Estado Triaxial de Deformação

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Estado Triaxial de Deformação

<u>Introdução</u>:

Neste tópico trataremos e definiremos o chamado *estado de deformação* de um sólido considerando o deslocamento relativo de seus pontos com componentes nos três eixos ortogonais *xyz*.

Os deslocamentos aqui considerados são aqueles responsáveis pela descrição do movimento de um sólido (ou de cada um de seus pontos) quando este varia sua forma, isto é, quando são modificadas as posições relativas de seus pontos em decorrência das ações - forças e momentos a ele aplicados.

Por deformação, definimos como sendo a mudança de forma e/ou tamanho de um sólido.

As deformações podem ser obtidas a partir de modelos matemáticos (analíticos), modelos numéricos (computacionais) ou experimentalmente.

Estado Triaxial de Deformação

Introdução:

Vários conceitos importantes da Resistência dos Materiais estão relacionados à análise de deformações, a saber:

- **Ductilidade**: propriedade de certos materiais que apresentam grandes deformações antes de se romperem. Exemplo: aço (baixo teor de carbono).

- **Fragilidade**: propriedade de certos materiais que praticamente não se deformam antes de se romperem. Exemplo: aço (alto teor de carbono), ferro fundido, concreto.

- **Elasticidade**: propriedade de certos materiais que se deformam quando solicitados e retornam à forma inicial quando descarregados. Exemplo: borracha.

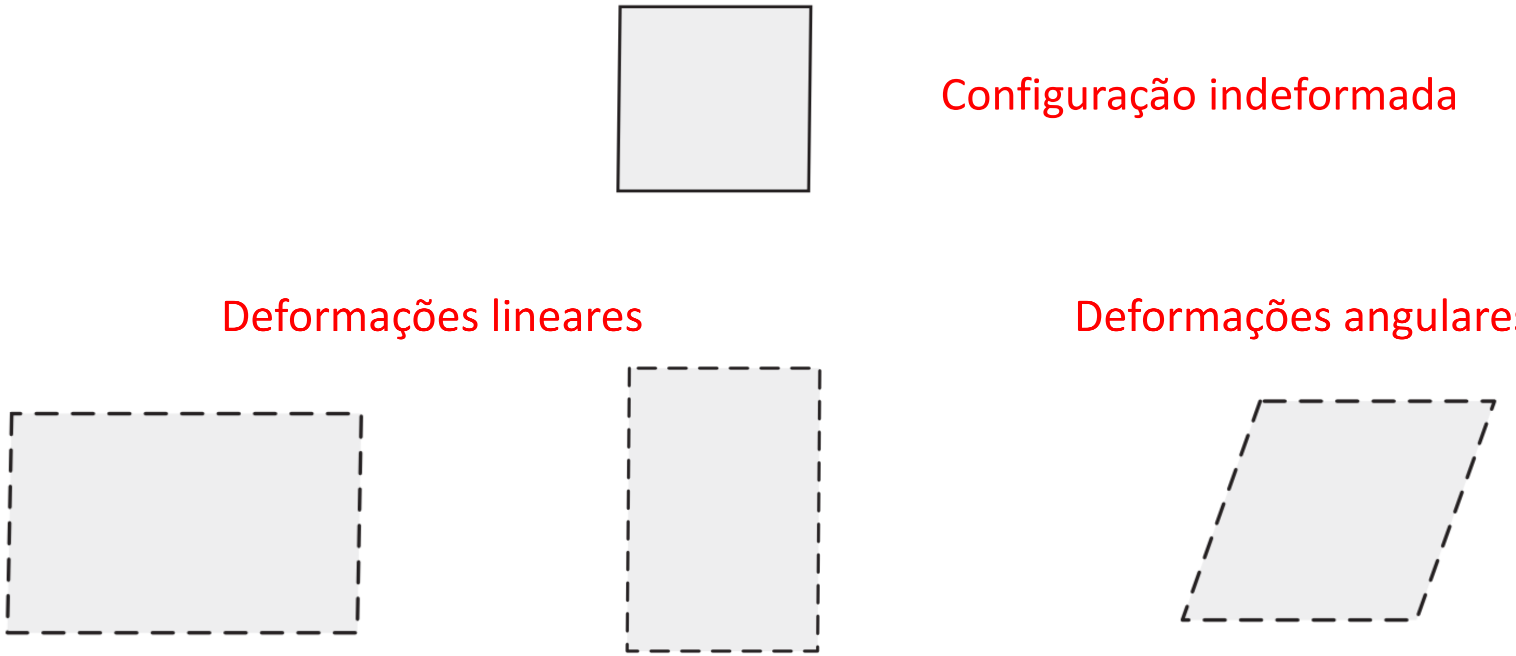
- **Plasticidade**: propriedade de certos materiais que não se retornam à forma original após deformados.

