

# Estado Plano de Tensão

---

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

# Introdução

No início do estudo do Estado Triaxial de Tensões, abordamos um estado de tensões simples, denominado *Estado Uniaxial de Tensões* (assim denominado por possuir apenas uma tensão normal não nula).

Mostramos, naquele caso, como a tensão normal  $\sigma_n$  variava com o vetor normal ao plano corte considerado.

Posteriormente, abordamos, também, o caso geral do estado de tensões num ponto, apresentando como esta mesma tensão normal  $\sigma_n$  varia com a direção de um plano corte qualquer, sendo este definido pelos cossenos diretores do vetor normal.

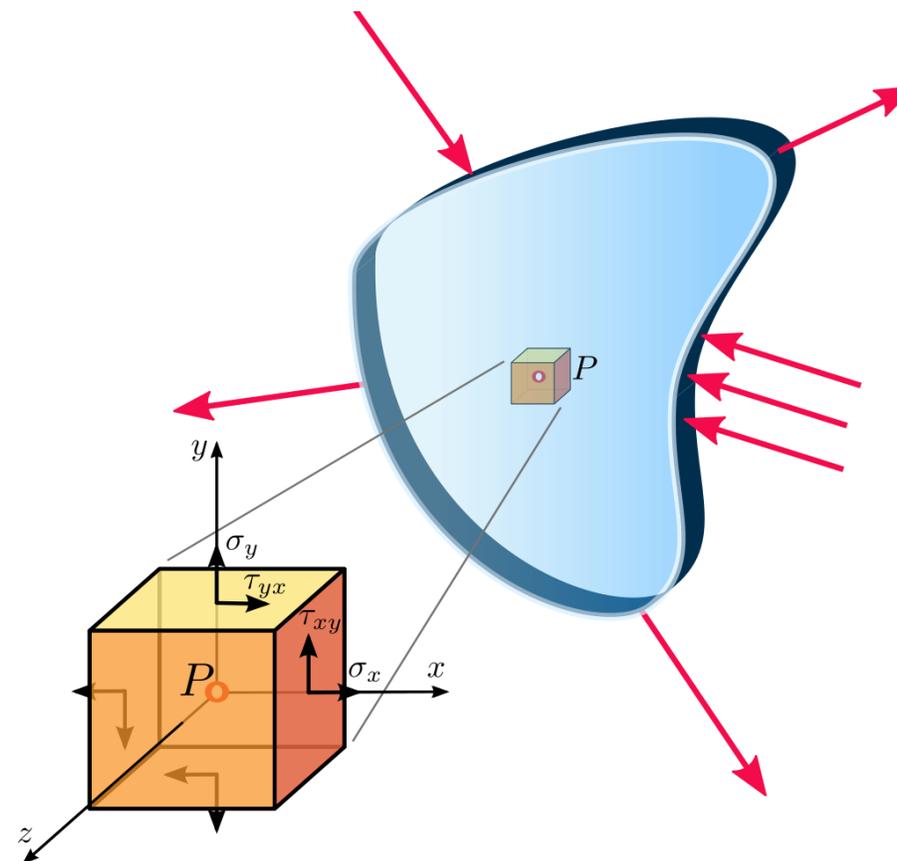
Trataremos, agora, de um caso particular denominado **ESTADO PLANO DE TENSÕES (EPT)** que ocorre, por exemplo, numa chapa - corpo plano com pequena espessura - cuja hipótese de carregamento inclui somente cargas externas aplicadas no seu plano médio.

# Introdução

Seja a situação mostrada na figura ao lado:

Se tomarmos o eixo  $z$  como sendo normal a este plano ( $xy$ , no caso), não existe, por hipótese, cargas nas faces desta chapa ou perpendiculares ao seu plano.

Assim, é razoável admitir que só existam tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ .

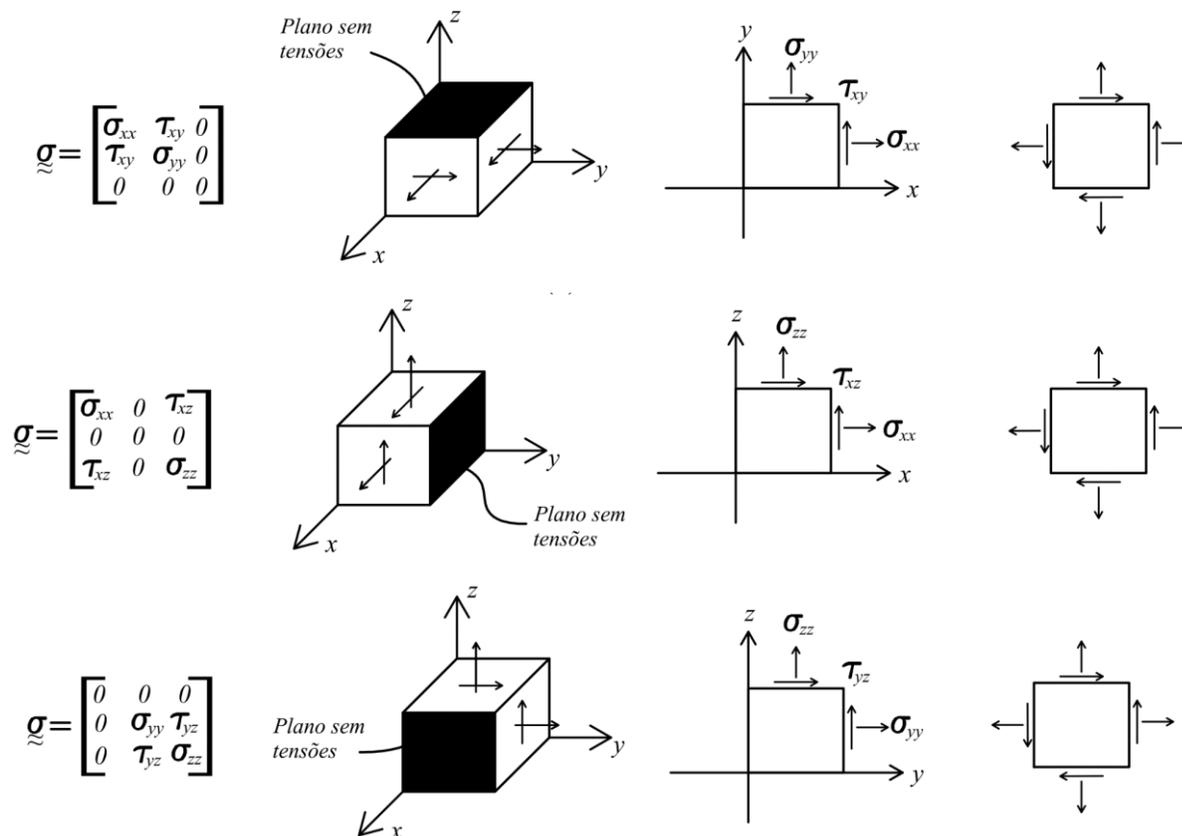


Representação do EPT.

