RESOLUÇÃO DA 1ª LISTA DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II

Prof. Alexandre Abrahão Cury[1] **e Profa. Flávia de Souza Bastos**[1]

[1]*Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional - Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de fora, Juiz de Fora, MG, Brasil*

Exercício 1:
Inicialmente, calculam-se os momentos de inércia em relação aos eixos $\bar{y}$ e $\bar{z}$ baricêntricos.

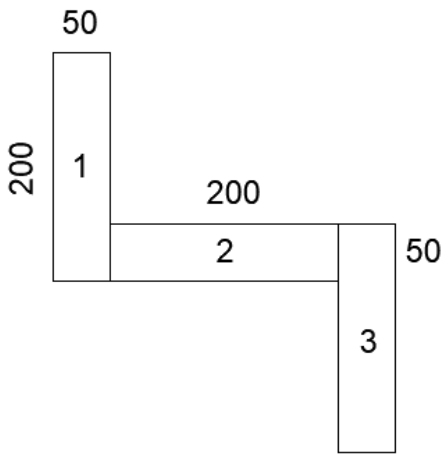

Figura 1: Divisão das áreas para aplicação do Teorema dos Eixos Paralelos.

$$I_{\bar{z}_i} = I_{z_i} + A_i.d^2_{y_i-\bar{y}}$$
$$I_{\bar{y}_i} = I_{y_i} + A_i.d^2_{z_i-\bar{z}}$$

Área 1:

$$I_{\bar{z}1} = \frac{50 \cdot 200^3}{12} + 50 \cdot 200 \cdot 75^2 = 89,5833 \cdot 10^6 \; mm^4$$
$$I_{\bar{y}1} = \frac{200 \cdot 50^3}{12} + 200 \cdot 50 \cdot 125^2 = 158,3333 \cdot 10^6 \; mm^4$$

Área 2:

$$I_{\bar{z}2} = \frac{200 \cdot 50^3}{12} = 2,0833 \cdot 10^6 \; mm^4$$
$$I_{\bar{y}2} = \frac{50 \cdot 200^3}{12} = 33,3333 \cdot 10^6 \; mm^4$$

Área 3:

$$I_{\bar{z}3} = 89,5833 \cdot 10^6 \; mm^4$$

$$I_{\bar{y}3} = 158,3333 \cdot 10^6 \; mm^4$$

Logo, realizando somatório das parcelas, temos:

$$I_{\bar{z}} = 181,25 \cdot 10^6 \; mm^4$$

$$I_{\bar{y}} = 350 \cdot 10^6 \; mm^4$$

Para o produto de inércia, teremos apenas a contribuição das áreas 1 e 3, dado que a área 2 possui seu CG coincidente com o CG da seção inteira, além de possuir produto de inércia nulo em relação aos eixos baricêntricos. Observe que, agora, utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos, as distâncias serão consideradas com seus respectivos sinais.

Assim, as contribuições das áreas 1 e 3 possuirão mesmo sinal (negativo).

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} + A \cdot d_y \cdot d_z$$

Área 1:

$$\begin{aligned} I_{y\bar{z}_1} &= I_{yz_1} + A_1 \cdot d_y \cdot d_z \\ I_{y\bar{z}_1} &= 0 + (50 \cdot 200 \cdot (-75) \cdot 125) \\ I_{y\bar{z}_1} &= -93,75 \cdot 10^6 \; mm^4 \end{aligned}$$

Área 3:

$$\begin{aligned} I_{y\bar{z}_3} &= I_{yz_3} + A_3 \cdot d_y \cdot d_z \\ I_{y\bar{z}_3} &= 0 + (50 \cdot 200 \cdot 75 \cdot (-125)) \\ I_{y\bar{z}_3} &= -93,75 \cdot 10^6 \; mm^4 \end{aligned}$$

Logo, realizando o somatório das parcelas, temos:

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = -187,50 \cdot 10^6 \; mm^4$$

a) Cálculo da tensão normal a partir da expressão:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\overline{z}} I_{\overline{y}} + M_{\overline{y}} I_{\overline{zy}})\overline{y} - (M_{\overline{y}} I_{\overline{z}} + M_{\overline{z}} I_{\overline{zy}})\overline{z}}{I_{\overline{y}} I_{\overline{z}} - I_{\overline{zy}}^2}$$

