Lei de Hooke Generalizada

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Lei de Hooke Generalizada

Introdução

Nos tópicos anteriores, estudamos os conceitos e as aplicações relacionados aos estados de tensão e de deformação (uniaxial, plano e triaxial).

Entretanto, estes conceitos não são "autossuficientes". Em outras palavras, não existe tensão sem que haja deformação e vice-versa.

Assim, neste tópico iremos tratar das relações entre estas grandezas e, mais importante, o que as relaciona.

Consideremos, como exemplo, a seguinte situação:

"Dados dois corpos-de-prova perfeitamente homogêneos e de mesmas dimensões: um de aço e outro de borracha. Ambos são submetidos a uma mesma carga axial *P*."

1) Ambos estão sujeitos às mesmas tensões?
2) Ambos estão sujeitos às mesmas deformações?

A resposta à primeira pergunta é sim, mas à segunda, não. Por quê?

Lei de Hooke Generalizada

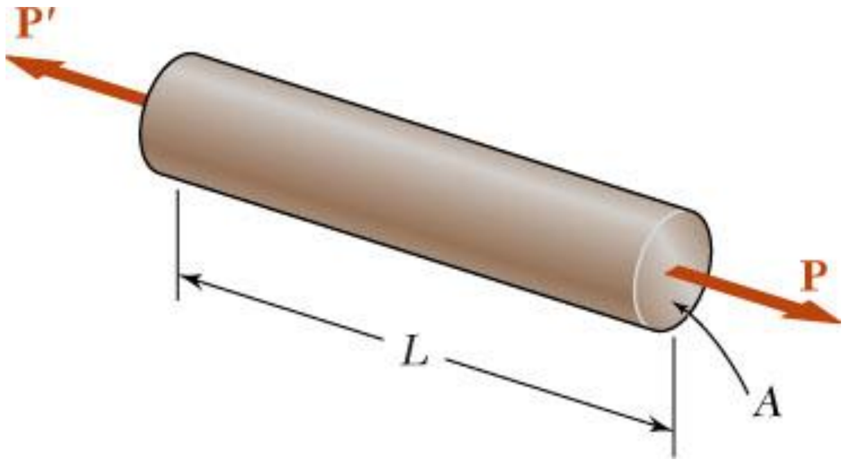
Carga uniaxial

Fica claro que uma certa propriedade dos materiais desempenha um papel fundamental para a resposta à segunda pergunta.

Esta propriedade é a **rigidez**, a qual é frequentemente representada pelos módulos de elasticidade do material.

Precisamos, portanto, “mapear” como um material se comporta, em termos de deformações, quando sujeitos a diferentes estados de tensão.

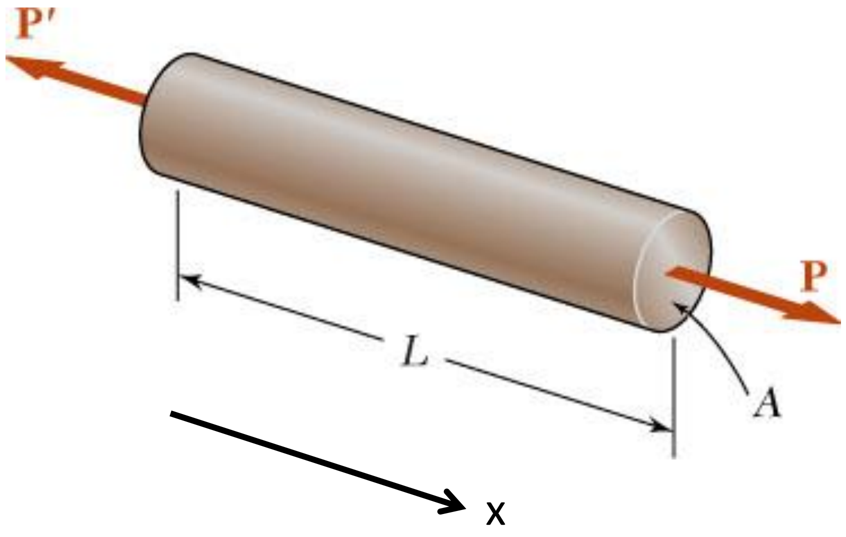
Consideremos, inicialmente, uma barra de material homogêneo, isotrópico, de seção circular, sujeita a um carregamento axial:



Lei de Hooke Generalizada

Carga uniaxial

Definindo-se o eixo longitudinal da barra como “x” e, os transversais como “y” e “z”, podemos utilizar a Lei de Hooke para calcular as deformações devidas ao estado de tensão existente.



O tensor de tensão para um ponto qualquer no interior da barra é:

$$\underset{\approx}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As deformações devidas a esta tensão, são dadas por:

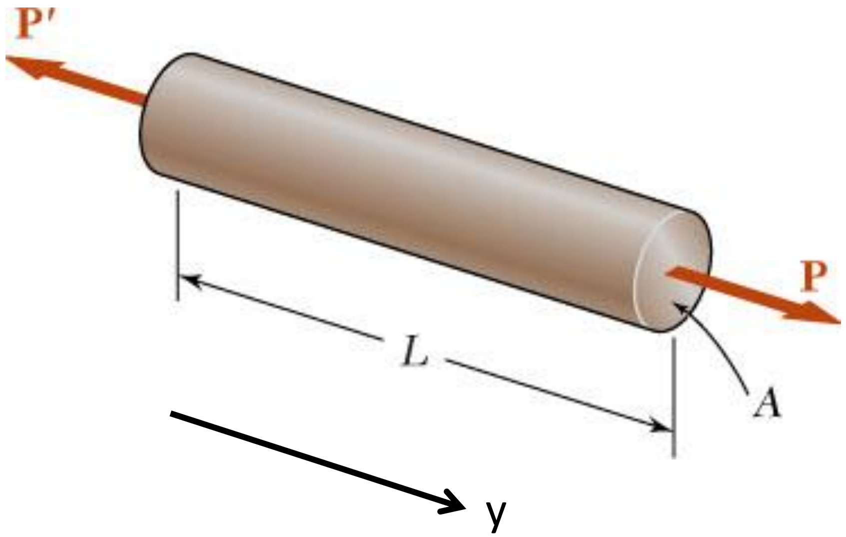
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = -\upsilon\frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad \varepsilon_{zz} = -\upsilon\frac{\sigma_{xx}}{E}$$

onde E é o Módulo de Elasticidade Longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson material.

Lei de Hooke Generalizada

Carga uniaxial

De forma similar, caso definíssemos o eixo longitudinal da barra como “y” e, os transversais como “x” e “z”, teríamos a seguinte situação:



O tensor de tensão para um ponto qualquer no interior da barra é:

$$\underset{\approx}{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As deformações devidas a esta tensão, são dadas por:

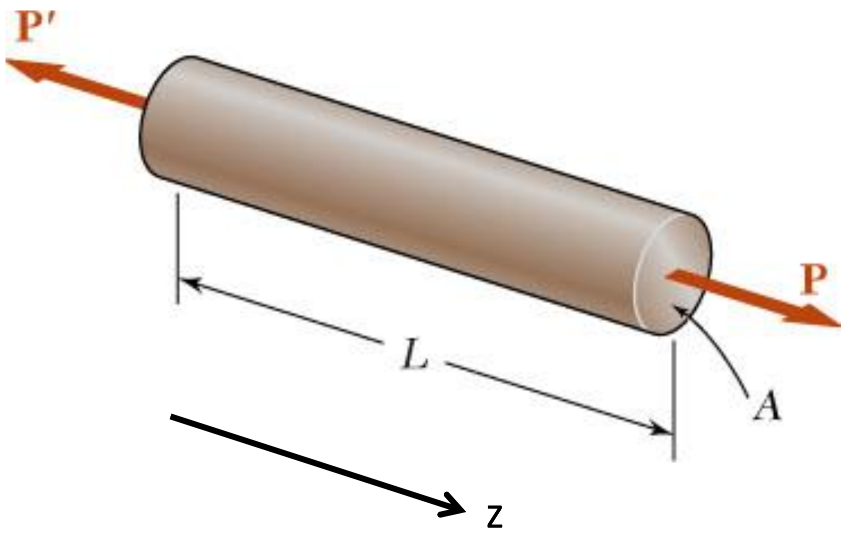
$$\varepsilon_{xx} = -\upsilon \frac{\sigma_{yy}}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}, \quad \varepsilon_{zz} = -\upsilon \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

