RESOLUÇÃO DA 2ª LISTA DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

Alexandre Abrahão Cury[1] **e Flávia de Souza Bastos**[1]

[1]*Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional - Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de fora, Juiz de Fora, MG, Brasil*

Exercício 1:
a) Determinar o vetor tensão total $\underset{\sim}{\rho_n}$:
O vetor unitário normal ao plano é $1/3(2i + j + 2k)$.
Multiplicando o tensor pelo vetor unitário, temos:

$$\underset{\sim}{\rho_n} = \underset{\sim}{\sigma} \times \underset{\sim}{\hat{N}}$$

$$\underset{\sim}{\rho_n} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -60 \\ 0 & -60 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16,6667 \\ -50 \\ -16,6667 \end{pmatrix}$$

O módulo do vetor tensão total é dado por:

$$|\underset{\sim}{\rho_n}| = \sqrt{(16,6667)^2 + (-50)^2 + (-16,6667)^2}$$

$$|\underset{\sim}{\rho_n}| = 55,28 \text{ MPa}$$

b) Determinar as componentes do vetor normal e cisalhante neste mesmo plano.
A tensão normal é dada por:

$$\sigma_n = \underset{\sim}{\rho_n} \cdot \underset{\sim}{\hat{N}}$$

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 16,6667 & -50 & -16,6667 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_n = -16,67 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = \sqrt{(|\underset{\sim}{\rho_n}|)^2 - (\sigma_n)^2}$$

$$\tau_n = \sqrt{(55,2771)^2 - (-16,6667)^2}$$

$$\tau_n = 52,70 \text{ MPa}$$

c) Determinar as tensões e direções principais e esboçar o tricírculo de Mohr.

$$\sigma_e^3 - I_1.\sigma_e^2 + I_2.\sigma_e - I_3 = 0$$

$$I_1 = 25 - 30 + 5 = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -30 & -60 \\ -60 & 5 \end{vmatrix} = -4375$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -60 \\ 0 & -60 & 5 \end{vmatrix} = -93750$$

$$\sigma_e^3 - 4375\sigma_e + 93750 = 0$$

Uma das raízes da equação é 25, pois não existe tensão tangencial atuando no plano xy ($\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$). Assim, as outras raízes são facilmente encontradas e são dadas por:

$$\sigma_e = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = -75 \text{ MPa}$$

Por convenção:

$$\sigma_1 = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -75 \text{ MPa}$$

Direção principal 1.

$$\begin{vmatrix} 25-50 & 0 & 0 \\ 0 & -30-50 & -60 \\ 0 & -60 & 5-50 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que o vetor é unitário:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$l_1 = 0, m_1 = -0,6, n_1 = 0,8$$

Direção principal 2.

$$\begin{vmatrix} 25-25 & 0 & 0 \\ 0 & -30-25 & -60 \\ 0 & -60 & 5-25 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que o vetor é unitário:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$l_2 = 1, m_2 = 0, n_2 = 0$$

Direção principal 3.

$$\begin{vmatrix} 25-(-75) & 0 & 0 \\ 0 & -30-(-75) & -60 \\ 0 & -60 & 5-(-75) \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que o vetor é unitário:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$l_3 = 0, m_3 = 0,8, n_3 = 0,6$$

Verifique se as direções são perpendiculares entre si (produto escalar de dois a dois é nulo):

$$e_1 \perp e_2 \perp e_3$$

Encontrando os centros e raios dos Círculos de Mohr:

$$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{25 + (-75)}{2} = -25$$

$$C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{50 + (-75)}{2} = -12,5$$

