Flambagem

Cálculo da carga crítica via MDF

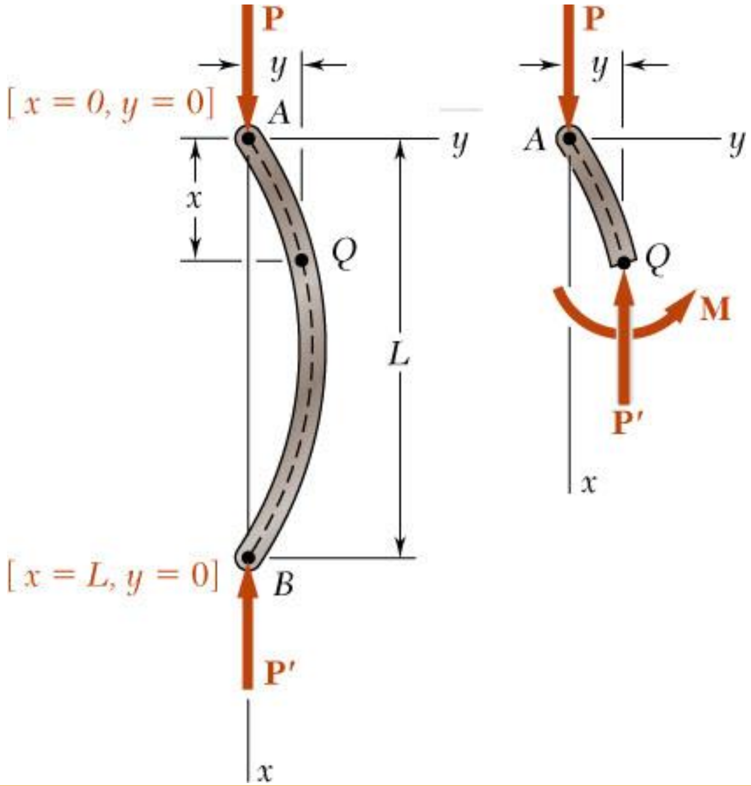
PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Nas aulas anteriores, vimos como avaliar a carga crítica de Euler para colunas sujeitas a carregamento axial e para diversas condições de apoio.

A formulação original para a avaliação desta carga é dada por:



$$M(x) = Py$$

Da teoria da flexão, sabemos que a deflexão (flecha) é calculada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Equação diferencial de equilíbrio:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{P}{EI}y(x)=0 \qquad \text{ou} \qquad EI\frac{d^2y(x)}{dx^2}+Py(x)=0$$

Vimos que a solução para esta EDO, adotando-se as condições de contorno mostradas anteriormente, é dada por:

$$\underbrace{y(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)}_{\text{1ª configuração de equilíbrio}} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{P_{crit}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}}_{\text{carga crítica}}$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

As expressões anteriores são usadas para colunas cuja seção transversal e material **não variam** ao longo do comprimento.

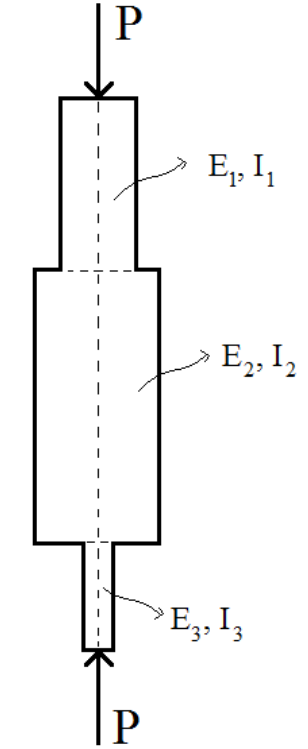
Casos em que há mudança brusca ou mesmo contínua do momento de inércia ou do módulo de elasticidade longitudinal do material **não** são contemplados pela expressão da carga crítica de Euler.

Desta forma, em última análise, precisaríamos resolver uma EDO demasiadamente complicada, a saber:

$$\frac{d}{dx}\left(E(x)I(x)\frac{dy(x)}{dx}\right)+Py(x)=0$$

Alternativamente, podemos resolver a equação acima utilizando-se um procedimento numérico a fim de se encontrar uma solução aproximada para tal EDO.

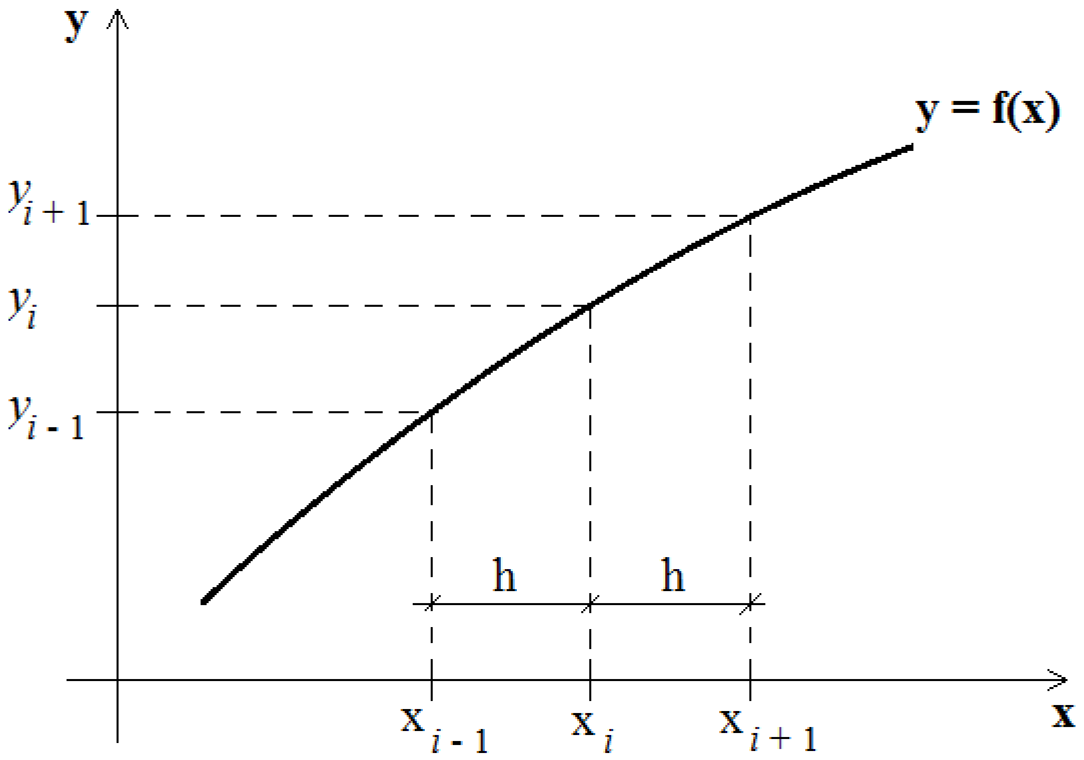
Exemplo:



Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

O Método das Diferenças Finitas (MDF)

O MDF é um método muito utilizado para a resolução de equações diferenciais. O MDF se baseia na aproximação de derivadas por meio de diferenças finitas, obtidas a partir das séries Taylor.