Como $M_y = 0$, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{(250 \cdot 10^3 \cdot 350 \cdot 10^6)\overline{y} - (250 \cdot 10^3 .(-187,5 \cdot 10^6))\overline{z}}{(181,25 \cdot 10^6 \cdot 350 \cdot 10^6) - (-187,5 \cdot 10^6)^2}$$

$$\sigma_x = (3,09 \cdot 10^{-3}\overline{y} + 1,66 \cdot 10^{-3}\overline{z}) \text{ MPa} \tag{1}$$

Inserindo as coordenadas dos pontos A ($\overline{y} = -175; \overline{z} = 150$) e B($\overline{y} = 25; \overline{z} = 150$) em relação aos eixos baricêntricos, temos:

$$\sigma_A = -0,293 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 0,326 \text{ MPa}$$

b) Para determinar a posição da LN, basta igualar a Eq. 1 a zero: $(\sigma_x = 0)$

$$3,09 \cdot 10^{-3}\bar{y} + 1,66 \cdot 10^{-3}\bar{z} = 0 \tag{2}$$

$$\bar{y} = \frac{(-1,66 \cdot 10^{-3})}{(3,09 \cdot 10^{-3})}\bar{z} \tag{3}$$

$$\bar{y} = -0,5357\bar{z} \tag{4}$$

O coeficiente angular da LN é dado por:

$$ang = \arctan(-0,5357) = -28,18^o \text{ (no sentido horário, a partir de } \bar{z}\text{)}$$

c) A projeção do momento fletor sobre a LN é dada por:

$$M_n = 250.sen(28,18^o) = 220,37 \text{ Nm}$$

d) Calculando o momento de inércia em relação a LN, tem-se:

$$I_n = I_{\bar{z}}.cos^2\theta + I_{\bar{y}}.sen^2\theta - I_{\bar{y}\bar{z}}.sen2\theta$$

$$I_n = 187,5 \cdot 10^6.cos^2(-28,18^o) + 350 \cdot 10^6.sen^2(-28,18^o) - (-187,5 \cdot 10^6.sen(2.(-28,18^o)))$$

$$I_n = 6,278 \cdot 10^7 \; mm^4$$

A distância do ponto A à LN é calculada pela equação:

$$d = \frac{|a.\bar{y} + b.\bar{z} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{5}$$

Reescrevendo a equação da LN (Eq.4) como:

$$\bar{y} + 0,5357\bar{z} = 0$$

temos que $a = 1$ e $b = 0,5357$.
Substituindo-se as coordenadas do ponto A na Eq.5, temos:

$$|u_A| = 83,43\text{mm}$$

A tensão normal, em módulo, será dada por:

$$\sigma = \frac{M_n.u}{I_n} = \frac{220,37 \cdot 10^3.83,4318}{62,7857 \cdot 10^6} = 0,293 \text{ MPa}$$

e) Os momentos principais de inércias são dados por:

$$I_{1,2} = \frac{I_{\bar{z}} + I_{\bar{y}}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}})^2 + 4I_{\bar{z}\bar{y}}^2)}$$

Assim:

$$I_{1,2} = \frac{181,25 \cdot 10^6 + 350 \cdot 10^6}{2} \pm \frac{\sqrt{(181,25 \cdot 10^6 - 350 \cdot 10^6)^2 + 4.(187,5 \cdot 10^6)^2)}}{2}$$

$$I_1 = 4,71 \cdot 10^8 \; mm^4$$

$$I_2 = 6,00 \cdot 10^7 \; mm^4$$

As direções principais são dadas por:

$$tg2\theta = \frac{-2.I_{\bar{z}\bar{y}}}{I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}}}$$

$$tg2\theta = \frac{-2.(-187,5 \cdot 10^6)}{(181,25 - 350) \cdot 10^6}$$

$$tg2\theta = -2,2222$$

Assim,

$$\theta_1 = -32,89^o$$

$$\theta_2 = 57,11^o$$

A partir da verificação

$$\frac{I_{\bar{z}\bar{y}}}{sen(2\theta)} \geq 0$$

conclui-se que:

$$\theta_1 => I_2 \equiv I_{\bar{z}}$$

$$\theta_2 => I_1 \equiv I_{\bar{y}}$$

f) A partir das respostas dos itens anteriores, tem-se que $\alpha = -57,11^o$ e $\beta = 4,71^o$ (vide Fig. 2).

