Flambagem

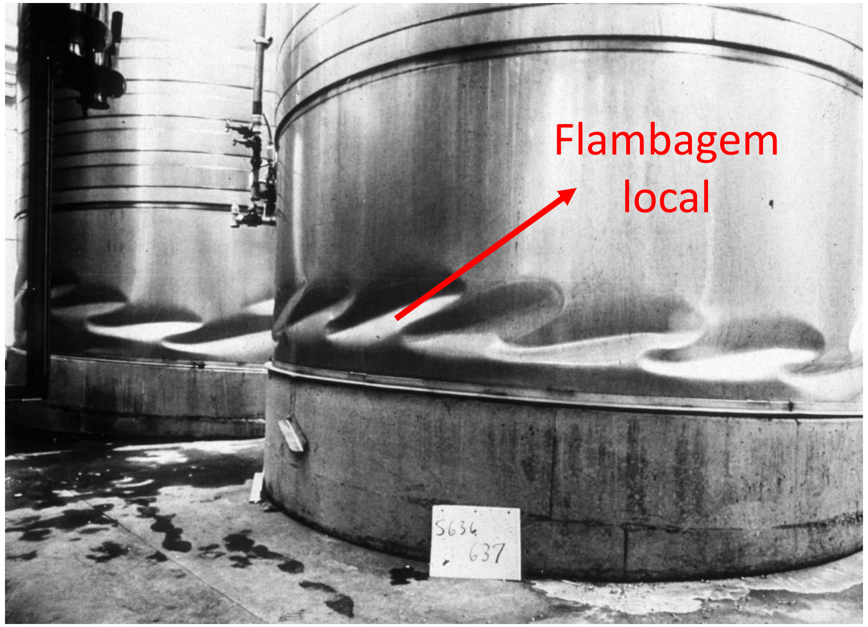
Carregamento Axial

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Flambagem

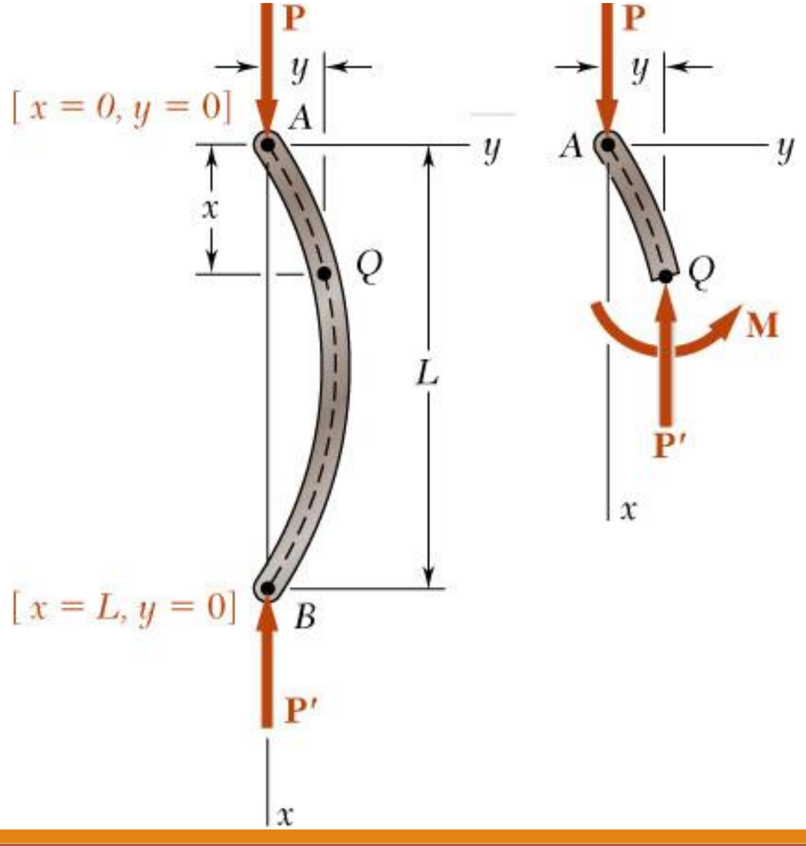
- O que é e por que estudar?
- Onde ocorre?
- Que fatores influenciam? Como evitar?
- Por que, normalmente, é desejável que a diagonal das treliças estejam sob tração?



Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

Considere-se uma coluna birrotulada, carregada axialmente. Analisando-se os esforços na seção Q, a configuração de equilíbrio pode ser escrita como:



$$M(x) = Py$$

Da teoria da flexão, sabemos que a deflexão (flecha) é calculada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Py}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \quad \text{onde} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

Flambagem

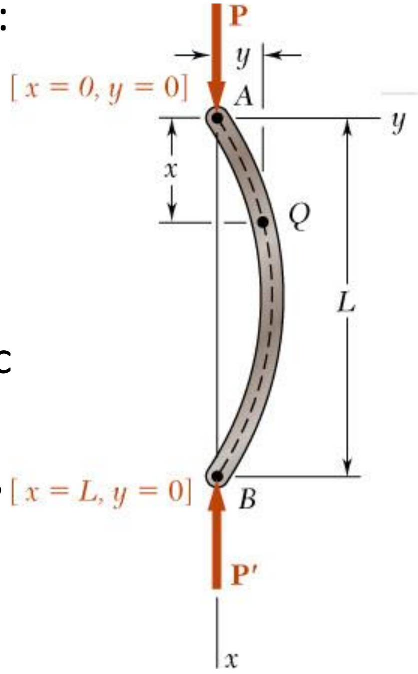
Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

A solução desta EDO é dada por: $$y(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

Esta é a equação diferencial de equilíbrio para a coluna em estudo, sujeita às condições de contorno definidas a partir dos tipos de apoio. Neste caso:

$$\begin{cases} \text{Em } x = 0,\ y = 0 \\ \text{Em } x = L,\ y = 0 \end{cases}$$



Valendo-se da 1ª condição de c **B=0**!

A 2ª condição de contorno nos $$A\sin kL = 0$$

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

$$y(L) = A\sin kL = 0$$

Esta equação nos fornece 2 possibilidades de solução:

$$\begin{cases} A = 0 \\ \sin kL = 0 \end{cases}$$

A 1ª solução, evidentemente, não nos atende, pois teríamos y(x) = 0!

Para a 2ª solução, temos: $\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n = 1,2,3\ldots \Rightarrow k = \dfrac{n\pi}{L}$

Sendo $k^2 = \dfrac{P}{EI} \Rightarrow \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 = \dfrac{P}{EI} \Rightarrow \underbrace{P_n = \dfrac{n^2\pi^2 EI}{L^2}}_{\text{cargas críticas}}$ e $\underbrace{y(x) = A\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{configurações de equilíbrio}}$

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

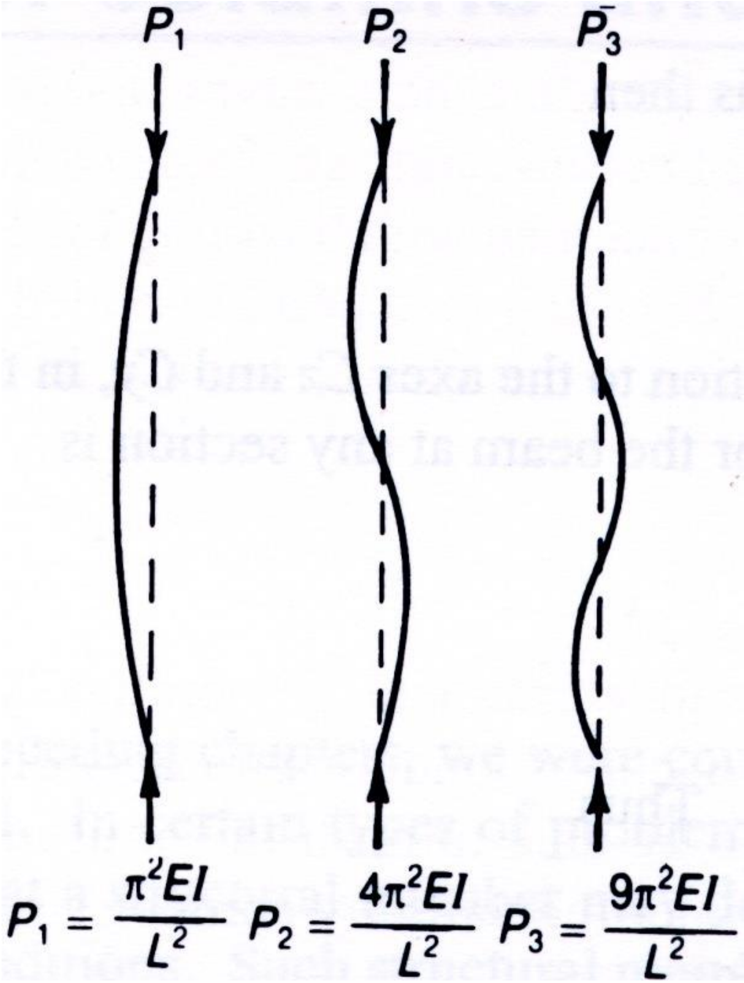
A **carga crítica de Euler** se dá para *n* = 1, assim:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

menor momento de inércia da seção!

