Estado Plano de Deformação

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Estado Plano de Deformação

Introdução:

Assim como fizemos no estudo dos estados de tensão, trataremos, agora, de um caso particular denominado **ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES (EPD)**.

O estudo do EPD é de extrema importância pois, como será visto adiante, ele é muito utilizado em aplicações envolvendo medições experimentais de deformações em estruturas.

Para efeito deste estudo, vamos considerar, por exemplo, o caso em que que as únicas deformações diferentes de zero sejam apenas as deformações: ε_{xx}, ε_{yy} e ε_{xy}.

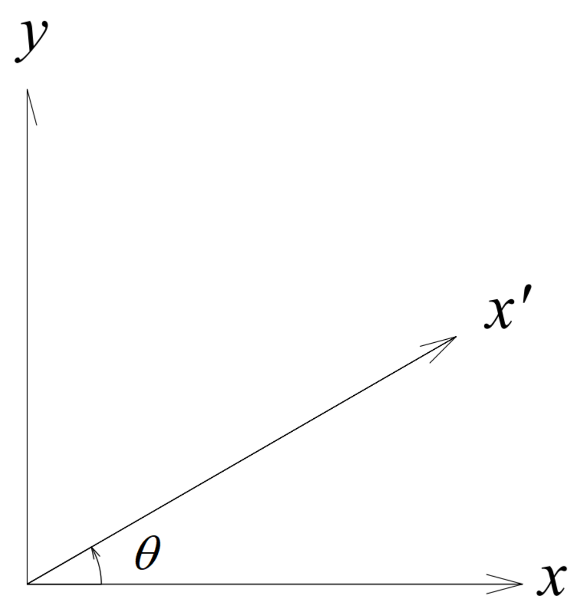
Assim, teremos um tensor de deformações da seguinte forma:

$$\underset{\approx}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

Estado Plano de Deformação

Deformações lineares e tangenciais numa direção qualquer:

De forma idêntica ao que foi feito no estudo do EPT, multiplicaremos o vetor deformação total pelo vetor que indica uma direção x’ qualquer:



$$\hat{\underset{\sim}{x}}' = [\cos\theta \quad \text{sen}\,\theta]$$

onde θ é o ângulo formado entre os eixos x’ e x.

Calculando-se $\underset{\sim}{\varepsilon}_{x'} = \underset{\approx}{\varepsilon} \times \hat{\underset{\sim}{x}}'$ e, em seguida, $\varepsilon_{x'x'} = \underset{\sim}{\varepsilon}_{x'} \cdot \hat{\underset{\sim}{x}}'$, vem:

$$\begin{cases} \epsilon_{x'x'} = \dfrac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \dfrac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy}\,\text{sen}2\theta \\ \\ \epsilon_{x'y'} = \dfrac{\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}}{2}\,\text{sen}2\theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

As duas expressões acima permitem obter, para qualquer direção θ, os valores das deformações normal e tangencial em um dado ponto de uma estrutura, desde que se conheça o tensor de deformações neste ponto.

Estado Plano de Deformação

<u>Análise Experimental - *Strain-Gages*</u>

As relações entre deformações em direções quaisquer nos permite resolver problemas práticos de análise experimental de estruturas já que torna possível, a partir de medidas de deformações, estabelecer os valores das tensões existentes em um ponto.

As deformações lineares em torno de um ponto podem ser medidas por dispositivos denominados de *strain-gages* (ou extensômetros elétricos) mediante a variação de sua resistência elétrica.

A partir das medições das deformações lineares segundo três direções distintas, podemos determinar o estado de deformação no ponto considerado.

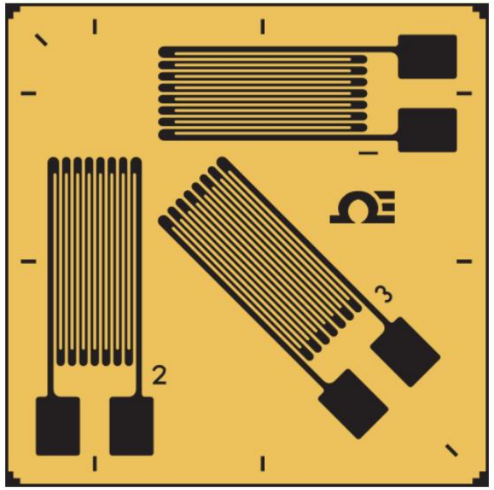
Para tanto, utiliza-se um agrupamento de três desses dispositivos organizados em um conjunto denominado **<u>roseta de deformações</u>**.