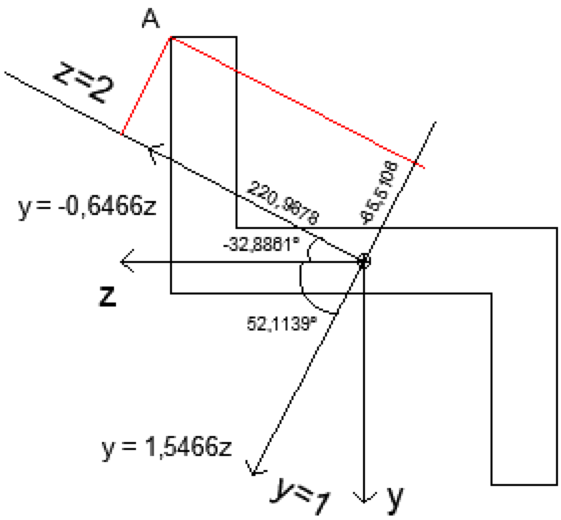

Figura 2: Marcação dos ângulos.

g) A decomposição dos momentos fletores em relação aos eixos principais será dada por:

$$M_z = 250.cos(32,8861^o) = 209,94 \; Nm$$

$$M_y = 250.sen(32,8861^o) = 135,74\ Nm$$

h) A tensão normal será calculada pela equação:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

Substituindo-se os valores encontrados anteriormente, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{(209,94 \cdot 10^3.4,71 \cdot 10^8)y - (135,74 \cdot 10^3.6,00 \cdot 10^7)z}{(4,71 \cdot 10^8.6,00 \cdot 10^7}$$

$$\sigma = 3,50 \cdot 10^{-3}y - 0,288 \cdot 10^{-3}z \text{ MPa}$$

As coordenadas do ponto A em relação aos eixos y e z principais podem ser calculadas a partir da matriz de rotação (vide Exemplo 3 da apostila).

$$y_A = -65,51\ mm$$

$$z_A = 220,98\ mm$$

$$\sigma_x = 3,5 \cdot 10^{-3}.(-65,51) - 0,288 \cdot 10^{-3}.(220,98) = -0,293\text{MPa}$$

Exercício 2:
Cálculo das propriedades geométricas da seção:

$$\bar{y} = \frac{A_1.y_1 + A_2.y_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{y} = \frac{(120.20).10 + (120.20).80}{120.20.2} = 45\ mm \tag{6}$$

O CG da seção se encontra à 45 mm acima da base da seção.
Pelo teorema dos eixos paralelos:

$$I_z = \sum I_{z_i} + A_i.d^2_{y_i - \bar{y}}$$

$$I_z = \frac{120.20^3}{12} + 2400.(10-45)^2 + \frac{20.120^3}{12} + 2400.(80-45)^2 = 8,84 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$I_y = \sum I_{y_i} + A_i.d^2_{z_i - \bar{z}}$$

$$I_y = \frac{120.20^3}{12} + \frac{20.120^3}{12} = 2,96 \cdot 10^6\ mm^4$$

Os momentos fletores na seção serão as reações de apoio multiplicadas pelo braço de alavanca (2 m) e decompostas segundo os eixos z e y.

$$M_y = \frac{-10}{2}.sen(30^o).2 = -5,00\ kNm$$

$$M_z = \frac{-10}{2}.cos(30^o).2 = 8,66\ kNm$$

Equacionando a tensão:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\overline{z}} I_{\overline{y}} + M_{\overline{y}} I_{\overline{zy}})\overline{y} - (M_{\overline{y}} I_{\overline{z}} + M_{\overline{z}} I_{\overline{zy}})\overline{z}}{I_{\overline{y}} I_{\overline{z}} - I^2_{\overline{zy}}}$$

Como a seção possui eixo de simetria, o produto de inércia de sua área é nulo em relação aos eixos baricêntricos que, por consequência, são também os principais de inércia. Assim, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{(M_z)y}{I_z} - \frac{(M_y)z}{I_y}$$
$$\sigma_x = \frac{(8,66 \cdot 10^6)y}{8,84 \cdot 10^6} - \frac{(-5 \cdot 10^6)z}{2,96 \cdot 10^6} = 0,9797y + 1,6892z \text{ [MPa]}$$