$$y(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$$

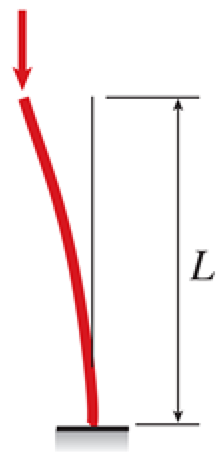
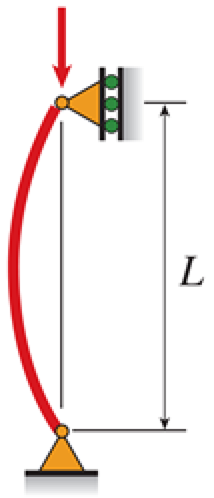
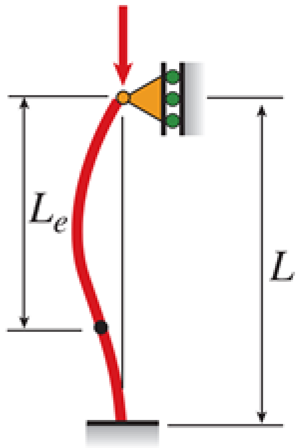
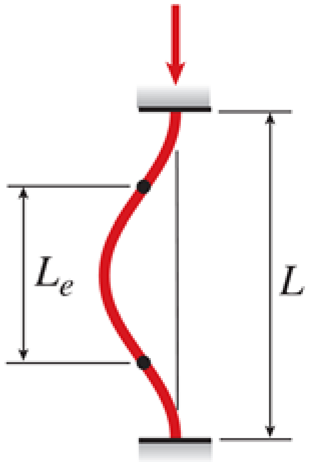
Para cada valor de *n*, tem-se um valor correspondente da carga crítica e da forma de flambagem.



Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

Para outras condições de apoio, deve-se resolver a mesma EDO, modificando-se a expressão *M(x)* e as condições de contorno.

$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{2.046\ \pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = 2L$	$L_e = L$	$L_e = 0.699L$	$L_e = 0.5L$

Equação geral para a carga crítica de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^{\ 2}}$$

onde $\underbrace{L_e \text{ ou } L_{flamb}}_{\text{comprimento efetivo ou de flambagem}}$

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

Ensaio em laboratório para diferentes condições de apoio:

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)

A tensão crítica pode ser calculada dividindo-se a carga crítica pela área da seção transversal da coluna:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2 S} \qquad \text{Mas} \quad \rho^2 = \frac{I}{S} \quad \text{(raio de giração)} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \rho^2}{L_e^2}$$

Pode-se definir a relação acima destacada como "índice de esbeltez", dado por: $\lambda = \dfrac{L_e}{\rho}$ menor raio de giração da seção!

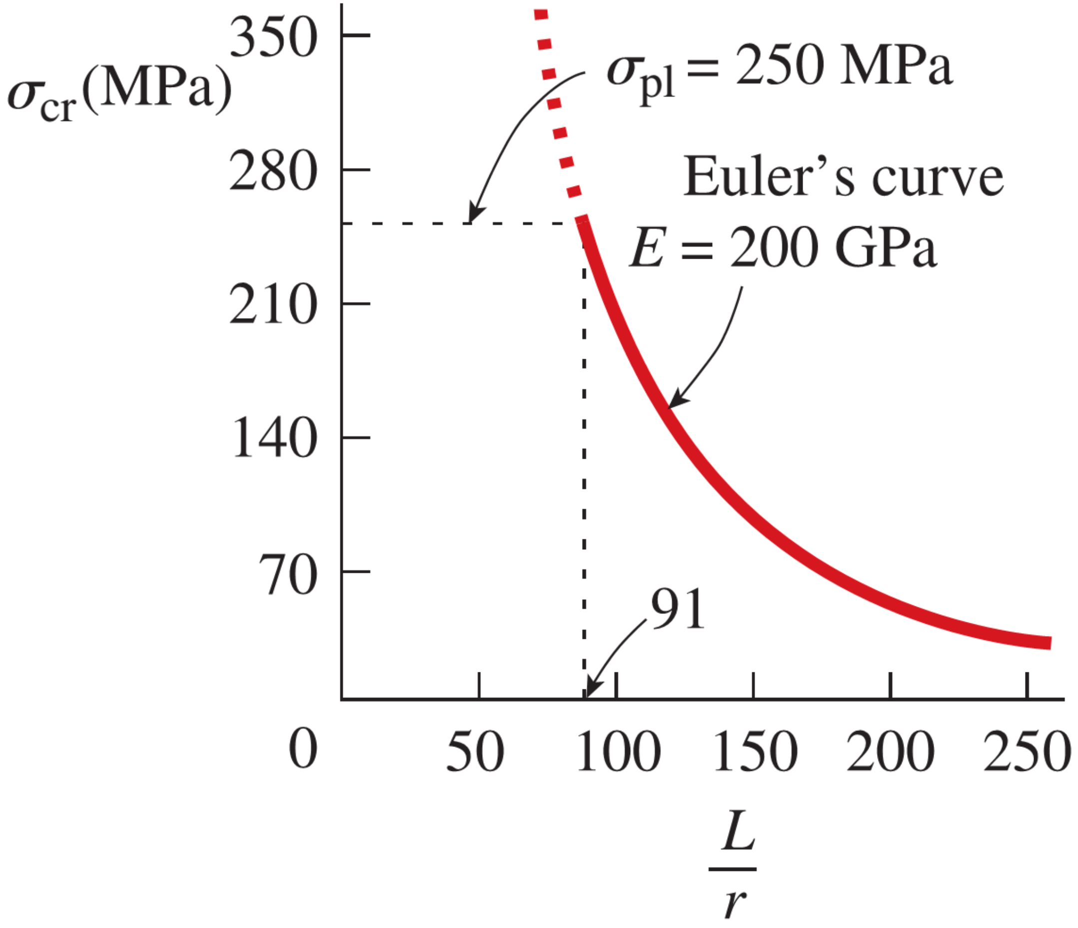
Finalmente, tem-se: $\sigma_{cr} = \left(\dfrac{\pi}{\lambda}\right)^2 E$ Curva de Euler