$$C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{50 + 25}{2} = 37,5$$

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{25 - (-75)}{2} = 50$$

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{50 - (-75)}{2} = 62,5$$

$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{50 - 25}{2} = 12,5$$

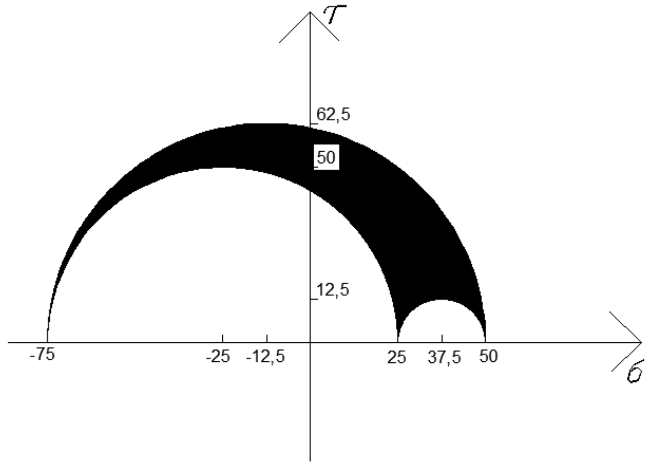

Figura 1: Tricírculo de Mohr.

Exercício 2:
Seja o tensor de tensões (valores em MPa) para um ponto P, no espaço (x,y,z),
a) Determinar as tensões e direções principais e esboçar o tricírculo de Mohr.

$$\sigma_e^3 - I_1.\sigma_e^2 + I_2.\sigma_e - I_3 = 0$$

$$I_1 = 57 + 50 + 43 = 150$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 57 & 24 \\ 24 & 43 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 24 \\ 0 & 43 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 57 & 0 \\ 0 & 50 \end{vmatrix} = 6875$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{vmatrix} = 93750$$

$$\sigma_e^3 - 150\sigma_e^2 + 6875\sigma_e - 93750 = 0$$

Uma das raízes da equação é 50, pois não existe tensão tangencial atuando no plano xy ($\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$). Assim, as outras raízes são facilmente encontradas e são dadas por:

$$\sigma_e = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = 75 \text{ MPa}$$

Por convenção:

$$\sigma_1 = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 25 \text{ MPa}$$

Direção principal 1:

$$\begin{vmatrix} 57-75 & 0 & 24 \\ 0 & 50-75 & 0 \\ 24 & 0 & 43-75 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que o vetor normal é unitário, tem-se:

$$l_1 = 0,8, m_1 = 0, n_1 = 0,6$$

Direção principal 2:

$$\begin{vmatrix} 57-50 & 0 & 24 \\ 0 & 50-50 & 0 \\ 24 & 0 & 43-50 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que o vetor normal é unitário, tem-se:

$$l_2 = 0, m_2 = 1, n_2 = 0$$

Direção principal 3:

$$\begin{vmatrix} 57-25 & 0 & 24 \\ 0 & 50-25 & 0 \\ 24 & 0 & 43-25 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que o vetor normal é unitário, tem-se:

$$l_3 = 0,6, m_3 = 0, n_3 = -0,8$$

Verifique se as direções são perpendiculares entre si (produto escalar de dois a dois é nulo):

$$e_1 \perp e_2 \perp e_3$$

Encontrando os centros e raios dos Círculos de Mohr:

$$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{50+25}{2} = 37,5$$

$$C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{75+25}{2} = 50$$

$$C_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{75 + 50}{2} = 62,5$$
$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{50 - 25}{2} = 12,5$$
$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{75 - 25}{2} = 25$$
$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{75 - 50}{2} = 12,5$$

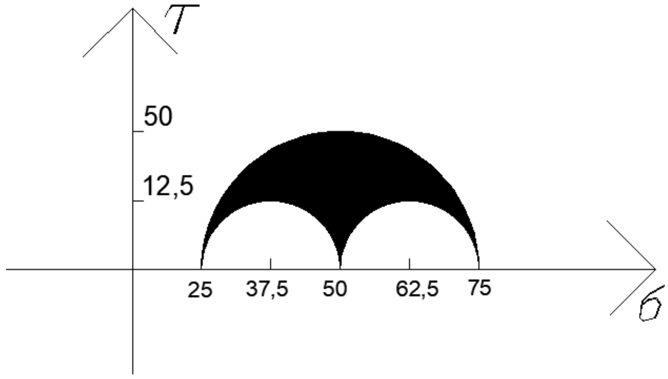

Figura 2: Tricírculo de Mohr.

b) Decompor o tensor em suas partes esférica (hidrostática) e desviadora:
Hidrostático:

$$\underset{\sim}{\sigma}_h = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}$$