A equação da LN é dada por:

$$y = -1,7242z$$

cujo coeficiente angular é:

$$arctg(-1,7242) = -59,89^o$$

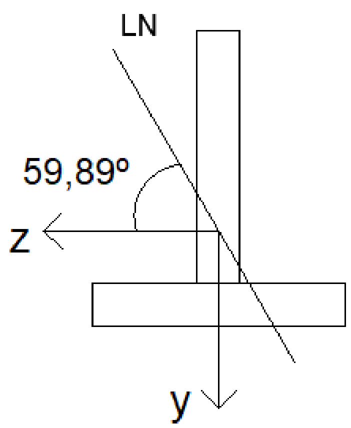

Figura 3: Posição da linha neutra

Inserindo as coordenadas dos pontos A(45;60) e B(-95;-10) em relação aos eixos baricêntricos, temos:

$$\sigma_A = 145,44 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -109,96 \text{ MPa}$$

Exercício 3:
a) A resultante das forças normais à seção é:

$$\sum N_x \rightarrow 10 - 25 - 50 - 20 = -85\text{[kN]} = -85 \cdot 10^3\text{[N]}$$

O momento fletor resultante na direção z é dado por:

$$\sum M_z \rightarrow -0,2 + 20 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,15 = 4,3\text{[kNm]} = 4,3 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

O momento fletor resultante na direção y é dado por:

$$\sum M_y \rightarrow -0,2 - 10 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,2 - 20 \cdot 0,2 = 1,2\text{[kNm]} = -1,2 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

Utilizando a regra da mão direita e as expressões:

$$M_z = N_x \cdot e_y \to e_y = \frac{M_z}{N_x} = \frac{4,3 \cdot 10^6}{-85 \cdot 10^3} = -50,5882\,mm = -5,06\,cm$$

$$-M_y = N_x \cdot e_z \to e_z = \frac{-M_y}{N_x} = \frac{1,2 \cdot 10^6}{-85 \cdot 10^3} = -14,12\,mm = -1,41\,cm$$

b) A expressão para o cálculo das tensões normais é dada por:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

A equação da LN é, portanto:

$$0 = \frac{-85 \cdot 10^3}{400 \cdot 300} + \frac{4,3 \cdot 10^6 \cdot y}{\frac{400 \cdot 300^3}{12}} - \frac{-1,2 \cdot 10^6 \cdot z}{\frac{300 \cdot 400^3}{12}}$$

$$0 = -708,3333 + 4,7778y + 0,75z$$

Para traçar a LN, basta encontrar os pontos onde ela corta os eixos ordenados. Assim, para $y = 0 \to z = 944,44$ mm e para $z = 0 \to y = 148,25$ mm.
c) A tensão máxima de tração será dada na extremidade tracionada mais distante da linha neutra, no ponto (y = 150; z = 200):

$$\sigma_t = (-708,3333 + 4,7778 \cdot (150) + 0,75 \cdot (200)) \cdot 10^{-3} = 0,158 \text{ MPa}$$

e a máxima compressão, no ponto (y = -150; z = -200):

$$\sigma_c = (-708,3333 + 4,7778 \cdot (-150) + 0,75 \cdot (-200)) \cdot 10^{-3} = -1,58 \text{ MPa}$$

Exercício 4:
O momento máximo na seção mais solicitada (meio do vão) é dado por:

$$M_z = R_1 \cdot \frac{L}{2} = \left(\frac{15 \cdot 10^3}{2}\right) \cdot \left(\frac{10000}{2}\right) = 37,5 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

A força de protensão causará um momento fletor em relação ao eixo transversal da seção. Essa força atua 200 mm abaixo do CG da seção.

$$M_{prot} = P[kN] \cdot d[m] = (P \cdot 0,2) \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

Com isso teremos um novo momento em relação à z na seção:

$$M_z^{novo} = M_z - M_{prot}$$
$$M_z^{novo} = (37,5 - 0,2P) \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

Assim, a equação para a tensão normal fica:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z^{novo} \cdot y}{I_z}$$
$$\sigma_x = \frac{-P \cdot 10^3}{200 \cdot 600} + \frac{(37,5 - 0,2P) \cdot 10^6 \cdot y}{\frac{200 \cdot 600^3}{12}}$$

Para a fibra inferior ($y = 300$ mm), onde a tensão é limitada em 1,125 MPa, temos que:

$$1,125 = \frac{-P \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^5} + \frac{(37,5 - 0,2P).10^6 \cdot 300}{3,6 \cdot 10^9}$$