# Introdução

Outra possível ocorrência de um EPT se dá quando todos os pontos de uma estrutura estão submetidos a um estado de tensões conforme uma das três possibilidades mostradas na figura abaixo.

Nesta figura estão também indicados os tensores de tensões e as representações planas em cada caso particular.



Atenção à convenção de sinais!

# Estado Plano de Tensão – Tensor de Tensões

Vimos que, para o estado triaxial de tensões, as tensões total, normal e tangencial podem ser escritas como:

$$\underline{\underline{\rho_n}} = \underline{\underline{\sigma}} \times \hat{N} \rightarrow \text{Vetor tensão total} \quad (\text{I})$$

$$\sigma_n = \underline{\underline{\rho_n}} \cdot \hat{N} \rightarrow \text{Tensão normal} \quad (\text{II})$$

$$\tau_t = \sqrt{|\underline{\underline{\rho_n}}|^2 - \sigma_n^2} \rightarrow \text{Tensão tangencial} \quad (\text{III})$$

No caso de problemas no estado plano de tensões, o tensor de tensões simplifica-se e é dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

# Estado Plano de Tensão – Tensões numa direção qualquer

O vetor normal  $\hat{N}$  pode ser descrito segundo a representação ilustrada na figura abaixo:

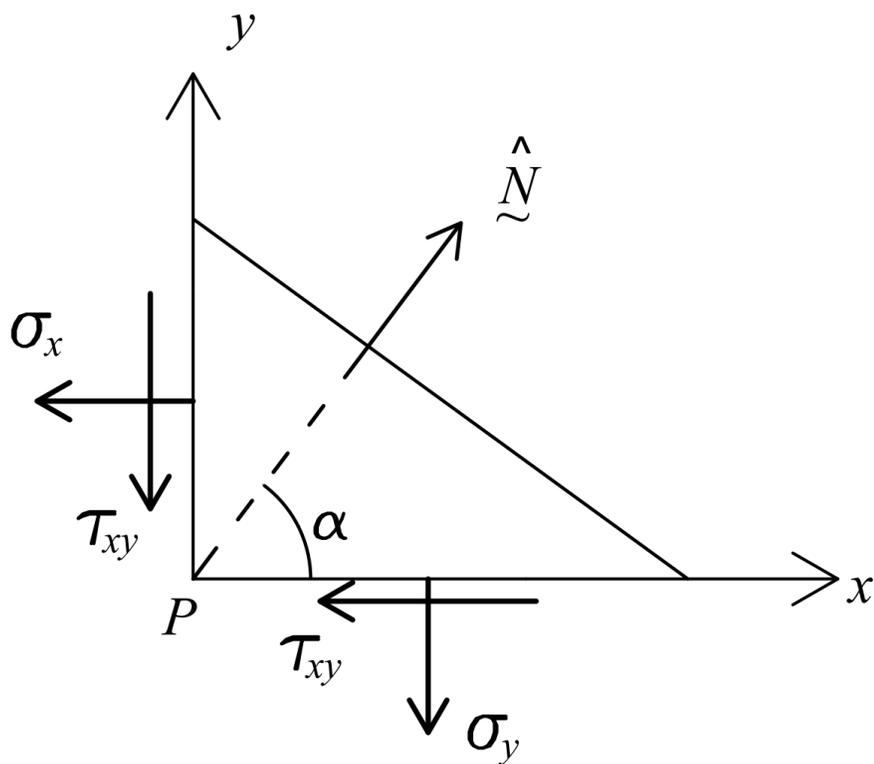
$$\hat{N} = [ l_x \quad l_y ] = [ \cos \alpha \quad \text{sen} \alpha ]$$

onde  $\alpha$  é o ângulo formado entre  $\hat{N}$  e o eixo x.

Assim, temos que:

$$\begin{Bmatrix} \rho_{nx} \\ \rho_{ny} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen} \alpha \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho_{nx} = \sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \text{sen} \alpha \\ \rho_{ny} = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \text{sen} \alpha \end{cases}$$



# Estado Plano de Tensão – Tensões numa direção qualquer

De posse do **vetor tensão total** e do **vetor normal**, é possível obter a tensão normal utilizando a Eq. (II). Após alguma manipulação algébrica, temos:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

De posse do **vetor tensão total** e da **tensão normal**, é possível obter a **tensão tangencial total** utilizando a Eq. (III). Após alguma manipulação algébrica, temos:

$$\tau_t = - \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

**As duas expressões acima permitem obter, para qualquer direção  $\alpha$ , os valores das tensões normal e tangencial atuantes em um dado ponto de uma estrutura, desde que se conheça o tensor de tensões neste ponto.**

# Estado Plano de Tensão – Tensões Principais

De modo análogo ao que foi discutido no ETT, mais importante do que apenas calcular diferentes valores de tensão normal e tangencial, é conhecer seus valores extremos (máximos e mínimos) e em quais direções elas ocorrem.

Desta forma, segue-se a mesma premissa já adotada, isto é, monta-se a *equação característica* a partir do determinante do tensor de tensão, subtraído da incógnita  $\sigma_e$  dos termos da diagonal principal:

$$\det \left( \underline{\underline{\underline{\sigma}}} - \sigma_e \underline{\underline{\underline{I}}} \right) = 0$$

onde  $\sigma_e$  é a tensão principal e “I” representa uma matriz identidade [2x2].

Temos, então:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_e & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

O que nos leva a:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_e)(\sigma_{yy} - \sigma_e) - \tau_{xy}^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_e^2 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\sigma_e + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2 = 0}$$

# Estado Plano de Tensão – Tensões Principais

No caso do EPT, apenas os invariantes  $I_1$  e  $I_3$  do tensor de tensões permanecem:

$$\sigma_e^2 - \underbrace{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_{I_1 = \text{tr}(\sigma)} \sigma_e + \underbrace{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2}_{I_3 = \det(\sigma)} = 0$$

As raízes desta equação são facilmente obtidas e dadas por:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

Nota-se a semelhança destas expressões com aquelas utilizadas para a determinação dos momentos principais de inércia.