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{75 + 50 + 25}{3} = 50$$

$$\underset{\sim}{\sigma}_h = \begin{vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix}.$$

Tensor Desviador:

$$\underset{\sim}{\sigma}_d = \underset{\sim}{\sigma}_{xyz} - \underset{\sim}{\sigma}_h$$

$$\begin{vmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

c) Para o plano do primeiro quadrante.

$$\sigma_{oct} = \frac{tr(\sigma)}{3} = \frac{57 + 50 + 43}{3} = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}\right]^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left[\frac{(75-50)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(75-25)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(50-25)}{2}\right]^2} = 20,41 \text{ MPa}$$

Exercício 3:
Cálculo do estado de deformação pela lei de Hooke generalizada:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2.\epsilon_{xy} \\ 2.\epsilon_{xz} \\ 2.\epsilon_{yz} \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{vmatrix}$$

Substituindo os valores:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2.\epsilon_{xy} \\ 2.\epsilon_{xz} \\ 2.\epsilon_{yz} \end{vmatrix} = \frac{1}{2,1 \cdot 10^3} \begin{vmatrix} 1 & -0,3 & -0,3 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3 & 1 & -0,3 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3 & -0,3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{vmatrix}$$

Temos, então:

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\epsilon}} = \begin{vmatrix} 3,1429 & 0 & 3,0952 \\ 0 & 1,9048 & 3,7143 \\ 3,0952 & 3,7143 & 0,6667 \end{vmatrix} .10^{-3}$$

Na direção PQ, temos:

$$\epsilon_{nn} = \underset{\sim}{\hat{N}}^T \underset{\sim}{\underset{\sim}{\epsilon}} \underset{\sim}{\hat{N}}$$

Onde:

$$\bar{N} = \bar{PQ} = (0,2,2) - (2,0,0) = (-2,2,2)$$

$$\underset{\sim}{\hat{N}} = \frac{\bar{N}}{||\bar{N}||} = \frac{(-2,2,2)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{(-2,2,2)}{\sqrt{12}} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\epsilon_{nn} = \begin{vmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3,1429 & 0 & 3,0952 \\ 0 & 1,9048 & 3,7143 \\ 3,0952 & 3,7143 & 0,6667 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} .10^{-3}$$

$$\epsilon_{nn} = \begin{vmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -0,0159\sqrt{3} & 1,8730\sqrt{3} & 0,4286\sqrt{3} \end{vmatrix} .10^{-3}$$

Resultando em:

$$\epsilon_{nn} = 2,3175 \cdot 10^{-3}$$

$$PQ_{novo} = PQ(1 + \epsilon_{nn}) = 2\sqrt{3} \cdot [1 + 2,3175 \cdot 10^{-3}] = 3,472 \; cm$$

Exercício 4:

O vetor normal ao plano em questão é dado por:

$$\bar{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\bar{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4i & 4j & 4k \end{pmatrix}$$

Vetor unitário normal ao plano:

$$\underset{\sim}{\hat{N}} = \frac{\bar{N}}{||\bar{N}||} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Multiplicando o tensor pelo vetor unitário normal ao plano, teremos o vetor tensão total:

$$\underset{\sim}{\rho_n} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & 0 \\ -12 & 0 & 24 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Exercício 5:
Este exercício pode ser pulado, pois o veremos em mais detalhes na matéria da 3a prova
Exercício 6:
Cálculos dos esforços internos na seção do engaste:

$$\begin{aligned} &N = 7,5 - 20 - 7,5 = -20 \text{ kN} \\ &Q_y = 10 \text{ kN} \\ &M_y = -(7,5 \cdot 0,1) - (20 \cdot 0,1) = -2,75 \text{ kNm} \\ &M_z = -(7,5 \cdot 0,2) + (20 \cdot 0,2) - (10 \cdot 2) = -17,5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

A expressão para o cálculo da tensão normal é dada por:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

Substituindo-se os valores, vem:

$$\sigma_x = \frac{-20 \cdot 10^3}{200 \cdot 400} + \frac{(-17,5) \cdot 10^6 y}{\frac{200 \cdot 400^3}{12}} - \frac{(-2,75) \cdot 10^6 z}{\frac{400 \cdot 200^3}{12}}$$

