Flexão Composta

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Flexão Composta

- Encontramos diversas situações em Engenharia nas quais as estruturas estão solicitadas simultaneamente pela ação de **momentos fletores** e **esforços normais**.

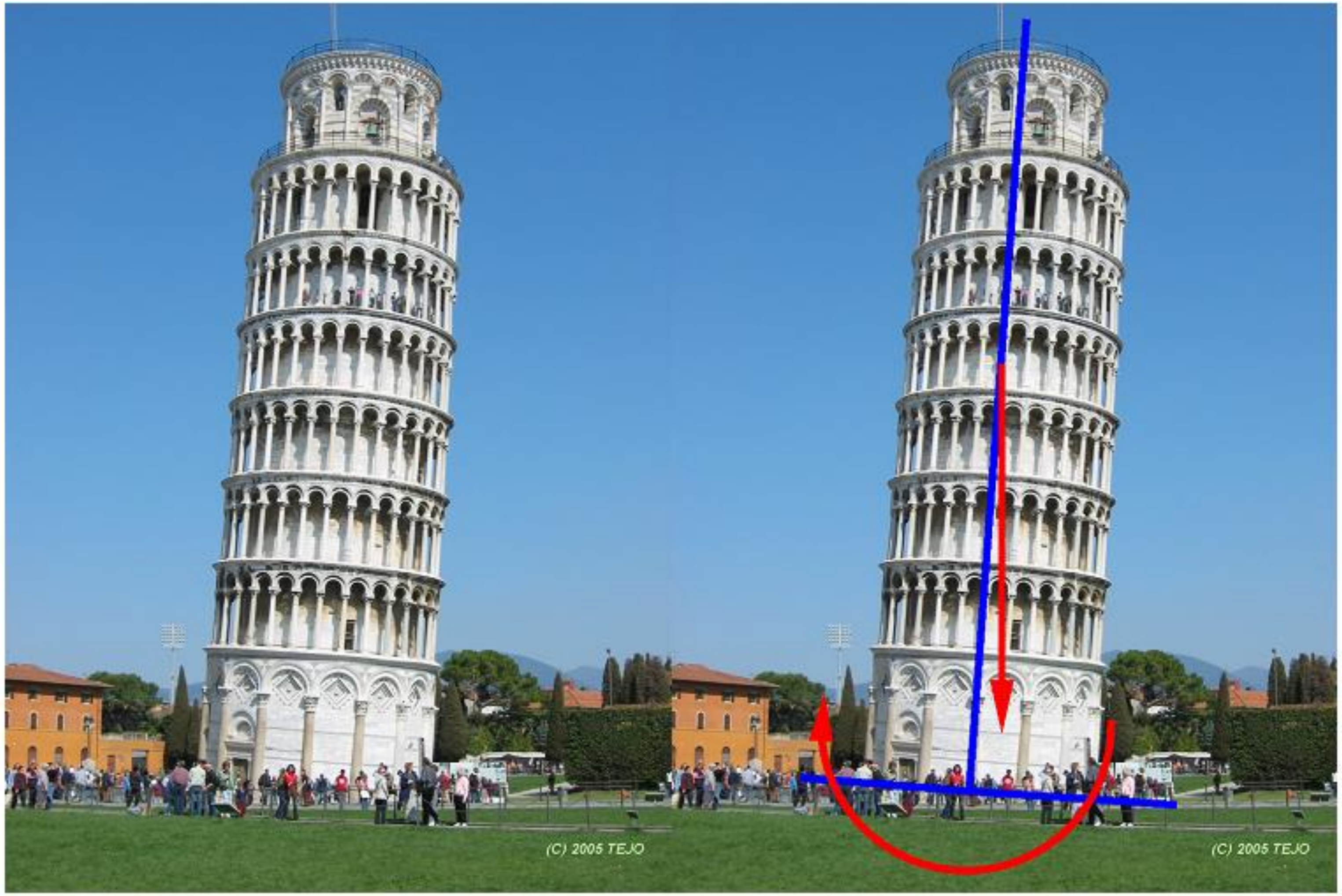
- Denominamos este tipo de solicitação de ***flexão composta***.

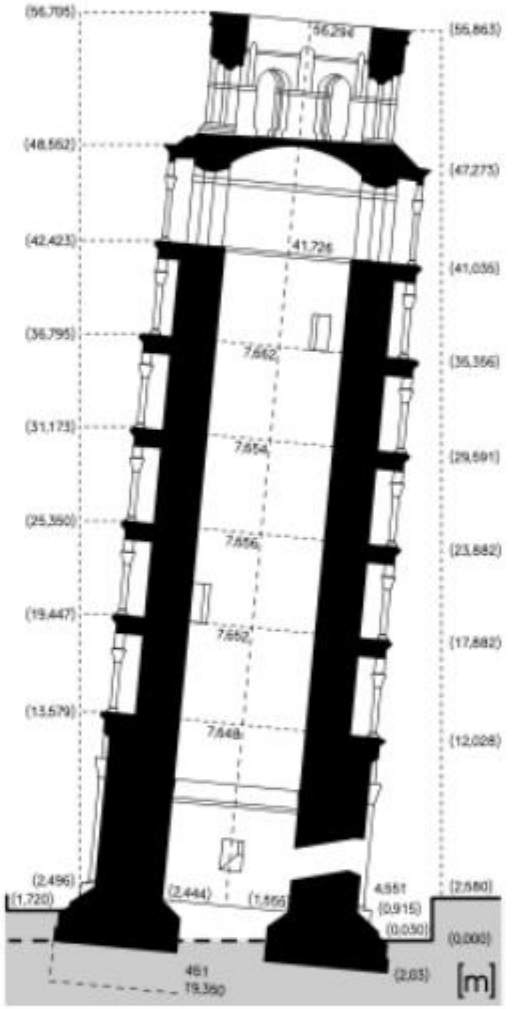
- Ocorrências usuais:
  - Pilares de canto,
  - Ganchos,
  - Sapatas com cargas excêntricas,
  - Vigas protendidas.

- **OBS:** A flexão composta pode ser reta ou oblíqua! Os exemplos a seguir esclarecerão...