Pergunta 1: Dadas 2 barras de aço, uma CA-40 e outra CA-50 (igual comprimento, seção transversal e condições de apoio), qual estaria mais "propensa" a sofrer flambagem?

Pergunta 2: Caso a coluna não possua eixo de simetria (perfil L, por exemplo), qual valor utilizar para o momento de inércia?

Flambagem

Carga crítica de Euler (Casos perfeitos – carregamento axial)



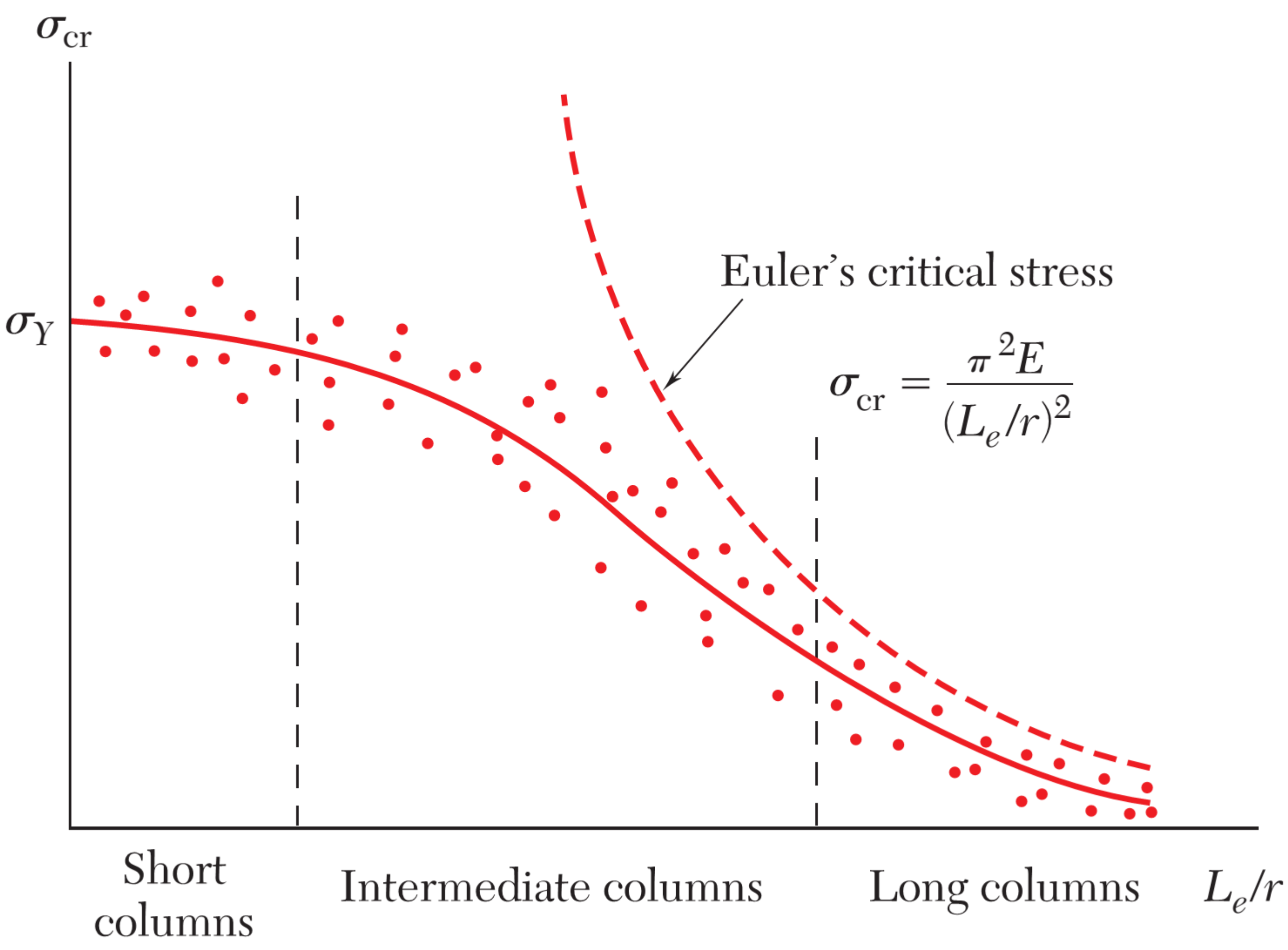
Importante:

- As equações anteriormente deduzidas para a carga crítica de Euler são válidas somente no **regime linear elástico** de deformações!

