

# Estado Triaxial de Tensão

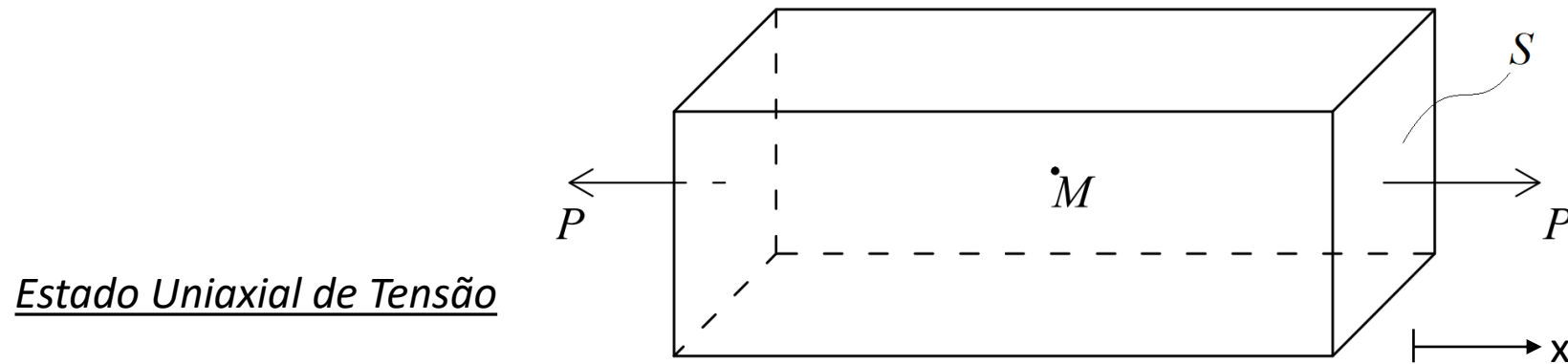
---

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

# Estudo Preliminar – Barra sujeita à carga axial

Para ilustrar a importância do presente estudo, vamos examinar inicialmente o caso de uma barra de seção retangular de área  $S$  sujeita a uma carga axial  $P$ , conforme mostrado na figura abaixo:



A partir desta situação, queremos examinar o que ocorre, em termos de tensão, num ponto  $M$  situado em seu interior.

Entretanto, antes de iniciarmos o estudo, refletamos sobre as duas perguntas abaixo:

- 1) Qual é o valor da tensão normal no ponto  $M$ ?
- 2) É possível que exista tensão tangencial no ponto  $M$ ?

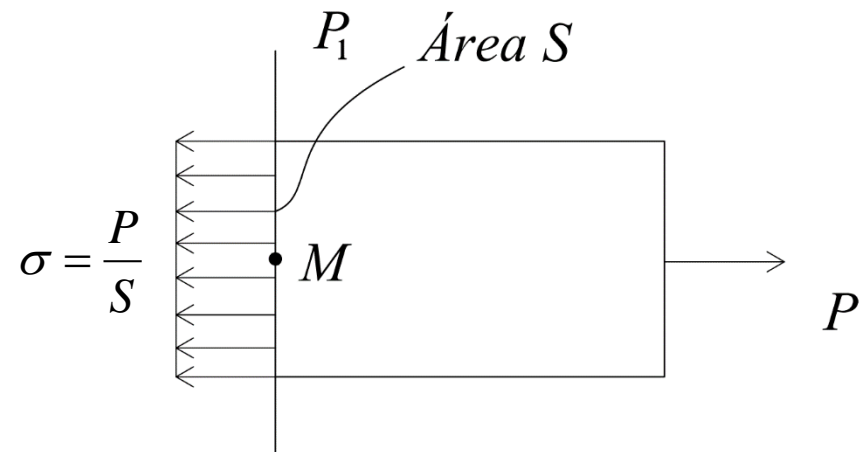
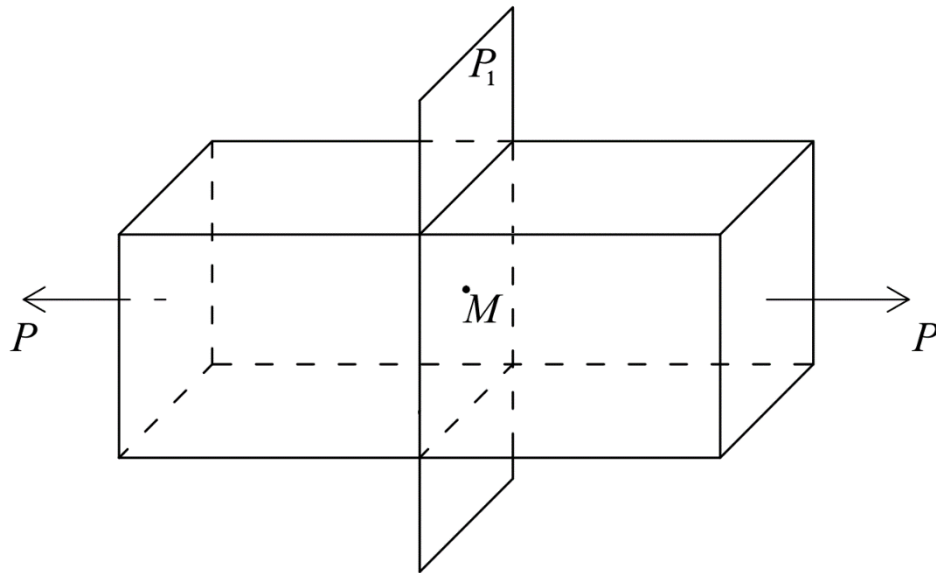
# Estudo Preliminar – Barra sujeita à carga axial

Num primeiro momento, é natural que as respostas às perguntas anteriores sejam:

- 1)  $\sigma = P/S$
- 2) Não

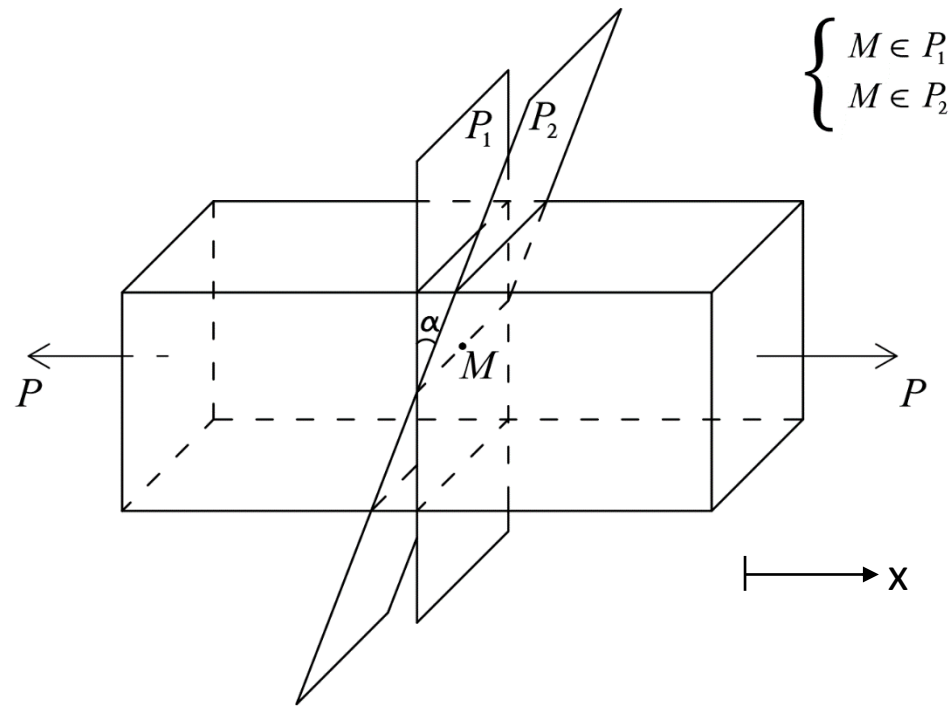
Por que estas conclusões parecem ser tão óbvias? É possível que existam outras, igualmente corretas?

A resposta é **SIM!** Senão, vejamos: as respostas acima decorrem do fato de que, subconscientemente, pensamos em um plano que secciona a barra **perpendicularmente**, conforme mostrado abaixo:



# Estudo Preliminar – Barra sujeita à carga axial

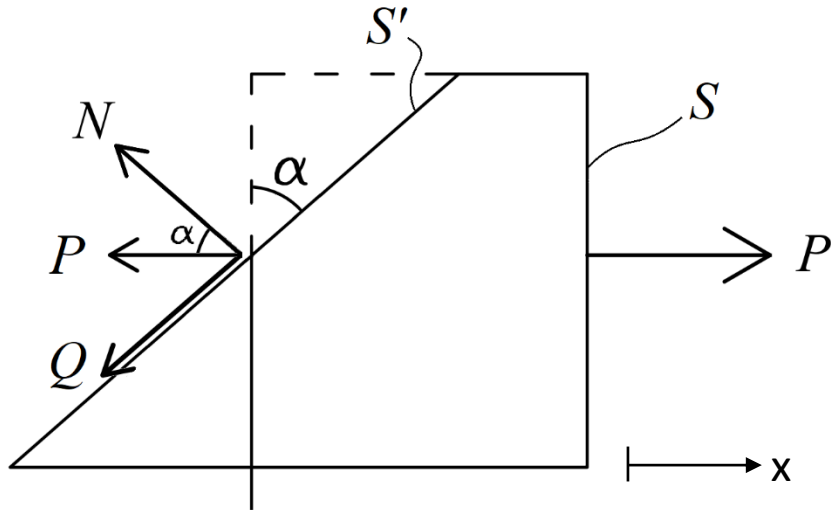
Entretanto, o plano que secciona a barra não precisa ser, necessariamente, perpendicular a ela. Consideremos o caso de um plano  $P_2$ , que corta a barra formando um ângulo  $\alpha$  com o plano  $P_1$ :



O que acontece, para esta situação, em termos de tensão no ponto  $M$ ?

# Estudo Preliminar – Barra sujeita à carga axial

Para facilitar o entendimento e a visualização, a figura abaixo mostra o segmento da barra à **direita** do plano de corte  $P_2$ :



Onde:

- $N$  é o esforço normal atuante na seção inclinada;
- $Q$  é o esforço cortante atuante na seção inclinada;
- $P$  é a resultante das forças na seção inclinada;
- $S$  é a área da seção transversal da barra;
- $S'$  é a área da seção inclinada (plano  $P_2$ ).

Da figura acima, conseguimos obter as seguintes relações:

$$N = P \cos \alpha$$

$$Q = P \sin \alpha$$

$$S' = \frac{S}{\cos \alpha}$$

# Estudo Preliminar – Barra sujeita à carga axial

A partir das equações anteriores, é possível obter, enfim, as expressões para as tensões normal e tangencial no ponto  $M$ :

$$\sigma = \frac{N}{S'} = \frac{P \cos \alpha}{\frac{S}{\cos \alpha}} = \frac{P}{S} \cos^2 \alpha \qquad \tau = \frac{Q}{S'} = \frac{P \sin \alpha}{\frac{S}{\cos \alpha}} = \frac{P}{S} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{P}{2S} \sin 2\alpha$$

Haja vista que a direção axial da barra coincide com o eixo referencial  $x$ , as expressões acima podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

onde  $\sigma_x = \frac{P}{S}$  representa a tensão normal na direção  $x$  (perpendicular ao plano  $P_1$ ).