onde *E* é o Módulo de Elasticidade Longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson material.

Lei de Hooke Generalizada

Carga uniaxial

Por fim, caso definíssemos o eixo longitudinal da barra como “z” e, os transversais como “x” e “y”, teríamos a seguinte situação:



O tensor de tensão para um ponto qualquer no interior da barra é:

$$\underset{\approx}{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

As deformações devidas a esta tensão, são dadas por:

$$\varepsilon_{xx} = -\upsilon \frac{\sigma_{zz}}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = -\upsilon \frac{\sigma_{zz}}{E}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

onde *E* é o Módulo de Elasticidade Longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson material.

Lei de Hooke Generalizada

Combinação de cargas uniaxiais

Agrupando as situações anteriores, pode-se montar a seguinte tabela:

	Deformações		
Tensão	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{zz}
σ_{xx}	$\frac{\sigma_{xx}}{E}$	$-\upsilon\frac{\sigma_{xx}}{E}$	$-\upsilon\frac{\sigma_{xx}}{E}$
σ_{yy}	$-\upsilon\frac{\sigma_{yy}}{E}$	$\frac{\sigma_{yy}}{E}$	$-\upsilon\frac{\sigma_{yy}}{E}$
σ_{zz}	$-\upsilon\frac{\sigma_{zz}}{E}$	$-\upsilon\frac{\sigma_{zz}}{E}$	$\frac{\sigma_{zz}}{E}$

Lei de Hooke Generalizada

Combinação de cargas uniaxiais

Considerando-se a atuação simultânea de σ_x, σ_y e σ_z e aplicando-se o princípio da superposição dos efeitos, tem-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\sigma_{xx}}{E} - \upsilon \dfrac{\sigma_{yy}}{E} - \upsilon \dfrac{\sigma_{zz}}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \upsilon(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] \\ \\ \varepsilon_{yy} = -\upsilon \dfrac{\sigma_{xx}}{E} + \dfrac{\sigma_{yy}}{E} - \upsilon \dfrac{\sigma_{zz}}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \upsilon(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right] \\ \\ \varepsilon_{zz} = -\upsilon \dfrac{\sigma_{xx}}{E} - \upsilon \dfrac{\sigma_{yy}}{E} + \dfrac{\sigma_{zz}}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \upsilon(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] \end{cases}$$

Lei de Hooke Generalizada

Relações no cisalhamento

Para as tensões cisalhantes, tem-se:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\[2ex] \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\[2ex] \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \end{cases}$$

onde *G* é o Módulo de Elasticidade Transversal e pode ser escrito como:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

Lei de Hooke Generalizada

Observações:

Considerando-se o que foi discutido até o momento, destaca-se algumas observações importantes:

- Um estado uniaxial de tensão gera um estado triaxial de deformação;
- Quanto maior a rigidez do material (maior E), menores as deformações, para um mesmo nível de tensão;
- O efeito Poisson se caracteriza pelo sinal negativo nas deformações que ocorrem nas direções transversais à direção da solicitação;
- Para materiais comumente utilizados na Engenharia Civil e Mecânica, o coeficiente de Poisson possui valores entre 0,2 e 0,4. Existem materiais especiais, entretanto, que admitem até mesmo valores negativos.

Lei de Hooke Generalizada

Estados Triaxiais:

Agrupando-se todas as relações obtidas anteriormente, temos a chamada **Lei de Hooke Generalizada**, dada por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Estas relações se aplicam a materiais homogêneos e isotrópicos, isto é, que possuem as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todas as direções.