Resolvendo, temos $P = 80$ kN.
Em seguida, calcula-se a tensão na fibra superior ($y = -300$ mm):

$$\sigma_x = \frac{-80 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^5} + \frac{(37,5 - 0,2.80).10^6 \cdot (-300)}{3,6 \cdot 10^9} = -2,458 \text{ MPa} \tag{7}$$

Por fim, a posição da LN é dada por:

$$\sigma_x = -0,6666 + 5,97 \cdot 10^{-3} y \rightarrow y = 111,66 \text{ [mm]}$$

Exercício 5:
a)Analisando-se por metro linear de comprimento:

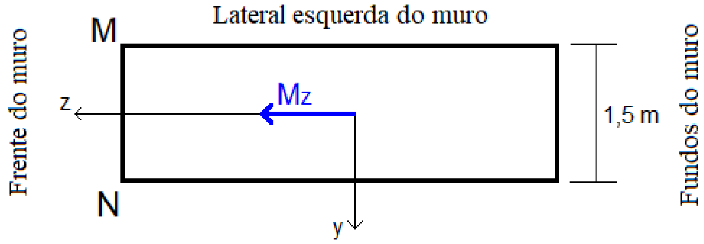

Figura 4: Vista superior do muro

Parcela relativa à força normal:

$$\overbrace{(20[kN/m^3]).(1,5[m]).(4,0[m]).(1,0[m])}^{Peso\ x\ Volume}$$

$$P = 120 \cdot 10^3 \text{ [N]}$$

Parcela relativa ao momento fletor:

$$\overbrace{(2500[N/m^2]).(4,0^2[m]).(\frac{4}{3}[m]).(1,0[m])}^{Empuxo\ de\ terra\ x\ braco\ de\ alavanca}$$

$$M_z = 53.333,33\text{[Nm]} = 53,33 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

A expressão para o cálculo das tensões normais é dada por:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z y}{I_z}$$

Na face lateral direita do muro, onde ele é mais tracionado (representado pelo ponto N), $y = 750mm$. Assim, a tensão normal é dada por:

$$\sigma_x = \frac{-120 \cdot 10^3}{1000 \cdot 1500} + \frac{53,33 \cdot 10^6 \cdot 750}{\frac{1000 \cdot 1500^3}{12}} = 0,062 \text{ MPa}$$

Na face lateral esquerda do muro, onde ele é mais comprimido (representado pelo ponto M), $y = -750mm$. Assim, a tensão normal é dada por:

$$\sigma_x = \frac{-120 \cdot 10^3}{1000 \cdot 1500} + \frac{53,33 \cdot 10^6 \cdot (-750)}{\frac{1000 \cdot 1500^3}{12}} = -0,222 \text{ MPa}$$

Por fim, a posição da LN é:

$$\sigma_x = -80 \cdot 10^{-3} + 0,1896 \cdot 10^{-3} y \rightarrow y = 421,94 \text{ mm}$$

b) Calculando os parâmetros em função de a:
Parcela relativa à força normal:

$$\overbrace{(20[kN/m^3]).(a[m]).(4,0[m]).(1,0[m])}^{Peso.Volume}$$

$$P = -80 \cdot a \cdot 10^3 \; [N]$$

$$M_z = 53.3333,33 [\text{Nm}] = 53,33 \cdot 10^6 \; [\text{Nmm}] \quad \text{Inalterado}$$

A área da seção é dada por:

$$A = 1 \cdot a \cdot 10^6 \; [mm^2]$$

e o momento de inércia da seção em relação à z:

$$I_z = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot (a \cdot 10^3)^3}{12} \; [mm^4]$$

A coordenada do ponto N é:

$$y = \frac{a \cdot 10^3}{2} \; [mm]$$

Equacionando para tensão normal nula em N, temos:

$$0 = \frac{-80a \cdot 10^3}{1 \cdot a \cdot 10^6} + \frac{53,33 \cdot 10^6 \cdot (\frac{a \cdot 10^3}{2})}{\frac{1 \cdot 10^3 \cdot a^3 \cdot 10^{(9)}}{12}}$$

Assim,

$$a = 2 \; m$$

Exercício 6:
a) Cálculo das propriedades geométricas da seção:
Momentos de inércia:

$$I_z = I_y = \frac{(30 \cdot 30^2)}{12} - 4 \cdot \left(\frac{10 \cdot 10^3}{12} + 10^2 \cdot 100 \right) = 24,16667 \cdot 10^3 \; cm^4$$