O vetor tensão total  $\rho_n$  é obtido pela soma vetorial das tensões normal e tangencial. Assim, seu módulo pode ser calculado pela regra do paralelogramo, isto é:

$$|\rho_n| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sigma_x \cos \alpha$$

# Estudo Preliminar – Barra sujeita à carga axial

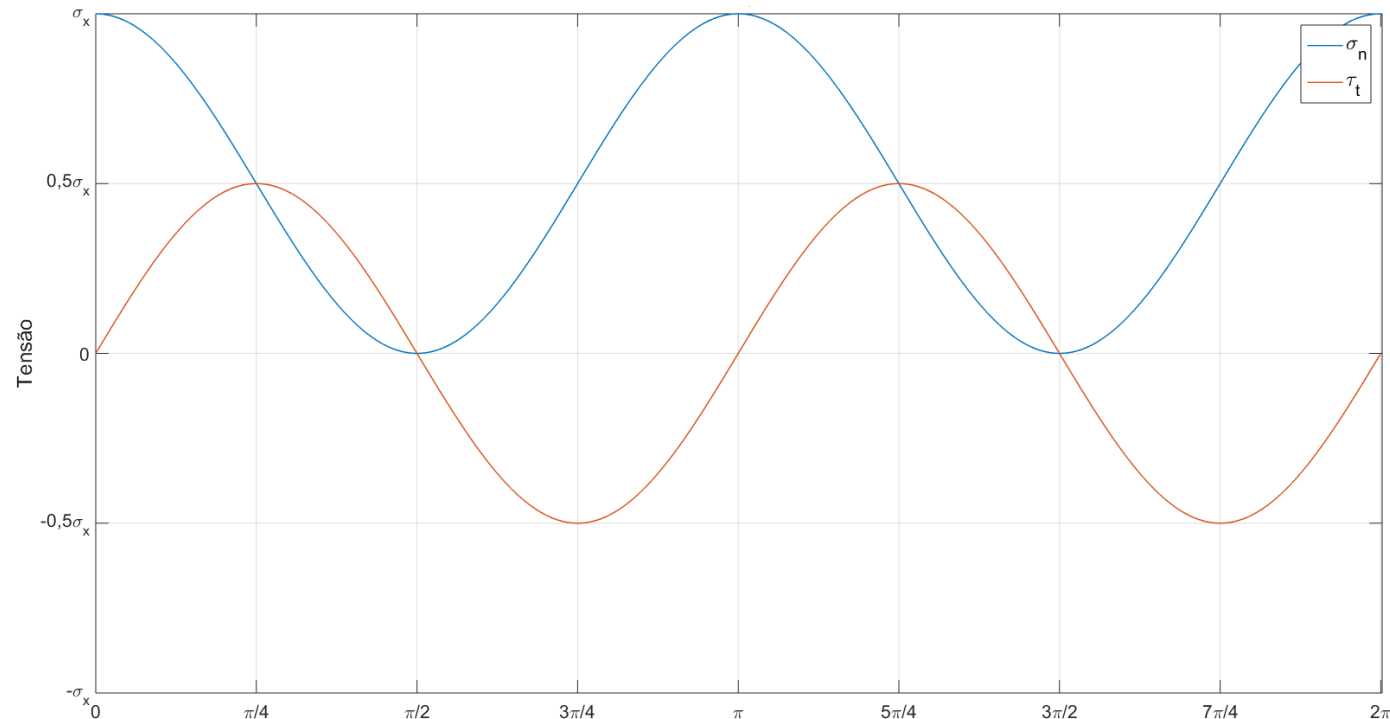
A partir das expressões obtidas anteriormente, vemos que as tensões em um ponto de uma estrutura podem variar de acordo com a inclinação de um plano de corte.

Assim, se voltarmos às perguntas colocadas inicialmente, as respostas seriam: 1) depende e 2) sim.

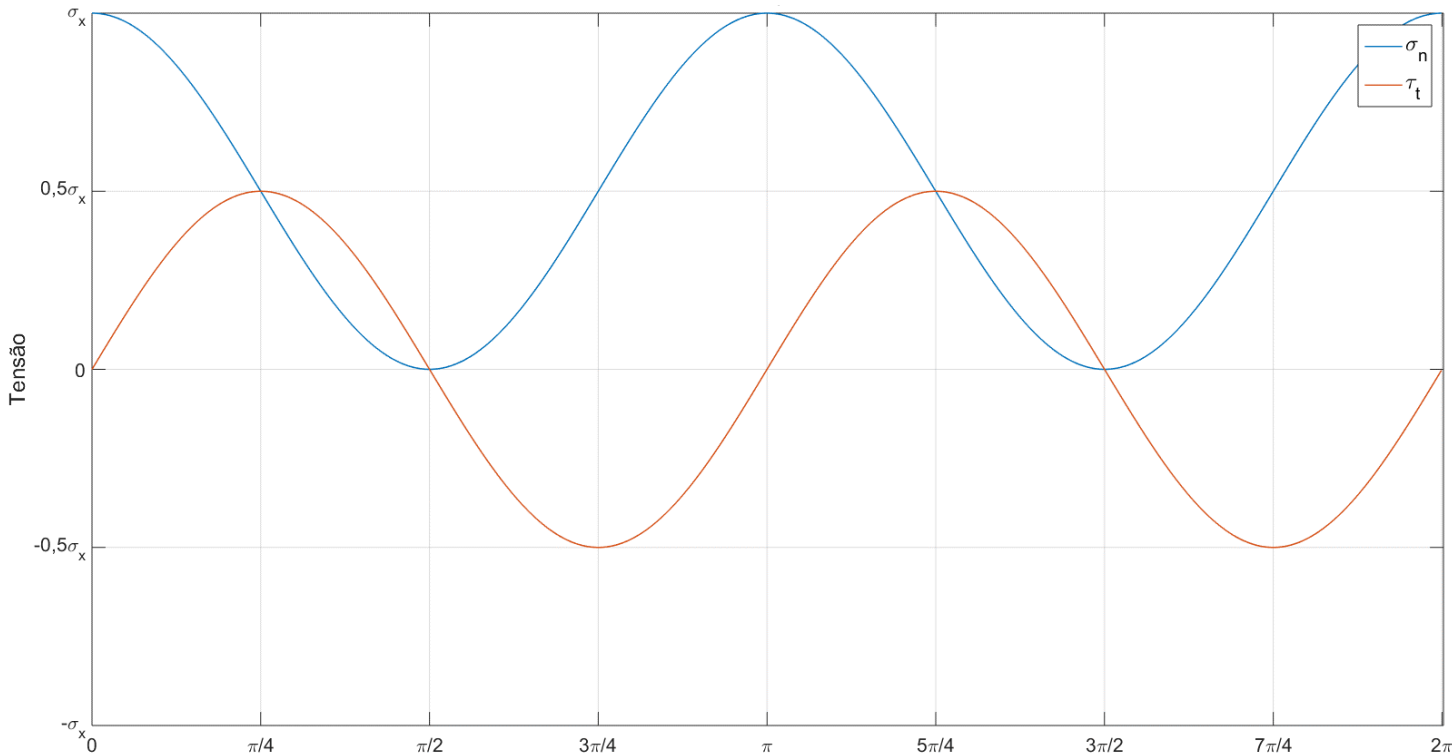
O gráfico abaixo mostra como as tensões normal e tangencial variam de acordo com o plano de corte em um ponto de uma barra sujeita à carga axial.

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha$$



# Estudo Preliminar – Barra sujeita à carga axial



Será que as observações elencadas ao lado valem apenas para o caso de uma barra sujeita a uma carga axial? Veremos adiante...

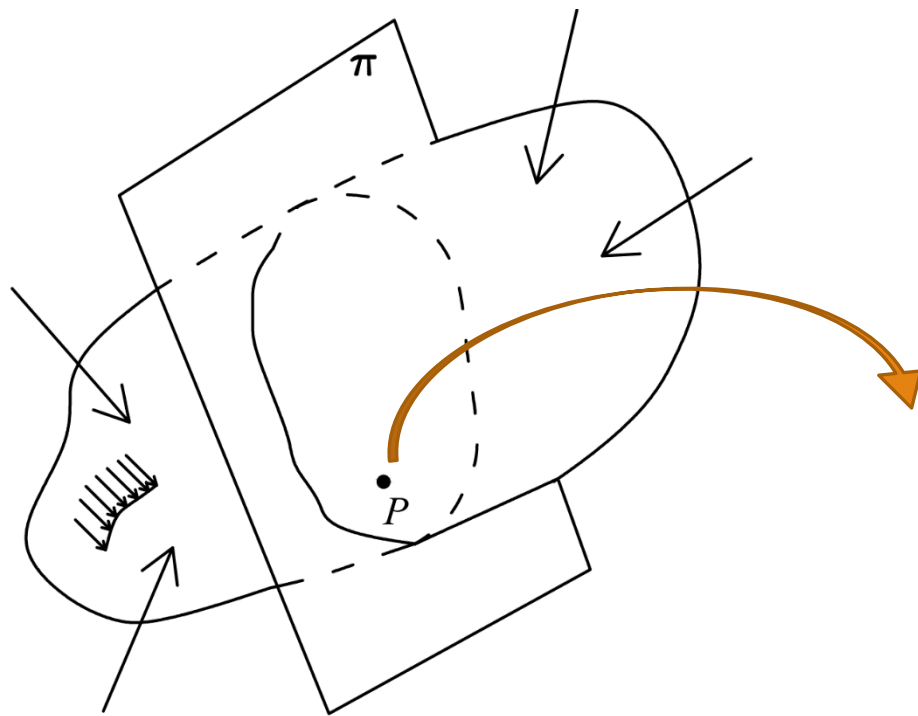
Algumas observações interessantes:

- A tensão **NORMAL** é **máxima** ou **mínima** quando a **TANGENCIAL** é **nula**;
- A tensão **TANGENCIAL** é **máxima** ou **mínima** quando a **NORMAL** é **média**;
- Os ângulos relativos às tensões **NORMAIS** (ou **TANGENCIAIS**) **máximas** e **mínimas** estão defasados de  $90^\circ$ ;
- Os ângulos relativos às tensões **NORMAIS** **máximas** (ou **mínimas**) e as tensões **TANGENCIAIS** **máximas** (ou **mínimas**) estão defasados de  $45^\circ$ .



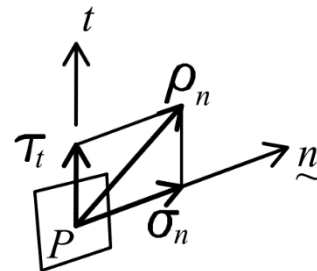
# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

A fim de extrapolar o raciocínio para casos mais gerais, consideremos, inicialmente, uma estrutura qualquer em equilíbrio sujeita a diferentes carregamentos (concentrados e distribuídos), conforme mostrada na figura abaixo:



Seja, ainda, um plano de corte  $\pi$  que contém o ponto  $P$  no interior desta estrutura.