Assume-se, também, que as tensões de cisalhamento não afetam as deformações lineares (e vice-versa).

Lei de Hooke Generalizada

Estados Triaxiais:

Inversamente, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\boxed{\text{Matriz constitutiva do material}}} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

IMPORTANTE: nas duas relações apresentadas, utiliza-se as distorções angulares (γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}) e não as componentes cisalhantes do tensor de deformação (ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz}).

Lembrando que a relação entre essas grandezas é dada por: $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{2}$

Lei de Hooke Generalizada

Estado Plano:

Em problemas relacionados à leituras de deformação (*strain-gages*), é muito comum assumir que os pontos em questão estejam sujeitos a um **Estado Plano de Tensão**. Nesses casos, a Lei de Hooke é reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{1}{E} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}$$

Estado Plano de Deformação

Exemplo 2 (continuação):

Para o estado de deformação obtido na letra a), calcule as tensões σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} no entorno deste ponto. **Dados:** E = 2,1 GPa e ν = 0,3.

$$\underset{\sim}{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.0028868 \\ 0.0028868 & 0.0003333 \end{bmatrix}$$

Utilizando a Lei de Hooke e assumindo-se que o ponto está sujeito a um estado plano de tensões, temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

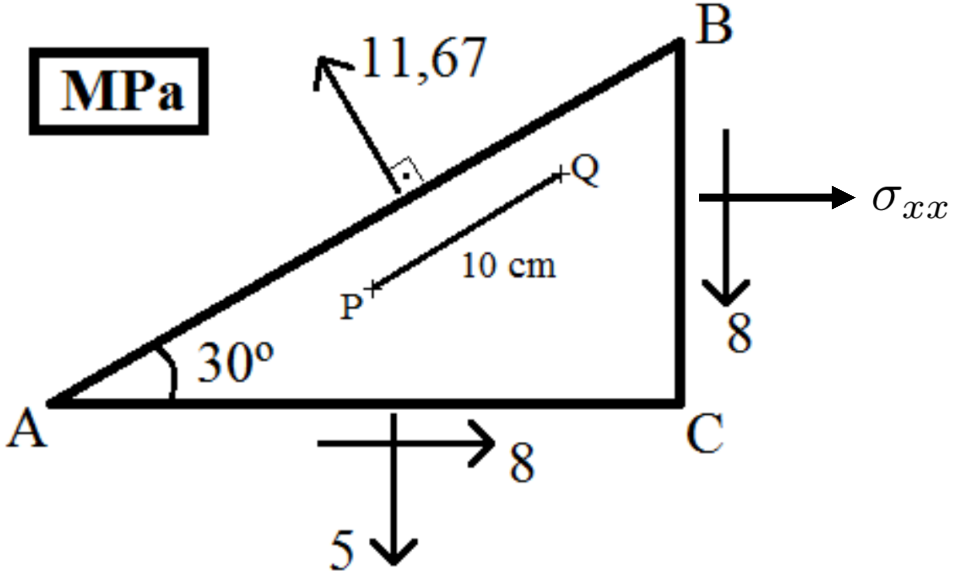
Substituindo-se os valores de E (em MPa) e de ν e lembrando que $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ = 0,0057736, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2.54 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} = 1.46 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 4.66 \text{ MPa} \end{cases}$$

