

UFJF - Professores Elson Toledo e Alexandre Cury  
 MAC003 - Resistência dos Materiais II  
 LISTA DE EXERCÍCIOS 02

1. Seja o tensor de tensões (valores em MPa) para um ponto P, no espaço  $(x, y, z)$ , mostrado abaixo. Pede-se:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -60 \\ 0 & -60 & 5 \end{bmatrix}$$

- a) Determinar o vetor tensão total  $\rho_n$  no plano cujo normal unitário é  $\underline{n} = \frac{1}{3}(2\underline{i} + \underline{j} + 2\underline{k})$ .  
 b) Determinar as componentes de tensão normal e de cisalhamento  $\sigma_n$  e  $\tau_n$ , neste mesmo plano.  
 c) Determinar as tensões e direções principais e esboçar o tricírculo de Mohr.

**Respostas:**

- a)  $\rho_n = \frac{1}{3}(50\underline{i} - 150\underline{j} - 50\underline{k})$   
 b)  $\sigma_n = -16,67$  MPa;  $\tau_n = 52,7$  MPa

c)  $\sigma_1 = 50$  MPa     $e_1 = \left\{ 0 \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \right\}$   
 $\sigma_2 = 25$  MPa     $e_2 = \left\{ 1 \quad 0 \quad 0 \right\}$   
 $\sigma_3 = -75$  MPa     $e_3 = \left\{ 0 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \right\}$

2. Seja o tensor de tensões (valores em MPa) para um ponto P, no espaço  $(x, y, z)$ , mostrado abaixo. Pede-se:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 57 & 0 & 24 \\ 0 & 50 & 0 \\ 24 & 0 & 43 \end{bmatrix}$$

- a) Determinar as tensões e direções principais e esboçar o tricírculo de Mohr.  
 b) Decompor o tensor em suas partes esférica (hidrostática) e desviadora.  
 c) Definindo-se planos octaédricos como sendo planos de igual inclinação em relação às direções principais em torno de um ponto, pede-se determinar as tensões normal e tangencial octaédrica em torno deste ponto P. Utilize o plano octaédrico cuja normal esteja no primeiro quadrante do triedro formado pelas direções principais.

**Respostas:**

a)  $\sigma_1 = 75$  MPa     $e_3 = \left\{ \frac{4}{5} \quad 0 \quad \frac{3}{5} \right\}$   
 $\sigma_2 = 50$  MPa     $e_2 = \left\{ 0 \quad 1 \quad 0 \right\}$   
 $\sigma_3 = 25$  MPa     $e_1 = \left\{ \frac{3}{5} \quad 0 \quad -\frac{4}{5} \right\}$

b)  $\underline{\underline{\sigma}}_E = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$  MPa,  $\underline{\underline{\sigma}}_D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{bmatrix}$  MPa

c)  $\sigma_{oct} = 50$  MPa e  $\tau_{oct} = 20,41$  MPa.

3. Sabendo-se que o estado de tensões em torno de um ponto é dado pelas tensões indicadas na Figura 1. Determine o valor do novo comprimento que liga os pontos P e Q indicados nesta figura, considerando  $E = 2,10$  GPa e  $\nu = 0,3$ .

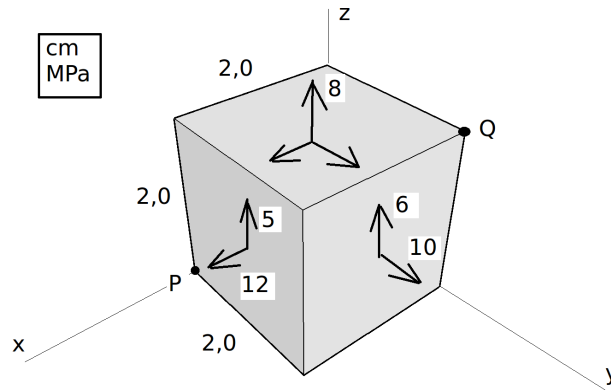


Figura 1

**Resposta:** 34,72 mm.

4. Seja o tensor de tensões (valores em MPa) para um ponto P, no espaço  $(x, y, z)$ , mostrado abaixo.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 \\ -12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Pede-se determinar o vetor tensão total  $\underline{\rho}_n$  associado à direção normal ao plano que passa pelos pontos A, B e C do cubo de 2 cm de aresta mostrado na Figura 2.