Vimos, anteriormente, que o vetor tensão total  $\rho_n$  pode ser obtido a partir da soma vetorial das tensões normal e tangencial, isto é:



matematicamente

$$\underset{\sim}{\rho}_n = \overset{\wedge}{\sigma}_n \cdot \underset{\sim}{n} + \overset{\wedge}{\tau}_t \cdot \underset{\sim}{t}$$

onde:

- a notação  $\sim$  indica uma grandeza vetorial;
- a notação  $\wedge$  indica o unitário de um vetor;
- $\underset{\sim}{n}$  e  $\underset{\sim}{t}$  são os vetores unitários normal e paralelo ao plano de corte, respectivamente.

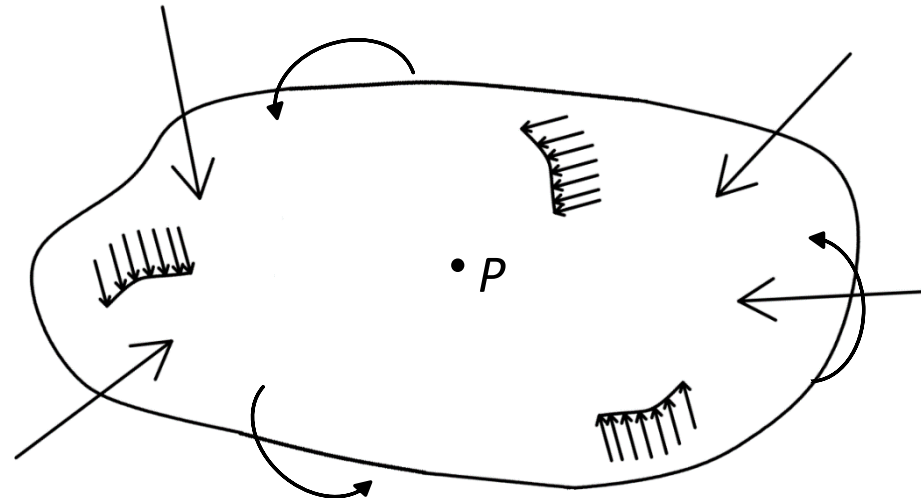
# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Entretanto, a expressão mostrada anteriormente para a determinação do vetor tensão total apresenta algumas dificuldades práticas de utilização.

Isto decorre do fato de ela não usar o referencial  $xyz$ , com o qual já estamos habituados. Na verdade, ela se vale apenas dos vetores “ $\hat{n}$ ” e “ $\hat{t}$ ”, que são um tanto abstratos do ponto de vista de cálculo.

Desta forma, o objetivo passa a ser representar as tensões normal, tangencial e total referenciadas ao sistema de eixos  $xyz$ .

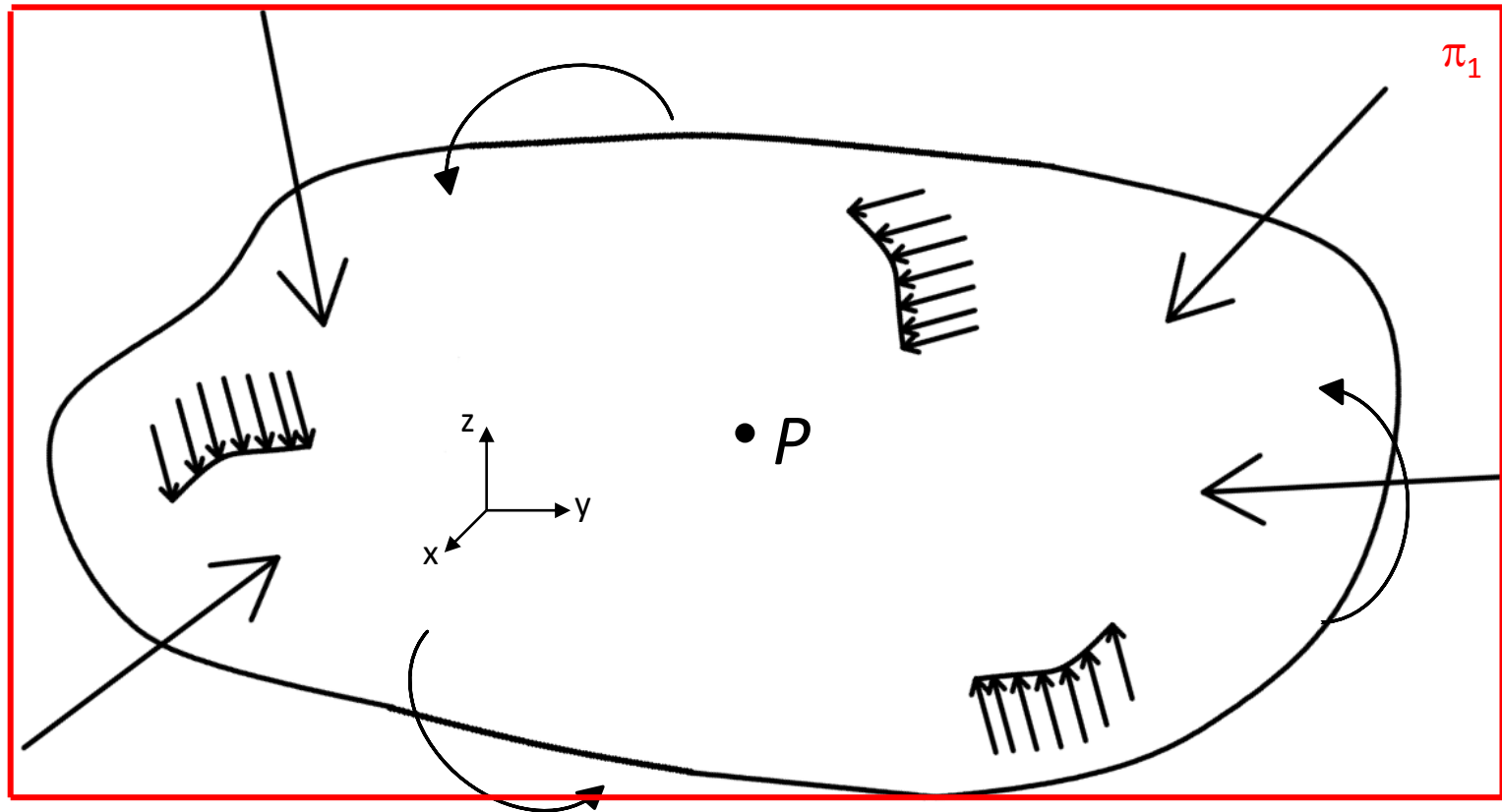
Consideremos, novamente, uma estrutura qualquer em equilíbrio sujeita a diferentes carregamentos (concentrados e distribuídos):



# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

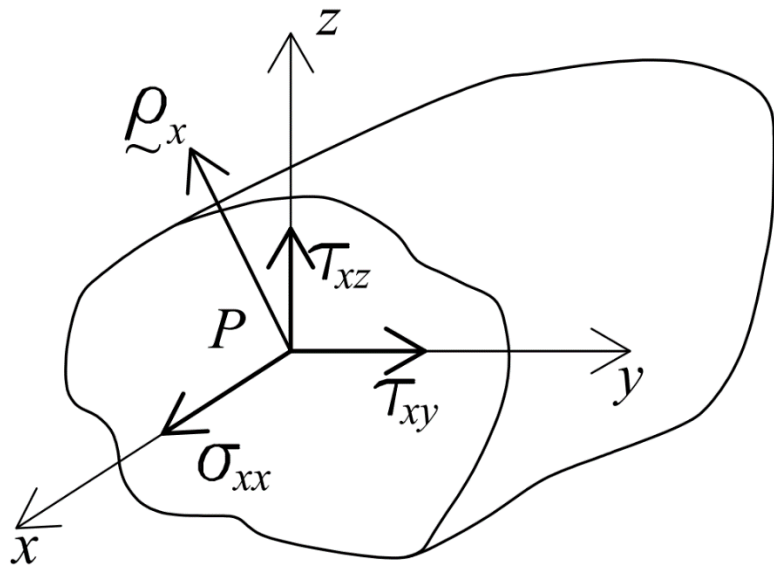
Tomando-se o ponto  $P$  como referência, vamos seccionar a estrutura segundo diferentes planos de corte.

Inicialmente, consideremos o plano  $\pi_1$  paralelo ao plano  $yz$  (perpendicular à direção  $x$ ), contendo o ponto  $P$ :



# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Para situação mostrada no slide anterior, em um plano cuja normal é a direção  $x$ , as seguintes tensões podem ocorrer no ponto  $P$  devido ao carregamento apresentado:



Onde:

- $\sigma_{xx}$  : tensão normal na direção  $x$ ;
- $\tau_{xy}$  : tensão tangencial que ocorre num ponto contido num plano cuja normal é  $x$  e que “cisalha” na direção  $y$ ;
- $\tau_{xz}$  : tensão tangencial que ocorre num ponto contido num plano cuja normal é  $x$  e que “cisalha” na direção  $z$ ;
- $\rho_x$  : vetor tensão total relativo ao plano cuja normal é a direção  $x$ .