- Assim, antes de se analisar a possibilidade de flambagem, deve-se verificar se a tensão atuante é **menor** que a tensão de escoamento do material em estudo.

Flambagem

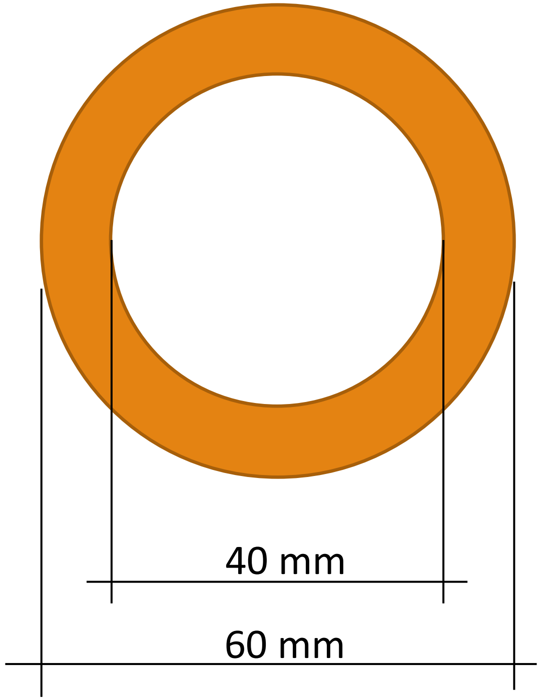
O gráfico abaixo ilustra os resultados obtidos em ensaios com colunas de diferentes índices de esbeltez:



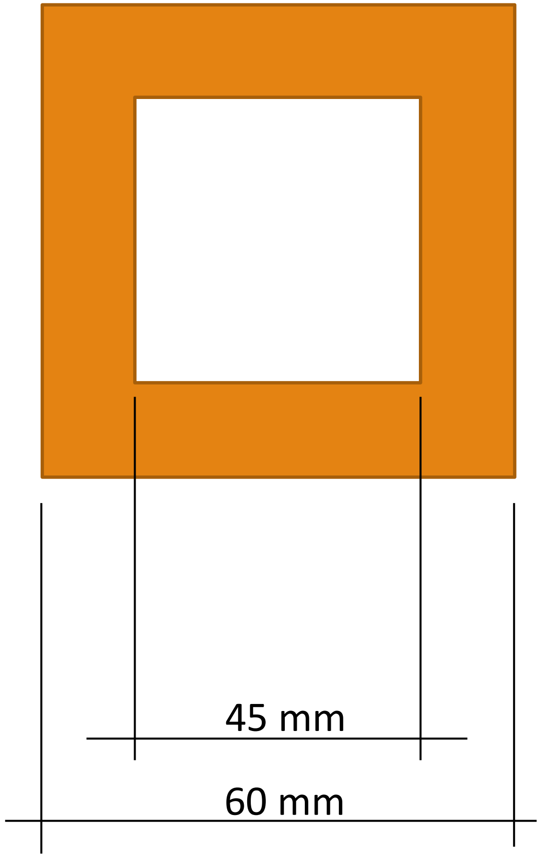
Flambagem

Exemplo 1) Sejam os dois perfis mostrados abaixo, ambos possuindo a mesma área de seção transversal. Qual deles suporta maior carga, antes de flambar? Considere L_{ef} = 3m, E = 105 GPa e σ_e = 70 MPa.

a)



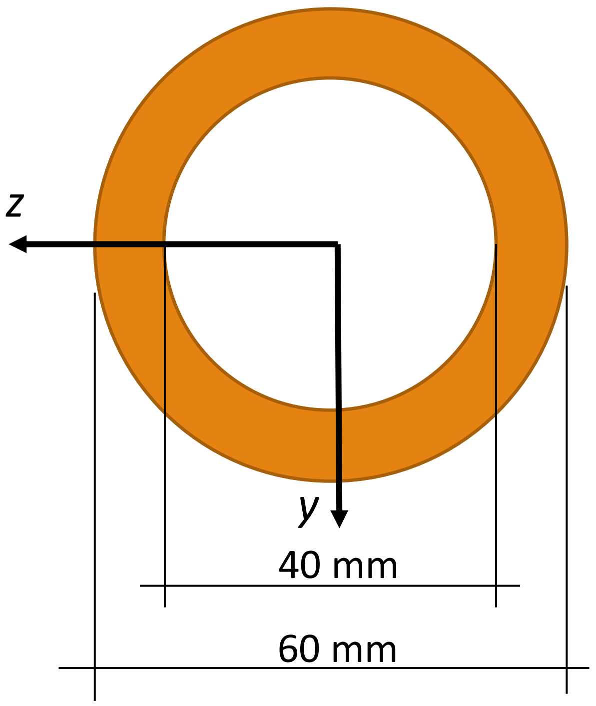
b)