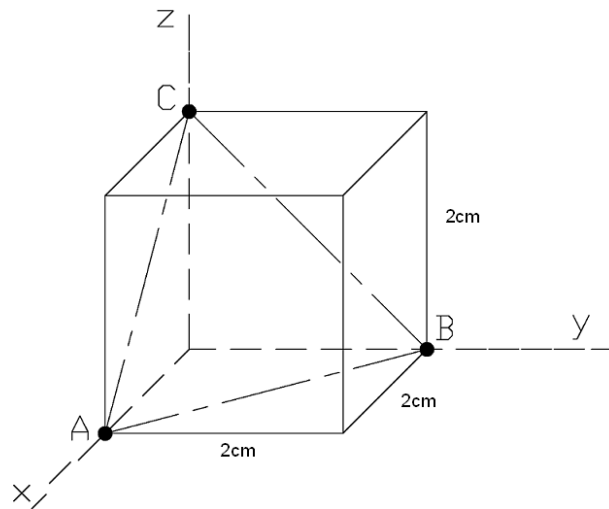


Figura 2

**Resposta:**  $\underline{\rho}_n = \{2\sqrt{3}\underline{i} + 2\sqrt{3}\underline{j} + 4\sqrt{3}\underline{k}\}$

5. Sabe-se que o estado de tensão num ponto é dado pelo tensor de tensões cujas componentes são  $\sigma_{xx} = 50$ ,  $\sigma_{yy} = 20$ ,  $\tau_{xz} = -30$ ,  $\tau_{yz} = 10$ ,  $\tau_{xy} = \sigma_{zz} = 0$  (valores em MPa). Considerando-se que:

a) no critério da máxima tensão normal, para que um ponto seja considerado numa situação estável, é necessário que os valores extremos das tensões normais atuantes no ponto estejam no intervalo definido por  $\sigma_c \leq \sigma_{max} \leq \sigma_t$ , onde  $\sigma_c$  e  $\sigma_t$  são os valores máximos de compressão e tração, respectivamente, obtidos em ensaios de laboratório.

b) no critério da máxima tensão tangencial, a situação de estabilidade corresponde a verificar a desigualdade  $\tau_{max} \leq \tau_{adm}$ , onde  $\tau_{adm}$  é o valor da máxima tensão tangencial verificada num ensaio de tração obtida a partir do valor de  $\sigma_t$ .

Assim, pede-se verificar a estabilidade deste ponto segundo cada um destes critérios supracitados, considerando:  $\sigma_t = 70$  MPa e  $|\sigma_c| = 20$  MPa.

**Respostas:**

Tensões principais:  $\sigma_1 = 64,47$  MPa,  $\sigma_2 = 21,86$  MPa e  $\sigma_3 = -16,32$  MPa.

a) Estável, pois  $20 < \sigma_1 < 70$ .

b) Instável, pois  $\tau_{max} = 40,39$  MPa  $>$   $\tau_{adm} = 35$  MPa.

6. Para a viga mostrada na Figura 3, determine os círculos de Mohr para os pontos A, B, e C. Calcule, também, o valor da máxima tensão tangencial em cada um destes pontos.

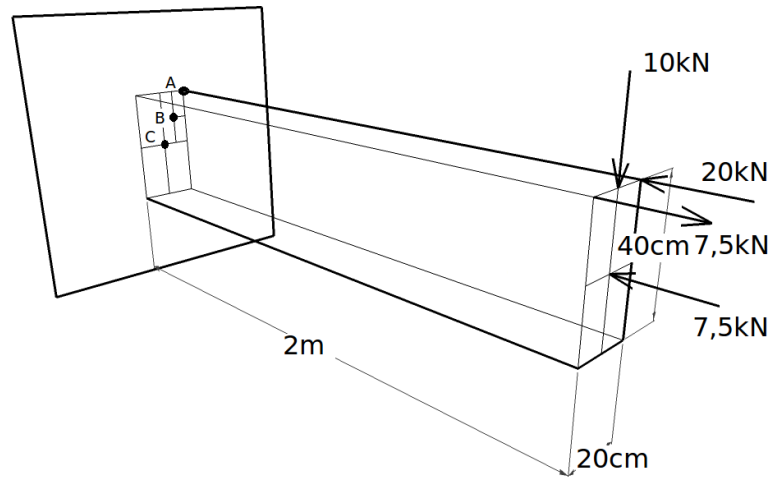


Figura 3

**Respostas:**

- Ponto A:  $\sigma_x = 2$  MPa,  $\sigma_y = 0$  e  $\tau_{xy} = 0$ . Logo,  $\sigma_1 = 2$  MPa,  $\sigma_3 = 0$  e  $\tau_{max} = 1$  MPa.