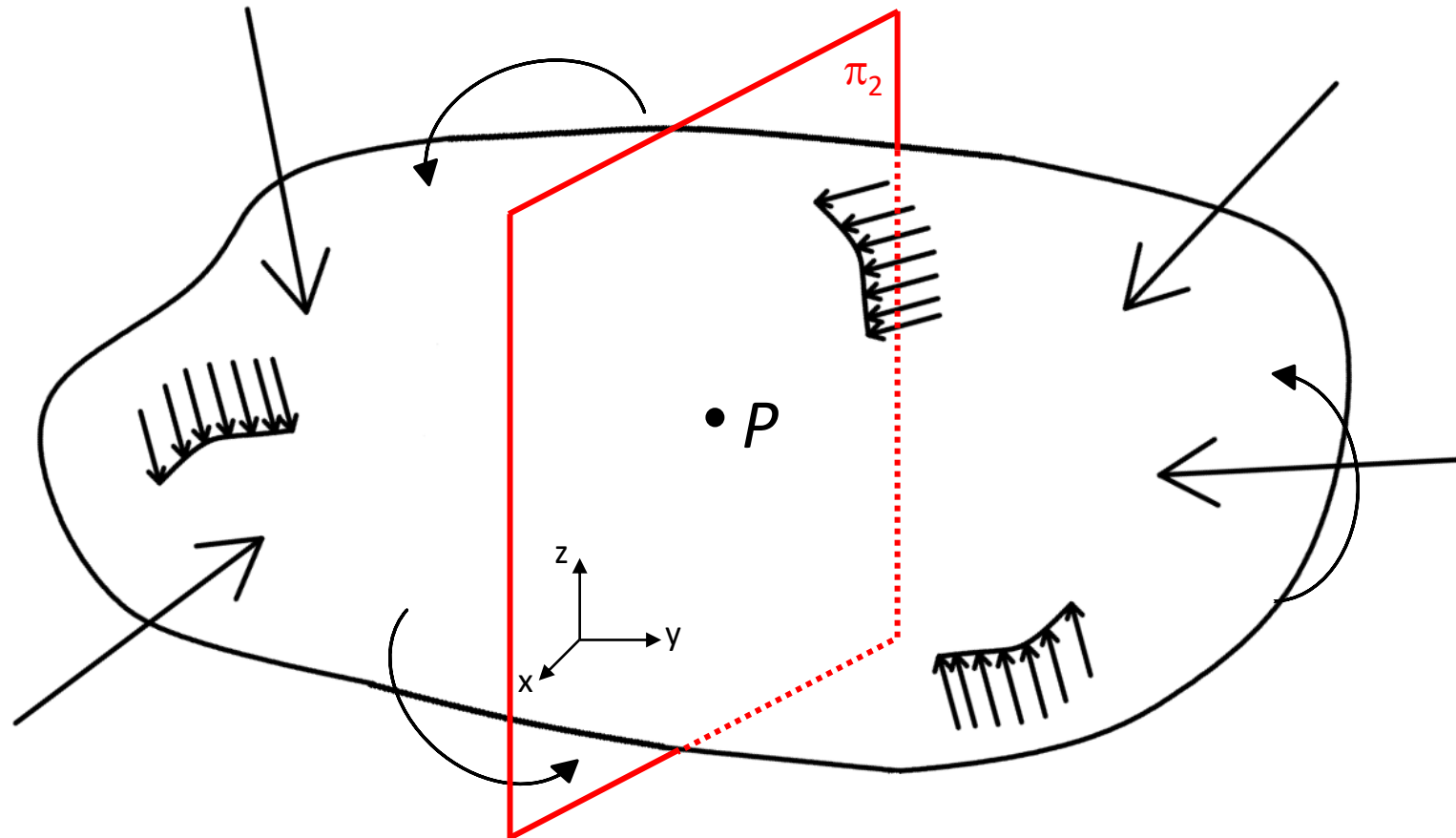
Sabendo-se que  $\rho_x$  é a resultante das tensões no plano  $\pi_1$ , podemos escrever:

$$\rho_x \sim = \sigma_{xx} \hat{i} + \tau_{xy} \hat{j} + \tau_{xz} \hat{k} \quad (I)$$

$i, j, k$  são os vetores unitários nas direções  $x, y, z$ , respectivamente

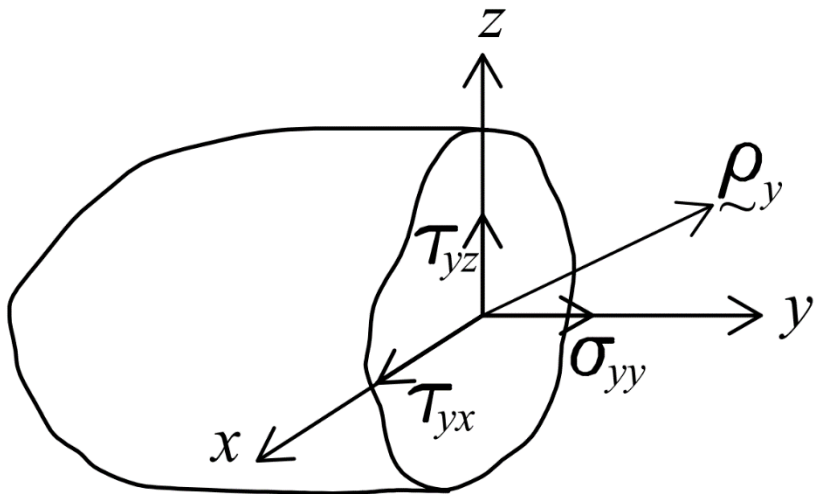
# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Consideremos, agora, o plano  $\pi_2$ , paralelo ao plano  $xz$  (perpendicular à direção  $y$ ), contendo o ponto  $P$ :



# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Para situação mostrada no slide anterior, em um plano cuja normal é a direção  $y$ , as seguintes tensões podem ocorrer no ponto  $P$  devido ao carregamento apresentado:



Onde:

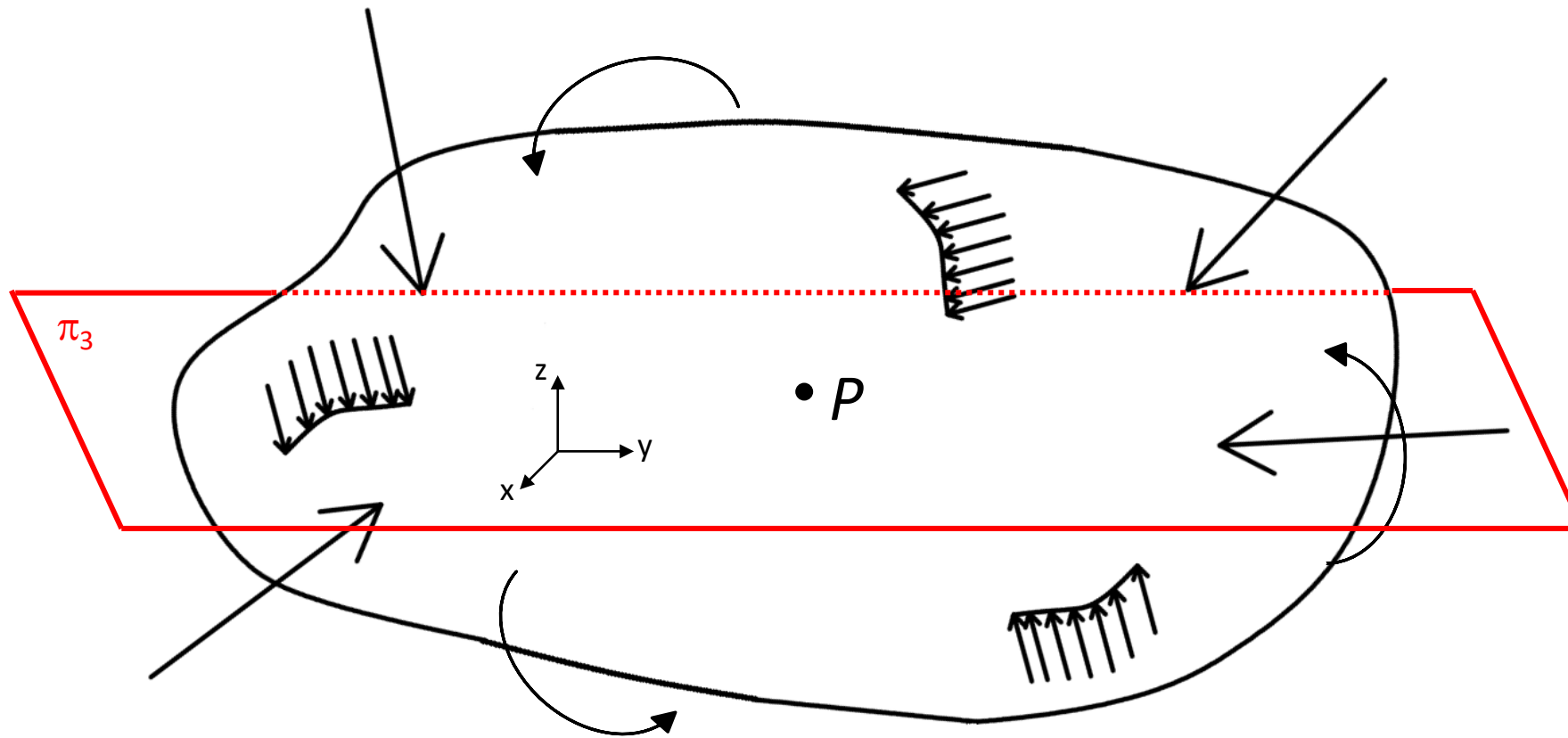
- $\sigma_{yy}$  : tensão normal na direção  $y$ ;
- $\tau_{yx}$  : tensão tangencial que ocorre num ponto contido num plano cuja normal é  $y$  e que “cisalha” na direção  $x$ ;
- $\tau_{yz}$  : tensão tangencial que ocorre num ponto contido num plano cuja normal é  $y$  e que “cisalha” na direção  $z$ ;
- $\rho_y$  : vetor tensão total relativo ao plano cuja normal é a direção  $y$ .

Sabendo-se que  $\rho_y$  é a resultante das tensões no plano  $\pi_2$ , podemos escrever:

$$\rho_y = \tau_{yx} \hat{i} + \sigma_{yy} \hat{j} + \tau_{yz} \hat{k} \quad (II)$$

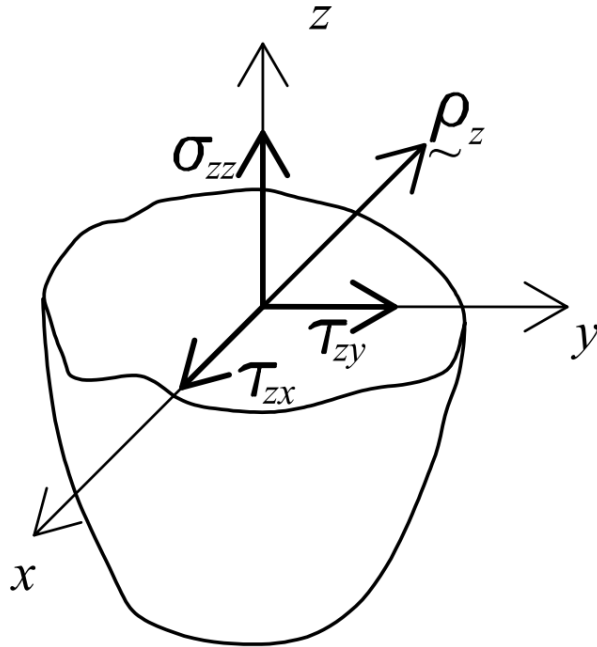
# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Finalmente, consideremos o plano  $\pi_3$ , paralelo ao plano  $xy$  (perpendicular à direção  $z$ ), contendo o ponto  $P$ :



# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Para situação mostrada no slide anterior, em um plano cuja normal é a direção  $z$ , as seguintes tensões podem ocorrer no ponto  $P$  devido ao carregamento apresentado:



Onde:

- $\sigma_{zz}$  : tensão normal na direção  $z$ ;
- $\tau_{zx}$  : tensão tangencial que ocorre num ponto contido num plano cuja normal é  $z$  e que “cisalha” na direção  $x$ ;
- $\tau_{zy}$  : tensão tangencial que ocorre num ponto contido num plano cuja normal é  $z$  e que “cisalha” na direção  $y$ ;
- $\rho_z$  : vetor tensão total relativo ao plano cuja normal é a direção  $z$ .