# Estado Plano de Tensão – Direções Principais

As direções principais associadas às tensões principais são obtidas derivando-se a expressão para  $\sigma_n$  (slide 7) em relação ao ângulo  $\alpha$ :

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 0 \rightarrow -2 \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

O que leva a:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

A equação acima possui como solução dois ângulos (direções principais):  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  defasados de  $90^\circ$  entre si.

Percebe-se, novamente, a semelhança destas expressões com aquelas utilizadas para a determinação das direções principais de inércia.

**Pergunta:**

O que acontece se  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  forem substituídos nas expressões de  $\sigma_n$  e  $\tau_t$  (slide 7)?

# Estado Plano de Tensão – Tensão Tangencial Máxima

Valendo-se das conclusões obtidas no estudo do ETT, tem-se que as tensões tangenciais extremas podem ser obtidas a partir da seguinte expressão:

$$|\tau_{max}| = |\tau_{min}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

No caso do EPT, é possível substituir as expressões de  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  na equação anterior, chegando-se a:

$$\tau_{max/min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

**IMPORTANTE**: As expressões acima são válidas apenas para os casos em que as tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  possuem **sinais contrários**. Caso contrário, a seguinte expressão deverá ser utilizada para o cálculo das tensões tangenciais extremas:

$$|\tau_{max}| = |\tau_{min}| = \frac{\sigma_1}{2}$$

Esta observação será esclarecida ao final deste tópico.

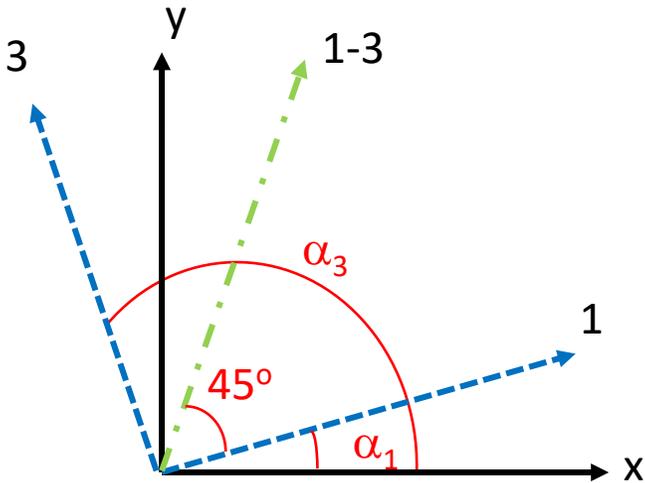
# Estado Plano de Tensão – Tensão Tangencial Máxima

Ainda a partir das conclusões obtidas no estudo do ETT, sabe-se que as tensões tangenciais extremas ocorrem em direções bissetrizes em relação às direções das tensões principais.

Desta forma, uma vez obtidas as direções principais  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$ , basta determinar o ângulo relativo à bissetriz, isto é:

$$\alpha_{\tau_{\max/\min}} = \alpha_1 \pm 45^\circ = \alpha_3 \pm 45^\circ$$

Graficamente,



Em preto, representa-se os eixos de referência  $x, y$ ;

Em azul tracejado, representa-se as direções principais,  $1, 3$ ;

Em verde traço-ponto, representa a direção bissetriz  $1-3$ .

# Estado Plano de Tensão – Relações entre $\sigma_n$ e $\tau_t$

Voltemos às expressões obtidas para o cálculo das tensões normal e tangencial em uma direção qualquer:

$$\begin{cases} \sigma_n &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau_t &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Fazendo  $\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$  e jogando este termo para o membro esquerdo da 1ª equação, temos:

$$\begin{cases} \sigma_n - \sigma_m &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \\ \tau_t &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Elevando cada um dos termos das igualdades anteriores ao quadrado e somando-os, obtém-se:

$$(\sigma_n - \sigma_m)^2 + \tau_t^2 = \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

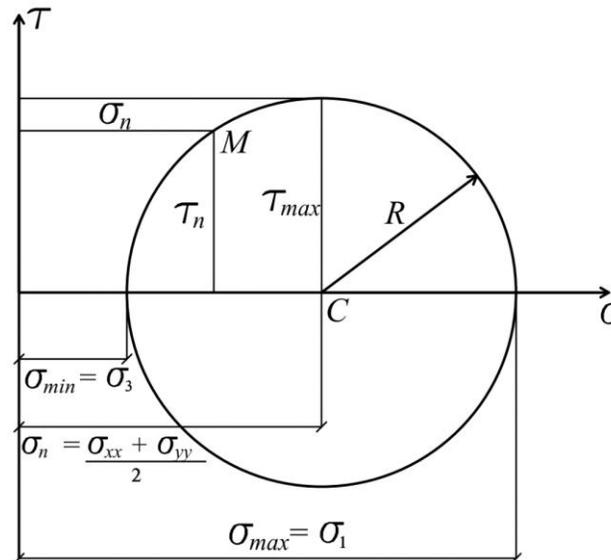
Equação – Círculo de Mohr (EPT)

# Estado Plano de Tensão – Círculo de Mohr

Chamando  $\sigma_n = \sigma$ ;  $\tau_t = \tau$  e  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ , chegamos a:

$$(\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 = R^2$$

que é a equação de uma circunferência no plano  $(\sigma, \tau)$  com centro sobre o eixo  $\sigma$  no ponto  $\sigma = \sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$  e cujo raio é o valor de  $R$  acima descrito



Da figura, constatamos, novamente, que a máxima tensão tangencial vale:

$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|$$

## Pergunta:

O que significam os pontos sobre a circunferência? E fora dela?