Coordenadas dos pontos analisados: A (-200,-100), B(-100,-50), C(0,0).
Substituindo-se os valores, vem:

$$\sigma_A = 2,000 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 0,875 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0,250 \text{ MPa}$$

A expressão para o cálculo da tensão tangencial é dada por:

$$\tau = \frac{QM_s}{bI_z}$$

As tensões nos pontos analisados são dadas por:

$$\tau_A = \frac{(10 \cdot 10^3) \cdot 0}{200 \cdot (\frac{200 \cdot 400^3}{12})} = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = \frac{(10 \cdot 10^3) \cdot (200 \cdot 100 \cdot 150)}{200 \cdot (\frac{200 \cdot 400^3}{12})} = 0,141 \text{ MPa}$$

$$\tau_C = \frac{(10 \cdot 10^3) \cdot (200 \cdot 200 \cdot 100)}{200 \cdot (\frac{200 \cdot 400^3}{12})} = 0,1875 \text{ MPa}$$

Tensor de tensões:
Para o ponto A:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Para o ponto B:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 & 0,141 \\ 0,141 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Para o ponto C:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0,1875 \\ 0,1875 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

As tensões principais são:

$$\sigma_{1,3} = (\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}) \pm \sqrt{(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Para o ponto A:

$$\sigma_1 = 2 \text{ MPa } e \; \sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

Para o ponto B:

$$\sigma_1 = 0,8972 \text{ MPa } e \; \sigma_3 = -0,0222 \text{ MPa}$$

Para o ponto C:

$$\sigma_1 = 0,1003 \text{ MPa } e \; \sigma_3 = -0,3503 \text{ MPa}$$

Círculos de Mohr:
Para o ponto A:

$$C_A = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1,00$$

$$R_A = \tau_{Amax} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{2 - 0}{2} = 1,00$$

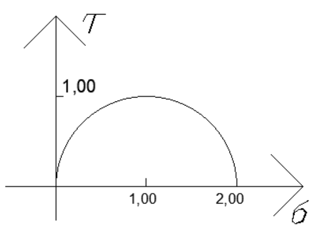

Figura 3: Círculo de Mohr

Para o ponto B:

$$C_B = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{0,8972 + (-0,0222)}{2} = 0,4375$$

$$R_B = \tau_{Bmax} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{0,8972 - (-0,0222)}{2} = 0,4597$$

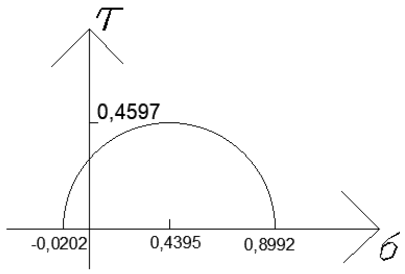

Figura 4: Círculo de Mohr

Para o ponto C:

$$C_C = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{0,1003 + (-0,3503)}{2} = -0,125$$

$$R_C = \tau_{Cmax} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{0,1003 - (-0,3503)}{2} = 0,2253$$

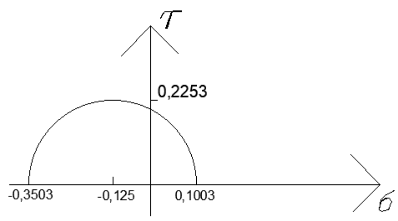

Figura 5: Círculo de Mohr

Exercício 7:
Cálculo das deformações

$$\epsilon_{AB} = \epsilon_{xx} \quad \text{e} \quad \epsilon_{AD} = \epsilon_{yy}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\text{Alongamento de } 0,2\text{mm}}{\text{Comprimento original de } 100\text{mm}} = \frac{0,2}{100} = +2 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\text{Encurtamento de } 0,08\text{mm}}{\text{Comprimento original de } 20\text{mm}} = \frac{-0,08}{20} = -4 \cdot 10^{-3}$$

Na direção AC, para $\theta = 45^o$:

$$\epsilon_{nn} = \frac{\text{Alongamento de } 0,03\text{mm}}{\text{Comprimento original de } 30\text{mm}} = \frac{0,03}{30} = +1 \cdot 10^{-3}$$