Sabendo-se que  $\rho_z$  é a resultante das tensões no plano  $\pi_3$ , podemos escrever:

$$\rho_z = \tau_{zx} \hat{i} + \tau_{zy} \hat{j} + \sigma_{zz} \hat{k} \quad (III)$$



# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Reagrupando as expressões definidas anteriores, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_x = \sigma_{xx} \hat{i} + \tau_{xy} \hat{j} + \tau_{xz} \hat{k} \\ \rho_y = \tau_{yx} \hat{i} + \sigma_{yy} \hat{j} + \tau_{yz} \hat{k} \\ \rho_z = \tau_{zx} \hat{i} + \tau_{zy} \hat{j} + \sigma_{zz} \hat{k} \end{array} \right.$$



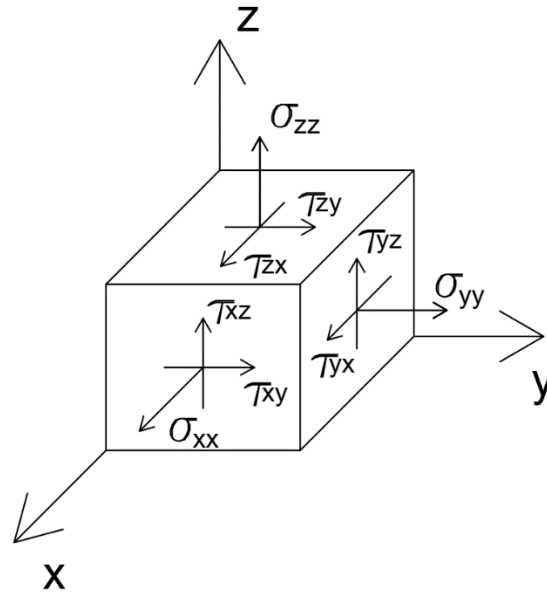
$$\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

**TENSOR DE TENSÕES**

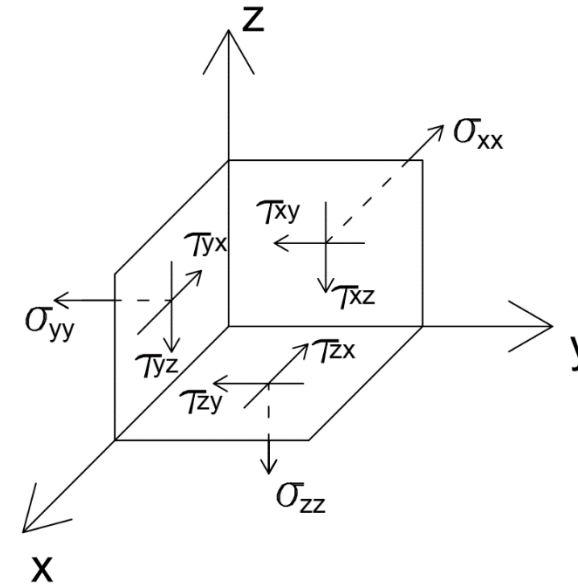
Os valores que compõem o Tensor de Tensões definem o **Estado de Tensão** de um **único** ponto da estrutura.

# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

O tensor de tensões pode ser representado graficamente pelo **Sólido (ou Cubo) de Tensões**, como mostram as figuras abaixo:



Faces "externas"



Faces "internas"

Atenção à convenção de sinais!

# Estado Triaxial de Tensão – Tensor de Tensões

Uma propriedade importante do Tensor de Tensões é a sua simetria (vide demonstração na seção 3.2.3 da apostila):

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

Assim, tem-se:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

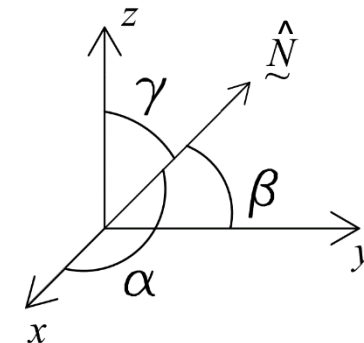
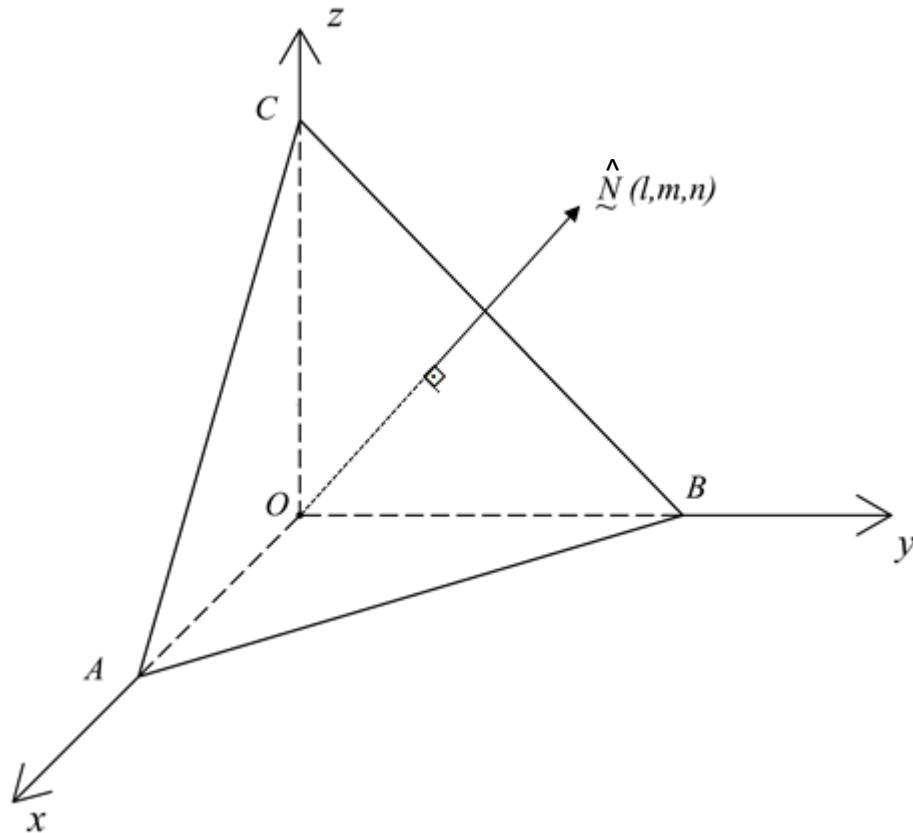
# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Conforme visto anteriormente, o sistema ao lado permite o cálculo das componentes do vetor tensão total em planos perpendiculares entre si, segundo o referencial  $xyz$ :

$$\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

Entretanto, como mostrado no exemplo da barra sujeita a uma carga axial, é importante e desejável calcularmos tensões que ocorrem em planos quaisquer, isto é, com diferentes inclinações em relação aos eixos  $xyz$ .

A figura ao lado ilustra um plano qualquer, cujo vetor normal *unitário*  $N(l,m,n)$  possui como componentes os cossenos diretores em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , isto é:



$$l = \cos \alpha$$

$$m = \cos \beta$$

$$n = \cos \gamma$$

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Para determinar as componentes do vetor tensão total em uma direção qualquer, basta substituir, portanto, o vetor  $[i,j,k]$  pelo vetor normal unitário  $N(l,m,n)$ , como segue:

$$\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Este sistema de equações pode ser reescrito na forma compacta:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\sigma} \times \hat{N}$$

Vetor unitário!

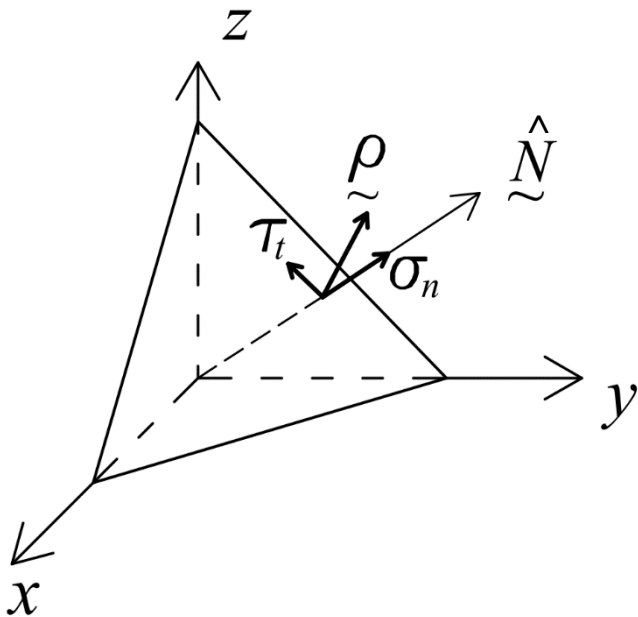
A expressão acima permite calcular o vetor tensão total em um ponto de um plano qualquer, desde que se conheça o tensor de tensão no referido ponto e o vetor normal ao plano de corte analisado.

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Entretanto, calcular o vetor tensão total em um ponto de uma estrutura não é suficiente em problemas práticos.

Na verdade, na vasta maioria dos casos, temos interesse de conhecer suas componentes, isto é, as tensões **normal e tangencial (ou cisalhante)**.

Para se obter a tensão normal, basta calcular a projeção do vetor  $\underline{\rho}_n$  na direção de  $\hat{N}$ :



$$\sigma_n = \text{proj}(\underline{\rho}_n) \hat{N} \Rightarrow \text{projeção de } \underline{\rho}_n \text{ sobre } \hat{N}$$

$$\sigma_n = \underbrace{|\underline{\rho}_n| |\hat{N}| \cos \theta}_{\text{Definição de produto escalar!}} \Rightarrow \theta \text{ é o ângulo formado entre } \underline{\rho}_n \text{ e } \hat{N}$$

Definição de produto escalar!



$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \hat{N}$$

No caso da tensão tangencial, basta utilizar a regra do paralelogramo:

$$|\underline{\rho}_n| = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_t^2} \Rightarrow \tau_t = \sqrt{|\underline{\rho}_n|^2 - \sigma_n^2}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

## Exemplo 1:

Seja o tensor de tensões mostrado abaixo que define o estado de tensões num ponto de uma estrutura. Determine:

- a) o vetor tensão total;
- b) a tensão normal; e
- c) a tensão tangencial total atuantes num plano paralelo ao plano  $x + 2y + 2z = 6$  passando por este ponto.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 100 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Da geometria analítica, temos que o vetor normal ao plano em questão é dado por:

$$\text{Eq. do plano: } x + 2y + 2z = 6 \quad \underline{v} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ e seu unitário } \hat{N} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Logo, os cossenos diretores de  $\hat{N}$  valem:

$$l = \frac{1}{3}; m = \frac{2}{3}; n = \frac{2}{3}$$

O vetor tensão total neste plano pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_n &= \underline{\sigma} \hat{N} \\ &= 100 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Obtemos, assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_x = \frac{100}{3}(1 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 3) \\ \rho_y = \frac{100}{3}(1 \times 4 + 2 \times 0 + 2 \times 0) \\ \rho_z = \frac{100}{3}(1 \times 3 + 2 \times 0 + 2 \times 1) \end{array} \right.$$

Logo:

$$\underline{\rho_n} = \{533,33 \quad 133,33 \quad 166,67\} \text{MPa}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Cálculo da tensão normal:

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \hat{N} = \begin{pmatrix} 533,33 \\ 133,33 \\ 166,67 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{100}{9} (16 + 8 + 10) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_n = 377,78 \text{ MPa}}$$

Cálculo da tensão tangencial:

$$\tau_n^2 = |\underline{\rho}|^2 - \sigma_n^2$$
$$|\underline{\rho}| = \sqrt{256 + 16 + 25} \times \frac{100}{3}$$
$$|\underline{\rho}| = 574,46 \text{ MPa}$$
$$\tau_n = \sqrt{574,46^2 - 377,78^2}$$
$$\tau_n = 432,76 \text{ MPa}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

As expressões obtidas anteriormente permitem calcular as tensões normal e tangencial em um ponto, variando-se o plano de corte numa dada seção da estrutura.