# Estado Plano de Tensão – Círculo de Mohr

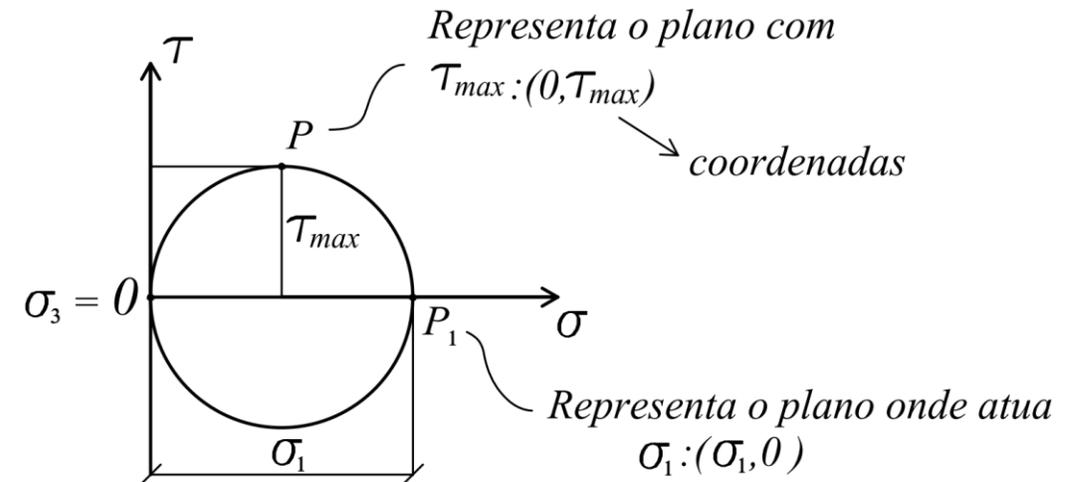
## Casos particulares:

### i) Estado de tração simples:

Todas as tensões normais em torno do ponto (em qualquer direção) são de tração.

A figura ao lado ilustra o círculo de Mohr para este caso.

Assim,  $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$ , já que  $\sigma_3 = 0$ !



# Estado Plano de Tensão – Círculo de Mohr

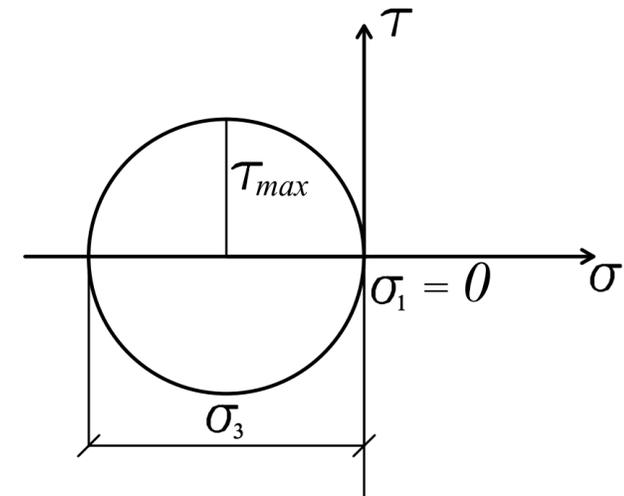
## Casos particulares:

### ii) Estado de compressão simples:

Todas as tensões normais em torno do ponto (em qualquer direção) são de compressão.

A figura ao lado ilustra o círculo de Mohr para este caso.

Assim,  $\tau_{max} = \frac{\sigma_3}{2}$ , já que  $\sigma_1 = 0$ !



# Estado Plano de Tensão – Círculo de Mohr

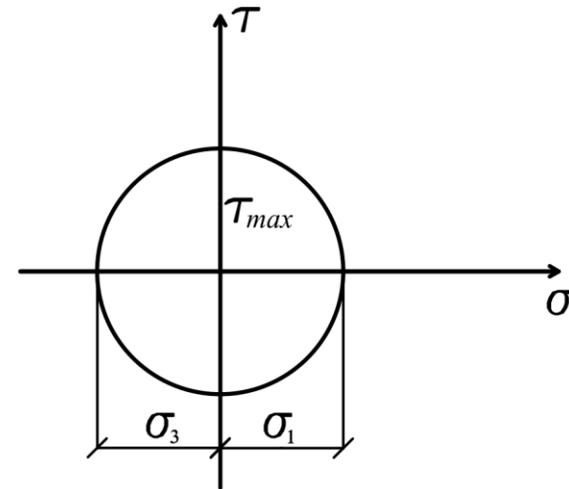
## Casos particulares:

iii) Estado de cisalhamento simples:

Todas as tensões principais são iguais e de sinal contrário.

A figura ao lado ilustra o círculo de Mohr para este caso.

Assim,  $\tau_{max} = |\sigma_3| = \sigma_1$ .



# Estado Plano de Tensão – Círculo de Mohr

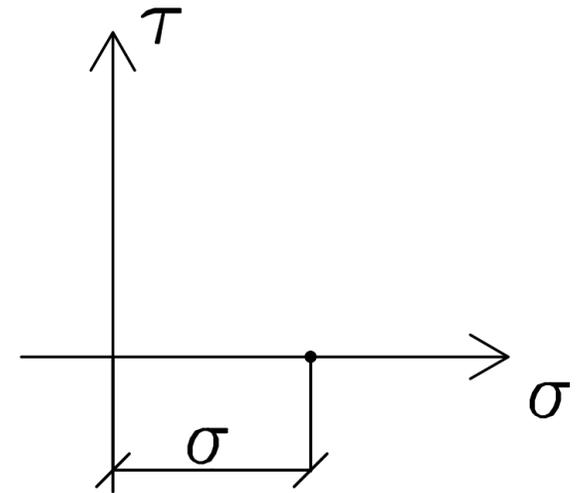
## Casos particulares:

iv) Estado de tensões uniforme ou hidrostático:

Todas as tensões em torno do ponto são normais (de compressão ou tração), não existindo tensões tangenciais em nenhuma direção.