Estado Triaxial de Deformação

<u>Tipos de deformação</u>:

Trataremos, aqui, de dois tipos de deformação:

- Linear (ou normal) – aumento ou redução de dimensão em uma dada direção;
- Angular (ou cisalhante) – variação do ângulo de uma fibra em relação a um plano.



Estado Triaxial de Deformação

<u>Tipos de deformação</u>:

É fácil perceber que deformações lineares são causadas por tensões normais, ao passo que deformações angulares são devidas às tensões tangenciais.

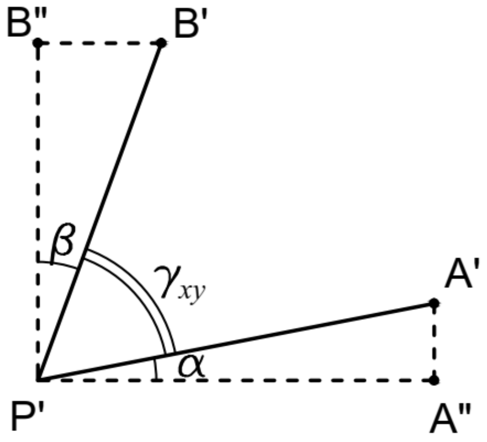
Como visto no curso de Resistência dos Materiais I, as deformações lineares ε podem ser calculadas como:

$$\varepsilon = \frac{l_{final} - l_{inicial}}{l_{inicial}}$$

onde $l_{inicial}$ e l_{final} representam os comprimentos inicial e final, respectivamente, de uma dada dimensão do sólido.

As deformações (ou distorções) angulares γ, por sua vez, são dadas pela perda de perpendicularidade entre dois segmentos (A''B''), como mostra a figura ao lado, isto é:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$



Estado Triaxial de Deformação

Tensor de deformação:

Com as definições vistas anteriormente, é possível montar o Tensor de Deformação para um ponto sujeito a um Estado Triaxial de Deformação:

$$\underset{\approx}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Assim como no caso do tensor de tensão, o tensor de deformação também é simétrico em relação à diagonal principal e pode ser representado graficamente a partir de um sólido (ou cubo de deformações).

onde ε_{xx}, ε_{yy} e ε_{zz} são deformações lineares nas direções x, y e z, respectivamente; ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz} são deformações tangenciais nos planos xy, xz, e yz, respectivamente.

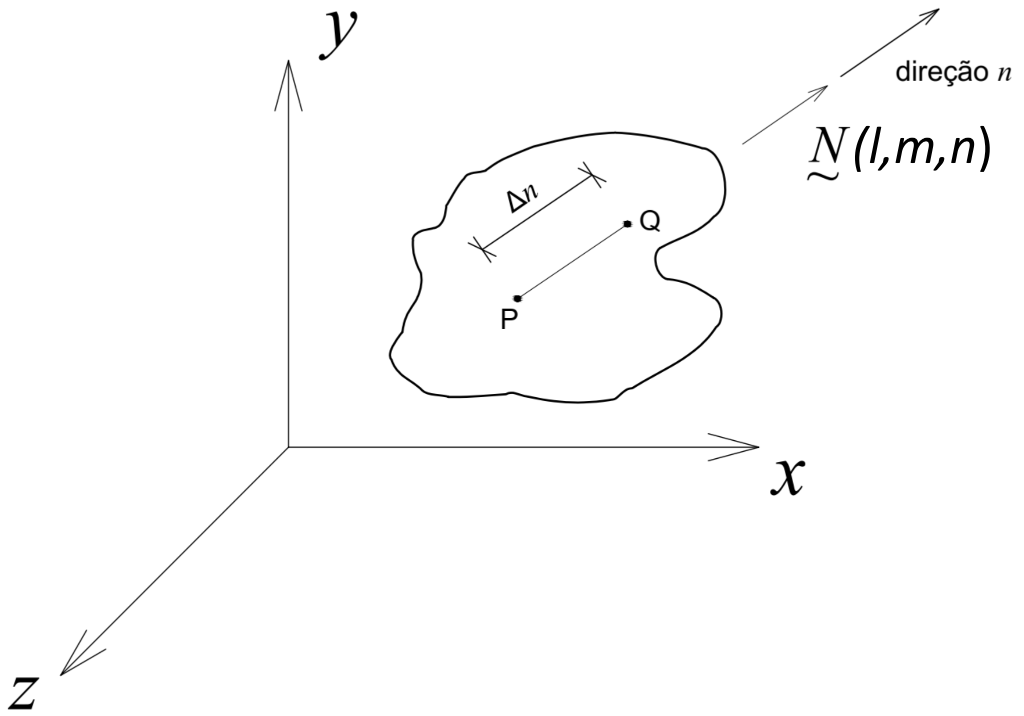
As deformações tangenciais (ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz}) e as distorções angulares (γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}) possuem a seguinte relação entre si:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\gamma}{2}}$$

Estado Triaxial de Deformação

<u>**Deformações lineares numa direção qualquer**</u>:

Consideramos, aqui, um vetor unitário numa direção arbitrária $\mathbf{N}$ num ponto P de um corpo e um segmento PQ que na configuração indeformada, possui comprimento Δn, sendo que após deformação, PQ torna-se $P'Q'$, como indicado na Fig. 4.5. Nosso objetivo é calcular a deformação linear nesta direção $\mathbf{N}$ no ponto P.