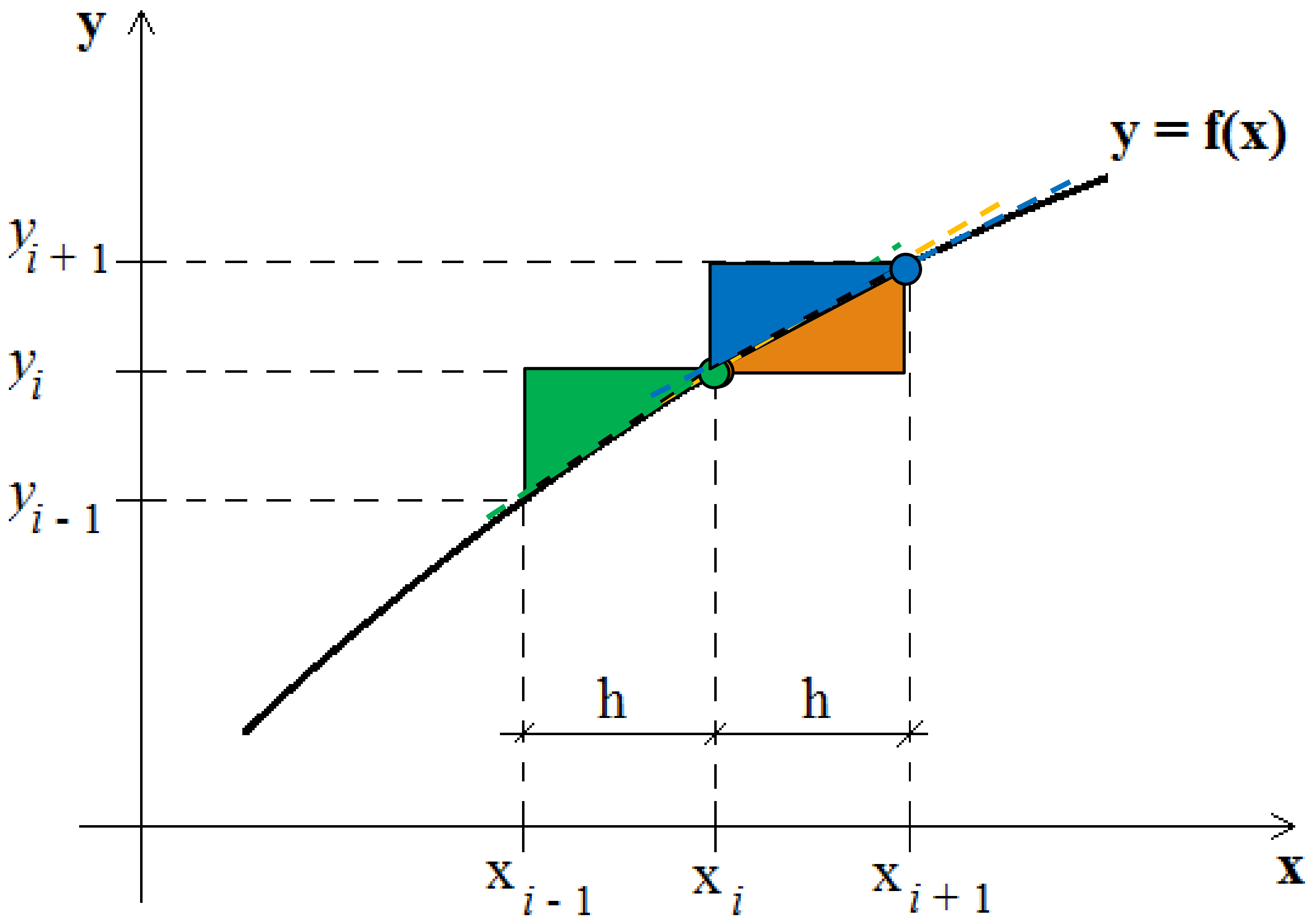
Seja uma função y = f(x) qualquer mostrada na figura ao lado.

É possível avaliar suas derivadas y'(x) e y''(x) num ponto x_i qualquer, usando os valores da função original y(x)?

Usando o MDF, sim!

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

<u>O Método das Diferenças Finitas (MDF)</u>



A derivada 1ª de y(x) no ponto x_i pode ser calculada como:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{ou} \quad \boxed{y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}} \quad \text{(I)}$$

De maneira semelhante, pode-se dizer que:

$$\boxed{y_{i+1}' = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}} \quad \text{(II)}$$

Extrapolando o raciocínio, pode-se escrever a derivada 2ª de y(x) em função das derivadas primeiras:

$$\boxed{y_i'' = \frac{y_{i+1}' - y_i'}{x_{i+1} - x_i}} \quad \text{(III)}$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

<u>O Método das Diferenças Finitas (MDF)</u>

Do slide anterior, temos:

$$\boxed{y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}} \quad \text{(I)} \qquad \boxed{y_{i+1}' = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}} \quad \text{(II)} \qquad \boxed{y_i'' = \frac{y_{i+1}' - y_i'}{x_{i+1} - x_i}} \quad \text{(III)}$$

Substituindo as equações I e II, em III, e considerando-se que $h = x_{i+1} - x_i$ e $h = x_i - x_{i-1}$, vem:

$$y_i'' = \frac{\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right) - \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)}{h} \Rightarrow \boxed{y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}}$$

A expressão acima nos permite calcular o valor aproximado da derivada segunda de uma função, conhecendo-se seus valores em 3 pontos: "passado", "presente" e "futuro".

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

<u>O Método das Diferenças Finitas (MDF)</u>

Voltando à EDO original:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{P}{EI}y(x)=0 \quad \Rightarrow \quad y_i''+\frac{P}{E_iI_i}y_i=0$$

Usando a expressão obtida anteriormente para a derivada segunda, vem:

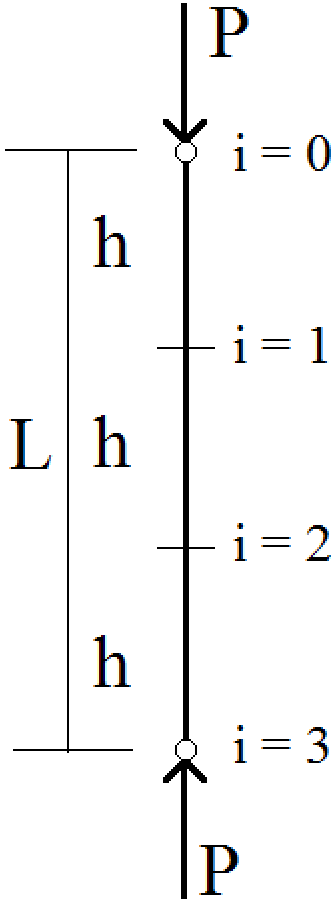
$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+\frac{P}{E_iI_i}y_i=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+k_i^2y_i=0$$

$$y_{i-1}-(2-h^2k_i^2)y_i+y_{i+1}=0$$

Ou, de forma mais compacta: $\boxed{y_{i-1}-\alpha_i\, y_i+y_{i+1}=0}$ onde: $\alpha=(2-h^2k_i^2)=\left(2-h^2\frac{P}{E_iI_i}\right)$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exemplo 1: Calcular o valor da carga crítica para uma coluna de comprimento L, utilizando 3 divisões de comprimento (3 elementos, 4 nós). Considere EI constante ao longo de todo o comprimento.



$$y_{i-1} - \alpha\, y_i + y_{i+1} = 0$$

Para i = 0: $y_{-1} - \alpha\, y_0 + y_1 = 0$ ⇨ Não serve, pois o ponto i = -1 está fora da coluna!

Para i = 1: $y_0 - \alpha\, y_1 + y_2 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 2: $y_1 - \alpha\, y_2 + y_3 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 3: $y_2 - \alpha\, y_3 + y_4 = 0$ ⇨ Não serve, pois o ponto i = 4 está fora da coluna!

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

$$\begin{cases} y_0 - \alpha\, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha\, y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

Sendo *y* o valor da deflexão lateral em um ponto *i*, conclui-se que: $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$

Assim, ficamos com o seguinte sistema: $\begin{cases} -\alpha\, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha\, y_2 = 0 \end{cases}$

Para que este sistema possua solução diferente da trivial, é necessário que o determinante principal seja nulo, isto é:

$$\det A = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Assim, tem-se: $\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm 1$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

$\boxed{\text{Para } \alpha = -1:}$ $\quad 2 - h^2k^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad h^2k^2 = 3 \Rightarrow k^2 = \dfrac{3}{h^2} = \dfrac{3}{(L/3)^2} = \dfrac{27}{L^2}$

Sendo $k^2 = \dfrac{P}{EI}$, a solução é dada por: $\cancel{P = \dfrac{27EI}{L^2}}$

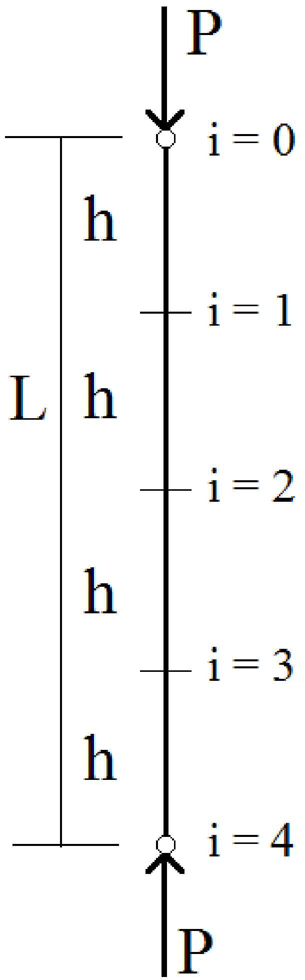
$\boxed{\text{Para } \alpha = 1:}$ $\quad 2 - h^2k^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad h^2k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{(L/3)^2} = \dfrac{9}{L^2}$

Sendo $k^2 = \dfrac{P}{EI}$, a solução é dada por: $\boxed{P = \dfrac{9EI}{L^2}}$ $\Rightarrow$ Solução correta: carga crítica!