- Ponto B:  $\sigma_x = 0,875$  MPa,  $\sigma_y = 0$  e  $\tau_{xy} = 0,141$  MPa. Logo,  $\sigma_1 = 0,897$  MPa,  $\sigma_3 = -0,022$  MPa e  $\tau_{max} = 0,460$  MPa.

- Ponto C:  $\sigma_x = -0,25$  MPa,  $\sigma_y = 0$  e  $\tau_{xy} = 0,188$  MPa. Logo,  $\sigma_1 = 0,10$  MPa,  $\sigma_3 = -0,35$  MPa e  $\tau_{max} = 0,225$  MPa.

7. Mediu-se, em torno de um ponto A, de um corpo, conforme apresentado na Figura 4, os comprimentos  $AB = 10$  cm,  $AC = 3$  cm e  $AD = 2$  cm. Após terem sido feitas estas medições, este corpo foi submetido à ação de carregamento externo, constatando-se as seguintes variações de comprimentos nestes segmentos: os segmentos  $AB$  e  $AC$  sofreram alongamentos de 0.2 mm e 0.03 mm, respectivamente, e o segmento  $AD$  sofreu um encurtamento de 0.08 mm.

Tomando a direção do segmento  $AB$  como direção  $x$ , pede-se determinar as componentes do tensor de deformação no ponto A e as tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ .

Dados:  $E = 2,10$  GPa e  $\nu = 0.3$ .

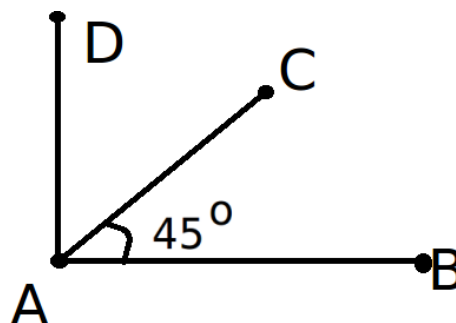


Figura 4

**Respostas:**

$$\epsilon_{xx} = 2 \times 10^{-3}, \epsilon_{yy} = -4 \times 10^{-3}, \epsilon_{xy} = 2 \times 10^{-3}, \sigma_{xx} = 1,846 \text{ MPa}, \sigma_{yy} = -7,846 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 3,231 \text{ MPa}.$$

8. Sabendo-se que um ponto em estado plano de tensões está sujeito às tensões conforme mostra a Figura 5, pede-se:

a) O tensor de tensões que atua neste ponto, tomando-se a direção AB como  $x$ ;

b) A variação do comprimento de um segmento na direção de AC que tenha comprimento inicial de 5 cm.

Dados:  $E = 2,10 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0.3$ .

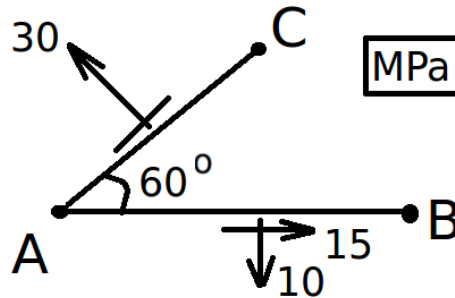


Figura 5

**Respostas:**

a)  $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 19,35 & -15 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$

b) -0,23 mm.

9. O estado plano de tensões em um ponto é mostrado na Figura 6. Pede-se:

(a) Calcular as tensões principais.

(b) Calcular a tensão de cisalhamento máxima e a tensão normal média.

(c) Esboçar o círculo de Mohr.

