% da solução exata.

7.7 Apêndice - Estudo da Energia de Deformação

7.7.1 Introdução

- Objetivo: Estudar e determinar a quantidade de energia armazenada em corpos deformáveis como os que constituem as estruturas.
- Finalidade: métodos energéticos que permitem determinar, por exemplo, a posição de equilíbrio dessas estruturas (campo de deslocamentos, deformações e tensões); aplicação nos critérios de resistência;

7.7.2 Trabalho de uma força

Como modelo inicial para nosso estudo consideramos uma mola longitudinal que se deforma quando sujeita a uma carga F que a deforma quando seu valor vai de zero até o valor final F . Supomos:

a) Não há troca de calor com o meio ambiente.

b) O movimento de deformação da mola é lento de modo que desprezamos as forças de inércia e a energia cinética do movimento.

Chamando:

$W \rightarrow$ Trabalho desta força;

$U_T \rightarrow$ Energia interna acumulada sob a forma de energia de deformação;

$K \rightarrow$ Energia cinética, temos que:

$$W = U_T + K \quad (7.78)$$

A segunda hipótese anterior nos permite afirmar que $K = 0$, logo:

$$W = U_T \quad (7.79)$$

Sabemos que o trabalho de uma força pode ser obtido:

$$U = W = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.80)$$

ou:

$$U = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (7.81)$$

Aplicação ao caso de uma mola

No caso de uma mola:

$$W = U_T = \int_0^{x_f} F(x) dx \quad (7.82)$$

onde: $F \rightarrow$ Força necessária para produzir o alongamento x_f da mola. Logo:

$$W = U_T = \int_0^{x_f} F(x) dx = \int_0^{x_f} kx dx \quad (7.83)$$

já que $F(x) = kx$.

Temos então:

$$U_T = \frac{1}{2} kx_f^2 \quad (7.84)$$

ou, se chamamos $x_f = x$:

$$U_T = \frac{1}{2} kx^2 \quad (7.85)$$

Podemos ainda dizer que:

$$U_T = \frac{1}{2} Fx \quad (7.86)$$

Estas expressões constituem o teorema de Clayperon que estabelece que:

“Quando uma carga cresce progressivamente de zero até o seu valor final, o trabalho de deformação, em regime elástico linear, é a metade do que seria realizado se a carga agisse desde o início com o seu valor final atual”.

Caso de barras com Esforço normal (N) constante

Podemos imediatamente aplicar esta expressão ao caso de uma barra sujeita a um esforço normal constante já que esta tem comportamento similar ao de uma mola, tendo em vista que:

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} \rightarrow F = \frac{ES}{l} \Delta l \quad (7.87)$$

onde observamos que $k = \frac{ES}{l}$ e $x = \Delta l$.

Assim, teríamos para este caso:

$$W = U_T = \frac{1}{2} N \Delta l \quad (7.88)$$

com esforço normal $N = F$ e podemos afirmar que:

$$U_T = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{ES} \text{ ou } U_T = \frac{1}{2} N \Delta l \quad (7.89)$$

Expressões da energia em termos das tensões e deformações

Como $U_T = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{ES}$, multiplicando numerador e denominador por S :

$$U_T = \frac{1}{2} \frac{N^2 l S}{ES^2} \rightarrow U_T = \frac{N^2}{S^2} \frac{1}{2E} V \quad (7.90)$$

onde V é o volume da barra. Assim, podemos determinar para este caso a energia específica de deformação ou energia por unidade de volume, obtendo-se para esta:

$$\frac{dU_T}{dV} = \boxed{U = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E}} \dots \text{Energia específica de deformação} \quad (7.91)$$

Ou ainda (já que $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$):

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx}} \text{ ou } \boxed{U = \frac{1}{2} E \epsilon_{xx}^2} \quad (7.92)$$