O valor da carga crítica SEMPRE será obtido a partir da maior raiz do polinômio!

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exemplo 2: Idem ao Exemplo 1, mas utilizando 4 divisões de comprimento (4 elementos, 5 nós).



$$y_{i-1} - \alpha\, y_i + y_{i+1} = 0$$

Para i = 0: $y_{-1} - \alpha\, y_0 + y_1 = 0$ ⇨ Não serve, pois o ponto i = -1 está fora da coluna!

Para i = 1: $y_0 - \alpha\, y_1 + y_2 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 2: $y_1 - \alpha\, y_2 + y_3 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 3: $y_2 - \alpha\, y_3 + y_4 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 4: $y_3 - \alpha\, y_4 + y_5 = 0$ ⇨ Não serve, pois o ponto i = 5 está fora da coluna!

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

$$\begin{cases} y_0 - \alpha\, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha\, y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - \alpha\, y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$$

Sendo *y* o valor da deflexão lateral em um ponto *i*, conclui-se que: $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$

Assim, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha\, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha\, y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - \alpha\, y_3 = 0 \end{cases}$$

Para que este sistema possua solução diferente da trivial, é necessário que o determinante principal seja nulo, isto é:

$$\det A = \begin{vmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Assim, tem-se: $-\alpha^3 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

$\boxed{\text{Para } \alpha = \sqrt{2}:}$ $2 - h^2k^2 = \sqrt{2}$ ⟹ $h^2k^2 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow k^2 = \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{h^2} = \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(L/4\right)^2} = \dfrac{9{,}37}{L^2}$

Sendo $k^2 = \dfrac{P}{EI}$, a solução é dada por: $\boxed{P = \dfrac{9{,}37EI}{L^2}}$

Tendo em vista que a resposta exata (carga crítica de Euler) é $P = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} \cong \dfrac{9{,}87EI}{L^2}$, percebe-se que, na medida em que aumentamos o número de divisões (diminuímos *h*), aproximamos mais da resposta analítica do problema.

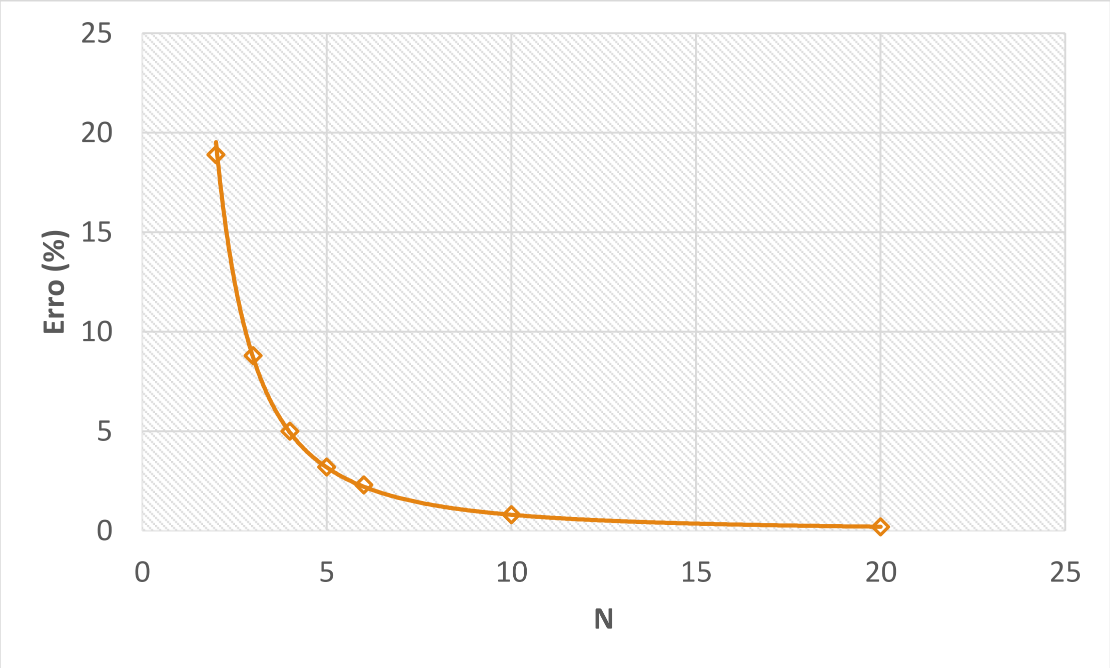
O inconveniente, no entanto, é que quanto mais aumenta-se o número de divisões, maior é o grau do polinômio a ser resolvido.

Como vimos, para N divisões, temos que resolver um polinômio de grau N-1.

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

A tabela a seguir mostra os erros obtidos na medida em que se aumenta o número de divisões:

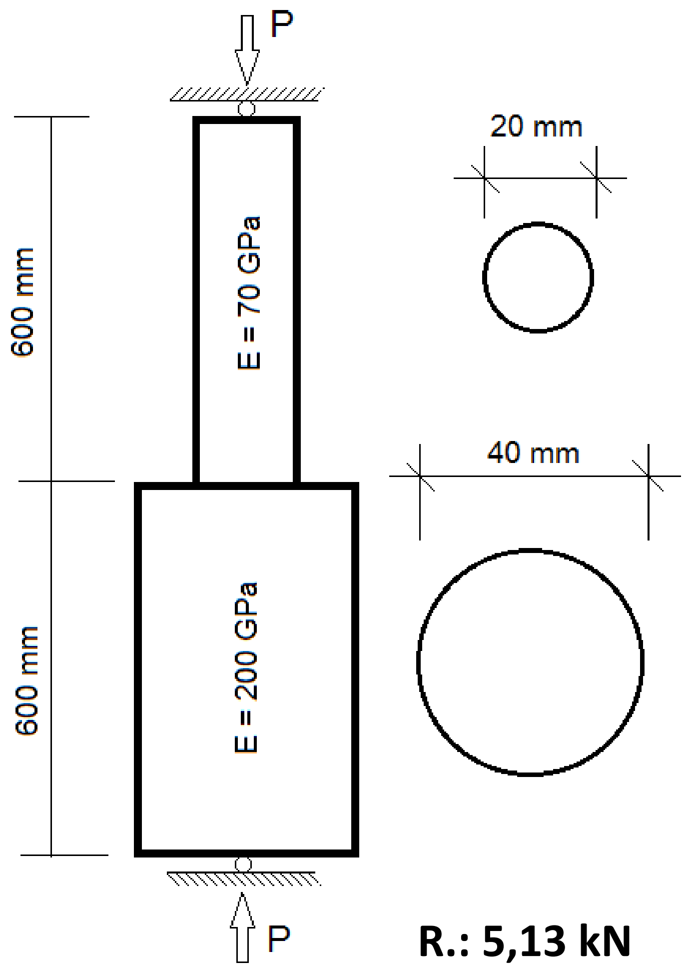
N	α	Erro (%)
2	0,000	18,9
3	1,000	8,8
4	1,414	5,0
5	1,618	3,2
6	1,732	2,3
10	1,902	0,8
20	1,972	0,2



Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

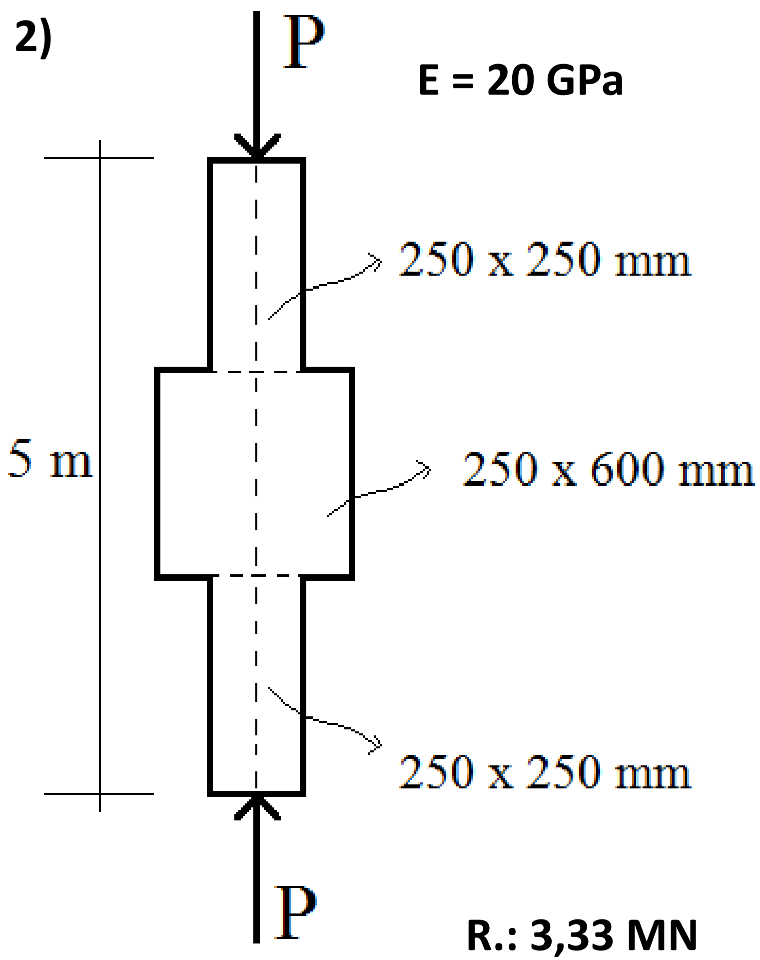
Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:

1)



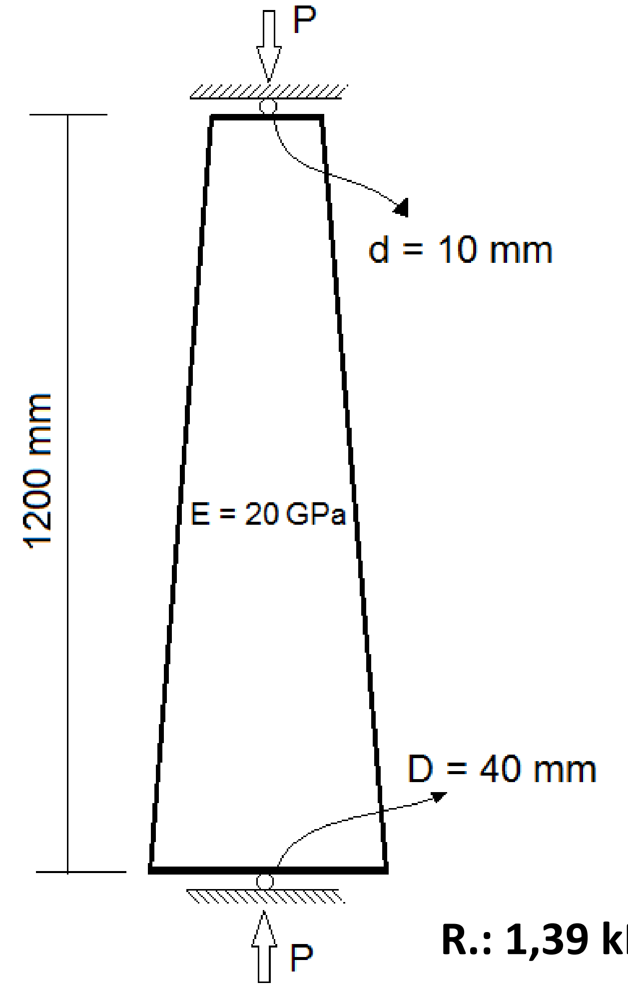
R.: 5,13 kN

2)



R.: 3,33 MN

3)

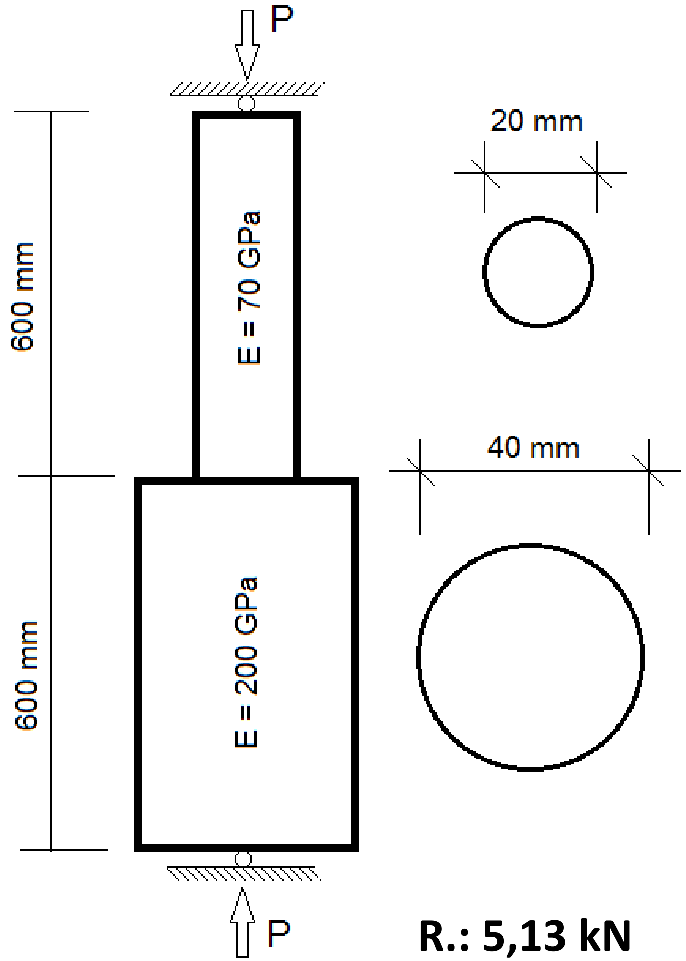


R.: 1,39 kN

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

<u>Exercícios:</u> Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:

1)



R.: 5,13 kN

Inicialmente, precisamos determinar o número mínimo de divisões a serem feitas:

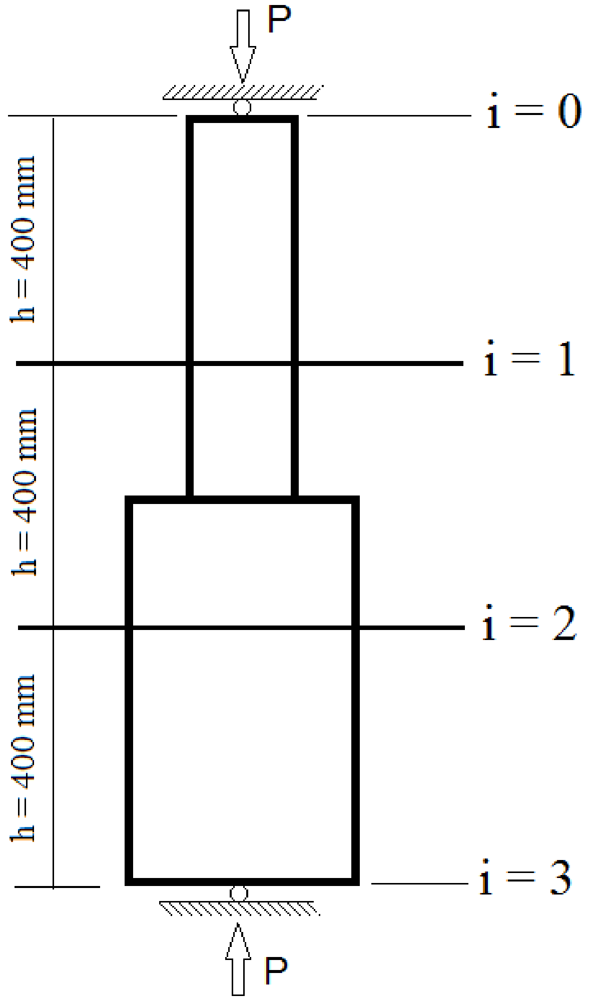
- N = 1 (sem sentido)
- N = 2 (impossível). Por quê?
- N = 3 (possível)
- N = 4 (impossível). Vide N = 2.
- N = 5 (possível)

Assim, o número mínimo de divisões para a resolução deste problema é N = 3.

Desta forma, h = 1200/3 = 400 mm, com 4 nós e 3 elementos.