Estado Triaxial de Deformação

<u>Deformações lineares numa direção qualquer</u>:

De modo análogo ao realizado no estudo do ETT, podemos calcular o ***vetor deformação total*** a partir do tensor de deformações e do vetor direção $\underset{\sim}{\hat{N}}$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Este sistema de equações pode ser reescrito na forma compacta:

Vetor unitário!

$$\boxed{\underset{\sim}{\varepsilon_n} = \underset{\approx}{\varepsilon} \times \underset{\sim}{\hat{N}}}$$

Por fim, é possível calcular a ***deformação linear numa direção qualquer*** a partir da expressão:

$$\boxed{\varepsilon_{nn} = \underset{\sim}{\varepsilon_n} \cdot \underset{\sim}{\hat{N}}}$$

Estado Triaxial de Deformação – Deformações principais

Neste momento, vamos focar no cálculo dos valores máximos e mínimos das deformações LINEARES.

A estas deformações extremas, denominamos ***deformações principais*** (à semelhança das tensões principais).

As deformações principais ocorrem em direções nas quais **NÃO** existem deformações tangenciais.

As deduções utilizadas no ETT permanecem válidas. Desta forma, para se determinar as deformações principais, basta encontrar as raízes da *equação característica*:

$$\boxed{\epsilon_e^3 - J_1\epsilon_e^2 + J_2\epsilon_e - J_3 = 0}$$

onde J_1, J_2 e J_3 são os invariantes do tensor de deformações e dados por:

$$J_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

$$J_2 = \det\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \det\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

As deformações principais são representadas por ε_1, ε_2 e ε_3. Por convenção, adota-se sempre $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

Para cada uma destas raízes, calcula-se a **direção principal** associada a cada deformação principal, como feito no ETT.

Estado Triaxial de Deformação – Máxima deformação tangencial

As máximas deformações tangenciais são obtidas a partir das expressões:

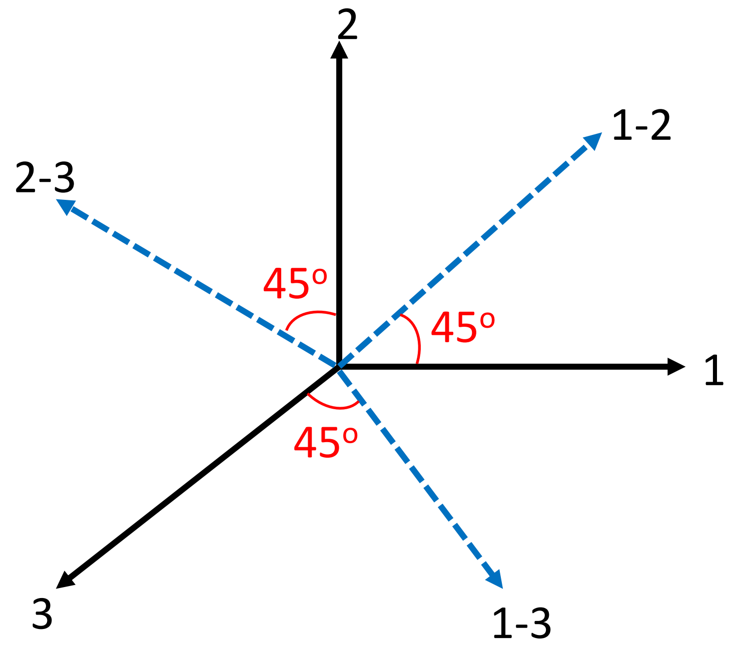
$$\varepsilon_{1-2} = \left|\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right| \qquad \boxed{\varepsilon_{1-3} = \left|\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}\right|} \qquad \varepsilon_{2-3} = \left|\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}\right|$$

Tendo em vista que ε_1 e ε_3 são as deformações principais máxima e mínima, respectivamente, a deformação tangencial ε_{1-3} é, portanto, a maior entre as três.

As deformações tangenciais extremas ocorrem em direções bissetrizes em relação às direções principais, como mostra a figura ao lado.

Nas direções 1-2, 1-3 e 2-3, as deformações lineares são as médias das principais.

Assim como feito para o ETT, pode-se construir o Tri-Círculo de Mohr para o ETD.



Estado Triaxial de Tensão

Referências:

Esses slides foram preparados usando como base:

1) Beer, Johnston – Mecânica dos Materiais – 6ª ed.
2) Toledo, Bastos, Cury - Apostila de Resistência dos Materiais, UFJF.