Estado Plano de Deformação

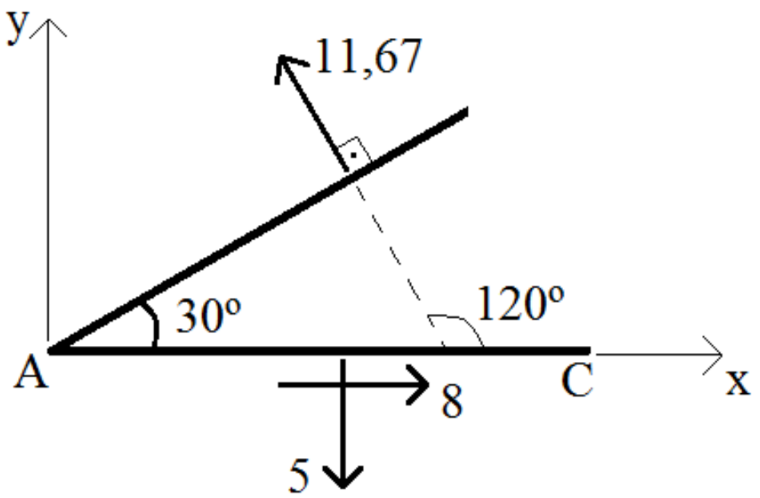
Exemplo 3:

Sabendo-se que o prisma mostrado abaixo está sujeito a um estado de tensões conforme indicado na figura abaixo, determine o novo valor do comprimento que liga os pontos *P* e *Q*. **Dados**: E = 2,1 GPa e v = 0,4.



Estado Plano de Deformação

Se considerarmos a direção de *AC* como sendo coincidente ao eixo *x*, o estado de tensão (plano) nos pontos do prisma serão dados por:



Onde:

$$\sigma_{yy} = 5\text{MPa}$$
$$\tau_{xy} = -8\text{MPa}$$
$$\sigma_{xx} \rightarrow \text{desconhecido}$$

No entanto, sabe-se que o valor da tensão normal num plano cuja normal $\hat{\underset{\sim}{N}}$ é $\hat{\underset{\sim}{N}} = \{\cos 120^o; \text{sen}120^o\}$ vale $\sigma_n = 11.67$ MPa.

A partir da expressão do cálculo de σ_n do estudo do estado plano de tensões, temos:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy}\, \text{sen}2\alpha$$

Estado Plano de Deformação

donde conhecemos σ_{yy}, τ_{yy}, σ_n e α. Logo,

$$11.67 = \frac{\sigma_{xx} + 5}{2} + \frac{\sigma_{xx} - 5}{2} \cos 240^o - 8\,\mathrm{sen} 240^o$$

o que nos permite obter imediatamente:

$$\sigma_{xx} = 3.97 \mathrm{MPa}$$

O tensor de tensões no ponto fica então definido:

$$\underset{\approx}{\sigma} = \begin{bmatrix} 3.97 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \mathrm{MPa}$$

Da lei de Hooke generalizada, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}$$

Estado Plano de Deformação

Aplicando ao caso em questão, temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{1}{2.1 \times 10^3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 3.97 \\ 5 \\ -8 \end{array} \right\}$$

Resultando em:

$$\epsilon_{xx} = 0.938 \times 10^{-3}$$
$$\epsilon_{yy} = 1.625 \times 10^{-3}$$
$$\gamma_{xy} = -10.667 \times 10^{-3} \;\rightarrow\; \epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = -5.333 \times 10^{-3}$$

A deformação na direção de $\overline{PQ}$ pode ser determinada, então, por:

$$\epsilon_{nn} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \epsilon_{xy}\,\mathrm{sen}2\alpha$$

donde temos:

$$\epsilon_{nn} = \left[\left(\frac{0.938 + 1.625}{2} \right) + \left(\frac{0.938 - 1.625}{2} \right) \cos 60^o - 5.333 \times \;\mathrm{sen}60^o \right] \times 10^{-3}$$

Estado Plano de Deformação

Resolvendo, vem:

$$\epsilon_{nn} = -3.509 \times 10^{-3}$$

O novo comprimento $\left|\overline{PQ}\right|$ pode ser obtido através de:

$$\left|\overline{PQ}\right|^{novo} = \left|\overline{PQ}\right| + \epsilon_{nn}\left|\overline{PQ}\right|$$
$$\left|\overline{PQ}\right|^{novo} = 10 - 3.509 \times 10^{-3} \times 10$$