Usando a equação abaixo:

$$\epsilon_{nn} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}).\cos(2\theta)}{2} + \epsilon_{xy}.sen(2\theta)$$

e substituindo os valores encontrados, tem-se:

$$1 \cdot 10^{-3} = \frac{2 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{(2 \cdot 10^{-3} - (-4 \cdot 10^{-3})).\cos(2.45^o)}{2} + \epsilon_{xy}.sen(2.45^o)$$

Resolvendo, temos:

$$\epsilon_{xy} = +2 \cdot 10^{-3} \rightarrow \gamma_{xy} = +4 \cdot 10^{-3}$$

O cálculo das tensões será feito a partir da Lei de Hooke para o estado plano de deformação:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = E/(1-\nu^2) \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}$$

Substituindo os valores já encontrados, temos:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = 2,1 \cdot 10^{-3}/(1-0,3^2) \begin{vmatrix} 1 & 0,3 & 0 \\ 0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-0,3)}{2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} +2 \cdot 10^{-3} \\ -4 \cdot 10^{-3} \\ +4 \cdot 10^{-3} \end{vmatrix}$$

Resolvendo, temos que: $\sigma_{xx} = +1,85$ MPa, $\sigma_{yy} = -7,85$ MPa e $\tau_{xy} = +3,23$ MPa.

Exercício 8:

a) Analisando-se as tensões, o tensor será dado por:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -15 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

A tensão normal em x será calculada pela tensão em uma direção qualquer. No caso, a direção é a normal do plano que contém essa tensão e seu ângulo é 150^o:

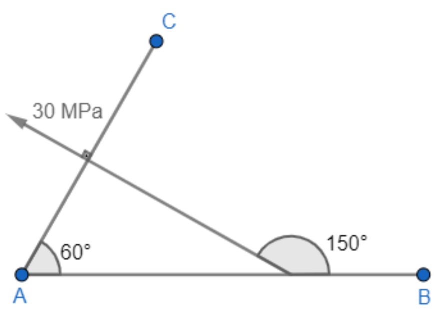

Figura 6: Ângulo da direção

Utilizando a expressão abaixo:

$$\sigma_{nn} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}).cos2\theta}{2} + \sigma_{xy}.sen2\theta$$

e substituindo os valores já encontrados, vem:

$$30 = \frac{\sigma_{xx} + 10}{2} - \frac{(\sigma_{xx} - 10).cos(2.150^o)}{2} + (-15).sen(2.150^o)$$

Resolvendo, tem-se: $\sigma_{xx} = +19,35$ MPa.
b) A variação do comprimento de um segmento na direção de AC que tenha comprimento inicial de 5 cm.
Utilizando a Lei de Hooke, vem:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = 1/E \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\nu)}{2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{vmatrix}$$

Substituindo-se os valores já encontrados, tem-se:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = 1/(2,1 \cdot 10^3) \begin{vmatrix} 1 & -0,3 & 0 \\ -0,3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+0,3)}{2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} +19,35 \\ +10 \\ -15 \end{vmatrix}$$

Resolvendo, vem: $\epsilon_{xx} = +7,78 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_{yy} = 2,00 \cdot 10^{-3}$ e
$\gamma_{xy} = -18,57 \cdot 10^{-3} \rightarrow \epsilon_{xy} = -9,29 \cdot 10^{-3}$.
Pela equação:

$$\epsilon_{nn} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}).cos2\theta}{2} + \epsilon_{xy}.sen2\theta$$

Substituindo-se os valores para $\theta = 60^o$, temos que: $\epsilon_{nn} = -4,597 \cdot 10^{-3}$
Assim:

$$\Delta_L = (\text{comprimento original}).\epsilon_{nn} = 50.(-4,597 \cdot 10^{-3}) = -0,23 \text{ mm}$$

Exercício 9:
Sendo o tensor de tensões:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{vmatrix} 45 & 30 \\ 30 & -60 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

As tensões principais são dadas por:

$$\sigma_{1,3} = (\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}) \pm \sqrt{(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_{1,3} = (\frac{45 + (-60)}{2}) \pm \sqrt{(\frac{45 - (-60)}{2})^2 + (30)^2}$$