Flexão Composta

- **Fundações submetidas à cargas excêntricas:**





Flexão Composta

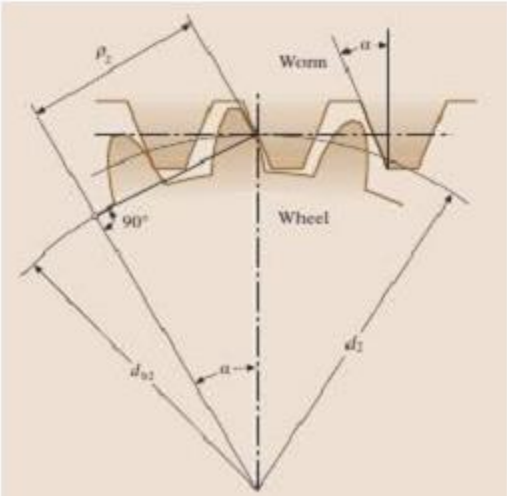
- **Vigas protendidas**

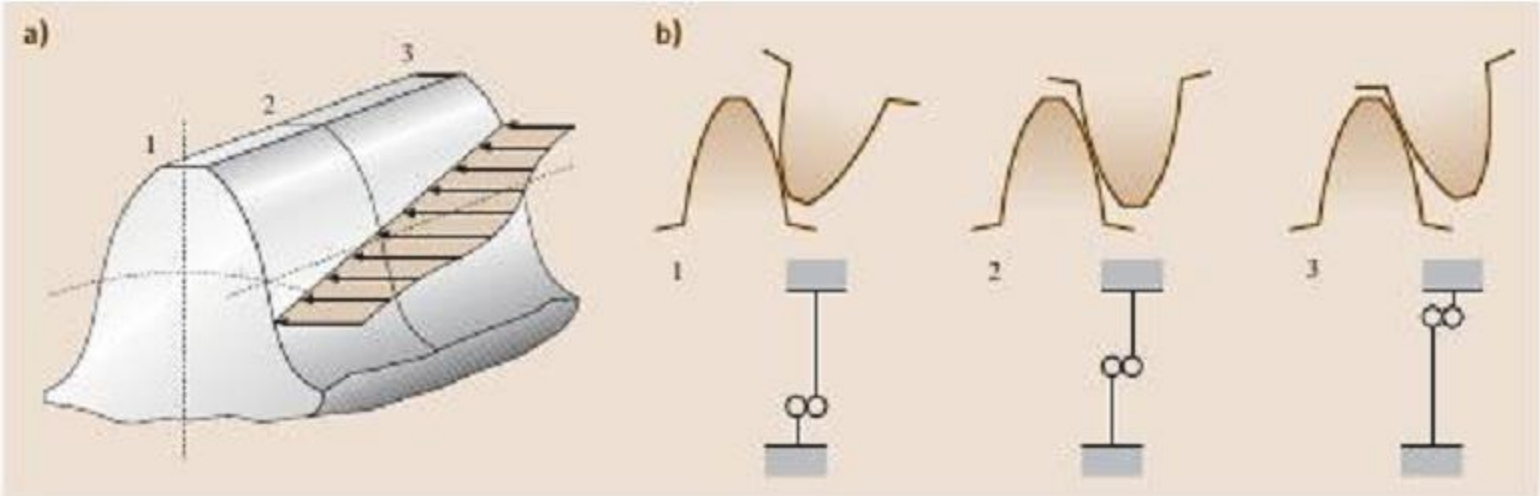
Flexão Composta

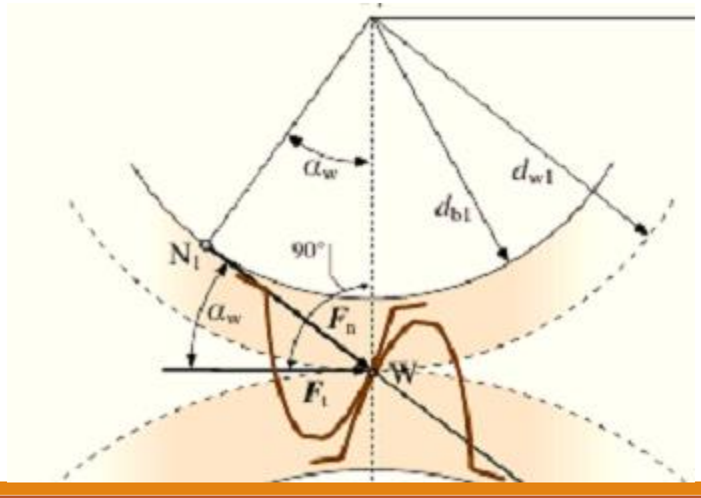
- **Vigas protendidas**

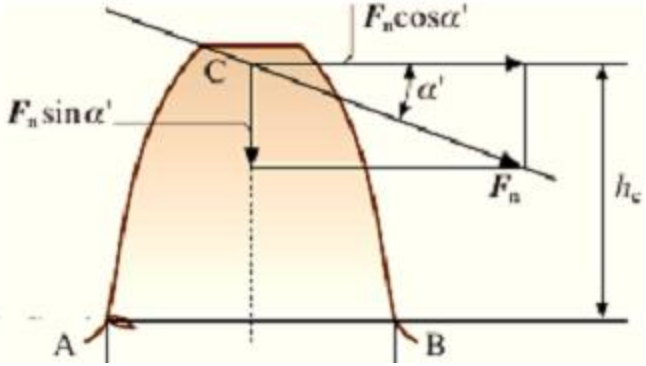
Flexão Composta

- **Projetos de componentes mecânicos**









Flexão Composta

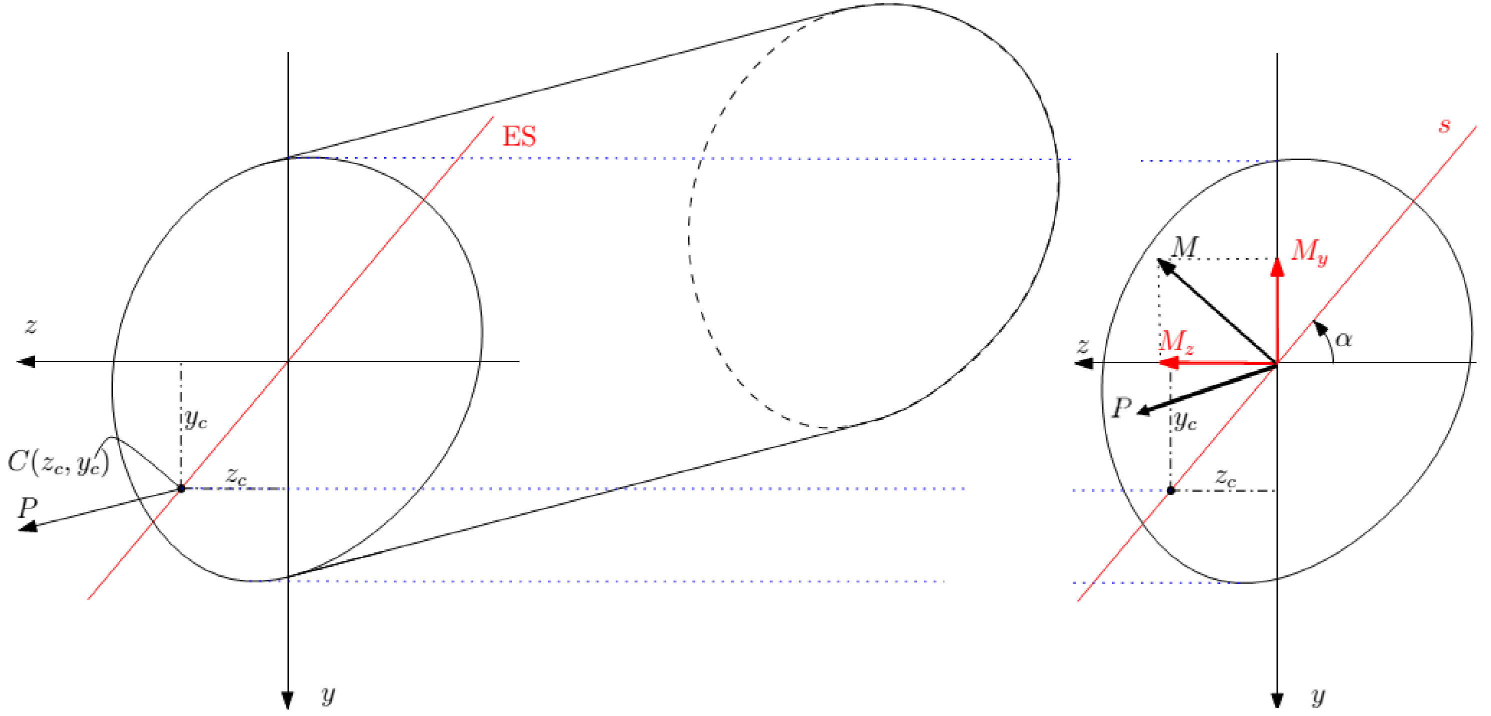
Como calcular tensões normais na flexão composta?

Consideremos a seção genérica:

- Seja uma carga normal aplicada no ponto (z_c, y_c), denominado centro de solicitação.

- Considere, ainda, que esta carga seja aplicada **fora** do centroide da seção.

- Ao "reduzirmos" esta carga para o centroide da seção, teremos não apenas esta carga, mas também um momento fletor resultante, que poderá ser decomposto na direção dos eixos principais de inércia y e z.



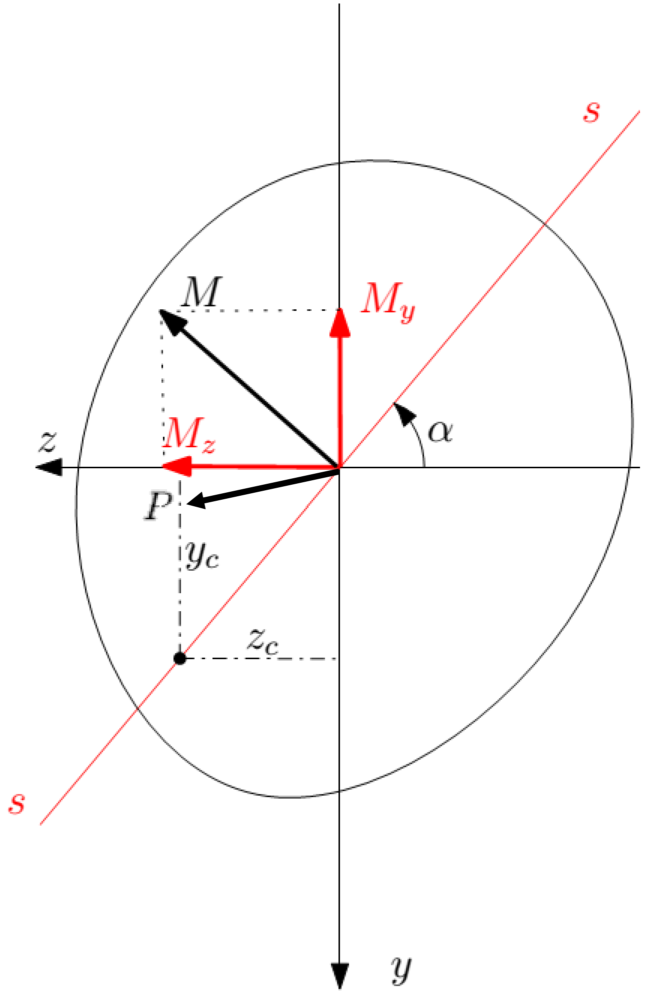
Flexão Composta

- Considere y e z **eixos principais de inércia**
- Redução da força P em $C(z_c, y_c)$ ao centroide da seção resulta em uma força e um momento

$$
\begin{aligned}
N &= P \\
M_y &= -N z_c \\
M_z &= N y_c
\end{aligned}
$$

  - P é aplicada na direção do eixo da peça
  - P é positivo se provoca tração na seção
- As tensões atuantes são determinadas por superposição de efeitos

$$\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^{M_y} + \sigma_x^{M_z}$$



Flexão Composta

- Considerando que

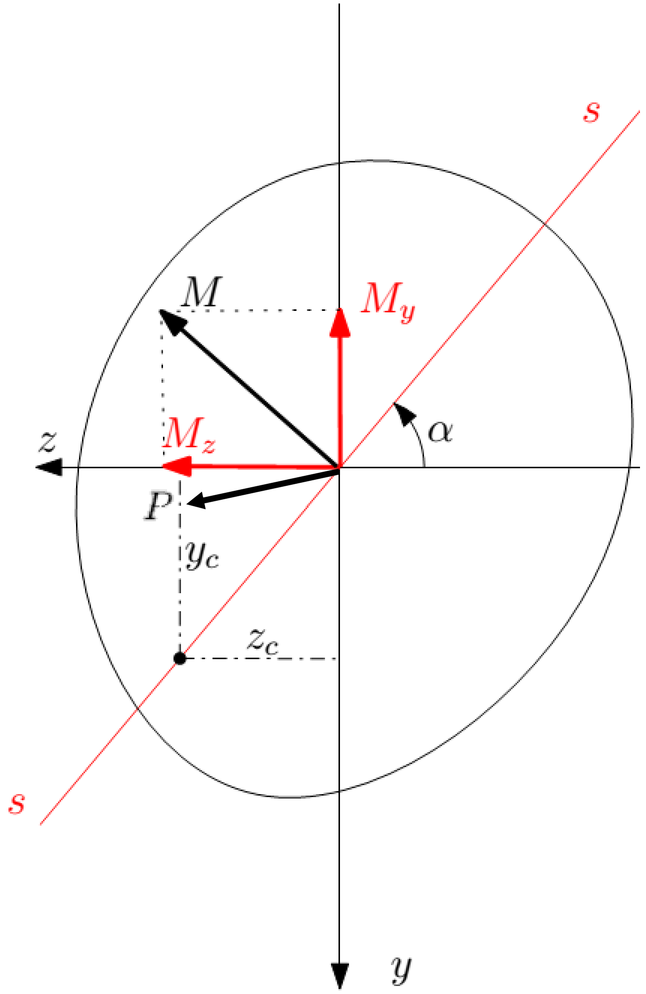
$$\begin{aligned} N &= P \\ M_y &= -N z_c \\ M_z &= N y_c \end{aligned}$$

e substituindo em

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

temos que

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N z_c}{I_y} z + \frac{N y_c}{I_z} y$$



Flexão Composta

- Com os eixos principais de inércia

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N z_c}{I_y} z + \frac{N y_c}{I_z} y$$

- Definindo o raio de giração tal que $I_i = \rho_i^2 A$, podemos reescrever

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_c}{\rho_z^2} y + \frac{z_c}{\rho_y^2} z\right)$$

Flexão Composta

- E se o sistema de eixos não coincidir com os eixos principais de inércia,

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{(M_{\bar{z}} I_{\bar{y}} + M_{\bar{y}} I_{\overline{yz}})\bar{y} - (M_{\bar{y}} I_{\bar{z}} + M_{\bar{z}} I_{\overline{yz}})\bar{z}}{I_{\bar{z}} I_{\bar{y}} - I_{\overline{yz}}^2}$$

Flexão Composta

Como determinar, então, a posição da linha neutra?