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

<u>Exercícios:</u> Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



$$y_{i-1} - \alpha\, y_i + y_{i+1} = 0$$

Para i = 0: $y_{-1} - \alpha\, y_0 + y_1 = 0$ ⇨ Não serve

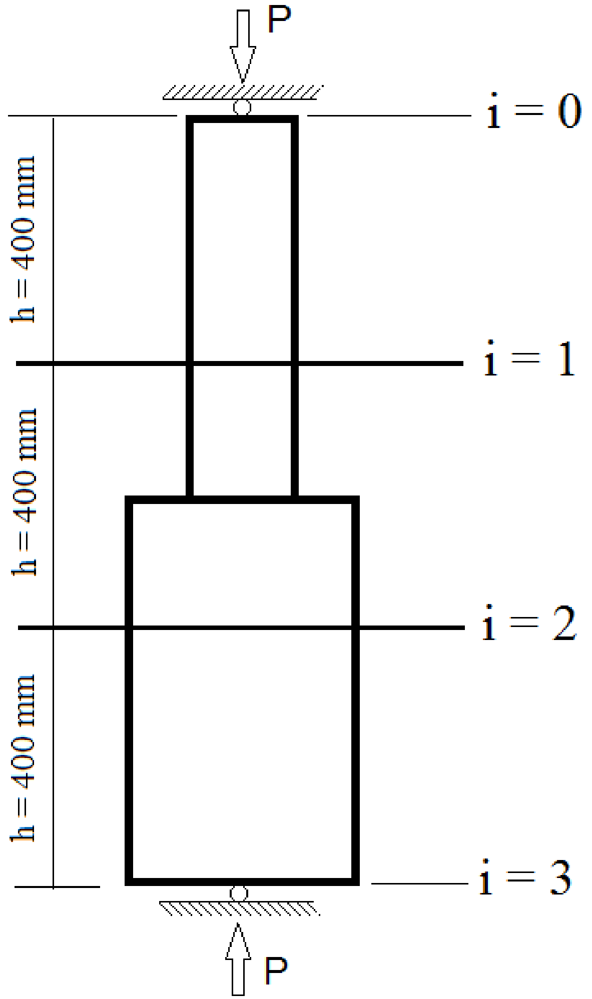
Para i = 1: $y_0 - \alpha_1\, y_1 + y_2 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 2: $y_1 - \alpha_2\, y_2 + y_3 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 3: $y_2 - \alpha\, y_3 + y_4 = 0$ ⇨ Não serve

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



$$\begin{cases} y_0 - \alpha_1\, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha_2\, y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Assim, ficamos com o seguinte sistema:
$$\begin{cases} -\alpha_1 y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha_2\, y_2 = 0 \end{cases}$$

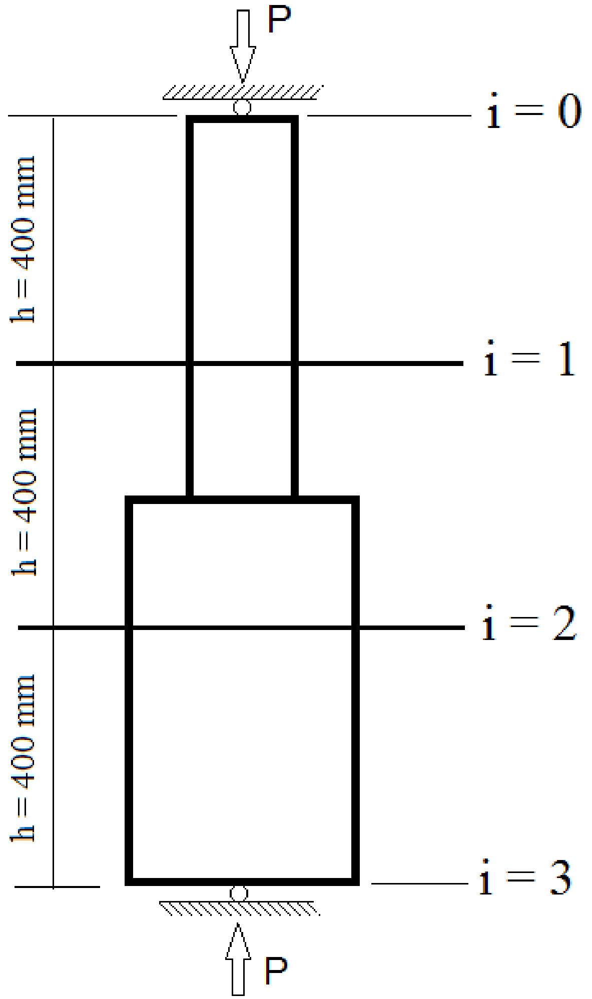
Para que este sistema possua solução diferente da trivial, é necessário que o determinante principal seja nulo, isto é:

$$\det A = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ 1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, tem-se: $\alpha_1\alpha_2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 = 1$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



Como $\alpha_1 = 2 - h^2 k_1^2$ e $\alpha_2 = 2 - h^2 k_2^2$, temos que:

$$\alpha_1 \alpha_2 = 1 \Rightarrow (2 - h^2 k_1^2)(2 - h^2 k_2^2) = 1$$

Substituindo $k_1^2 = \dfrac{P}{E_1 I_1}$ e $k_2^2 = \dfrac{P}{E_2 I_2}$ na equação acima, vem:

$$\left(2 - h^2 \frac{P}{E_1 I_1}\right)\left(2 - h^2 \frac{P}{E_2 I_2}\right) = 1$$

Com os dados fornecidos, temos:

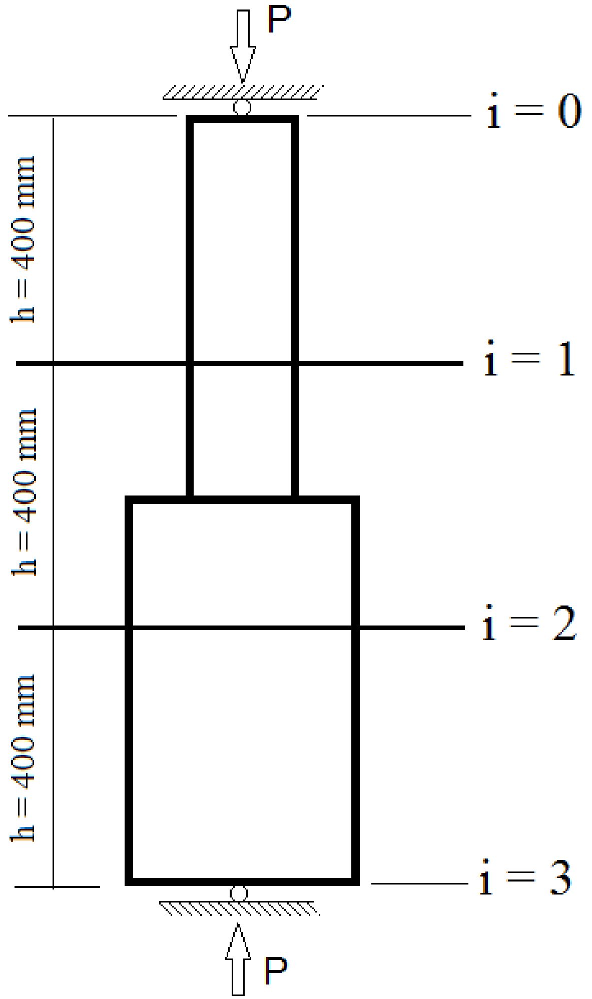
$$E_1 = 70.000 \text{ MPa}$$
$$E_2 = 200.000 \text{ MPa}$$
$$\text{h} = 400 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (20)^4}{64} = 7{,}854 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (40)^4}{64} = 125{,}66 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