Flambagem

Haja vista que todas as propriedades das barras são idênticas, aquela que ditará a capacidade de cada barra "resistir" à flambagem será o momento de inércia. Assim, para cada caso temos:

a)



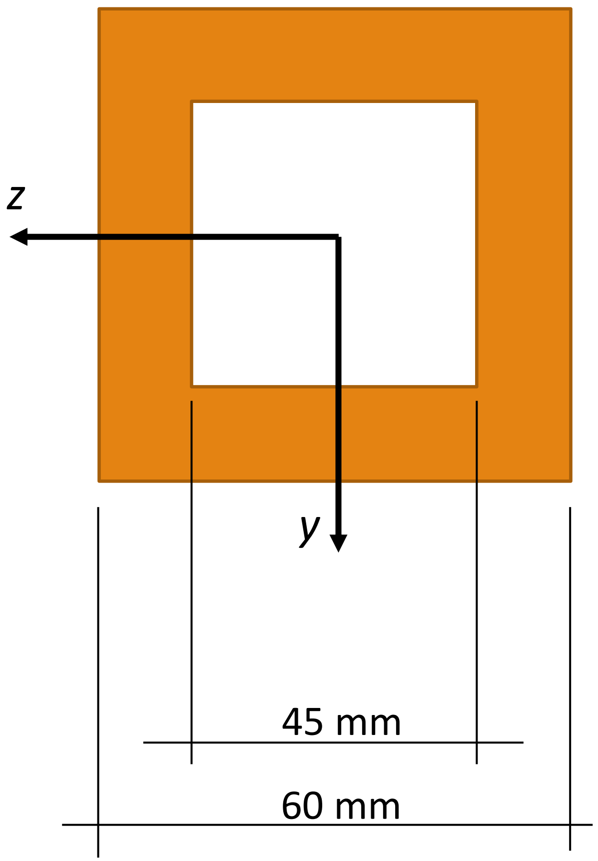
$$I_z = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi(60^4 - 40^4)}{64}$$

$= 5{,}105 \times 10^5\ mm^4$

Flambagem

Haja vista que todas as propriedades das barras são idênticas, aquela que ditará a capacidade de cada barra “resistir” à flambagem será o momento de inércia. Assim, para cada caso temos:

b)



$$I_z = I_y = \frac{(BH^3 - bh^3)}{12} = \frac{(60^4 - 40^4)}{12}$$

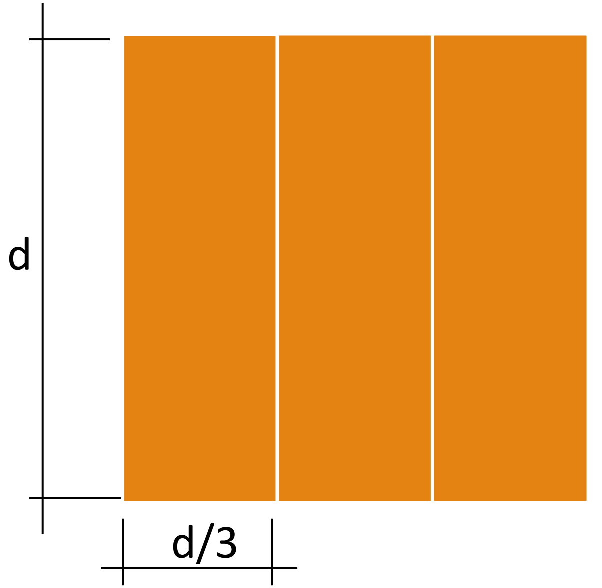
$$= 8{,}67 \text{ x } 105 \text{ mm}^4$$

<u>CONCLUSÃO</u>: Como a seção b) possui o maior momento de inércia, ela é a mais adequada.