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_c}{\rho_z^2}y + \frac{z_c}{\rho_y^2}z\right)$$

Por definição, a linha neutra (LN) é o lugar geométrico onde $\sigma_x = 0$

Usando os eixos principais de inércia,

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_c}{\rho_z^2}y + \frac{z_c}{\rho_y^2}z\right) = 0$$

Flexão Composta

Simplificando o termo N/A, vem:

$$1 + \frac{y_c}{\rho_z^2} y + \frac{z_c}{\rho_y^2} z = 0$$

Esta é uma equação de uma reta que não passa pela origem!

Para defini-la, basta determinar os pontos em que ela cruza os eixos *y* e *z*:

$$\begin{cases} z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -\dfrac{\rho_z^2}{y_c} \\[2ex] y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z_0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = -\dfrac{\rho_y^2}{z_c} \end{cases}$$

Flexão Composta

Uma outra forma de se escrever a equação da LN, utilizando os pontos em que ela cruza os eixos *y* e *z* (y_0 e z_0, respectivamente), é:

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$$

Esta equação é denominada "Equação Segmentária da LN".

IMPORTANTE: Esta equação é válida somente se *y* e *z* forem os eixos principais de inércia!

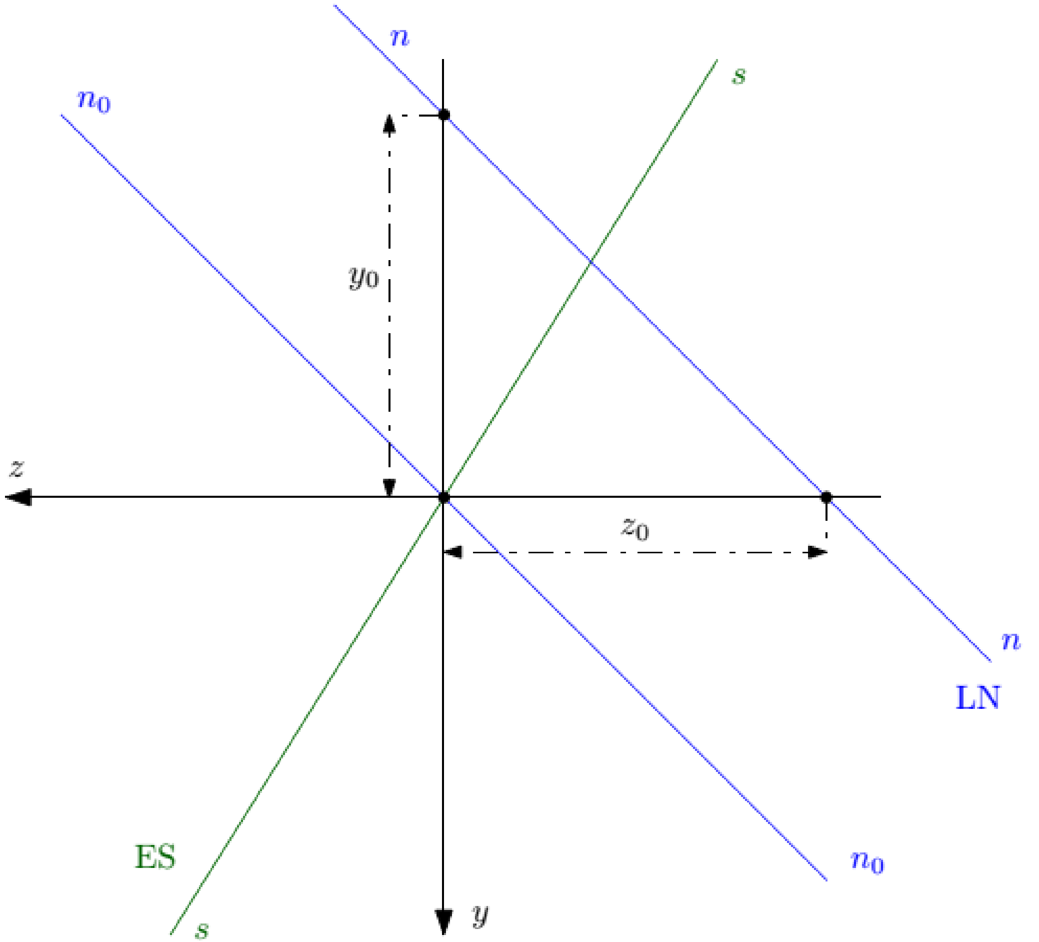
Flexão Composta

Para eixos baricêntricos quaisquer (não principais), a LN pode ser determinada pela seguinte equação:

$$\frac{1}{S} + \frac{(I_{\overline{y}} y_c - I_{\overline{yz}} z_c)\overline{y} - (I_{\overline{yz}} y_c - I_{\overline{z}} z_c)\overline{z}}{I_{\overline{y}} I_{\overline{z}} - I_{\overline{yz}}^2} = 0$$

Flexão Composta

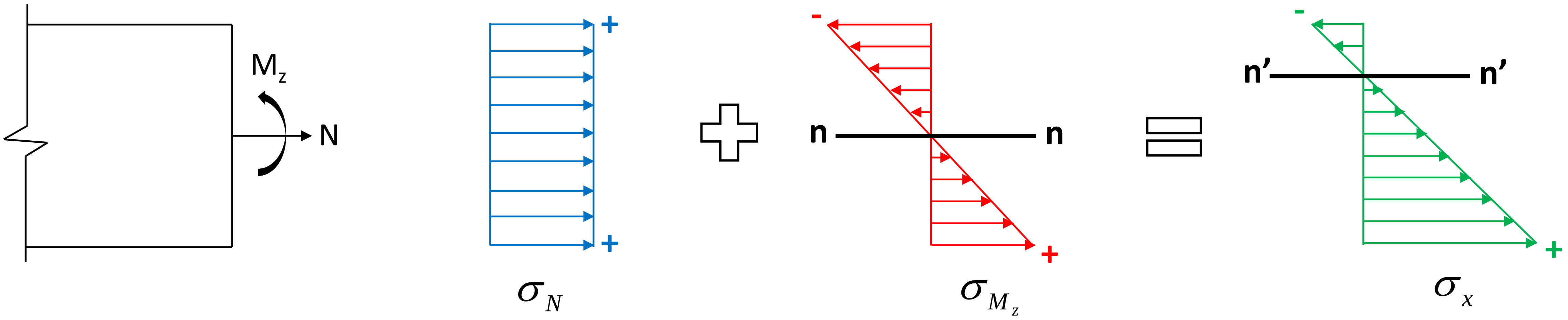
Representação gráfica das LN's na flexão pura oblíqua e na flexão composta oblíqua



Flexão Composta

Como as tensões normais se distribuem ao longo da seção?

Seja uma seção sujeita a um esforço normal N e a um momento fletor M_z:



Observe que o diagrama final de tensões é bi-triangular. Isso sempre irá acontecer? Veremos adiante...

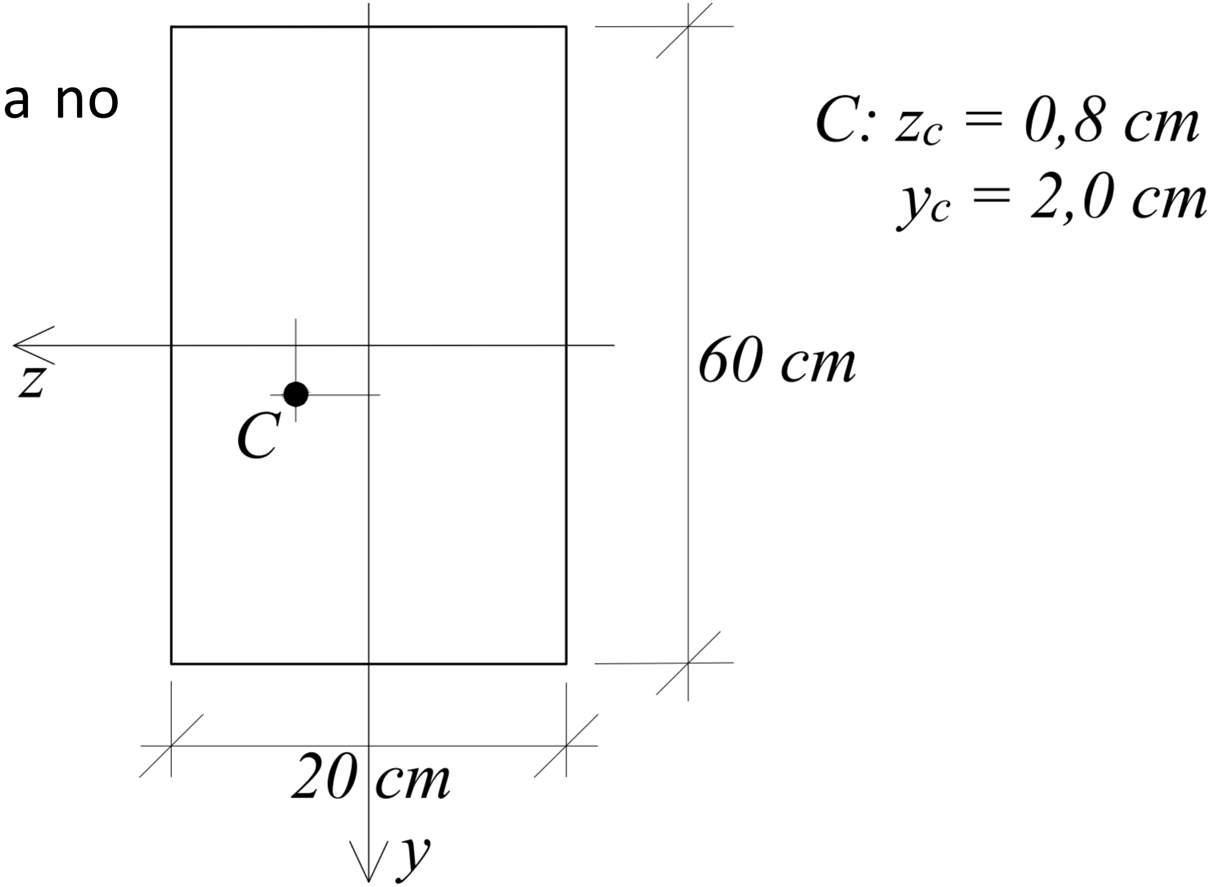
Flexão Composta

Exemplo 4: Para a figura mostrada abaixo, determine:

a) o maior valor que a força de tração *T*, aplicada no ponto *C* da seção, pode atingir;

b) o diagrama de tensões.