Substituindo-se os valores na equação, vem:

$$\left(2-2{,}91\times10^{-4}P\right)\left(2-6{,}366\times10^{-6}P\right)=1$$

Multiplicando-se os termos, tem-se:

$$4-5{,}95\times10^{-4}P+1{,}853\times10^{-9}P^2=1$$

Reorganizando a equação e dividindo ambos os termos por 1,853x10^{-9}:

$$P^2-3{,}21\times10^5P+1{,}62\times10^9=0$$

A solução desta equação nos fornece duas raízes:

$$P_1=5128{,}67\text{ N}$$

$$P_2=3{,}16\times10^5\text{ N}$$

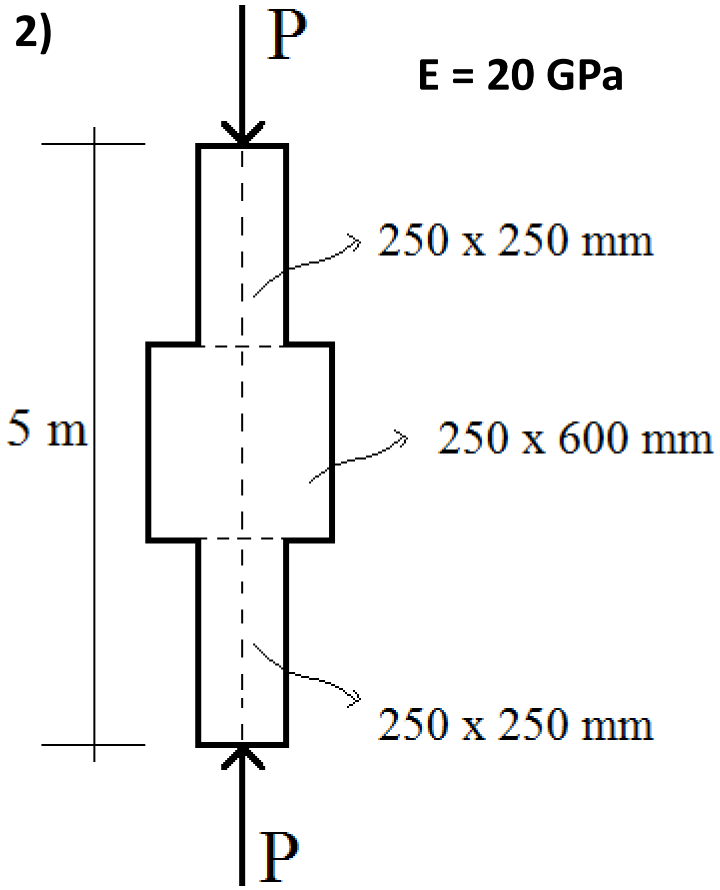
$$\boxed{P_{crit}\cong5{,}13\,\text{kN}}$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:

2)

E = 20 GPa



R.: 3,33 MN

Inicialmente, precisamos determinar o número mínimo de divisões a serem feitas:

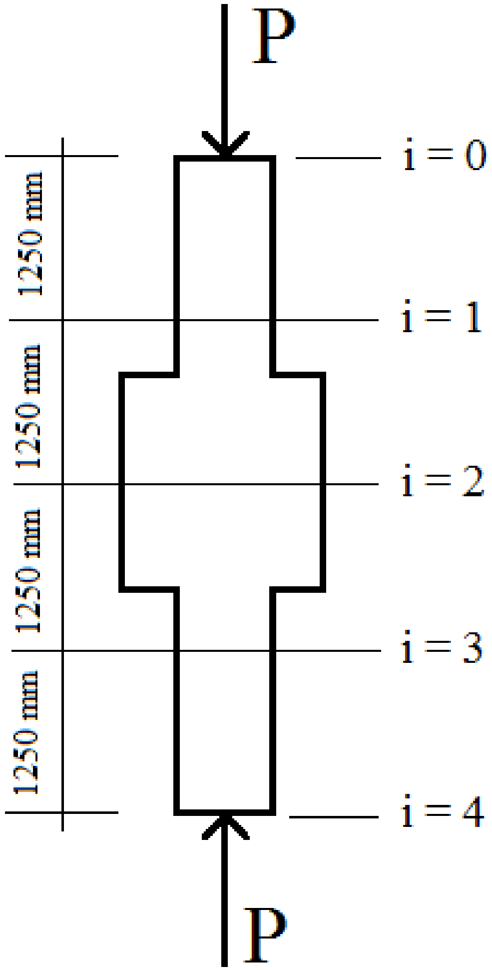
- N = 1 (sem sentido)
- N = 2 (inadequado). Por quê?
- N = 3 (impossível)
- N = 4 (possível)
- N = 5 (possível)
- N = 6 (impossível)

Assim, o número mínimo de divisões para a resolução deste problema é N = 4.

Desta forma, h = 5000/4 = 1250 mm, com 5 nós e 4 elementos.

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



$$y_{i-1} - \alpha\, y_i + y_{i+1} = 0$$

Para i = 0: $y_{-1} - \alpha\, y_0 + y_1 = 0$ → Não serve

Para i = 1: $y_0 - \alpha_1\, y_1 + y_2 = 0$ → OK!

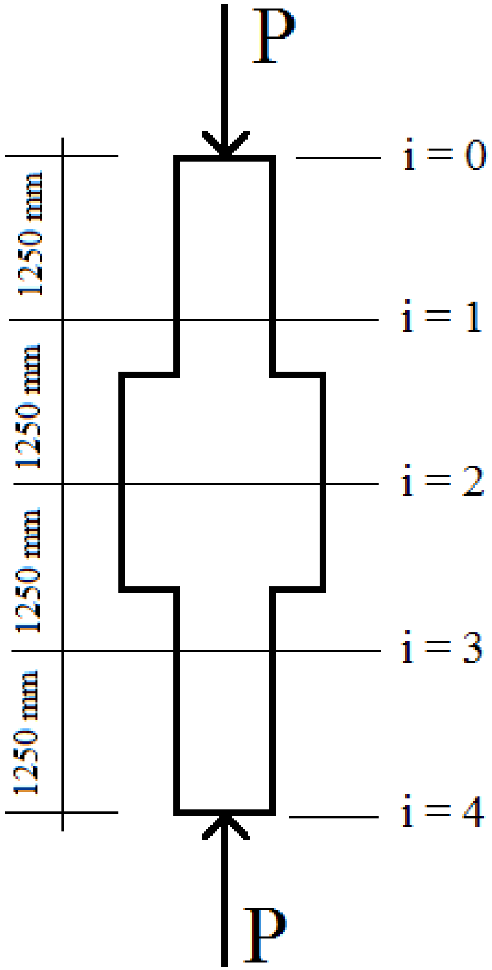
Para i = 2: $y_1 - \alpha_2\, y_2 + y_3 = 0$ → OK!

Para i = 3: $y_2 - \alpha_3\, y_3 + y_4 = 0$ → OK!

Para i = 4: $y_3 - \alpha\, y_4 + y_5 = 0$ → Não serve

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



$$\begin{cases} y_0 - \alpha_1\, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha_2\, y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - \alpha_3 y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Assim, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1\, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha_2\, y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - \alpha_3\, y_3 = 0 \end{cases}$$

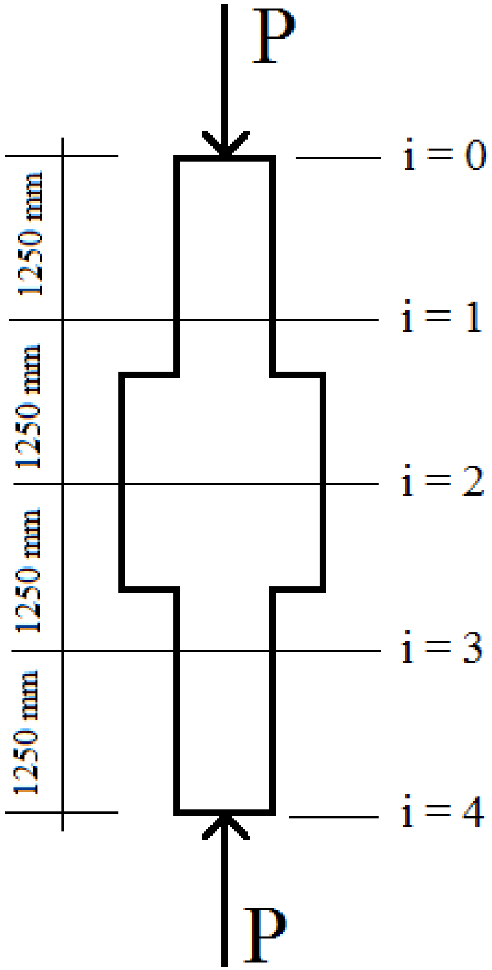
Para que este sistema possua solução diferente da trivial, é necessário que o determinante principal seja nulo, isto é:

$$\det A = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha_2 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, tem-se: $-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_3 = 0$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



Como $\alpha_1 = \alpha_3$ (mesma seção transversal e mesmo material), temos que:

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow -\alpha_1^2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 0$$

Reorganizando a equação acima, vem: $\alpha_1(2 - \alpha_1\alpha_2) = 0$

Assim, a solução deste problema será dada por: $\alpha_1 = 0 \text{ ou } (2 - \alpha_1\alpha_2) = 0$