Estado Plano de Deformação

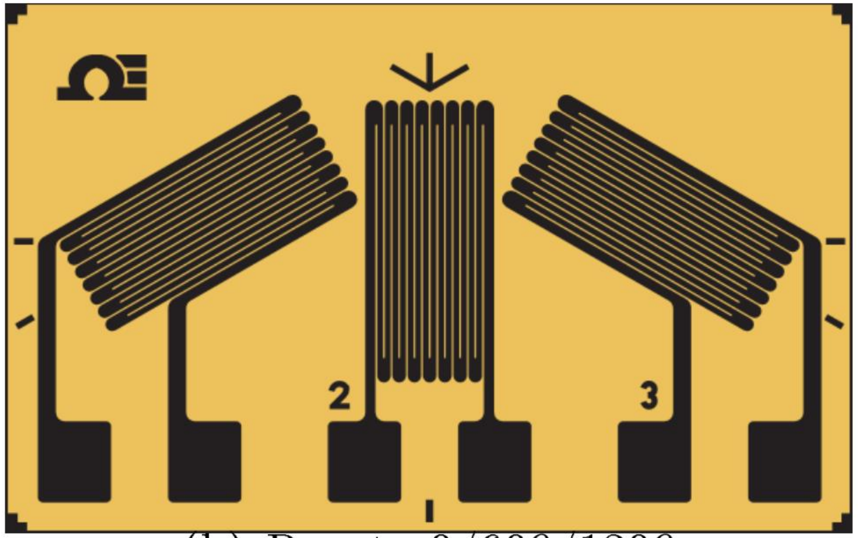
<u>Análise Experimental - *Strain-Gages*</u>

As figuras abaixo mostram três rosetas bastante utilizadas, nas quais são medidas deformações em direções variando de 0º a 120º.

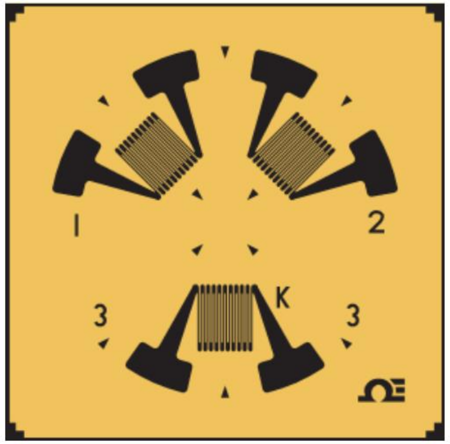
As rosetas são pequenas o suficiente em relação ao corpo para que suas deformações representem o estado de deformação de um ponto.



(a) Roseta $0/45^o/90^o$



(b) Roseta $0/60^o/120^o$



(c) Roseta $120^o/120^o/120^o$

Estado Plano de Deformação

Deformação lineares extremas:

De modo análogo ao que foi discutido no EPT, mais importante do que apenas calcular diferentes valores de deformação linear e tangencial, é conhecer seus valores extremos (máximos e mínimos) e em quais direções elas ocorrem.

Desta forma, segue-se a mesma premissa já adotada, isto é, monta-se a *equação característica* a partir do determinante do tensor de deformação, subtraído da incógnita σ_e dos termos da diagonal principal. Assim, temos:

$$\epsilon_e^2 - (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\epsilon_e + \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} - \epsilon_{xy}^2 = 0$$

onde ε_e é a deformação principal.

As raízes desta equação são dadas por:

$$\boxed{\epsilon_{1,3} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}}$$

E as direções principais são obtidas resolvendo:

$$\boxed{\tan 2\theta_p = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}}$$

Estado Plano de Deformação

Deformação tangencial máxima:

A tensão tangencial máxima é obtida a partir da expressão:

$$\boxed{\varepsilon_{\max} = \left|\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right) + \varepsilon_{xy}^2}}$$

ou

$$\boxed{\gamma_{\max} = \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_3\right| = 2\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right) + \varepsilon_{xy}^2}}$$

Ainda a partir das conclusões obtidas no estudo do EPT, sabe-se que as deformações tangenciais extremas ocorrem em direções bissetrizes em relação às direções das deformações principais.