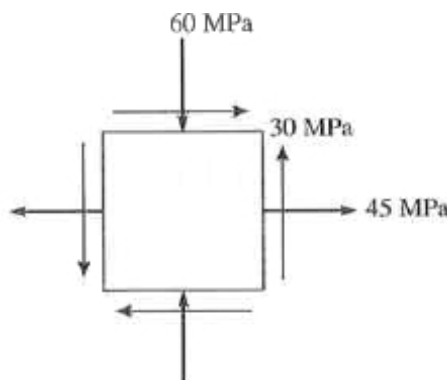


Figura 6

**Respostas:**

a)  $\sigma_1 = 52,97 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 = -67,97 \text{ MPa}$ ,  $\theta_1 = 14,87^\circ$ ,  $\theta_3 = -75,13^\circ$ .

b)  $\tau_{max} = 60,47 \text{ MPa}$  e  $\sigma_{med} = -7,50 \text{ MPa}$ .

10. O estado plano de deformações em um ponto tem componentes  $\epsilon_{xx} = 480 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_{yy} = 140 \times 10^{-6}$ ,  $\gamma_{xy} = -350 \times 10^{-6}$ . Determinar as deformações e respectivas direções principais e as deformações por cisalhamento máximas no plano  $x - y$ .

**Respostas:**

$$\epsilon_1 = 554 \times 10^{-6}, \epsilon_3 = 66 \times 10^{-6}, \theta_1 = -22,9^\circ, \theta_3 = 67,1^\circ, \gamma_{max} = 488 \times 10^{-6}.$$

11. As deformações na superfície de um dispositivo feito de alumínio ( $E = 70 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0.33$ ) foram medidas por uma roseta de strain-gages mostrada na Figura 7. As deformações medidas foram  $\epsilon_A = 1100 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_B = 1496 \times 10^{-6}$ ,  $\epsilon_C = -39.44 \times 10^{-6}$ . Determine as componentes do tensor de deformações e a tensão normal na direção  $x$ .

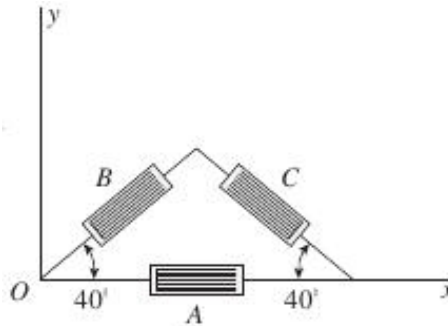


Figura 7

**Respostas:**

$$\epsilon_{xx} = 1100 \times 10^{-6}, \epsilon_{yy} = 200 \times 10^{-6}, \epsilon_{xy} = 780 \times 10^{-6}, \sigma_{xx} = 91,6 \text{ MPa}.$$

12. Uma viga engastada e livre está sujeita às cargas mostradas na Figura 8. Determine as tensões principais nos pontos A, B e C. Esboce, também, os círculos de Mohr para cada um destes pontos.

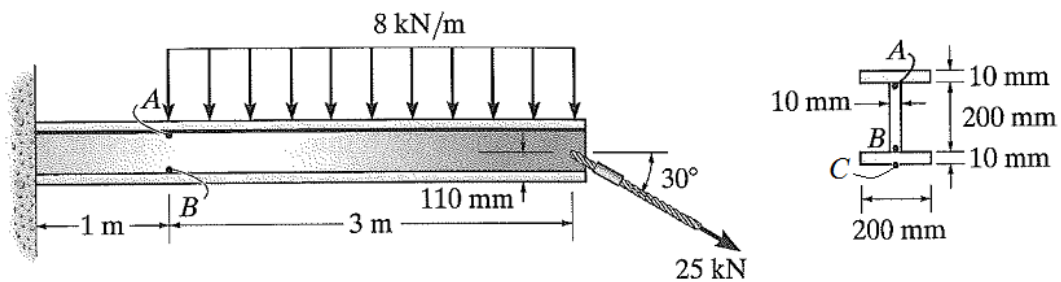


Figura 8

**Respostas:**

- Ponto A:  $\sigma_1 = 149,8 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 = -1,52 \text{ MPa}$  e  $\tau_{max} = 75,67 \text{ MPa}$ .
- Ponto B:  $\sigma_1 = 1,60 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_3 = -142,7 \text{ MPa}$  e  $\tau_{max} = 72,13 \text{ MPa}$ .
- Ponto C:  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = -155,55 \text{ MPa}$  e  $\tau_{max} = 77,77 \text{ MPa}$ .