Dados: $|\bar{\sigma}_c| = |\bar{\sigma}_t|$= 150 N/cm².



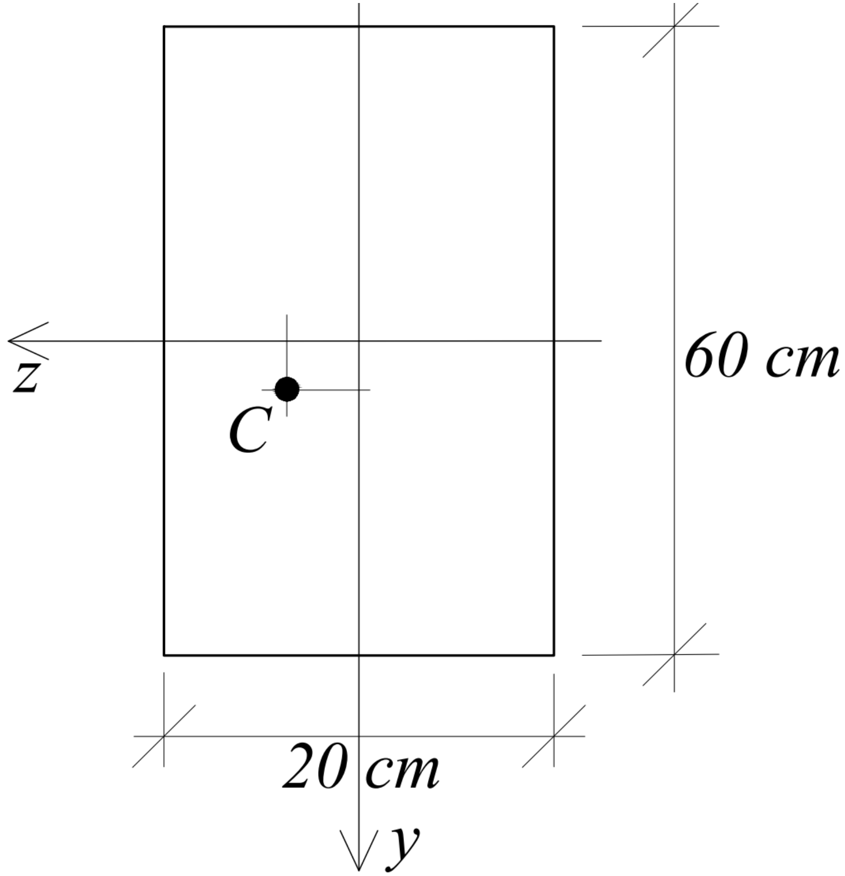
Flexão Composta

a) Haja vista que os eixos *z-y* são principais de inércia (pois são eixos de simetria), a expressão a ser utilizada para o cálculo das tensões e determinação da linha neutra é:

$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Para tanto, devemos determinar os momentos fletores em função da força *T*, além das propriedades geométricas da seção.

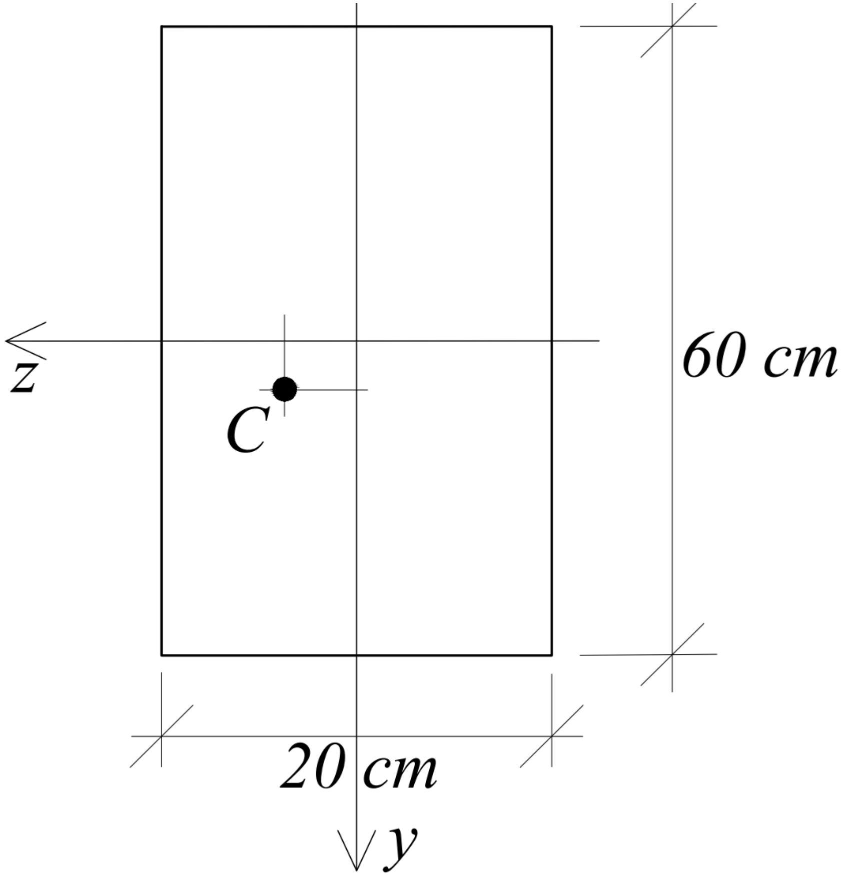
Para facilitar as contas, excepcionalmente neste exemplo vamos manter as unidades de força em [N] e as de dimensão em [cm]. Com isso, teremos as tensões na unidade [N/cm^2].



Flexão Composta

Os momentos fletores são obtidos multiplicando-se a força *T* (em Newton) pelas distâncias em relação aos eixos coordenados, isto é:

$$\begin{cases} M_y = -T z_c = -0,8\ T\ \mathrm{Ncm} \\ M_z = T y_c = 2,0\ T\ \mathrm{Ncm} \end{cases}$$



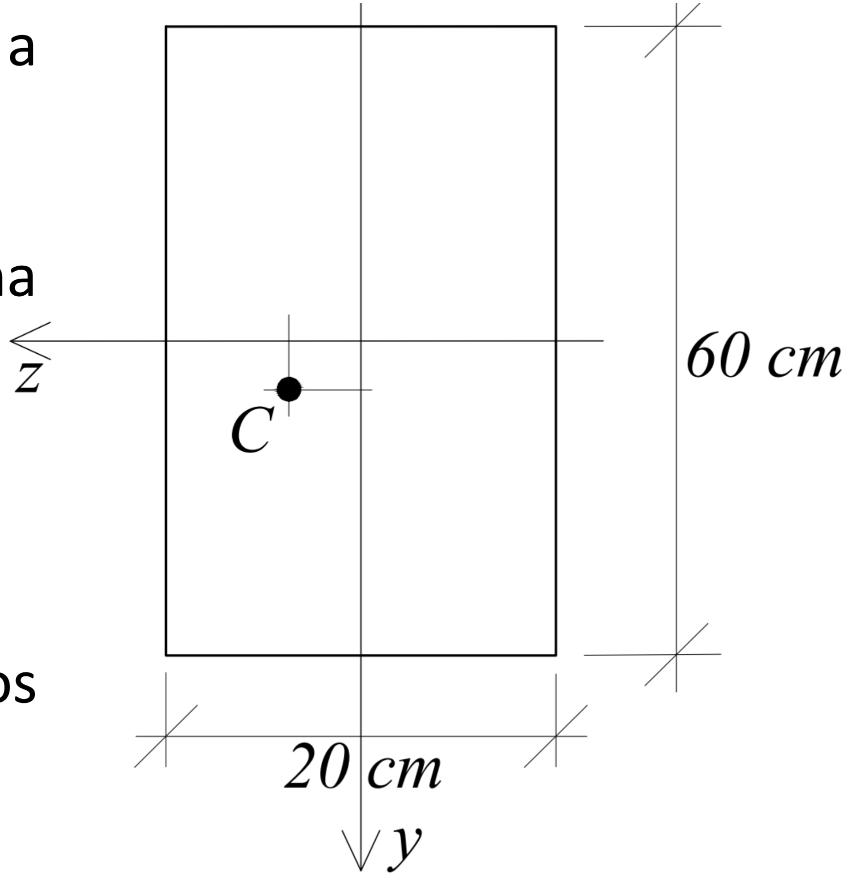
As propriedades geométricas da seção são dadas por:

$$\begin{cases} S = 1.200\ \mathrm{cm}^2 \\ I_z = 360.000\ \mathrm{cm}^4 \\ I_y = 40.000\ \mathrm{cm}^4 \end{cases}$$

Flexão Composta

Para se determinar o maior valor que a força de tração *T* pode assumir, é preciso saber quais pontos da seção estão sujeitos às maiores tensões de tração e de compressão.