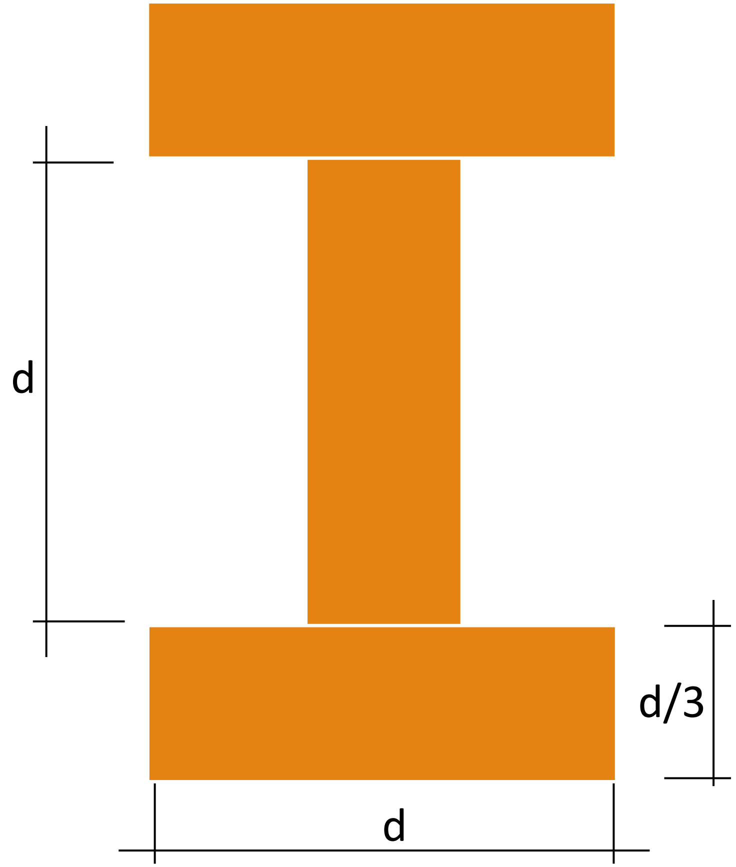
Flambagem

Exemplo 2) A seção transversal de uma coluna de comprimento efetivo L pode ser construída a partir do arranjo de 3 tábuas de mesmas dimensões, conforme mostram as figuras abaixo. Qual arranjo é mais eficiente em relação à ocorrência de flambagem?

a)



b)

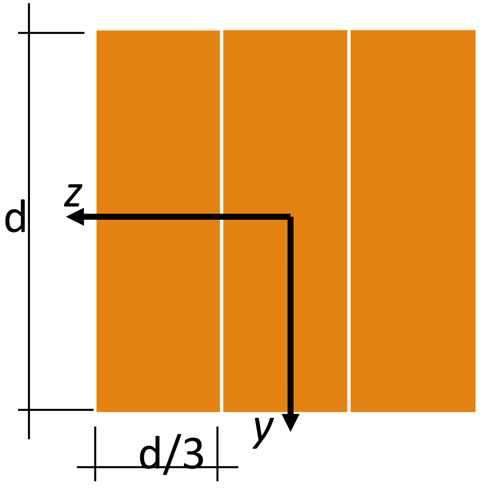


Flambagem

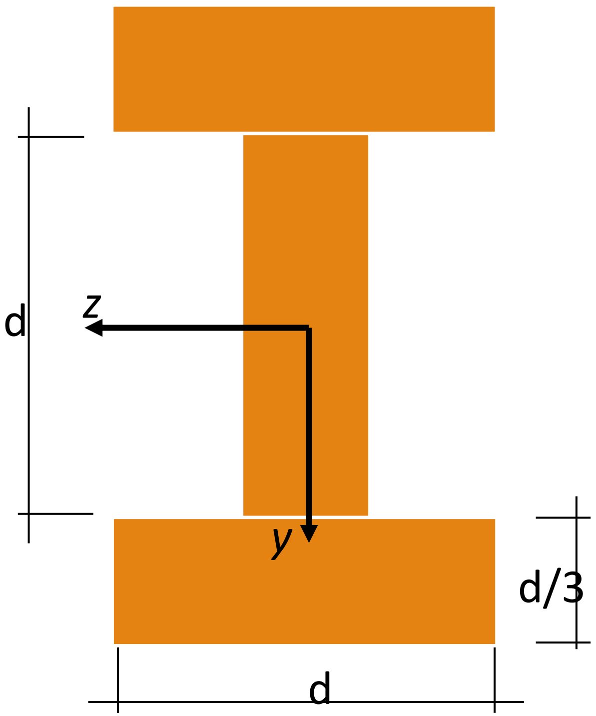
A premissa deste problema é a mesma da anterior. No entanto, deve-se tomar um cuidado extra, haja vista que, à primeira vista, a tendência é dizer que o arranjo b) é o mais eficiente, pois possui maior momento de inércia.