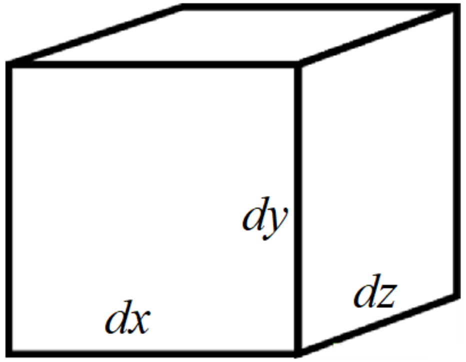
donde obtemos:

$$\left|\overline{PQ}\right|^{novo} = 9.96481 \text{ cm}$$

Lei de Hooke Generalizada

Deformação Volumétrica:

Seja um paralelepípedo de arestas *dx*, *dy* e *dz* retirado no entorno de um ponto de uma estrutura:

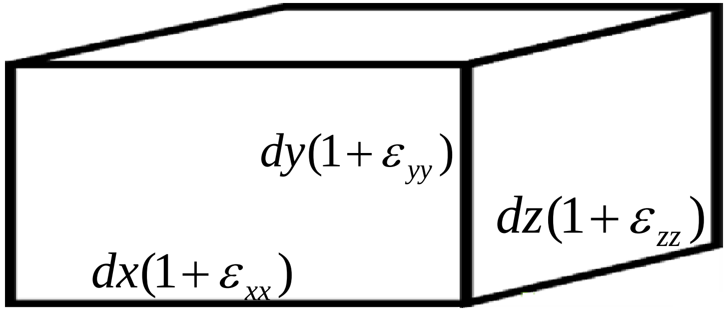


Após a atuação de um carregamento, o paralelepípedo se deforma e assume as seguintes dimensões:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta x}{dx} = \frac{dx' - dx}{dx} \Rightarrow dx' = dx(1+\varepsilon_{xx})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta y}{dy} = \frac{dy' - dy}{dy} \Rightarrow dy' = dy(1+\varepsilon_{yy})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta z}{dz} = \frac{dz' - dz}{dz} \Rightarrow dz' = dz(1+\varepsilon_{zz})$$



Lei de Hooke Generalizada

Deformação Volumétrica:

Os volumes inicial e final do paralelepípedo são dados por V_0 = *dxdydz* e V_1 = *dx'dy'dz'*, respectivamente.

A deformação volumétrica, por definição, é dada por:

$$\epsilon_V = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

Substituindo-se as grandezas encontradas anteriormente na expressão acima, vem:

$$\epsilon_V = \frac{dx(1+\epsilon_{xx})dy(1+\epsilon_{yy})dz(1+\epsilon_{zz}) - dxdydz}{dxdydz}$$

Simplificando numerador e denominador, tem-se:

$$\epsilon_V = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz}$$

Eliminando-se os termos de ordem superior, resulta em: $\boxed{\epsilon_V = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}}$

Lei de Hooke Generalizada

Deformação Volumétrica:

A deformação volumétrica pode ser escrita, também, em termos de tensão. Utilizando a Lei de Hooke Generalizada, vem:

$$\epsilon_V = \underbrace{\frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})}_{\varepsilon_{xx}} + \underbrace{\frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}_{\varepsilon_{yy}} + \underbrace{\frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_{\varepsilon_{zz}}$$

Simplificando a expressão, vem:

$$\boxed{\epsilon_V = \frac{1-2\nu}{E} tr\underset{\sim}{\underset{\sim}{\sigma}}} \qquad \text{com } tr\underset{\sim}{\underset{\sim}{\sigma}} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}.$$

Constata-se, portanto, que, para tensores com *tr(σ)* = 0, não existem variações de volume no entorno do ponto, mas apenas mudança de forma (lembre-se da definição do tensor desviador).

Lei de Hooke Generalizada

Referências:

Esses slides foram preparados usando como base:

1) Beer, Johnston – Mecânica dos Materiais – 6ª ed.
2) Toledo, Bastos, Cury - Apostila de Resistência dos Materiais, UFJF.