Assim, é necessário determinar, primeiramente, onde está a linha neutra.



Para tanto, substituímos os valores obtidos anteriormente na equação de σ_x e a igualamos a zero, isto é:

$$\sigma_x = \frac{T}{1200} + \frac{2Ty}{360000} + \frac{0{,}8Tz}{40000} = 0$$

Multiplicando-se todos os termos por 360000 e dividindo-os por *T*, vem:

$$300 + 2y + 7{,}2z = 0 \rightarrow \boxed{150 + y + 3{,}6z = 0}$$

Flexão Composta

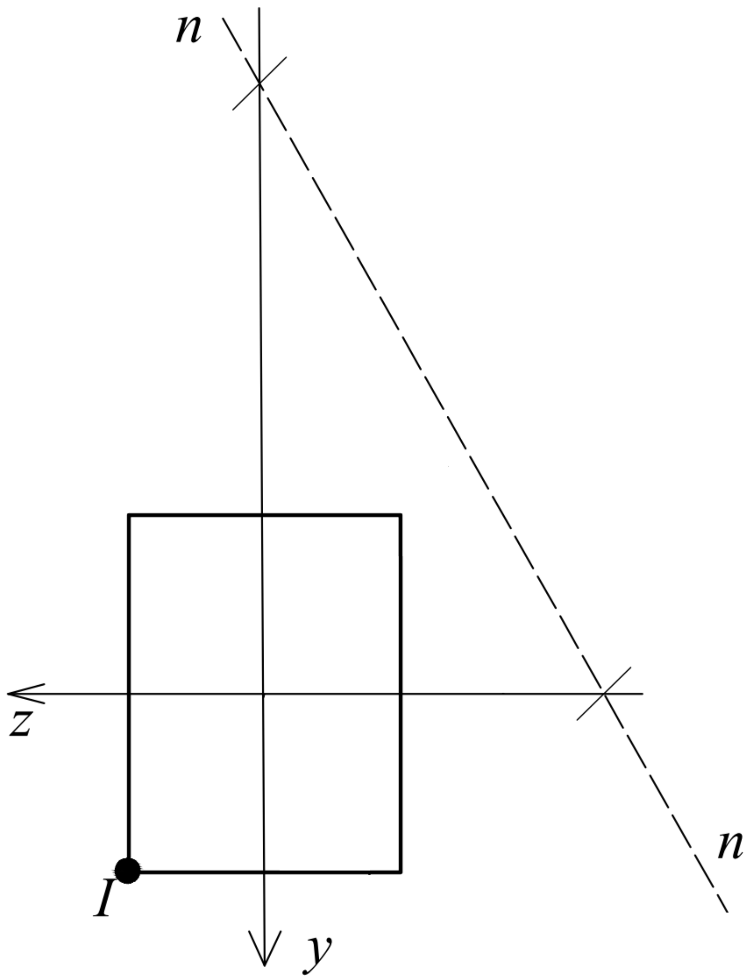
Os pontos onde a linha neutra corta os eixos *z* e *y* são, portanto:

$$y = -150 \text{ cm}$$
$$z = -41{,}67 \text{ cm}$$

Substituindo-se estes valores nos eixos, nota-se que a LN está fora da seção, como mostra a figura ao lado.

Assim, haja vista que a força aplicada é de tração, conclui-se que **TODOS** os pontos da seção estão sujeitos à tensões de tração, unicamente.

Portanto, o ponto mais solicitado desta seção é, sem dúvida, o ponto *I*.



Flexão Composta

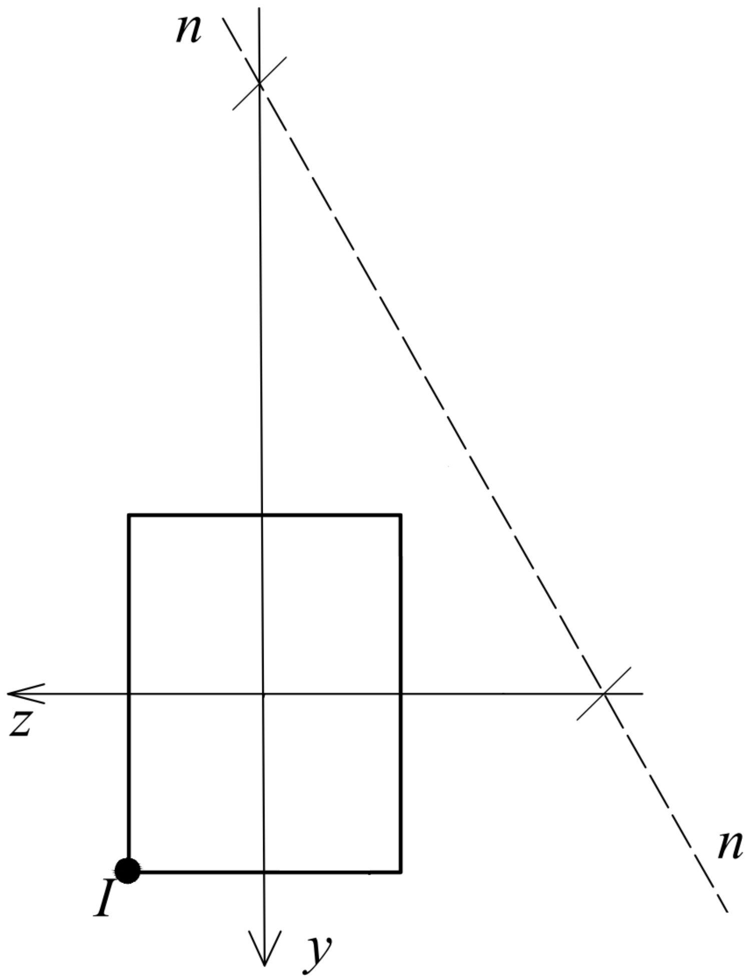
O valor máximo de *T* será obtido, então, limitando-se a tensão normal no ponto *I* a 150 N/cm².

Substituindo-se a tensão máxima admissível e as coordenadas do ponto *I* (z = 10 cm; y = 30 cm) na equação abaixo, vem:

$$\sigma_x^I = \frac{T}{1200} + \frac{2T(30)}{360000} + \frac{0{,}8T(10)}{40000} < 150\ [\mathrm{N/cm^2}]$$

Resolvendo para *T,* tem-se:

$$\boxed{T = 125.000\ \mathrm{N\ ou\ 125\ kN}}$$

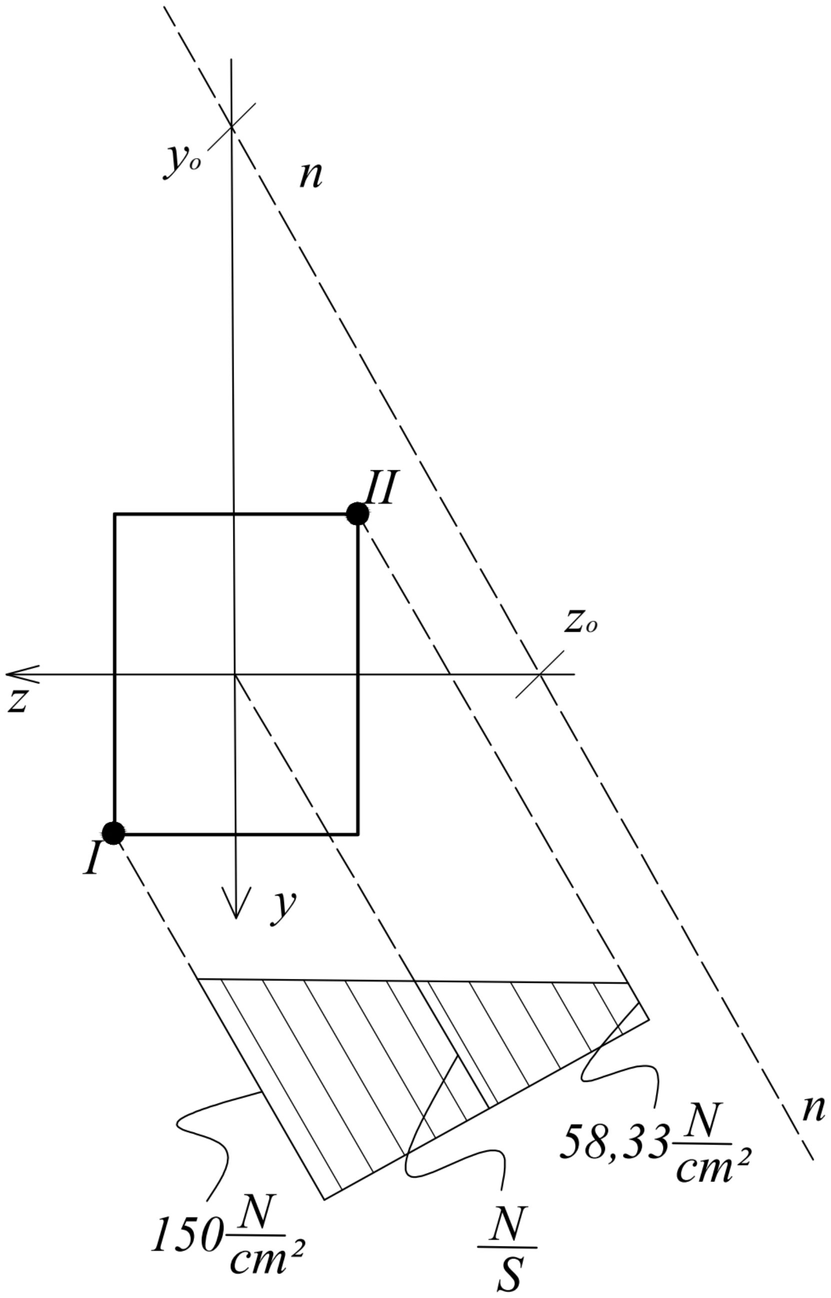


Flexão Composta

b) O diagrama de tensões pode ser traçado conhecendo-se as tensões normais em pontos-chaves da seção.

Note que a tensão normal no CG da seção é simplesmente dado por *N/S*, pois *z*=*y*=0.