Assim,

$$\sigma_1 = 52,965\text{MPa} \quad \text{e} \quad \sigma_3 = -67,965\text{MPa}$$

Direções principais:

$$tg2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

$$tg2\theta = \frac{2.30}{45 - (-60)} = 0,5714$$

$$2\theta = 29,7448^o \rightarrow \theta_1 = 14,8724^o.$$

$$\theta_3 = \theta_1 - 90^o \rightarrow \theta_3 = -75,1276^o$$

Ou

$$\theta_3 = \theta_1 + 90^o \rightarrow \theta_3 = 104,8724^o$$

b) A tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média são dadas por:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{52,965 - (-67,965)}{2} = 60,47 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{52,965 + (-67,965)}{2} = -7,5 \text{ MPa}$$

c) Esboço do círculo de Mohr.
Como já sabemos, o centro do círculo de Mohr é a tensão normal média e o seu raio, a tensão cisalhante máxima. Assim:

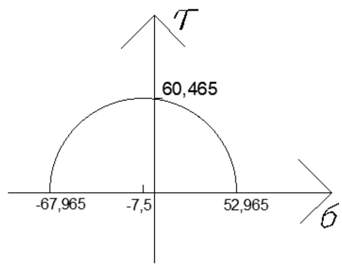

Figura 7: Círculo de Mohr

Exercício 10:
Para o tensor de deformação:

$$\underset{\sim}{\epsilon} = \begin{vmatrix} 480 & -350 \\ -350 & 140 \end{vmatrix} .10^{-6}$$

As deformações principais são calculadas a partir da equação abaixo:

$$\epsilon_{1,3} = (\frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2}) \pm \sqrt{(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2})^2 + (\epsilon_{xy})^2}$$

Resolvendo:

$$\epsilon_{1,3} = (\frac{480 + 140}{2}) \pm \sqrt{(\frac{480 - 140}{2})^2 + (-350)^2}$$

Assim,

$$\epsilon_1 = 553,978 \cdot 10^{-6} \quad \text{e} \quad \epsilon_3 = 66,022 \cdot 10^{-6}$$

Direções principais:

$$tg2\theta = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}$$

$$tg2\theta = \frac{2.(-175)}{480 - 140} = -1,0294$$

$$2\theta = -45,8303^o \rightarrow \theta_1 = -22,92^o$$

$$\theta_3 = \theta_1 + 90^o \rightarrow \theta_3 = 67,08^o$$

Observe que é indiferente somar ou subtrair 90^o para a determinação de θ_3.
A máxima tensão cisalhante é dada por:

$$\epsilon_{xy,max} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} = \frac{(553,978 - 66,022)\cdot 10^{-6}}{2} = 243,98 \cdot 10^{-6}$$

E a máxima distorção angular:

$$\gamma_{xy,max} = 2.\epsilon_{xy,max} = 2.243,98 \cdot 10^{-6} = 487,956 \cdot 10^{-6}$$

Exercício 11:
Considerado a direção OA como xx, temos que $\epsilon_A = \epsilon_{xx}$. Utilizando as equações de deformações em uma determinada direção:

$$\epsilon_{nn} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}).cos2\theta}{2} + \epsilon_{xy}.sen2\theta$$

E usando para as direções dos strain-gages B ($\theta = 40^o$) e C ($\theta = 140^o$), temos o sistema de equações:

$$1496 \cdot 10^{-6} = \frac{1100 \cdot 10^{-6} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{(1100 \cdot 10^{-6} + \epsilon_{yy}).cos(2.40^o)}{2} + \epsilon_{xy}.sen(2.40^o)$$

$$-39,44 \cdot 10^{-6} = \frac{1100 \cdot 10^{-6} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{(1100 \cdot 10^{-6} + \epsilon_{yy}).cos(2.140^o)}{2} + \epsilon_{xy}.sen(2.140^o)$$

Resolvendo, vem:

$$\epsilon_{yy} = 200 \cdot 10^{-6} \; e \; \epsilon_{xy} = 780 \cdot 10^{-6}$$

Utilizando a equação da lei de Hooke, podemos encontrar a tensão normal na direção x:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}.[\epsilon_{xx} + \nu.\epsilon_{yy}]$$

$$\sigma_{xx} = \frac{70 \cdot 10^3}{1 - 0,33^2}.[1100 \cdot 10^{-6} + 0,33.(200 \cdot 10^{-6})] = 91,6 \text{ MPa}$$