Área da seção:

$$A = 5 \cdot 100 = 500 \; cm^2$$

Raios de giração:

$$\rho_z^2 = \rho_y^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{24166,67}{500} = 48,33\ cm^2$$

Determinação dos centros de carga:
Temos a equação de uma reta que não passa pela origem sendo:

$$1 + \frac{y_c}{\rho_z^2}y + \frac{z_c}{\rho_y^2}z = 0$$

Para $y_0 = \pm 15$:

$$1 + \frac{y_c}{48,33} \cdot (\pm 15) + \frac{z_c}{48,33}(0) = 0$$
$$y_c = \frac{-48,33}{\pm 15} = \pm 3,22\ cm$$

Para $z_0 = \pm 15$:

$$1 + \frac{y_c}{48,33} \cdot (0) + \frac{z_c}{48,33}(\pm 15) = 0$$
$$z_c = \frac{-48,33}{\pm 15} = \pm 3,22\ cm$$

Equação da LN que passa pelos pontos de coordenadas (-15;5) e (-5;15):
-Coeficiente angular:

$$m = \frac{(y_1 - y_2)}{(z_2 - z_1)} = \frac{-15 - (-5)}{15 - 5} = 1$$

-Equação fundamental da reta, aplicada no ponto (-15;5):

$$y - y_0 = m(z - z_0)$$
$$y - (-15) = 1(z - 5)$$
$$y = z - 20$$

Determinação dos centros de carga:
Para $y = 0$ e $z = 20$:

$$1 + \frac{y_c}{48,33} \cdot (0) + \frac{z_c}{48,33}(20) = 0$$
$$z_c = \frac{-48,33}{20} = -2,42\ cm$$

Para $z = 0$ e $y = -20$:

$$1 + \frac{y_c}{48,33} \cdot (-20) + \frac{z_c}{48,33}(0) = 0$$
$$y_c = \frac{-48,33}{-20} = +2,42\ cm$$

b) Cálculo das propriedades geométricas da seção:
Momentos de inércia:

$$I_z = I_y = \frac{(30 \cdot 30^2)}{12} - 4 \cdot (\frac{10 \cdot 10^3}{12} + 10^2 \cdot 100) - \frac{5 \cdot 5^3}{12} = 24,11458 \cdot 10^3\ cm^2$$

Área da seção:

$$A = 5 \cdot 100 - 5^2 = 475\ cm^2$$

Raios de giração:

$$\rho_z^2 = \rho_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{2411458}{475} = 50,77\ cm^2$$

Determinação dos centros de carga:
Para $y_0 = \pm 15$:

$$1 + \frac{y_c}{50,77} \cdot (\pm 15) + \frac{z_c}{50,77}(0) = 0$$
$$y_c = \frac{-50,77}{\pm 15} = \pm 3,38\ cm$$

Para $z_0 = \pm 15$:

$$1 + \frac{y_c}{50,77} \cdot (0) + \frac{z_c}{50,77}(\pm 15) = 0$$
$$z_c = \frac{-50,77}{\pm 15} = \pm 3,38\ cm$$

Equação da LN que passa pelos pontos de coordenadas (-15;5) e (-5;15):

$$y = z - 20$$

Para $y = 0$ e $z = 20$:

$$1 + \frac{y_c}{50,77} \cdot (0) + \frac{z_c}{50,77}(20) = 0$$
$$z_c = \frac{-50,77}{20} = -2,54\ cm$$

Para $z = 0$ e $y = -20$:

$$1 + \frac{y_c}{50,77} \cdot (-20) + \frac{z_c}{50,77}(0) = 0$$
$$y_c = \frac{-50,77}{-20} = +2,54\ cm$$

Exercício 7:
a) Encontrando o CG da seção:

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i.y_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{(20 \cdot 100) \cdot 90 + (60 \cdot 20) \cdot 50 + (20 \cdot 60) \cdot 10}{20 \cdot 100 + 60 \cdot 20 \cdot 2} = 57,3\ mm$$