Barras (curtas) a cortante constante

Examinamos em seguida o caso singular de uma barra curta sujeita a um esforço constante. Neste caso o teorema de Clayperon nos assegura que:

$$U_T = \frac{Qv}{2} \quad (7.93)$$

Assumindo γ pequeno $\rightarrow \gamma \cong tg\gamma = \frac{v}{h}$, temos:

$$U_T = \frac{Q\gamma h}{2} \quad (7.94)$$

que, multiplicada por S no numerador e denominador, fica:

$$U_T = \frac{Q\gamma V}{2S} \quad (7.95)$$

Logo a energia específica de deformação neste caso é dada por:

$$\frac{dU_T}{dV} = \boxed{u = \frac{Q\gamma}{2S}} \quad (7.96)$$

Supondo neste caso que $\tau = \frac{Q}{S}$ (peças curtas) e com a Lei de Hooke para cisalhamento $\gamma = \frac{\tau}{G}$. Obtemos então:

$$\boxed{U = \frac{1}{2G} \tau^2} \quad (7.97)$$

$$\boxed{U = \frac{\tau\gamma}{2}} \quad (7.98)$$

$$\boxed{U = \frac{G\gamma^2}{2}} \quad (7.99)$$

7.7.3 Energia de Deformação para um estado triaxial de tensões

Trabalho das Tensões normais

Para um prisma com tensão normal σ_{xx} considerando um prisma de comprimento dx e área $dydz$ temos:

$$dU_T^{\sigma_{xx}} = \underbrace{\sigma_{xx} dydz}_{\text{Força}} \underbrace{d\epsilon_{xx} dx}_{\text{alongamento}} \quad (7.100)$$

$$dU_T^{\sigma_{xx}} = \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} dx dy dz \quad (7.101)$$

$$dU_T^{\sigma_{xx}} = \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} dV \quad (7.102)$$

$$U_T^{\sigma_{xx}} = \int_V \left[\int_0^{\epsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} \right] dV \quad (7.103)$$

A energia específica de deformação neste caso pode ser dada então por:

$$U^{\sigma_{xx}} = \int_0^{\epsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} \quad (7.104)$$

Para as outras tensões (σ_{yy} e σ_{zz} obtemos:

$$U^{\sigma_{yy}} = \int_0^{\epsilon_{yy}} \sigma_{yy} d\epsilon_{yy} \quad (7.105)$$

$$U^{\sigma_{zz}} = \int_0^{\epsilon_{zz}} \sigma_{zz} d\epsilon_{zz} \quad (7.106)$$

e temos que:

$$U = \int_0^{\epsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} + \int_0^{\epsilon_{yy}} \sigma_{yy} d\epsilon_{yy} + \int_0^{\epsilon_{zz}} \sigma_{zz} d\epsilon_{zz} \quad (7.107)$$

onde ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{zz} dependem de σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} .

Trabalho das Tensões tangenciais

Analogamente teríamos para as tensões tangenciais considerando um prisma de comprimento dx e área $dydz$ com tensão tangencial τ_{xy} , temos:

$$dU_T^{\tau_{xy}} = \underbrace{\tau_{xy} dydz}_{\text{Força}} \underbrace{d\gamma_{xy} dx}_{\text{alongamento}} \quad (7.108)$$

que, por unidade de volume resulta em:

$$U^{\tau_{xy}} = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad (7.109)$$

Analogamente, podemos escrever para as outras duas tensões tangenciais τ_{xz} e τ_{yz} :

$$U^{\tau_{xz}} = \int_0^{\gamma_{xz}} \tau_{xz} d\gamma_{xz} \quad (7.110)$$

$$U^{\tau_{yz}} = \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} \quad (7.111)$$

Energia específica de deformação para um estado de tensão triaxial

A soma das parcelas individuais acima calculadas pode ser obtida da seguinte maneira:

$$U = \int \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} + \int \sigma_{yy} d\epsilon_{yy} + \int \sigma_{zz} d\epsilon_{zz} + \int \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \int \tau_{yz} d\gamma_{yz} \quad (7.112)$$

Essas parcelas devem ser somadas (integradas) quando as deformações variam de zero até o valor final. Obtemos então a partir da lei de Hooke generalizada:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{E} [\int \sigma_{xx} d\sigma_{xx} - \nu(d\sigma_{yy} + d\sigma_{zz})] \\ &+ \frac{1}{E} [\int \sigma_{yy} d\sigma_{yy} - \nu(d\sigma_{xx} + d\sigma_{zz})] \\ &+ \frac{1}{E} [\int \sigma_{zz} d\sigma_{zz} - \nu(d\sigma_{xx} + d\sigma_{yy})] \\ &+ \frac{1}{G} \int \tau_{xy} d\tau_{xy} + \frac{1}{G} \int \tau_{xz} d\tau_{xz} + \frac{1}{G} \int \tau_{yz} d\tau_{yz} \end{aligned} \quad (7.113)$$