A tensão normal no ponto *II* foi calculada apenas para fins didáticos, pois ela não é necessária para a determinação da força *T* máxima encontrada anteriormente.

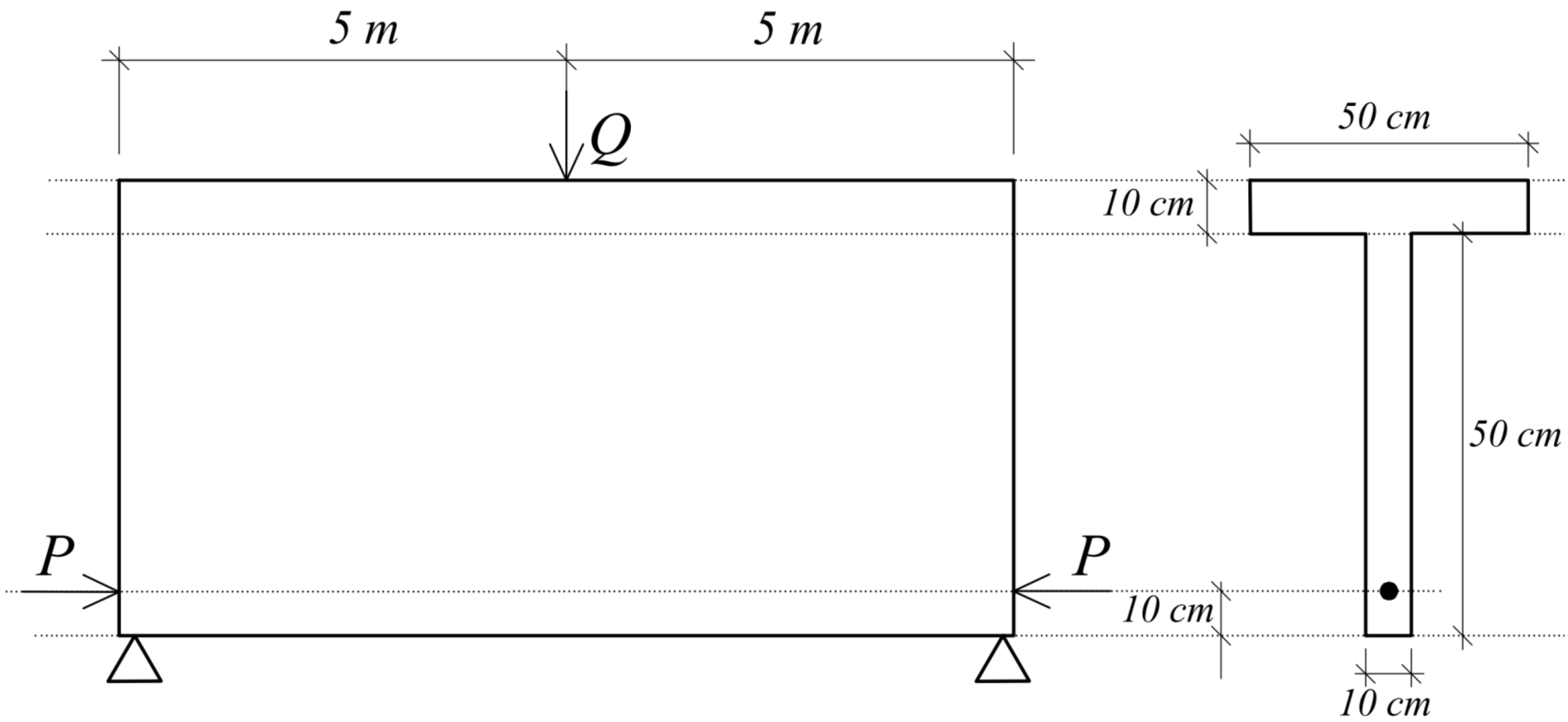


Flexão Composta

Exemplo 5: Sabe-se que para a viga mostrada na figura abaixo, o maior valor que a carga *Q* pode atingir é 15 kN. Este valor está limitado pela máxima tensão de tração do material que constitui a viga. Assim, calcule:

Dados:

$$\begin{cases} I_z = 3,33 \times 10^9 \text{ mm}^4 \\ S = 10^5 \text{ mm}^2 \\ \bar{y} = 400 \text{ mm} \end{cases}$$



a) O acréscimo que esta carga Q poderá sofrer se uma força de protensão de 80 kN for aplicada, conforme indica a figura;
b) O acréscimo de vão que esta viga poderia cobrir em decorrência da mesma protensão (mantendo-se, porém, o valor original da carga Q).

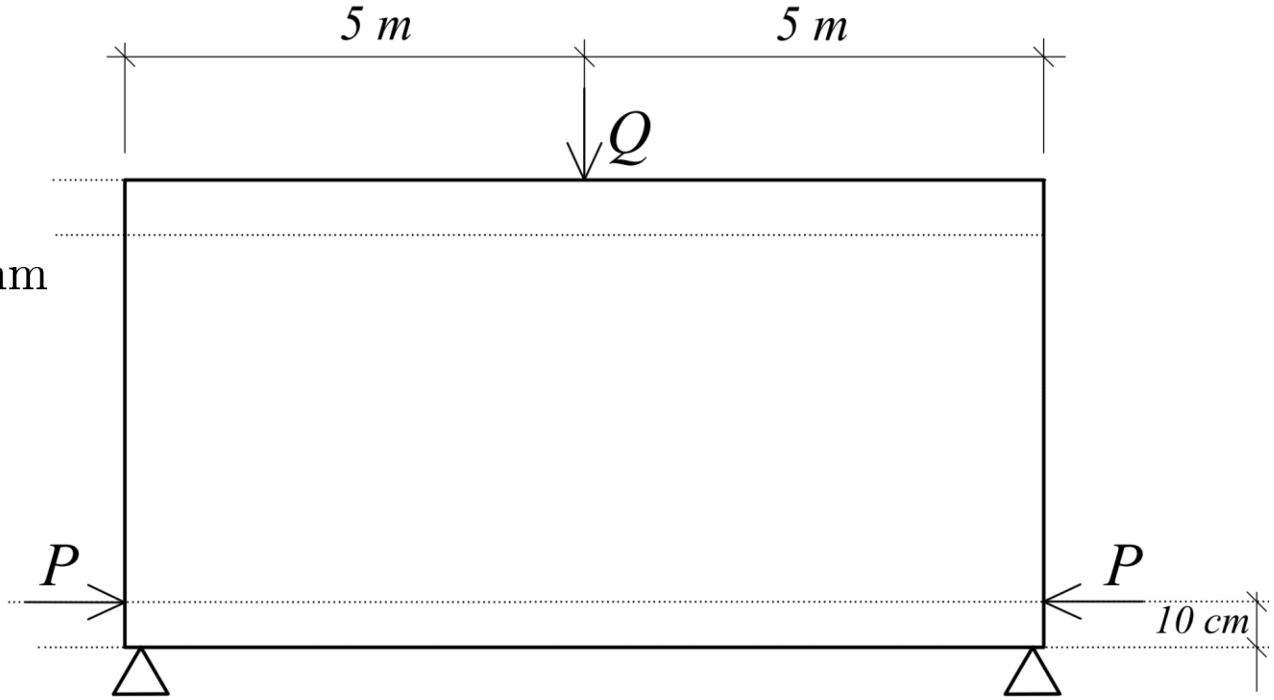
Flexão Composta

a) O primeiro passo consiste em calcular a máxima tensão normal que ocorre na estrutura quando submetida apenas à carga Q = 15 kN.

A seção mais solicitada é a do meio vão. Nesta seção, os pontos mais solicitados à tração são aqueles situados na fibra inferior.

O momento fletor nesta seção é dado por:

$$M_{max} = M_z = \frac{Q}{2}\frac{l}{2} = \frac{15 \cdot 10^3 \times 10 \cdot 10^3}{4} = 37,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$



E a máxima tensão normal de tração é:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z y_i}{I_z} = \frac{37,5 \cdot 10^6 \cdot 400}{3,33 \cdot 10^9} \Rightarrow \sigma_{max} = 4,50 \text{ MPa}$$

Flexão Composta

Ao aplicarmos uma protensão de P = 80 kN na posição indicada na figura, teremos a atuação concomitante:

- Da carga normal excêntrica com e = 300 mm → gerando esforço normal e fletor em z;

- Do momento fletor devido à nova carga vertical Q_{novo} → gerando fletor em z;

O valor do momento fletor provocado pela carga de protensão é dado por:

$$M_z^P = -P \times e = -80 \times 10^3 \times 300 = -24 \times 10^6 \text{ Nmm}$$

Para uma nova carga Q_{novo}, o momento fletor será:

$$M_z^Q = \frac{Q_{novo}}{2}\frac{l}{2} = \frac{Q_{novo} \times 10 \cdot 10^3}{4} = 2,5 \cdot 10^3 \times Q_{novo} \text{ Nmm}$$

Flexão Composta

Igualando a tensão de tração no ponto mais solicitado (y_i = 400 mm) ao valor máximo encontrado - caso sem protensão - obtemos a equação que nos permite calcular o novo valor da carga. Assim, temos:

$$\sigma_{max} = 4{,}5 = \frac{N}{S} + \frac{\left(M_z^{Q_{novo}} - M_z^{P}\right)y}{I_z}$$

Substituindo-se os valores calculados anteriormente, vem:

$$4,50 = -\frac{80 \times 10^3}{10^5} + \frac{(2,5 \cdot 10^3 \times Q_{novo} - 24 \cdot 10^6)400}{3,33 \cdot 10^9}$$

Obtendo-se, finalmente:

$$Q_{novo} = 27.266,67 \text{ N ou } 27,27 \text{ kN} \Longrightarrow \text{Acréscimo de carga } = 12,27 \text{ kN}$$

Flexão Composta

b) O cálculo do acréscimo de comprimento da viga segue estritamente o mesmo raciocínio anterior. Desta forma, basta-nos calcular, agora, o novo momento fletor devido a *l_{novo}*:

$$M_z^l = \frac{Q}{2}\frac{l_{novo}}{2} = \frac{15 \cdot 10^3}{2}\frac{l_{novo}}{2} = 3,75 \cdot 10^3 \times l_{novo} \text{ Nmm}$$

Assim, a expressão para o cálculo da máxima tensão normal será:

$$4,50 = -\frac{80 \times 10^3}{10^5} + \frac{(3,75 \times 10^3 \times l_{novo} - 24 \times 10^6)400}{3,33 \times 10^9}$$

Obtendo-se, finalmente:

$$l_{novo} = 18.177,78 \text{ mm} \Longrightarrow \text{Acréscimo de comprimento} = 8,18 \text{ m}$$

<u>Pergunta</u>: O aumento percentual da carga e do comprimento são iguais? Explique.