Exercício 12:
Cálculo dos esforços internos na seção:

$$N = 25 \cdot \cos 30^o = 21,65 \text{ kN}$$

$$Q_y = (8 \cdot 3) + 25 \cdot \sin 30^o = 36,5 \text{ kN}$$

$$M_z = -(8 \cdot 3 \cdot 1,5) - (25 \cdot \sin 30^o \cdot 3) = -73,5 \text{ kNm}$$

Expressão para o cálculo das tensões normais:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z y}{I_z}$$

Substituindo-se os valores, vem:

$$\sigma_x = \frac{(21,65).10^3}{3.200.10} + \frac{(-73,5).10^6.y}{(\frac{200.220^3}{12}) - (2.\frac{95.200^3}{12})}$$

Coordenadas dos pontos analisados: $A(-100,0), B(100,0), C(110,0)$.
Substituindo-se os valores, vem:

$$\sigma_A = 148,29 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -141,08 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -155,55 \text{ MPa}$$

Expressão para o cálculo das tensões tangenciais:

$$\tau = \frac{Q.M_s}{b.I_z}$$

Para o ponto A:

$$\tau_A = \frac{(36,5 \cdot 10^3).(200.10.105))}{10.((\frac{200.220^3}{12}) - (2.\frac{95.200^3}{12}))} = 15,09 \text{ MPa}$$

Para o ponto B:

$$\tau_B = \frac{(36,5 \cdot 10^3).(200.10.(105))}{10.((\frac{200.220^3}{12}) - (2.\frac{95.200^3}{12}))} = 15,09 \text{ MPa}$$

Para o ponto C:

$$\tau_C = \frac{(36,5 \cdot 10^3).0}{10.((\frac{200.220^3}{12}) - (2.\frac{95.200^3}{12}))} = 0 \text{ MPa}$$

Tensores de tensões:
Para o ponto A:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 148,29 & 15,09 \\ 15,09 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Para o ponto B:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -141,08 & 15,09 \\ 15,09 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Para o ponto C:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -155,55 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

As tensões principais são:

$$\sigma_{1,3} = (\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}) \pm \sqrt{(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2})^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Para o ponto A:

$$\sigma_1 = 149,8 \text{ MPa } e \ \sigma_3 = -1,52 \text{ MPa}$$

Para o ponto B:

$$\sigma_1 = 1,6 \text{ MPa } e \ \sigma_3 = -142,7 \text{ MPa}$$

Para o ponto C:

$$\sigma_1 = 0 \text{ MPa } e \ \sigma_3 = -155,55 \text{ MPa}$$

Círculos de Mohr:
Para o ponto A:

$$C_A = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{149,8 + (-1,52)}{2} = 74,15$$

$$R_A = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{149,8 - (-1,52)}{2} = 75,67$$

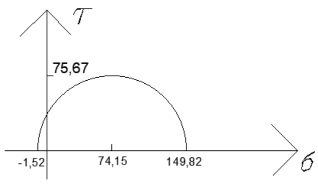

Figura 8: Círculo de Mohr

Para o ponto B:

$$C_B = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{1,6 + (-142,7)}{2} = -70,55$$

$$R_B = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1,6 - (-142,7)}{2} = 72,15$$

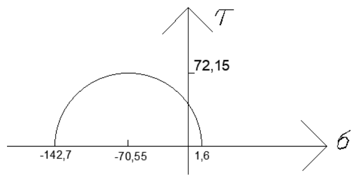

Figura 9: Círculo de Mohr

Para o ponto C:

$$C_C = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{0 + (-155,55)}{2} = -77,76$$

$$R_C = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{0 - (-155,55)}{2} = 77,76$$

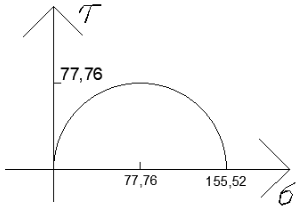

Figura 10: Círculo de Mohr