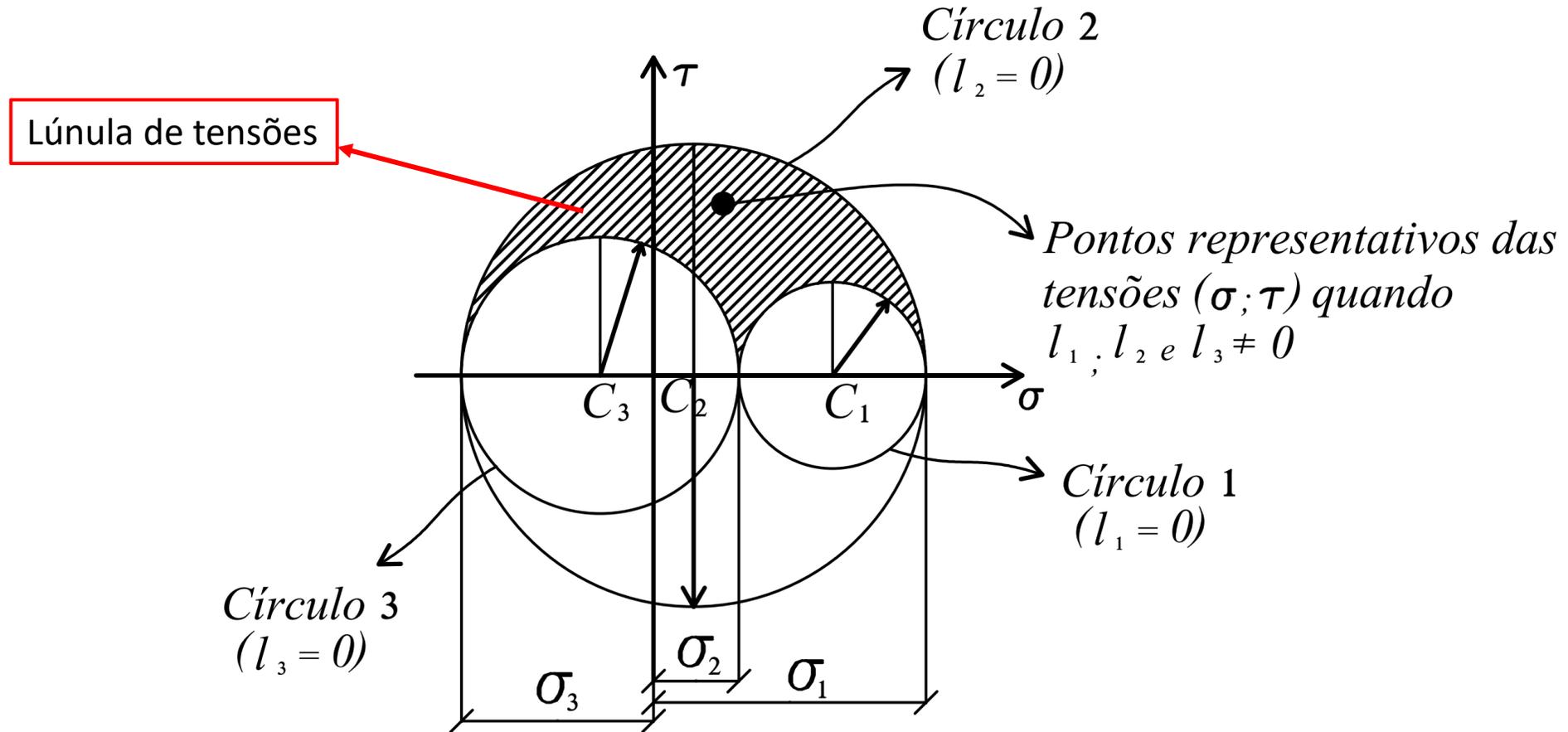
A figura ao lado ilustra este caso.

Assim,  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$  e  $\tau = \tau_{max} = 0$ .



# Tri-Círculo de Mohr

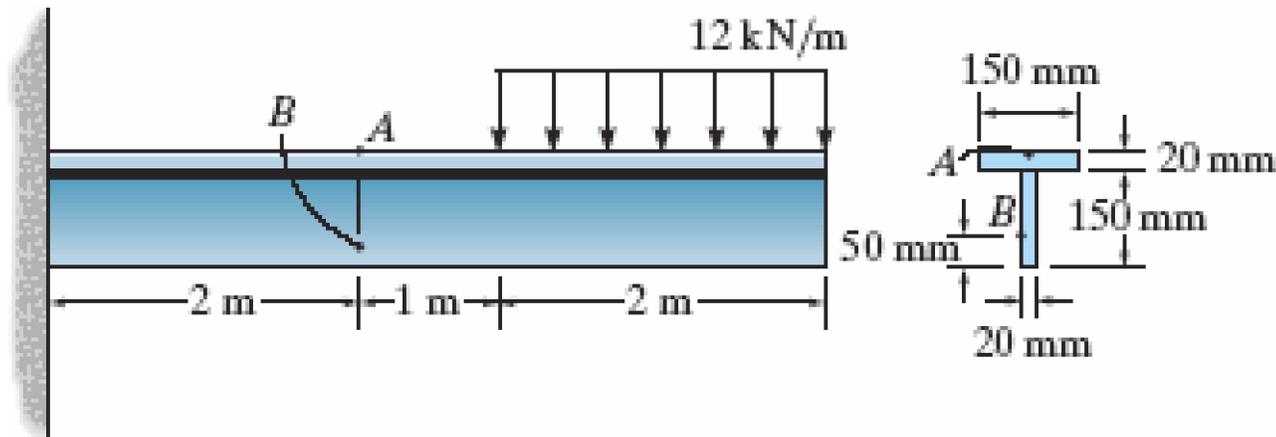
O Tri-Círculo de Mohr representa a extrapolação do Círculo de Mohr para um ponto sujeito a um Estado Triaxial de Tensões.



# Estado Plano de Tensão – Exemplo

**Exemplo (exercício 9.26 do Hibbeler – 7ª edição):**

Para a situação mostrada abaixo, trace os círculos de Mohr dos pontos A e B.



**Dados:**

$$\bar{y} = 117,5 \text{ mm (a partir da base)}$$

$$I_z = 16,5625 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

# Estado Plano de Tensão – Exemplo

O primeiro passo consiste em calcular os esforços internos na seção que contém os pontos *A* e *B*.

Considerando-se os eixos ordenados mostrados nas figuras ao lado, tem-se:

$$N = 0;$$

$$Q_y = 12 \times 2 = 24 \text{ kN} = 24 \times 10^3 \text{ N}$$

$$Q_z = 0$$

$$M_y = 0$$

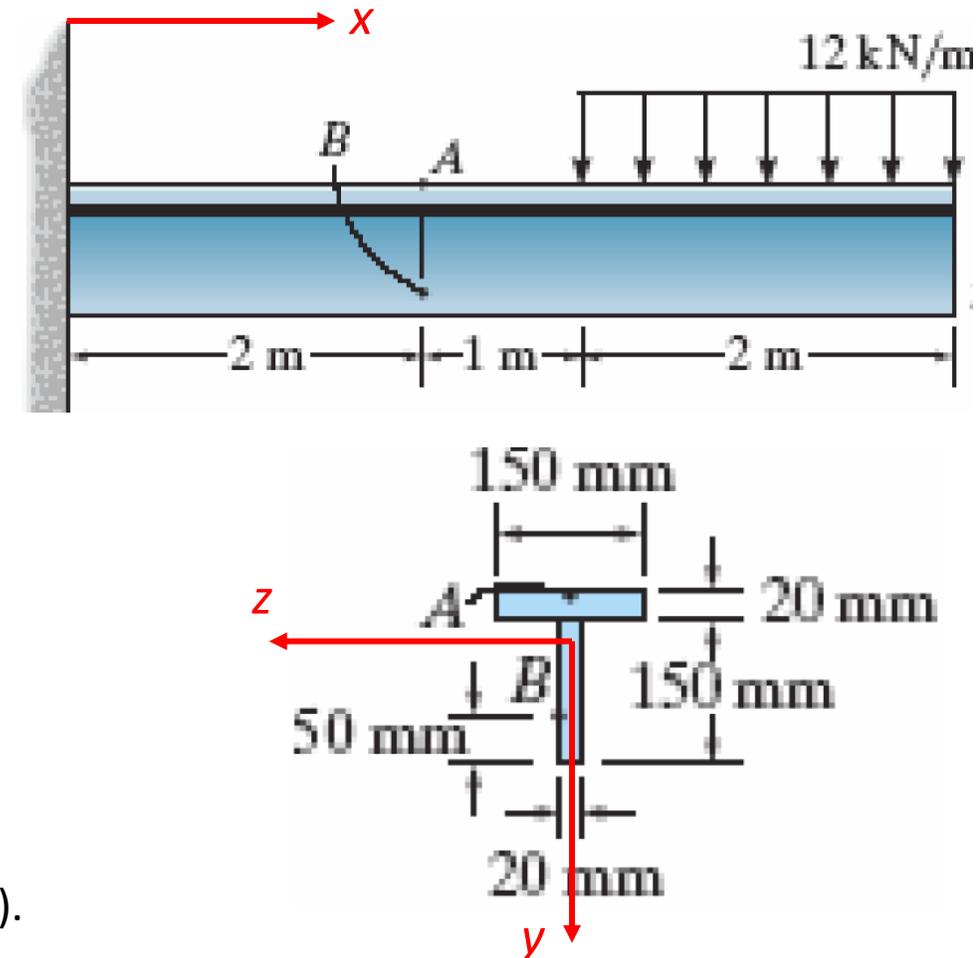
$$M_z = -12 \times 2 \times 2 = -48 \text{ kNm} = -48 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

**OBS:** Para facilitar o entendimento, adotaremos as seguintes convenções:

*N* – tração (positivo); compressão (negativo);

*Q* – sentido coincide com o dos eixos (positivos); caso contrário (negativo);

*M* – traciona fibras inferiores (positivos); traciona fibra superiores (negativo).



# Estado Plano de Tensão – Exemplo

De posse dos valores dos esforços internos na seção, podemos calcular as tensões em cada ponto.

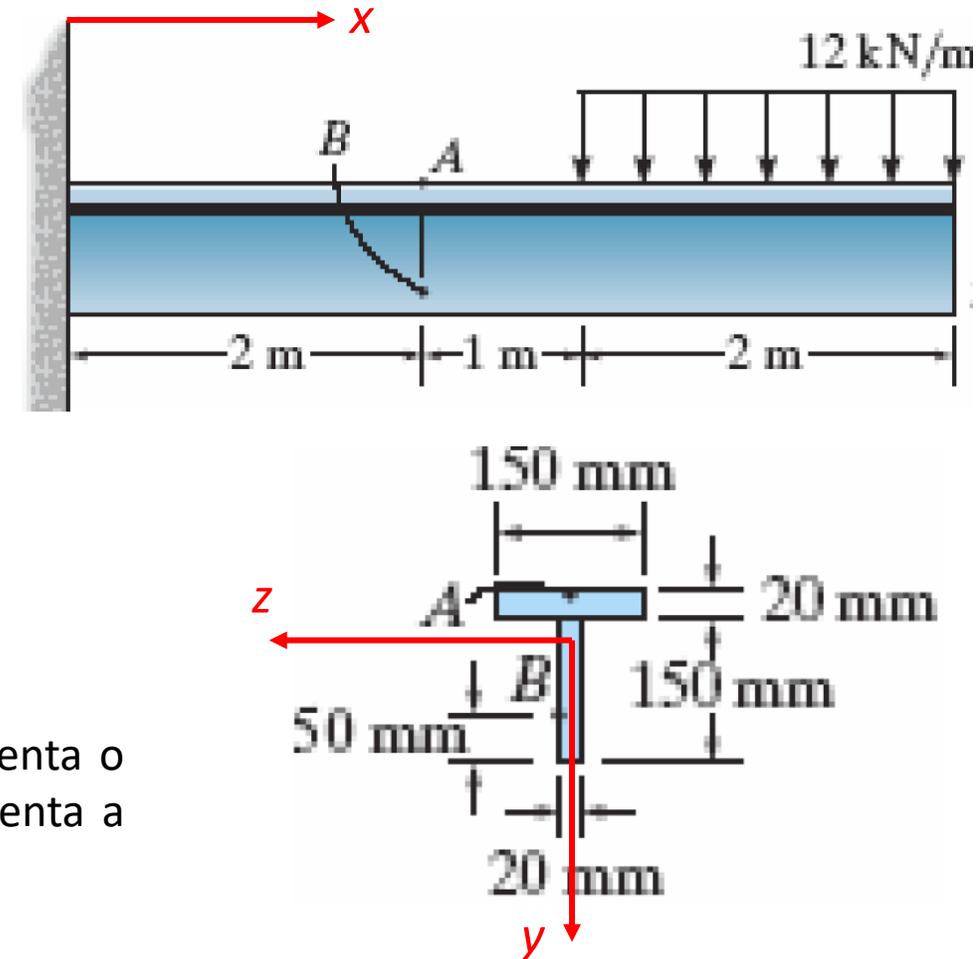
**Ponto A:**

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{-48 \cdot 10^6}{16,5625 \cdot 10^6} (-52,5) = 152,15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y M_s}{t I_z} = \frac{(24 \cdot 10^3) 0}{(150)(16,5625 \cdot 10^6)} = 0$$

**OBS:** na expressão utilizada para o cálculo da tensão cisalhante,  $M_s$  representa o momento estático da área acima ou abaixo do ponto analisado e  $t$  representa a largura da seção transversal onde o ponto se encontra.



# Estado Plano de Tensão – Exemplo

De posse dos valores dos esforços internos na seção, podemos calcular as tensões em cada ponto.