Flexão Composta

<u>Núcleo Central de Inércia (NCI)</u>

Da situação anterior, observamos que:

- Quando se varia a posição de aplicação da carga, a posição da LN também varia.
- Com isso, o diagrama de tensões pode ser:

  - ✓ **Bi-triangular**: tensões de tração e compressão ao longo da seção transversal (LN corta a seção);

  - ✓ **Trapezoidal**: tensões de um único sinal (tração ou compressão) em toda a seção (LN não corta a seção);

  - ✓ **Triangular**: tensões de um único sinal (tração ou compressão) em toda a seção (LN tangencia a seção).

Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

Definição: O NCI é o lugar geométrico da seção transversal tal que, se nele for aplicada uma carga de tração (ou compressão) **P**, toda a seção estará tracionada (ou comprimida).

Consequência: a seção só terá tensões de um mesmo tipo (tração ou compressão).

Importância: materiais com baixa resistência a um dado tipo de solicitação. Ex.: concreto simples, muros de arrimo, chaminés, etc.

Como determinar, então, o NCI de uma dada seção transversal?

Flexão Composta

<u>Núcleo Central de Inércia (NCI)</u>

Processo espontâneo de determinação do NCI:

A partir de um número finito de tangentes à seção transversal da peça – as quais consideraremos, cada uma, como uma linha neutra – podemos determinar os centros de solicitação (pontos de aplicação da carga) correspondentes.

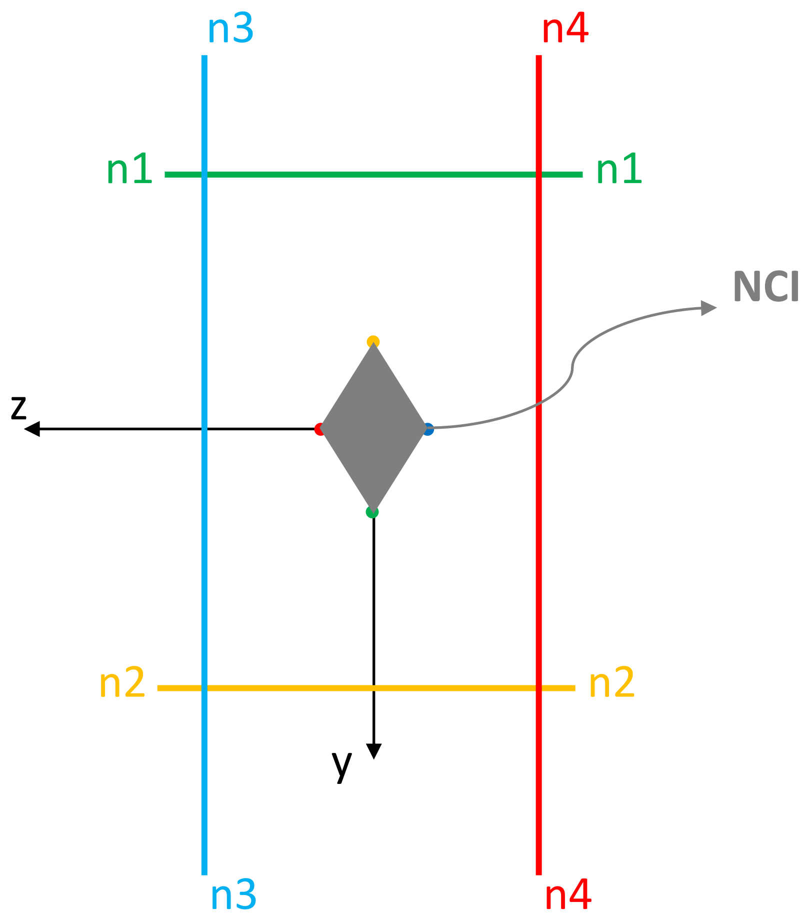
O conjunto destes centros delimitará o NCI da seção.

Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

Exemplo:

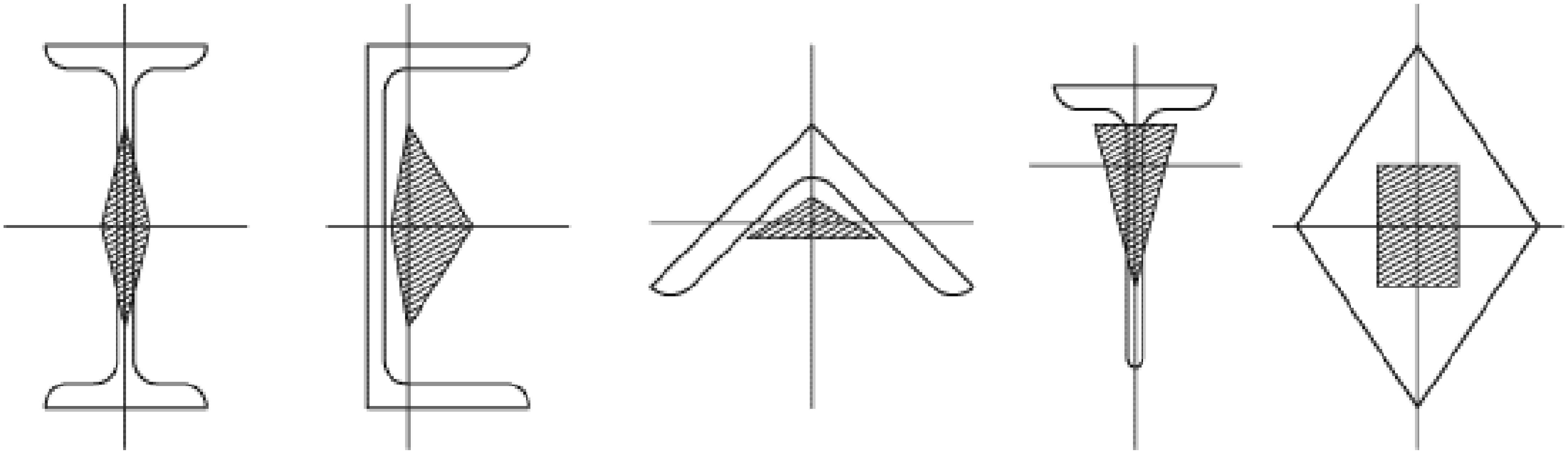
Seção retangular



Flexão Composta

Núcleo Central de Inércia (NCI)

***Outros exemplos*:**

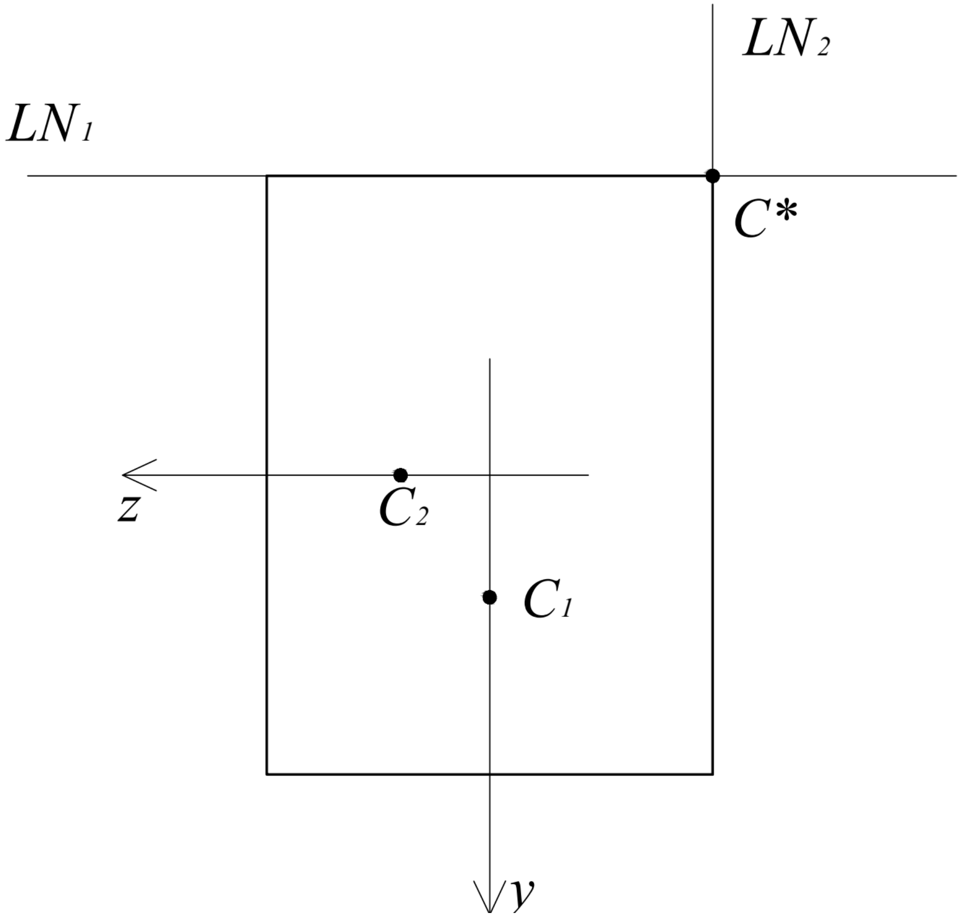


Flexão Composta

<u>Exemplo 6</u>: Determine o NCI de uma seção retangular.

Para determinar o NCI de uma seção retangular, duas linhas neutras são suficientes, como mostra a figura ao lado.

As demais coordenadas do NCI são obtidas utilizando-se o princípio da antipolaridade.