Desta forma, uma vez obtidas as direções principais θ_1 e θ_3, basta somar (ou subtrair) 45º a qualquer um destes ângulos.

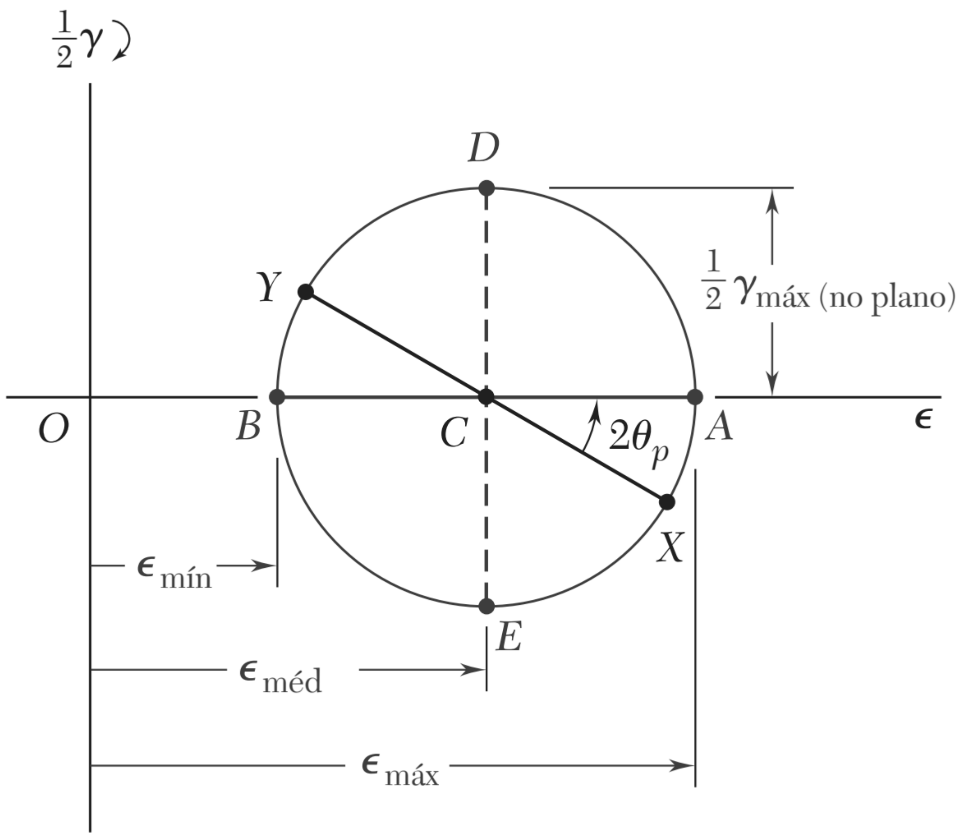
Por fim, na direção onde ocorre a deformação tangencial máxima, a deformação normal é média, isto é:

$$\boxed{\varepsilon_{média} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2}}$$

Estado Plano de Deformação

<u>Círculo de Mohr:</u>

O círculo de Mohr para o EPD é traçado de forma semelhante ao do EPD e é apresentado na figura abaixo:

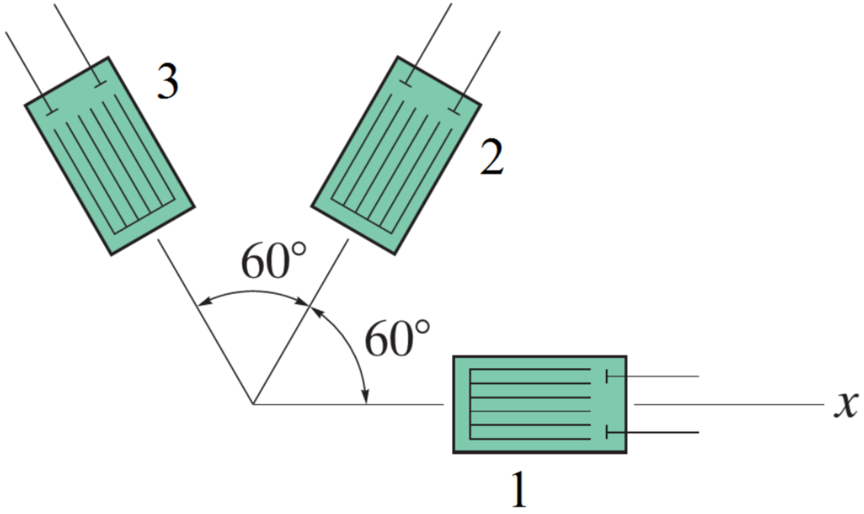


Estado Plano de Deformação

<u>Exemplo 2:</u>

Mediu-se, no entorno de um ponto, utilizando-se uma roseta de *strain-gages*, conforme mostrado na figura abaixo, as seguintes deformações lineares:

- na direção 1: $\epsilon_1 = 0.001$,
- na direção 2: $\epsilon_2 = 0.003$,
- na direção 3: $\epsilon_3 = -0.002$.



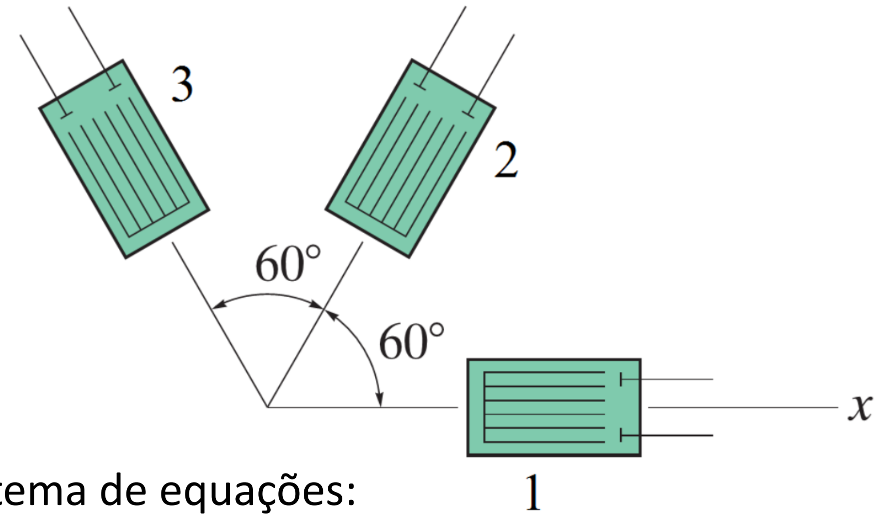
Tomando a direção 1 como *x*, determine:

a) as componentes do tensor de deformações neste ponto.
b) as deformações principais.

Estado Plano de Deformação

a) Neste problema, temos a seguinte situação:

$$\begin{cases} \text{Direção 1} \Rightarrow & \theta_1 = 0^o & \rightarrow \epsilon_{xx} = 0.001 \\ \text{Direção 2} \Rightarrow & \theta_2 = 60^o & \rightarrow \epsilon_2 = 0.003 \\ \text{Direção 3} \Rightarrow & \theta_3 = 120^o & \rightarrow \epsilon_3 = -0.002 \end{cases}$$



Para o cálculo de ε_{yy} e ε_{xy} utilizaremos:

$$\epsilon_{x'x'} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

substituindo $\varepsilon_{x'x'}$ = 0,003 para θ = 60º e $\varepsilon_{x'x'}$ = -0,002 para θ = 120º tem-se o sistema de equações:

$$\begin{cases} 0.003 & = & \dfrac{0.001 + \epsilon_{yy}}{2} + \dfrac{0.001 - \epsilon_{yy}}{2} \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \epsilon_{xy} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ -0.002 & = & \dfrac{0.001 + \epsilon_{yy}}{2} + \dfrac{0.001 - \epsilon_{yy}}{2} \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \epsilon_{xy} \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

Estado Plano de Deformação

A solução do sistema é dada por: ε_{yy} = 0,0003333 e ε_{xy} = 0,0028868. Assim, o tensor de deformações é:

$$\underset{\sim}{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.0028868 \\ 0.0028868 & 0.0003333 \end{bmatrix}$$

b) As deformações principais são obtidas aplicando-se as equações:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

Que resulta em: chegamos aos valores: ε_1 = 0,0035726 e ε_2 = - 0,0022393.

Estado Plano de Deformação

Referências:

Esses slides foram preparados usando como base:

1) Beer, Johnston – Mecânica dos Materiais – 6ª ed.
2) Toledo, Bastos, Cury - Apostila de Resistência dos Materiais, UFJF.