Entretanto, mais importante que apenas calcular esses valores, é conhecer seus valores extremos (máximos e mínimos) e em quais planos eles ocorrem.

Naturalmente, a questão que se coloca é: COMO?

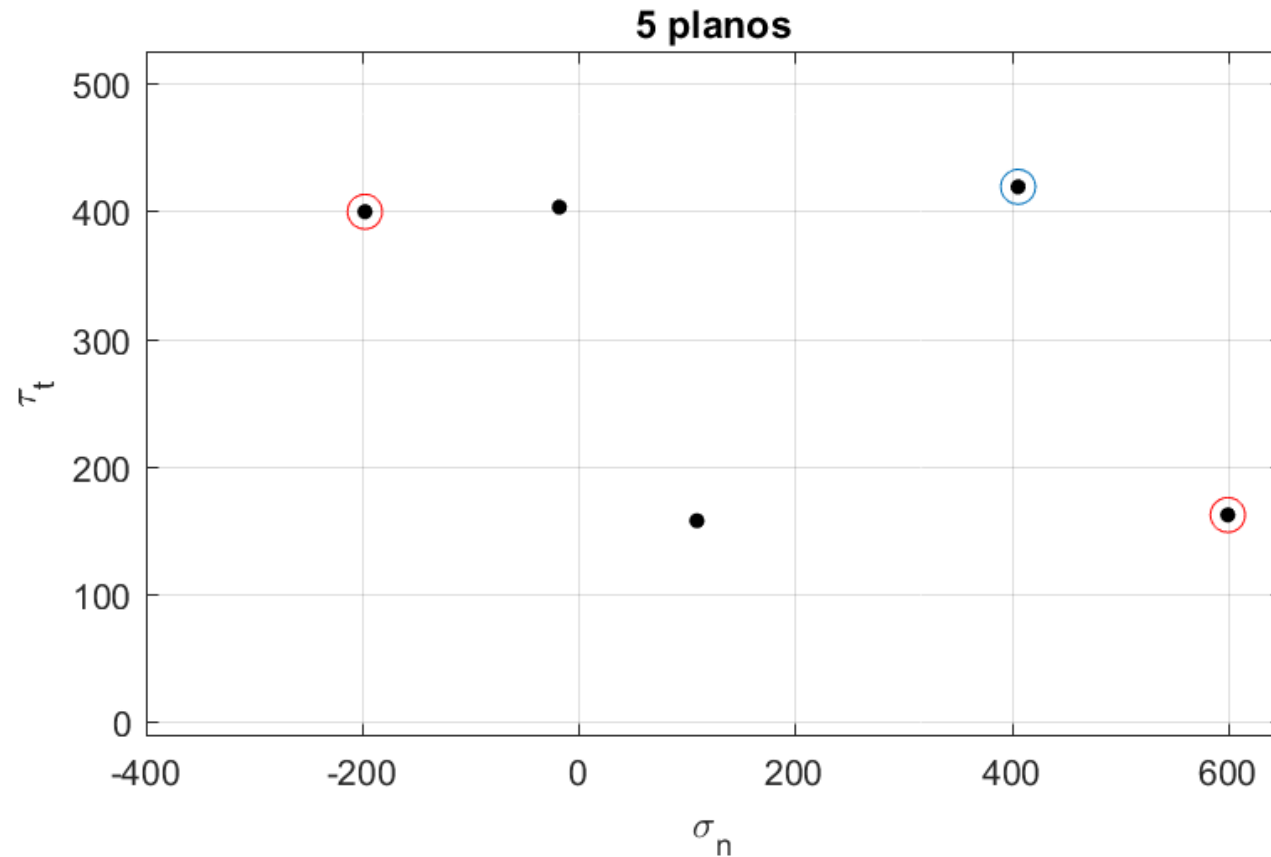
Uma das formas seria utilizar um método de “força bruta”, isto é, testar diversos planos de corte (a partir de seus respectivos vetores normais) e ver qual(is) indicaria(m) os valores extremos das tensões.

Para ilustrar este método, consideremos novamente o tensor de tensão utilizado no Exemplo 1 da apostila:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 100 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Vamos, agora, testar diferentes planos de seção e ver o que ocorre:



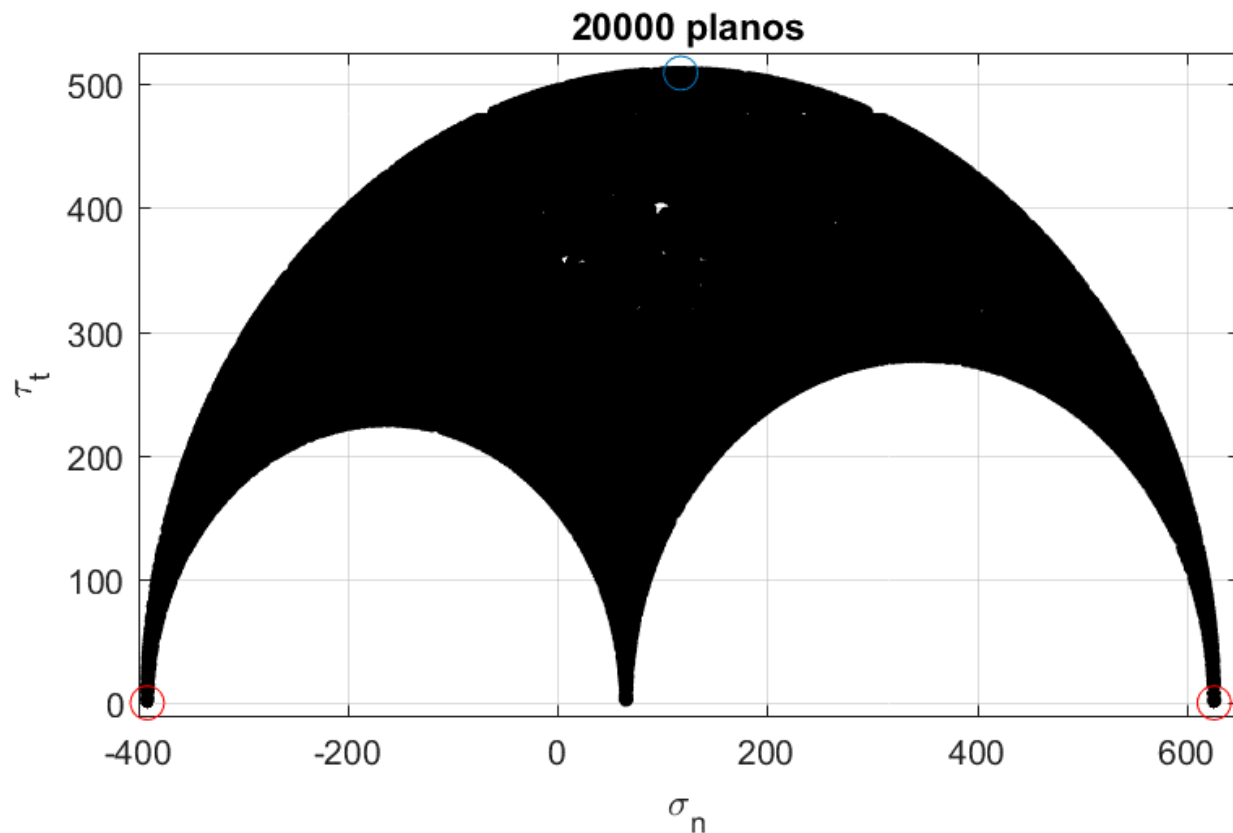
Cada ponto da figura ao lado se refere a um par de tensões (NORMAL, TANGENCIAL) calculado para um vetor normal diferente.

Os círculos **vermelhos** indicam os valores extremos das tensões **normais**.

Os círculos **azuis** indicam os valores extremos das tensões **tangenciais**.

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões em um plano qualquer

Observe o padrão que se forma ao final das simulações. Quais conclusões podemos extrair desse gráfico?



Será que é realmente necessário testar 10 mil ou 20 mil planos para se encontrar os valores extremos das tensões?

Obviamente, este tipo de resolução é infactível em situações práticas.

Lembre-se de que estas 20 mil simulações foram realizadas apenas para um tensor, isto é, para apenas **um único ponto da estrutura**.

Caso seja necessário analisar centenas ou milhares de pontos, fica clara a inviabilidade desta “técnica”.

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões principais

Neste momento, vamos focar no cálculo dos valores máximos e mínimos das tensões **NORMAIS**.

A estas tensões extremas, denominamos **tensões principais** (à semelhança dos momentos principais de inércia).

As tensões principais ocorrem em planos nos quais **NÃO** existem tensões tangenciais.

Os planos nos quais estas tensões atuam são denominados de **planos principais** e seus respectivos vetores normais são denominados **direções principais**.

Para determinar estas tensões, vamos voltar à equação  $\underset{\sim}{\rho}_n = \underset{\sim}{\sigma}_n \cdot \underset{\sim}{n} + \underset{\sim}{\tau}_t \cdot \underset{\sim}{t}$

Seja uma **direção principal** definida pelo vetor  $\underset{\sim}{e}$ . Substituindo-se este vetor na equação acima, tem-se:

$$\boxed{\underset{\sim}{\rho}_e = \underset{\sim}{\sigma}_e \cdot \underset{\sim}{e}} \quad (I)$$

Note que a parcela relativa à tensão tangencial some, pois nos planos principais estas tensões não existem.