Flexão Composta

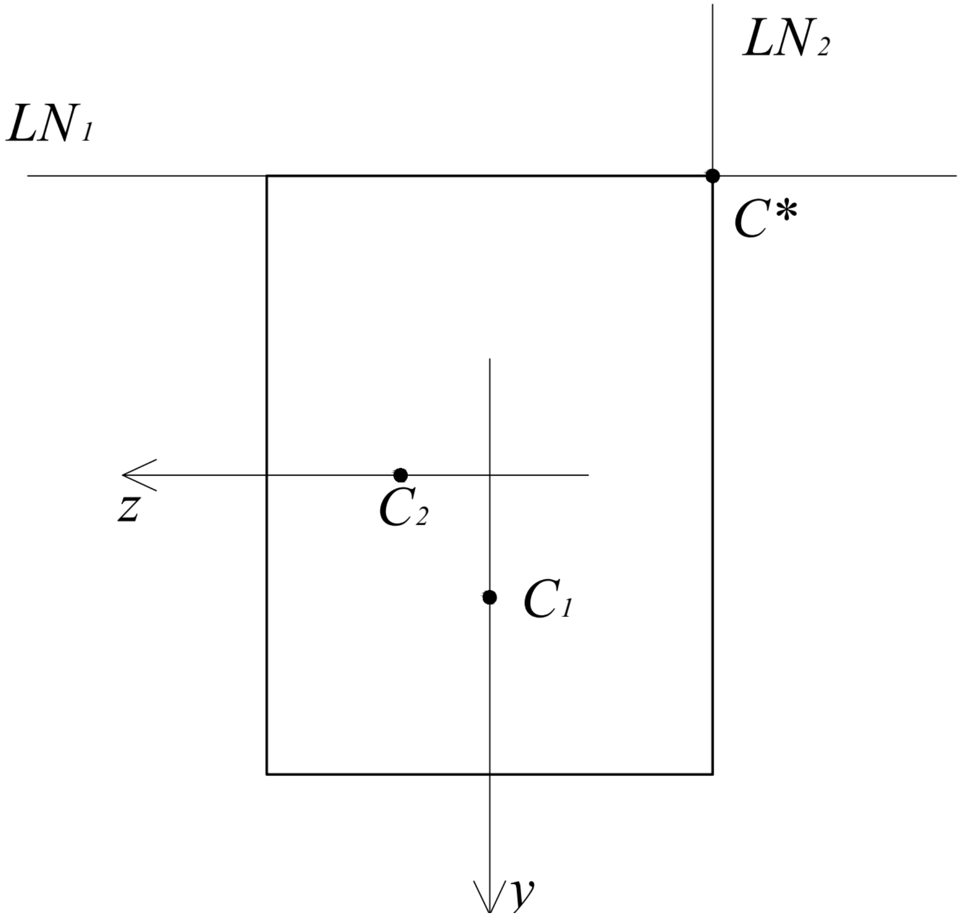
Determinação das coordenadas do centro de solicitação C_1:

$$1 + \frac{y_c}{\rho_z^2} y + \frac{z_c}{\rho_y^2} z = 0$$

$$LN_1 : n_1 n_1 \Rightarrow 1 + \frac{y_c y}{\rho_z^2} = 0$$

P/ qq. valor de *z*
(adotando z = 0)

$$\text{Para} \quad y = -\frac{h}{2} \;\Rightarrow\; y_{c1} = \frac{h}{6} \quad \text{e} \quad z_{c1} = 0$$



Flexão Composta

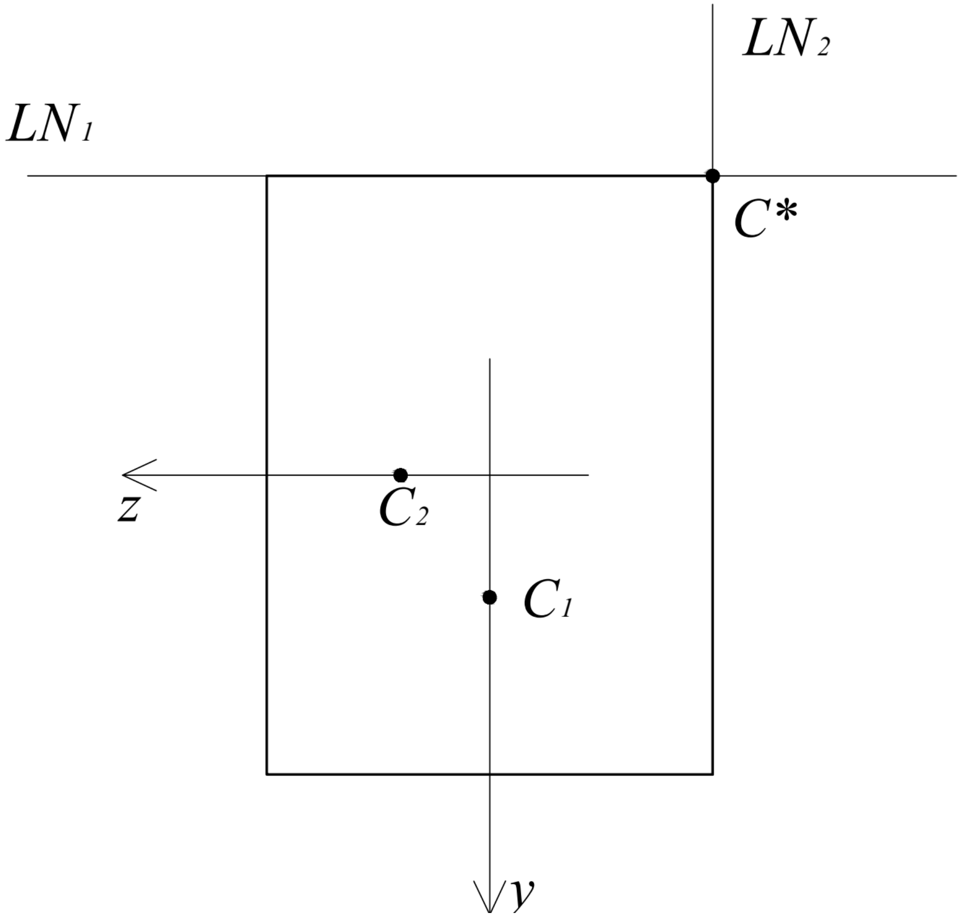
<u>Determinação das coordenadas do centro de solicitação C_2:</u>

$$1 + \frac{y_c}{\rho_z^2} y + \frac{z_c}{\rho_y^2} z = 0$$

$$LN_2 : n_2 n_2 \Rightarrow 1 + \frac{z_c z}{\rho_y^2} = 0$$

P/ qq. valor de *y*
(adotando y = 0)

$$\text{Para} \quad z = -\frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad z_{c2} = \frac{b}{6} \quad \text{e} \quad y_{c2} = 0$$

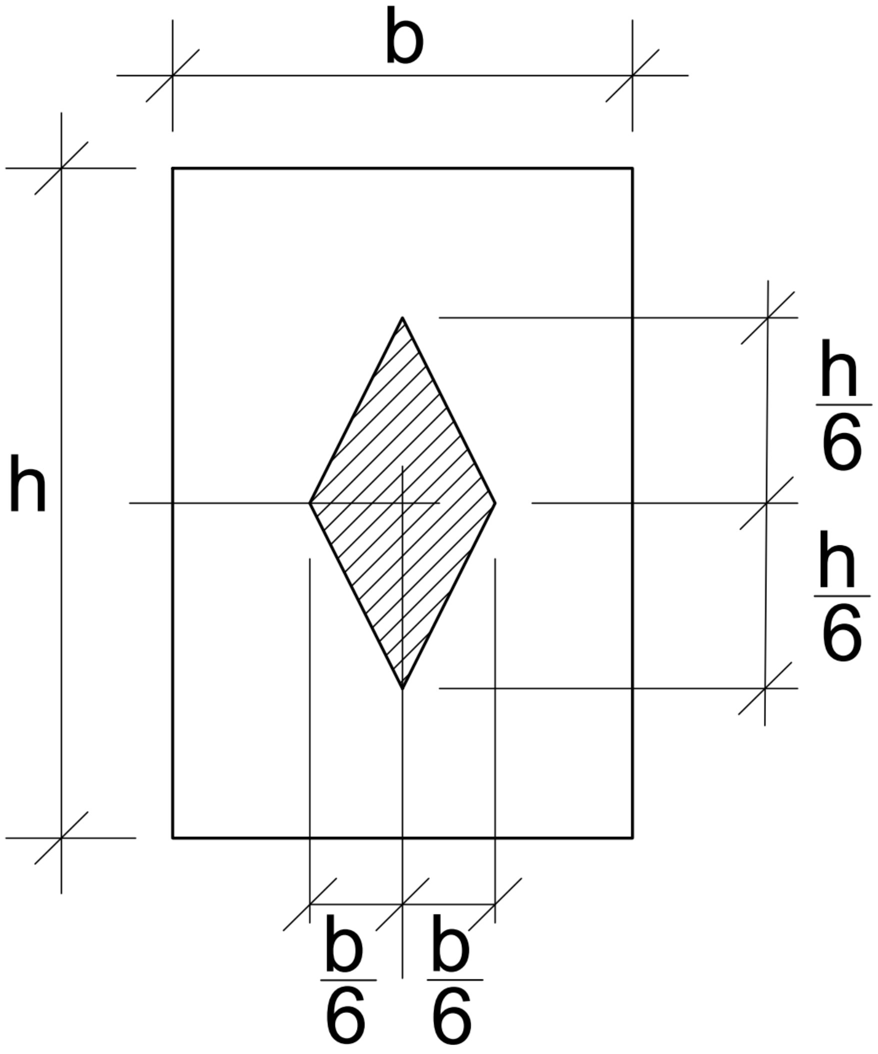


Flexão Composta

Determinação do NCI:

Pelo princípio da antipolaridade, os demais centros de carga são obtidos a partir dos valores simétricos daqueles calculados anteriormente.

Assim, o NCI de uma seção retangular é mostrado na figura ao lado.



Flexão Composta

- Os slides apresentados foram livremente baseados nas Notas de Aula do prof. Elson Toledo – MAC/UFJF

- Algumas figuras, fotos e equações presentes nos slides foram retiradas do material do prof. Leonardo Goliatt – MAC/UFJF