Como $\alpha_1 = 2 - h^2k_1^2$, temos para a primeira possibilidade:

$$2 - h^2k_1^2 = 0 \Rightarrow 2 = h^2\frac{P}{EI_1}$$

Com os dados fornecidos, temos:

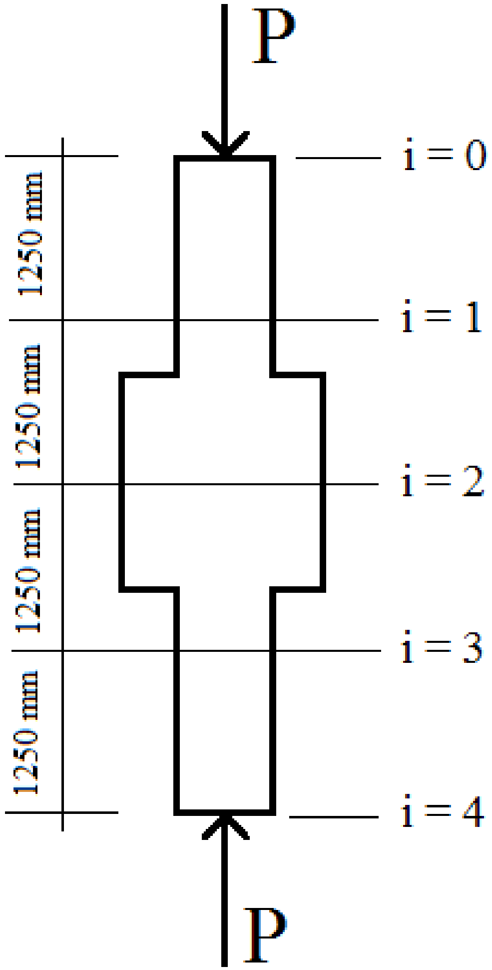
$$E = 20.000 \text{ MPa}$$

$$\text{h} = 1250 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{(250)^4}{12} = 3{,}255 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



Substituindo-se os valores na equação, vem:

$$2 = 1250^2 \frac{P}{20.000 \times 3{,}255 \times 10^8} \Rightarrow P_1 = 8{,}33\,\text{MN}$$

Para a segunda possibilidade: $(2 - \alpha_1 \alpha_2) = 0$

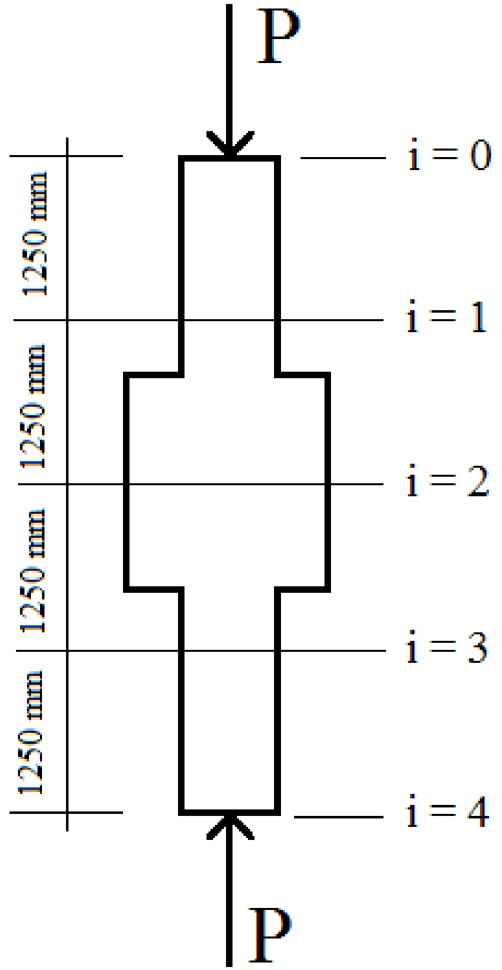
$$2 - \left[\left(2 - h^2 \frac{P}{EI_1} \right) \left(2 - h^2 \frac{P}{EI_2} \right) \right] = 0$$

Com os dados fornecidos, temos:

$$I_2 = \frac{hb^3}{12} = \frac{600 \times 250^3}{12} = 7{,}813 \times 10^8\ \text{mm}^4 (\textit{menor momento de inércia})$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



Substituindo-se os valores na equação, vem:

$$2-\left(2-2{,}40\times10^{-7}P\right)\left(2-1{,}00\times10^{-7}P\right)=0$$

Multiplicando-se os termos, tem-se:

$$-2+6{,}80\times10^{-7}P-2{,}40\times10^{-14}P^2=0$$

Reorganizando a equação e dividindo ambos os termos por 2,40x10^{14}:

$$P^2-2{,}833\times10^{7}P+0{,}833\times10^{14}=0$$

A solução desta equação nos fornece duas raízes:

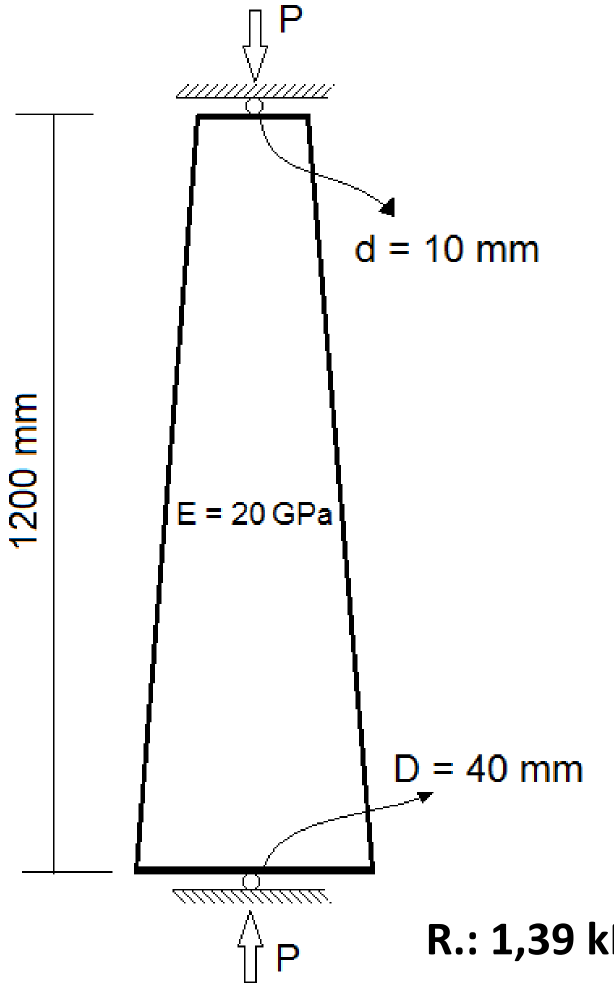
$$P_2=3{,}33\times10^{6}\ \text{N}$$
$$P_3=2{,}50\times10^{7}\ \text{N}$$

$$\boxed{P_{crit}=3{,}33\,\text{MN}}$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

<u>Exercícios:</u> Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:

3)



R.: 1,39 kN

Inicialmente, precisamos determinar o número mínimo de divisões a serem feitas:

- N = 1 (sem sentido)
- N = 2 (possível)
- N = 3 (possível)
- N = 4 (possível)
- N = 5 (possível)
- N = 6 (possível)

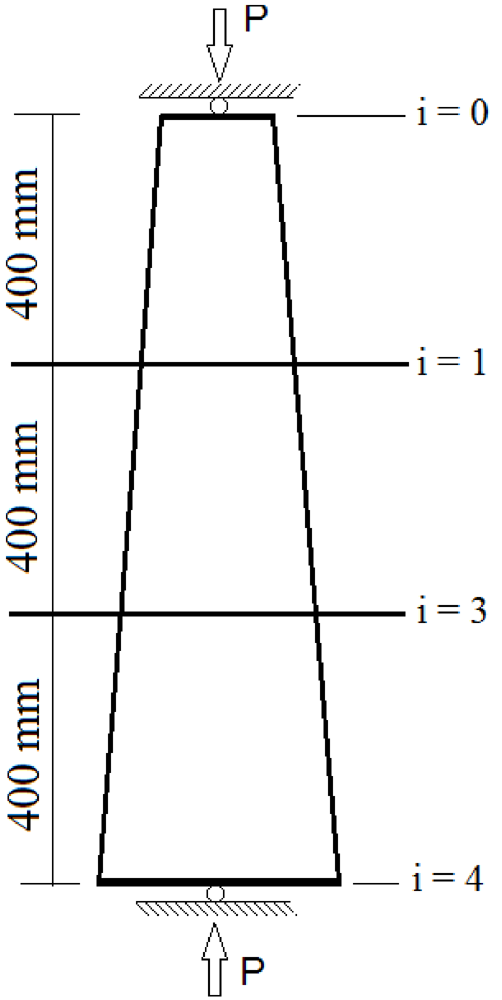
Assim, o número mínimo de divisões para a resolução deste problema é N = 2.