Cálculo dos momentos de inércia:

$$I_z = \sum I_{z_i} + A_i.d^2_{y_i - \bar{y}}$$

$$I_z = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + (60 \cdot 20) \cdot 47,3^2 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + (20 \cdot 60) \cdot 7,3^2 + \frac{100 \cdot 20^3}{12} + (20 \cdot 100) \cdot 32,7^2 = 5,35 \cdot 10^6\ cm^4$$

$$I_y = \sum I_{y_i} + A_i.d^2_{z_i-\bar{z}}$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 60^3}{12} + \frac{60 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 100^3}{12} = 2,07 \cdot 10^6\ cm^4$$

Área de seção:

$$A = 4400\ cm^2$$

Raios de giração:

$$\rho_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{5,353942 \cdot 10^6}{4400} = 1216,8\ cm^2$$

$$\rho_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{2,066667 \cdot 10^6}{4400} = 469,7\ cm^2$$

Determinação do centro de carga a partir da equação segmentária da LN:

$$1 + \frac{z_c z}{\rho_y} + \frac{y_c y}{\rho_z} = 0$$

Substituindo as coordenadas do ponto A na equação acima, vem:

$$1 + \frac{z_c(50)}{469,7} + \frac{y_c(-22,7)}{1216,8} = 0$$

e as do ponto B:

$$1 + \frac{z_c(30)}{469,7} + \frac{y_c(57,3)}{1216,8} = 0$$

Resolvendo o sistema acima, tem-se $z_c = -10,6$ mm e $y_c = -6,86$ mm.
b) As tensões normais são calculadas a partir da expressão:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{N y_c y}{I_z} + \frac{N z_c z}{I_y}$$

Substituindo-se os valores, vem:

$$\sigma_x = \frac{10000}{4400} + \frac{10000 \cdot (-6,86) y}{5,35 \cdot 10^6} + \frac{10000 \cdot (-10,6) z}{2,07 \cdot 10^6}$$

Para ponto A ($y = -22,7; z = 50$) $\rightarrow$ 0 MPa
Para ponto G ($y = 0; z = 0$) $\rightarrow$ 2,27 MPa
Para ponto C ($y = -42,7; z = -50$) $\rightarrow$ 5,38 MPa

Exercício 8:

O CG se encontra no ponto (35;25)
Cálculo dos momentos de inércia:

$$I_z = \sum I_{z_i} + A_i.d^2_{y_i-\bar{y}}$$

$$I_z = \frac{20 \cdot 100^3}{12} + (100 \cdot 20) \cdot 15^2 + \frac{60 \cdot 20^3}{12} + (60 \cdot 20) \cdot 25^2 = 2,91 \cdot 10^6\ mm^4$$

$$I_y = \sum I_{y_i} + A_i.d^2_{z_i-\bar{z}}$$

$$I_y = \frac{100 \cdot 20^3}{12} + (100 \cdot 20) \cdot 15^2 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + (60 \cdot 20) \cdot 25^2 = 1,63 \cdot 10^6 \; mm^4$$

Produto de inércia:

$$I_{yz} = \sum d_{yi}.d_{zi}.A_i$$

$$I_{yz} = (50-35) \cdot (10-25) \cdot (100 \cdot 20) + (10-35) \cdot (50-25) \cdot (60 \cdot 20) = -1,2 \cdot 10^6 \; mm^4$$

$$I_{yz} = -1,2 \cdot 10^6 \; mm^4$$

Substituindo-se as coordenadas do ponto A(-65;5) na expressão, vem:

$$\frac{1}{3200} + \frac{(1,63 \cdot 10^6 \cdot y_c - (-1,2 \cdot 10^6) \cdot z_c) \cdot (-65) - (-1,2 \cdot 10^6 \cdot y_c - 2,91 \cdot 10^6 \cdot z_c) \cdot (5)}{1,63 \cdot 10^6 \cdot 2,91 \cdot 10^6 - (-1,2 \cdot 10^6)^2} = 0$$

Substituindo-se as coordenadas do ponto B(15;-55) na expressão, vem:

$$\frac{1}{3200} + \frac{(1,63 \cdot 10^6 \cdot y_c - (-1,2 \cdot 10^6) \cdot z_c) \cdot (15) - (-1,2 \cdot 10^6 \cdot y_c - 2,91 \cdot 10^6 \cdot z_c) \cdot (-55)}{1,63 \cdot 10^6 \cdot 2,91 \cdot 10^6 - (-1,2 \cdot 10^6)^2} = 0$$

Resolvendo-se o sistema, tem-se $y_c = 7,00$ mm e $z_c = 5,19$ mm.