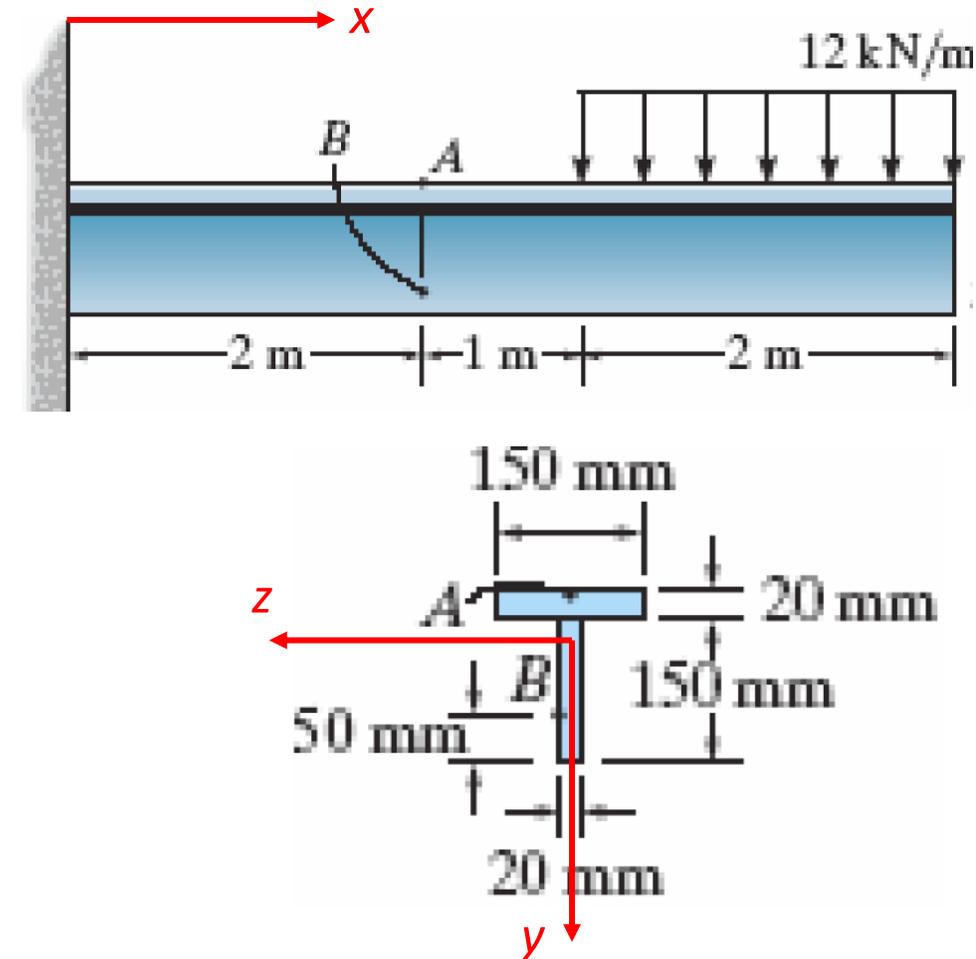
**Ponto B:**

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{-48 \cdot 10^6}{16,5625 \cdot 10^6} (67,5) = -195,62 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y M_s}{t I_z} = \frac{(24 \cdot 10^3)(20 \cdot 50 \cdot 92,5)}{(20)(16,5625 \cdot 10^6)} = 6,70 \text{ MPa}$$

Sendo  $M_s = S' \cdot \bar{y}_s$ , onde  $S'$  é a área acima ou abaixo do ponto analisado e  $\bar{y}_s$  é a distância entre o CG desta área e o CG da seção.



# Estado Plano de Tensão – Exemplo

As tensões principais e a tensão tangencial máxima em cada ponto são facilmente calculadas utilizando-se as expressões abaixo:

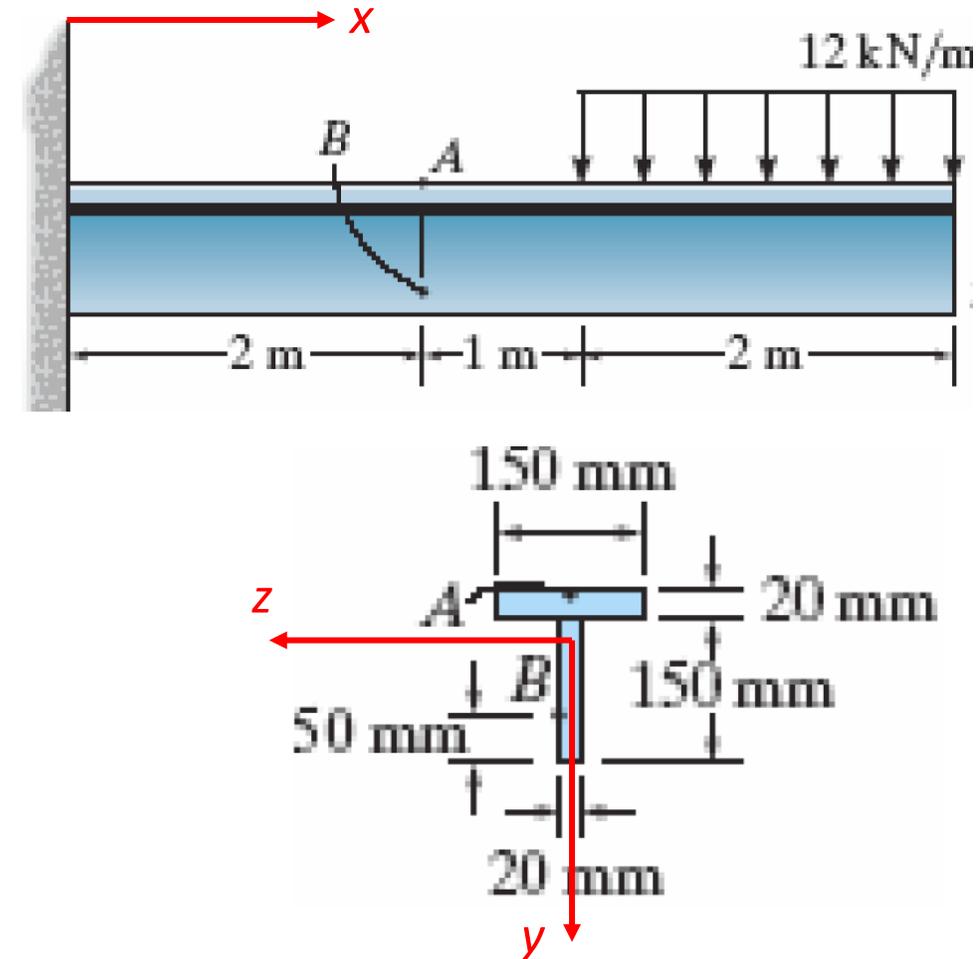
$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

Assim, tem-se:

**Ponto A:**  $\sigma_1 = 152,15 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_3 = 0$ ;  $\tau_{max} = 76,08 \text{ MPa}$ .