# Estado Triaxial de Tensão – Tensões principais

Vimos, também, que o vetor tensão total numa direção qualquer  $\hat{N}$ , pode ser calculado como:

$$\rho_n = \underline{\underline{\sigma}} \times \hat{N}$$

Substituindo-se a direção principal  $\hat{e}$  na equação acima, vem:

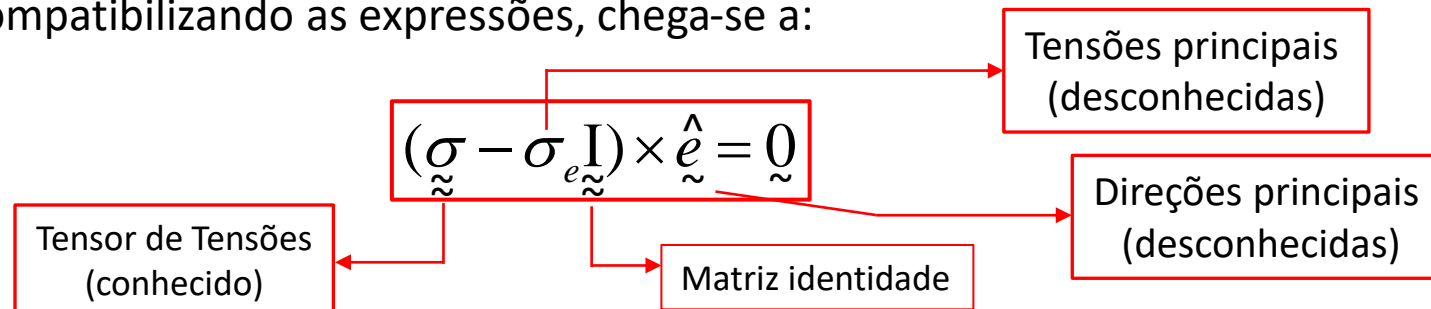
$$\rho_e = \underline{\underline{\sigma}} \times \hat{e} \quad (II)$$

$$\rho_e = \sigma_e \cdot \hat{e} \quad (I)$$

Igualando as equações I e II, tem-se:

$$\sigma_e \times \hat{e} = \underline{\underline{\sigma}} \times \hat{e}$$

Reorganizando os termos e compatibilizando as expressões, chega-se a:



# Estado Triaxial de Tensão – Tensões principais

A equação anterior descreve um sistema algébrico homogêneo de equações lineares (conhecido como “problema de autovalor”) que, para ter solução diferente da solução trivial  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{0}}$ , requer que:

$$\det \left( \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_e \underline{\underline{\mathbb{I}}} \right) = 0$$

O que implica em:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_e & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_e & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_e \end{vmatrix} = 0$$

que resulta num polinômio de 3º grau na incógnita  $\sigma_e$ :

$$\sigma_e^3 - I_1 \sigma_e^2 + I_2 \sigma_e - I_3 = 0$$

**INVARIANTES DO TENSOR DE TENSÕES**

Onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \det \underline{\underline{\sigma}} \end{array} \right.$$



# Estado Triaxial de Tensão – Tensões principais

O polinômio anterior, também conhecido como *equação característica*, possui **três raízes reais**, pois o tensor de tensão é representado sempre por valores reais. Estas raízes representam as **tensões principais** relativas ao tensor de tensão.

As tensões principais são representadas por  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Por convenção, adota-se sempre  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Para cada uma destas raízes, podemos calcular a direção do plano associada a cada tensão principal substituindo-as na equação  $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e_i} \underline{\underline{I}}) \times \underline{\underline{e}}_i = \underline{\underline{0}}$ . Assim:

$$\left( \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e_1} \underline{\underline{I}} \right) \underline{\underline{e}}_1 = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{e}}_1 \rightarrow \text{determinado}$$

$$\left( \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e_2} \underline{\underline{I}} \right) \underline{\underline{e}}_2 = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{e}}_2 \rightarrow \text{determinado}$$

$$\left( \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_{e_3} \underline{\underline{I}} \right) \underline{\underline{e}}_3 = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{e}}_3 \rightarrow \text{determinado}$$

É possível demonstrar que as direções principais são ortogonais entre si (vide seção 3.6.3 da apostila).

# Estado Triaxial de Tensão – Referencial do Tensor de Tensão

Vimos que o estado de tensão em um ponto de uma estrutura pode ser representado pelo tensor de tensões:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Este tensor está representado segundo um referencial  $xyz$ . Assim, pode-se utilizar a notação equivalente  $\underline{\underline{\sigma}}^{xyz}$  para descreve-lo.

O mesmo estado de tensão pode ser representado segundo diferentes referenciais rotacionados ( $x'y'z'$ , por exemplo).

No entanto, os estados de tensão serão ditos equivalentes **SE, E SOMENTE SE**, os três invariantes forem iguais entre si, isto é,  $I'_1 = I_1$  ,  $I'_2 = I_2$  ,  $I'_3 = I_3$  .

# Estado Triaxial de Tensão – Máxima Tensão Cisalhante

Buscamos, agora, a determinação das direções e dos valores das máximas tensões cisalhantes que ocorrem num ponto sujeito a um estado triaxial de tensões.

Para tanto, iremos utilizar o tensor de tensão descrito segundo o referencial principal, isto é:

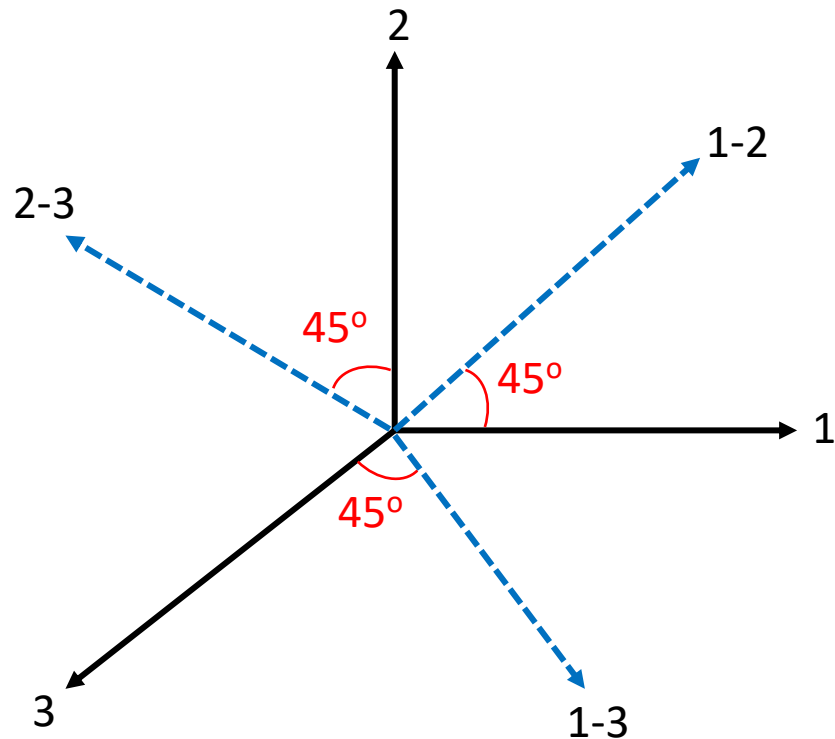
$$\underline{\underline{\sigma}}^{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Como visto no estudo preliminar de uma barra sujeita a carga axial, as tensões tangenciais extremas ocorrem nos planos bissetores dos planos principais.

**Ou seja, as tensões tangenciais máximas (ou mínimas) ocorrem a 45° das tensões principais (dedução completa na seção 3.7 da apostila).**

# Estado Triaxial de Tensão – Máxima Tensão Cisalhante

Considere os eixos mostrados abaixo:



Em preto, representa-se os eixos principais 1, 2 e 3.

Em azul tracejado, representa-se os eixos bissetores, 1-2, 1-3 e 2-3.

O vetor que representa a direção 1-3, em relação aos eixos 1 e 3 é dado por:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Para encontrar a tensão tangencial máxima é preciso calcular, primeiramente, o vetor tensão total e a tensão normal na direção 1-3.

# Estado Triaxial de Tensão – Máxima Tensão Cisalhante

O vetor tensão total na direção 1-3 é calculado como:

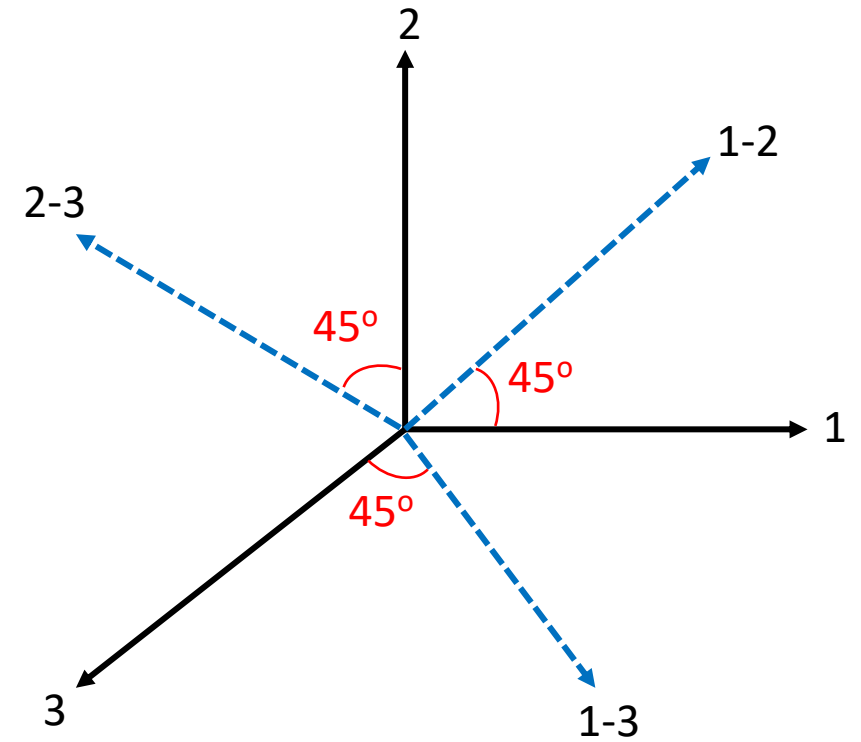
$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \times \underline{\hat{N}}$$

$$\underline{\rho}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\rho}_n = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_1 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_3 \right\}$$

E a tensão normal, é dada por:

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \underline{\hat{N}} = \boxed{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}$$



Pela regra do paralelogramo, a tensão tangencial na direção 1-3 é dada por:

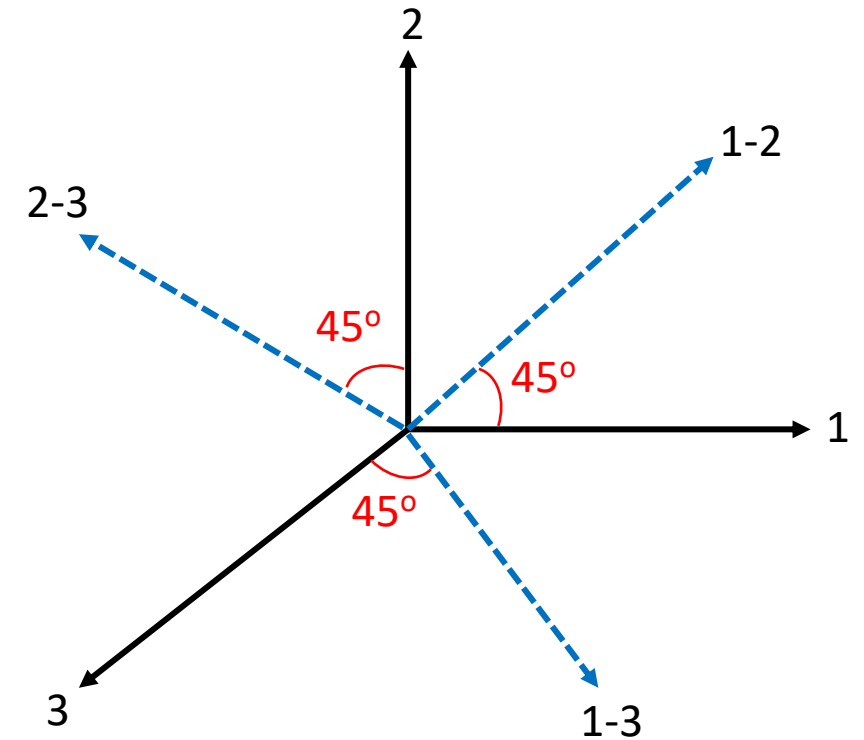
$$\boxed{\tau = \pm \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Máxima Tensão Cisalhante

Resultados semelhantes são obtidos para as direções 1-2 e 2-3.