Observando-se que:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sigma_{xx}}{E} d\sigma_{xx} &= \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2) \\ \int \nu \frac{\sigma_{xx}}{E} d\sigma_{yy} + \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} d\sigma_{xx} &= \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} \sigma_{yy}) \\ \int \frac{\tau_{xy}}{G} d\tau_{xy} &= \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2) \end{aligned} \quad (7.114)$$

Procedendo de modo similar com os demais termos podemos integrar o termo da direita quando as tensões variam de zero até seu valor final obtemos:

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{xx} \sigma_{zz}) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (7.115)$$

Utilizando novamente a lei de Hooke generalizada podemos escrever:

$$U = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})^2 + G(\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2) \quad (7.116)$$

Em termos das tensões principais:

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) \quad (7.117)$$

Densidade de Energia de Distorção

Tendo em vista que qualquer tensor de tensão $\underline{\underline{\sigma}}$ pode ser decomposto como:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_h + \underline{\underline{\sigma}}_D \quad (7.118)$$

$\underline{\underline{\sigma}}_h \rightarrow$ tensor de tensão hidrostático;

$\underline{\underline{\sigma}}_D \rightarrow$ tensor de tensão desviador.

Logo:

$$U = U_{hidro} + U_D \quad (7.119)$$

onde: $U_{hidro} \rightarrow$ Energia específica de deformação referente à variação de volume;

$U_D \rightarrow$ Energia específica de distorção.

Como:

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \sigma_h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.120)$$

com

$$\sigma_h = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (7.121)$$

obtemos para U_{hidro} :

$$U_{hidro} = \frac{1}{2E}(\sigma_h^2 + \sigma_h^2 + \sigma_h^2) - \frac{\nu}{E}3\sigma_h^2 \quad (7.122)$$

obtendo:

$$U_{hidro} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (7.123)$$

Obtém-se U_D pela diferença:

$$U_D = U - U_{hidro} \quad (7.124)$$

e temos que:

$$U_D = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (7.125)$$

7.7.4 Energia de deformação em função dos esforços em barras prismáticas

Tendo em vista a utilização das expressões do trabalho realizado pelos esforços em barras prismáticas e seu emprego em princípios tipo dos trabalhos virtuais, determinam-se a seguir os valores das energias de deformação em barras quando os esforços atuantes nestas são variáveis.

$$U_T = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{ES} \quad (\text{quando } N \text{ constante}) \quad (7.126)$$

- Barra sujeita a esforço normal variável

Para um trecho de barra sujeito a esforço axial (comprimento dx), generalizando as expressões anteriores, temos que:

$$U_T = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{N(x)^2}{ES} dx \quad (7.127)$$

- Barra sujeita a esforço cortante variável

$$U_T = \frac{Q\gamma h}{2} = \frac{Q\tau h}{2G} = \frac{Q^2 h}{2GS} \quad (\text{Quando } Q \text{ constante}) \quad (7.128)$$

$$U_T = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{Q(x)^2}{GS} dx \quad (7.129)$$

Para o caso de barras não curtas onde não é possível (devido à ocorrência do cisalhamento longitudinal) desprezar a concomitância da ação de Q com M (momento fletor) utilizamos:

$$U_T = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{kQ(x)^2}{GS} dx \quad (7.130)$$

- Barra sujeita a esforço de flexão

Para M (fletor) constante num trecho obtemos pelo teorema de Clayperon para este caso:

$$U_T = \frac{M\varphi}{2} \quad (7.131)$$

onde $\varphi \rightarrow$ é a rotação relativa entre as seções.

Neste caso tratamos a barra como uma mola a flexão isto é, para um trecho de viga de comprimento dx , admitindo-se $M = M(x)$ teríamos:

$$d\varphi = \frac{M}{EI} ds \cong \frac{M}{EI} dx \quad (7.132)$$

onde $ds \rightarrow$ é o elemento de comprimento de arco;

Assim obtemos:

$$U_T = \int_0^l \frac{1}{2} M(x) d\varphi = \int_0^l \frac{1}{2} M(x) \frac{M(x)}{EI} dx \quad (7.133)$$

$$U_T = \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx \quad (7.134)$$

- Barra sujeita a torção

Para uma barra sujeita a um momento torsor constante obtém-se:

$$U_T = \frac{1}{2}T\theta \quad (7.135)$$

$T \rightarrow$ momento torsor;

onde $\theta \rightarrow$ é a rotação relativa entre seções medida no plano da seção.