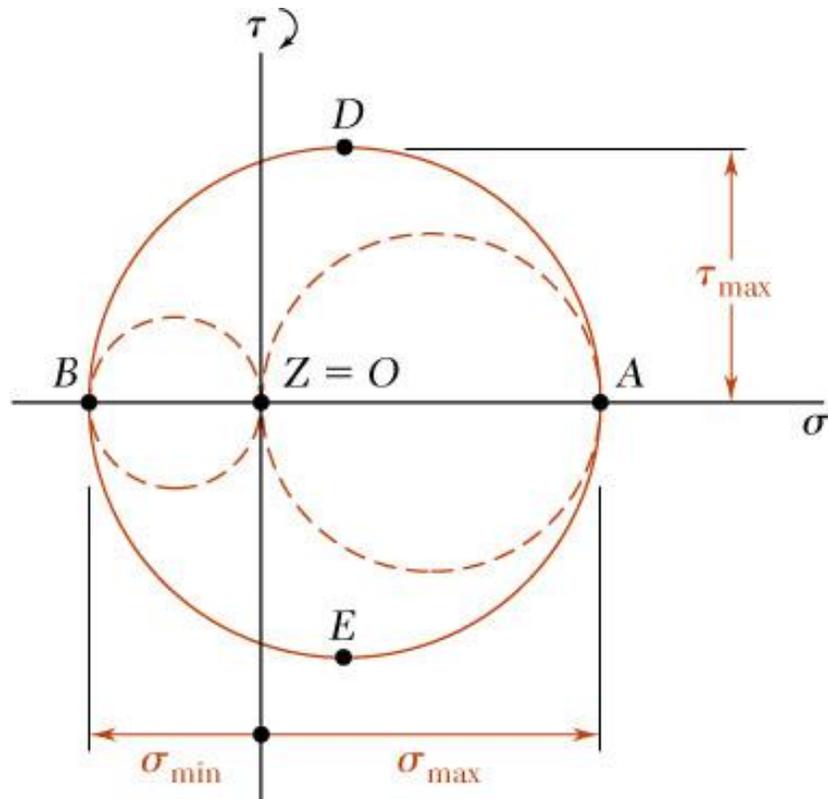
**Ponto B:**  $\sigma_1 = 0,230 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_3 = -195,85 \text{ MPa}$ ;  $\tau_{max} = 98,04 \text{ MPa}$ .



# Estado Plano de Tensão – Tensão Tangencial Máxima

No EPT, vemos que existem apenas duas tensões principais:  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ . Subentende-se, portanto, que exista uma terceira tensão principal  $\sigma_2$  nula.

Assim, para o caso de tensões principais com sinais contrários, ter-se-ia o seguinte Tri-Círculo de Mohr:



Considerando-se que:

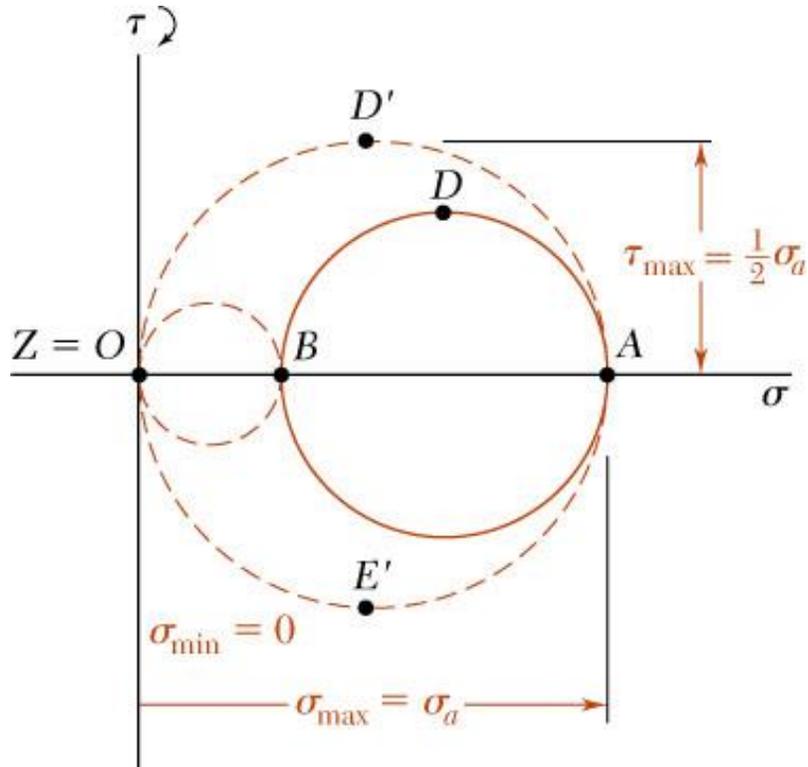
- 1) Os pontos  $A$  e  $B$  (representando as tensões principais) estão em lados opostos da origem;
- 2) A “terceira” tensão principal é nula e encontra-se na origem;
- 3) A tensão de cisalhamento máxima é dada **sempre** pelo raio do **maior** círculo;

Então:

A tensão de cisalhamento máxima é igual à metade da diferença das tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ .

# Estado Plano de Tensão – Tensão Tangencial Máxima

Para o caso de tensões principais com o mesmo sinal, ter-se-ia o seguinte Tri-Círculo de Mohr:



Considerando-se que:

- 1) Os pontos  $A$  e  $B$  (representando as tensões principais) estão do mesmo lado em relação à origem;
- 2) A “terceira” tensão principal é nula e encontra-se na origem;
- 3) A tensão de cisalhamento máxima é dada **sempre** pelo raio do **maior** círculo;

Então:

A tensão de cisalhamento máxima é igual à metade da tensão principal  $\sigma_1$ .

# Estado Plano de Tensão

## Referências:

Esses slides foram preparados usando como base:

- 1) Beer, Johnston – Mecânica dos Materiais – 6ª ed.
- 2) Toledo, Bastos, Cury - Apostila de Resistência dos Materiais, UFJF.