No entanto, adotaremos N = 3, para uma aproximação mais adequada.

Desta forma, h = 1200/3 = 400 mm, com 4 nós e 3 elementos.

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



$$y_{i-1} - \alpha\, y_i + y_{i+1} = 0$$

Para i = 0: $y_{-1} - \alpha\, y_0 + y_1 = 0$ ⇨ Não serve

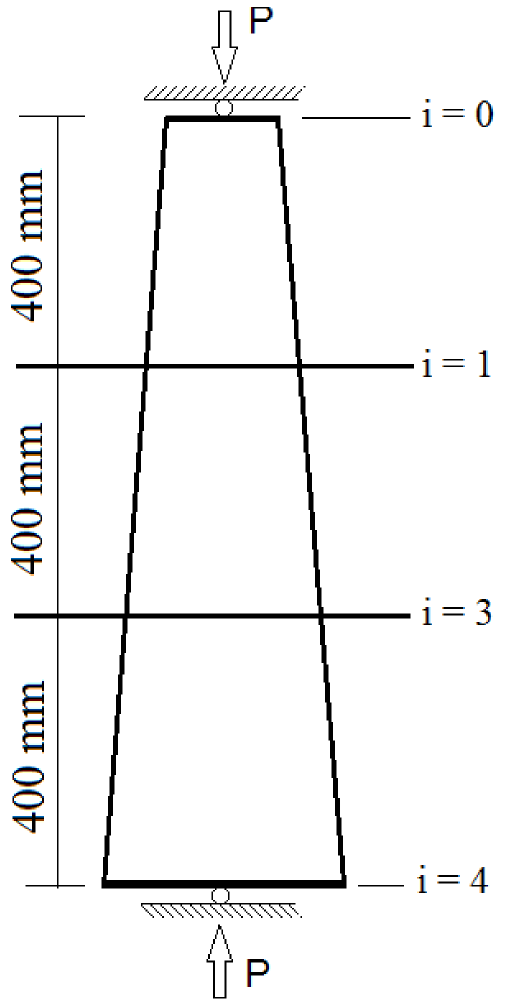
Para i = 1: $y_0 - \alpha_1\, y_1 + y_2 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 2: $y_1 - \alpha_2\, y_2 + y_3 = 0$ ⇨ OK!

Para i = 3: $y_2 - \alpha\, y_3 + y_4 = 0$ ⇨ Não serve

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

<u>Exercícios:</u> Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



$$\begin{cases} y_0 - \alpha_1 \, y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha_2 \, y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Assim, ficamos com o seguinte sistema: $\begin{cases} -\alpha_1 y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - \alpha_2 \, y_2 = 0 \end{cases}$

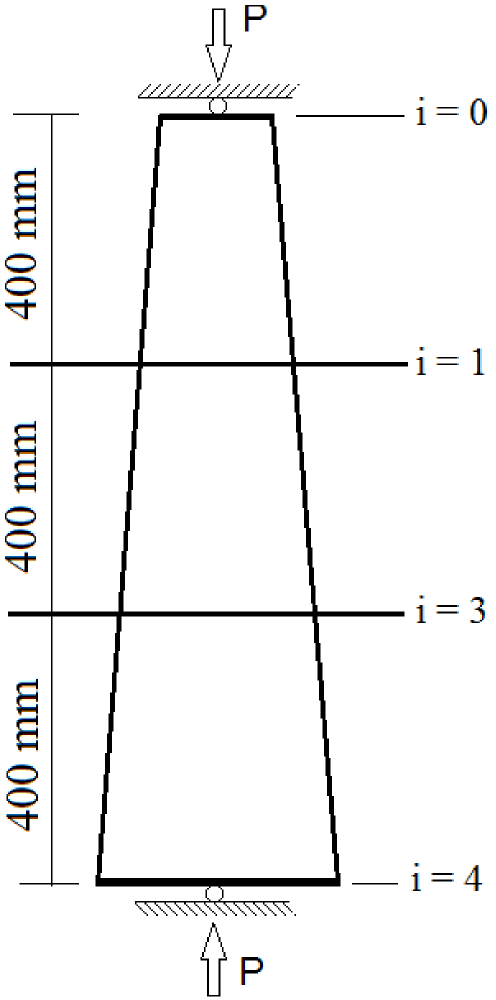
Para que este sistema possua solução diferente da trivial, é necessário que o determinante principal seja nulo, isto é:

$$\det A = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ 1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, tem-se: $\alpha_1 \alpha_2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2 = 1$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



Como $\alpha_1 = 2 - h^2 k_1^2$ e $\alpha_2 = 2 - h^2 k_2^2$, temos que:

$$\alpha_1 \alpha_2 = 1 \Rightarrow (2 - h^2 k_1^2)(2 - h^2 k_2^2) = 1$$

Substituindo $k_1^2 = \dfrac{P}{EI_1}$ e $k_2^2 = \dfrac{P}{EI_2}$ na equação acima, vem:

$$\left(2 - h^2 \frac{P}{EI_1}\right)\left(2 - h^2 \frac{P}{EI_2}\right) = 1$$

Com os dados fornecidos, temos:

$$E = 20.000 \text{ MPa}$$

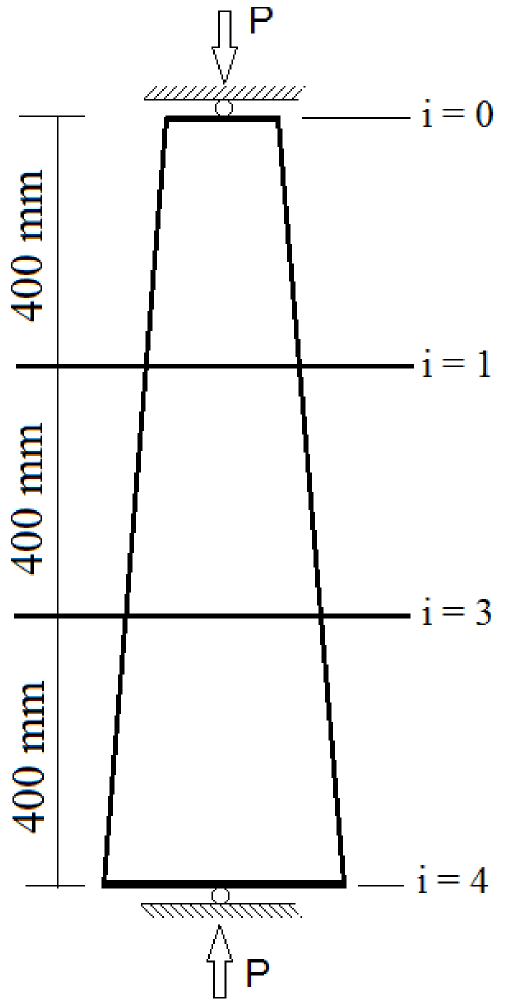
$$\text{h} = 400 \text{ mm}$$

$$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (20)^4}{64} = 7{,}854 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (30)^4}{64} = 39{,}76 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Flambagem - Cálculo da carga crítica via MDF

Exercícios: Determine a carga crítica para as colunas mostradas abaixo:



Substituindo-se os valores na equação, vem:

$$\left(2-1{,}0186\times10^{-3}P\right)\left(2-2{,}012\times10^{-4}P\right)=1$$

Multiplicando-se os termos, tem-se:

$$4-2{,}44\times10^{-3}P+2{,}05\times10^{-7}P^2=1$$

Reorganizando a equação e dividindo ambos os termos por 2,05x10^{-7}:

$$P^2-1{,}19\times10^{4}P+1{,}46\times10^{7}=0$$

A solução desta equação nos fornece duas raízes:

$$P_1=1389{,}02\text{ N}$$

$$P_2=1{,}05\times10^{4}\text{ N}$$

$$\boxed{P_{crit}\cong1{,}39\text{ kN}}$$