Direção 1-2:  $\tau = \pm \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)$  e  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

Direção 2-3:  $\tau = \pm \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)$  e  $\sigma_m = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$



## Observações importantes:

- 1) Nos planos onde a tensão normal é extrema, a tangencial é **nula**;
- 2) Nos planos onde a tensão tangencial é extrema, a normal é a **média**;
- 3) As tensões tangenciais máximas (ou mínimas) ocorrem entre as direções 1-3, pois  $\sigma_1$  é sempre a máxima e  $\sigma_3$ , a mínima.

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

## Exemplo 5:

Para o tensor mostrado abaixo, determine as tensões principais e suas respectivas direções, além da tensão cisalhante máxima.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 100 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

## IMPORTANTE:

Um artifício que facilita enormemente na resolução deste tipo de problema é “extrair”, quando possível, o maior divisor comum dos elementos que compõem o tensor de tensão.

Os cálculos posteriores são todos realizados normalmente.

No entanto, após encontrar as raízes da equação característica, estas deverão ser multiplicadas pelo divisor “extraído”.

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

No caso do tensor deste exemplo, o maior divisor comum é 100. Desta forma, o tensor “simplificado” é dado por:

$$\tilde{\sigma}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os invariantes deste tensor são:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = tr(\tilde{\sigma}) = 2 + 0 + 0 = 2 \\ I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -10 \\ I_3 = det(\tilde{\sigma}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma_e^3 - I_1\sigma_e^2 + I_2\sigma_e - I_3 = 0$$

Eq. característica

$$\sigma_e^3 - 2\sigma_e^2 - 10\sigma_e = 0$$

$$\sigma_e(\sigma_e^2 - 2\sigma_e - 10) = 0$$

As raízes da equação são: 0, -2,3166 e 4,3166.

As tensões principais são, portanto:  $\sigma_1 = 431,66$  MPa,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -231,66$  MPa



# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

O tensor de tensões no referencial principal pode ser escrito como:

$$\underset{\sim}{\sigma}^{123} = \begin{bmatrix} 431,66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -231,66 \end{bmatrix} \text{MPa} \quad \underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 100 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

É possível estabelecer alguma relação entre o tensor acima e o “original”?

Se calcularmos os três invariantes para cada um dos tensores, veremos que eles são idênticos, um a um.

Isso significa que ambos os tensores representam **o mesmo estado de tensão** para o ponto analisado.

Esta análise permite, portanto, verificar se os resultados obtidos anteriormente estão corretos.

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

As direções principais são obtidas resolvendo-se o seguinte sistema de equações para **cada uma** das tensões principais:

$$\left( \underset{\sim}{\underline{\sigma}} - \sigma_e \underset{\sim}{\mathbb{I}} \right) \underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{0}$$

Assim, para a primeira tensão principal ( $\sigma_1 = 431,66$  MPa), tem-se:

$$\left( \begin{bmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 100 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 431,66 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} -231,66 & 100 & 300 \\ 100 & -431,66 & 0 \\ 300 & 0 & -431,66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde  $l_1$ ,  $m_1$  e  $n_1$  são as componentes do vetor direção principal  $\underset{\sim}{e}_1$ .

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

Fazendo-se a multiplicação matriz-vetor, vem:

$$\begin{cases} -231,66l_1 + 100m_1 + 300n_1 = 0 \\ 100l_1 - 431,66m_1 + 0n_1 = 0 \\ 300l_1 + 0m_1 - 431,66n_1 = 0 \end{cases}$$

Da Eq. 2, tem-se que  $m_1 = 0,232 l_1$ . Já da Eq. 3, tem-se que  $n_1 = 0,696 l_1$ .

Substituindo-se estes resultados na Eq. 1, chega-se a  $l_1 = 0$ . Por consequência,  $m_1 = n_1 = 0$ .

Esta solução é conhecida como solução trivial e não nos interessa.

Para chegarmos a uma solução diferente da trivial, precisamos recorrer a uma 4ª equação, que estabelece que o módulo do vetor direção principal é **unitário** (como de todo vetor que indica uma direção), isto é:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

De posse desta equação auxiliar, podemos descartar uma das três do sistema original.

Geralmente, descarta-se aquela que não contribui para a solução do sistema. Neste exemplo, é o caso da primeira equação.

Assim, o novo sistema se escreve como:

$$\begin{cases} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \\ m_1 = 0,232l_1 \\ n_1 = 0,696l_1 \end{cases}$$

Substituindo-se as Eqs. 2 e 3 na Eq. 1, tem-se  $l_1 = \pm 0,806$ .

Como o que nos interessa é a **direção** do vetor, e não o sentido, podemos escolher qualquer uma das soluções.

Escolhendo-se a positiva, tem-se:  $m_1 = 0,187$  e  $n_1 = 0,561$

Finalmente, a direção principal associada à tensão principal ( $\sigma_1 = 431,66$  MPa) é dada por:

$$e_1 = (0,806; 0,187; 0,561)$$

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

O mesmo procedimento deve ser repetido para as demais tensões principais.

Com isso, obtém-se as outras duas direções principais (resolução completa na apostila):

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e}_1 = (0,806; 0,187; 0,561) \\ \underline{e}_2 = (0; -0,949; 0,316) \\ \underline{e}_3 = (0,590; -0,255; -0,765) \end{array} \right.$$

**Observação:** note que os vetores acima obtidos, caso multiplicados por “-1”, representarão rigorosamente a mesma direção.

A tensão tangencial máxima é facilmente obtida a partir das tensões principais:

$$\tau_{max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right| = \left| \frac{431,66 - (-231,66)}{2} \right| = 331,66 \text{ MPa}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

## Exemplo 6:

Para o tensor mostrado abaixo, determine as tensões principais e suas respectivas direções, além da tensão cisalhante máxima.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Novamente, o maior divisor comum é 100. Desta forma, o tensor “simplificado” é dado por:

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

Os invariantes deste tensor são:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = 2 + 0 + 3 = 5 \\ I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \\ I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}) = -3 \end{array} \right.$$

$$\sigma_e^3 - I_1 \sigma_e^2 + I_2 \sigma_e - I_3 = 0$$

Eq. característica

$$\sigma_e^3 - 5\sigma_e^2 + 5\sigma_e + 3 = 0$$

Para encontrar as raízes deste polinômio, podemos empregar o método de Briot-Ruffini. Este método nos permite encontrar facilmente raízes inteiras de equações lineares de qualquer grau a partir de soluções “candidatas”.

As soluções “candidatas” são os divisores positivos e negativos do último coeficiente da equação divididos pelos divisores do primeiro coeficiente. Neste caso, são:  $\pm 1$  e  $\pm 3$ .

Mais detalhes sobre a técnica podem ser encontradas [aqui](#).

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

As raízes desta equação são: -0,4142; 2,4142 e 3.

As tensões principais são, portanto:  $\sigma_1 = 300$  MPa,  $\sigma_2 = 241,42$  MPa,  $\sigma_3 = -41,42$  MPa

As direções principais são obtidas utilizando-se o mesmo procedimento mostrado no exemplo anterior e são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e}_1 = (0; 0; 1) \\ \underline{e}_2 = (0,924; 0,383; 0) \\ \underline{e}_3 = (-0,383; 0,924; 0) \end{array} \right.$$

É possível perceber alguma relação entre estes vetores?

A resposta é sim! O produto escalar entre eles (dois a dois) é nulo! Mas o que isso significa?

Significa que eles são perpendiculares entre si, como era de se esperar. O mesmo vale para os vetores obtidos no Ex. 5.



# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

Além disso, repare no vetor referente à direção principal 1:  $\underline{e}_1 = (0; 0; 1)$

Agora veja o tensor “original”:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

É possível perceber alguma relação entre eles?

Note que a direção principal 1 indica a direção do eixo z (0,0,1), ou seja, um vetor normal ao plano xy.

No tensor de tensões, a tensão  $\sigma_{zz} = 300$  MPa é a própria tensão principal! Por que isso acontece?

Relembremos o conceito de tensão principal: “são tensões que ocorrem em planos onde as tensões tangenciais são nulas”.

Se analisarmos o tensor novamente, veremos que  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yz}$  são nulos. Logo, z é uma direção principal.

**CONCLUSÃO**: caso algum elemento da diagonal principal possuir elementos da mesma linha e coluna nulos, ele será uma tensão principal e a direção a ele associada será aquela relativa sua posição no tensor.

# Estado Triaxial de Tensão – Exemplos

Finalmente, o que acontece ao se multiplicar o tensor “original” pelo vetor direção principal  $e_1 = (0; 0; 1)$ ?

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Vimos, anteriormente, que o **vetor tensão total** é exatamente o produto entre essas duas grandezas, isto é:

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se o produto escalar entre este vetor e o vetor direção principal, tem-se a **tensão normal** atuante no plano:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 300 \text{ MPa}$$

Que é, exatamente, a tensão principal 1! O mesmo teria ocorrido se os vetores direções principais 2 e 3 tivessem sido utilizados. Nestes casos, os resultados seriam as tensões principais 2 e 3, respectivamente.

E quanto vale a **tensão tangencial** nesses planos? Zero, pois estes planos são principais.

# Estado Triaxial de Tensão – Decomposição do Tensor de Tensões

Dado um tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ , é possível decompô-lo em dois tensores,  $\underline{\underline{\sigma}}_h$  e  $\underline{\underline{\sigma}}_d$ , de tal forma que:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_h + \underline{\underline{\sigma}}_d$$

onde:

- $\underline{\underline{\sigma}}_h$  é chamado de tensor **hidrostático** (ou esférico) e é responsável pela variação de volume em torno do ponto;
- $\underline{\underline{\sigma}}_d$  é chamado de tensor **desviador** e é responsável pela variação de forma em torno do ponto.

Por definição, um tensor hidrostático possui elementos apenas na diagonal principal, sendo todos de igual valor.

Além disso, o tensor desviador possui traço nulo.

# Estado Triaxial de Tensão – Decomposição do Tensor de Tensões

Assim, considerando-se um tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  representado segundo o referencial xyz

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Sendo o tensor hidrostático dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

onde  $p$  é um número real qualquer.

Utilizando a relação  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_h + \underline{\underline{\sigma}}_d$ , o tensor desviador é dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - p \end{bmatrix}$$

Como  $\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_d) = 0$ , tem-se:

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

# Estado Triaxial de Tensão

## Referências:

Esses slides foram preparados usando como base:

- 1) Beer, Johnston – Mecânica dos Materiais – 6ª ed.
- 2) Toledo, Bastos, Cury - Apostila de Resistência dos Materiais, UFJF.