Para um trecho de comprimento dx teríamos:

$$d\theta = \frac{T(x)}{GI_t} dx \quad (7.136)$$

onde $I_t \rightarrow$ é o momento de inércia polar da seção;

$$U_T = \int_0^l \frac{1}{2}T(x)d\theta \quad (7.137)$$

$$U_T = \int_0^l \frac{T(x)^2}{2GI_t} dx \quad (7.138)$$

- Trabalho ou energia de deformação total

Somando-se as contribuições anteriores temos:

$$U_T = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{N(x)^2}{ES} dx + \int_0^l \frac{1}{2} \frac{kQ(x)^2}{GS} dx + \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx + \int_0^l \frac{T(x)^2}{2GI_t} dx \quad (7.139)$$

7.7.5 Cálculo do coeficiente k

Tendo em vista a diferença da distribuição das tensões de cisalhamento em barras curtas, onde esta tensão pode ser assumida como uniformemente distribuída pela seção em contraste com a distribuição parabólica do cisalhamento longitudinal em vigas, é usual no cálculo da parcela da energia ou do trabalho virtual associado ao cortante a inclusão de um parâmetro k conforme mostrado na seção anterior. Nesta seção buscamos a determinação deste coeficiente, que depende da forma da seção transversal da viga.

Vimos que para peças curtas a energia de deformação total acumulada na peça (U_{tot}) é dada por:

$$\tau = \frac{Q}{S} \Rightarrow U_{tot} = \int_0^l \frac{Q^2}{2GS} dx \quad (7.140)$$

Queremos utilizar esta mesma expressão (em função do esforço cortante) para a determinação da energia de deformação em vigas devido a este esforço cortante, sabendo que, neste caso, a distribuição de tensões na seção é dada por:

$$\tau = \frac{QM_s}{tI} \quad (7.141)$$

Assumimos que esta energia pode ser determinada, neste caso de vigas, definindo-se um coeficiente k de tal modo que possamos utilizar a expressão:

$$U = \int_0^l \frac{kQ^2}{2GS} dx \quad (7.142)$$

Para a determinação deste coeficiente partimos de que em ambos os casos a energia específica de deformação pode ser obtida por:

$$U = \frac{1}{2G} \tau^2 \quad (7.143)$$

Logo, a energia total de deformação pode ser calculada por:

$$U_{tot} = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_0^l \frac{1}{2G} \left\{ \int_z \int_y \tau^2 dy dz \right\} dx \quad (7.144)$$

Considerando a distribuição das tensões de cisalhamento em vigas, pode-se reescrever:

$$U_{tot} = \int_0^l \frac{1}{2G} \left\{ \int_z \int_y \frac{Q^2 M_s^2}{t^2 I^2} dy dz \right\} dx \quad (7.145)$$

como Q e I não variam no campo da seção podemos afirmar que:

$$U_{tot} = \int_0^l \frac{Q^2}{2G} \left\{ \frac{1}{I^2} \int_S \frac{M_s^2}{t^2} dS \right\} dx \quad (7.146)$$

Logo,

$$U_{tot} = \int_0^l k \frac{Q^2}{2GS} dx \quad (7.147)$$

com:

$$k = \frac{S}{I^2} \int_S \frac{M_s^2}{t^2} dS \quad (7.148)$$

Determinação do coeficiente k em seções retangulares

Para uma seção retangular $b \times h$, considerando a atuação do cortante Q_y podemos expressar o momento estático de um trecho que vai da ordenada y até $\frac{h}{2}$ sendo y distancia até a linha neutra da flexão como:

$$M_s = \left[\left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} + y \right] b \left(\frac{h}{2} - y \right) \quad (7.149)$$

que resulta em:

$$M_s = \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2) \quad (7.150)$$

Utilizando a expressão de k obtida anteriormente, considerando-se que neste caso $S = bh$ e que $I = \frac{bh^3}{12}$, temos:

$$k = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2} 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \int_0^b \left[\frac{b}{8} (h^2 - 4y^2) \right]^2 \frac{1}{b^2} dy dz \quad (7.151)$$

donde obtemos para seção retangular $k = 1,2$;

Podemos proceder de modo análogo e obtemos para seções circulares cheias $k = 1,11$ e, para seções circulares de parede delgada, $k = 2$.