Acontece que, para qualquer situação que envolva escolha de perfis em problemas de flambagem devida a carregamento axial, devemos sempre buscar aquele que possua **o maior dentre os menores momentos de inércia**.

a)



b)



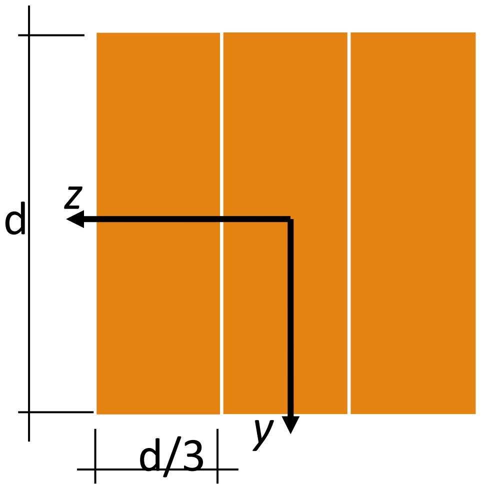
No caso deste problema, devemos comparar o momento de inércia $\boldsymbol{I_z}$ (ou I_y) do perfil a) com o momento de inércia $\boldsymbol{I_y}$ (e não I_z!) do perfil b).

O maior dentre estes dois índicará o perfil a ser escolhido.

Flambagem

Assim, temos:

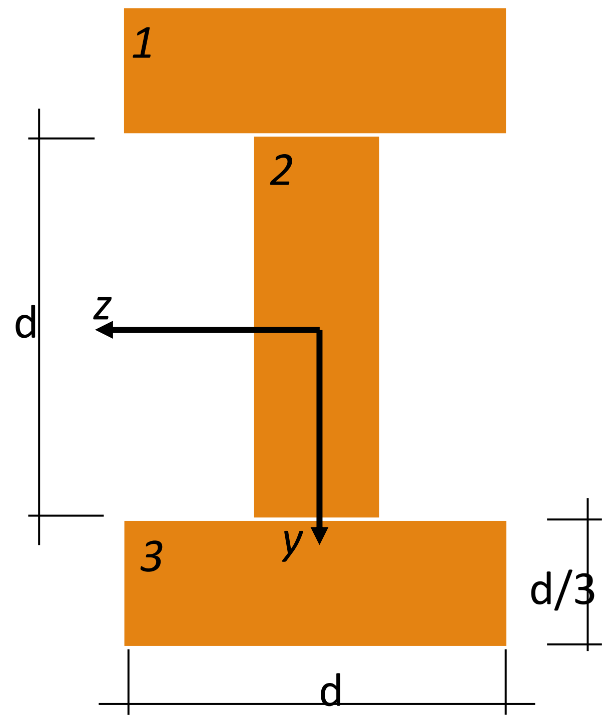
a)



+ *eficiente!*

$$I_z = I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{d^4}{12} = \boxed{0{,}08333 d^4}$$

b)



$$I_y = \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{h_2 b_2^3}{12} + \frac{h_3 b_3^3}{12} = \frac{(d/3)d^3}{12} + \frac{d(d/3)^3}{12} + \frac{(d/3)d^3}{12}$$

$$= 0{,}05864\ d^4$$

Flambagem

Carregamento Excêntrico

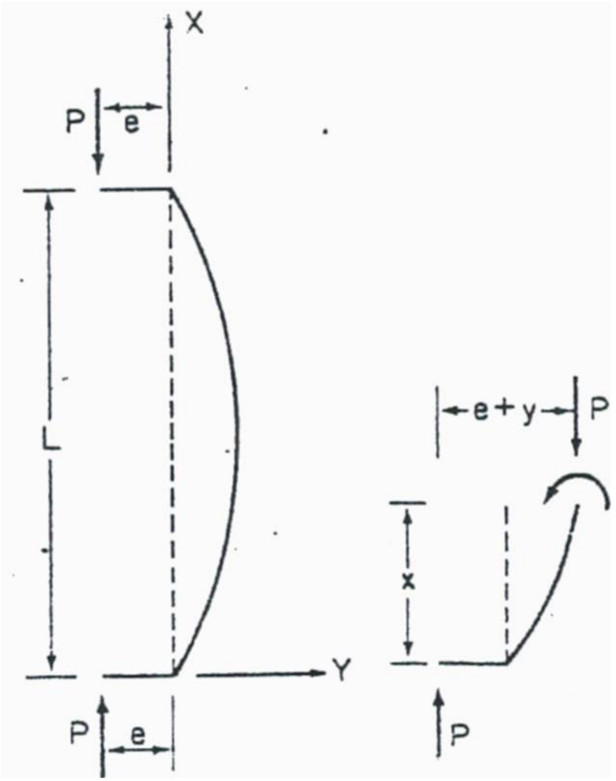
PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Flambagem

Carga excêntrica (Casos imperfeitos)

Considere-se uma coluna birrotulada, carregada fora do eixo, com uma excentricidade *e*. De forma similar ao caso anterior, a configuração de equilíbrio pode ser escrita como:



$$M(x) = P(e + y)$$

Da teoria da flexão, sabemos que a deflexão (flecha) é calculada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P(e+y)}{EI}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pe}{EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -k^2e \quad \text{onde} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

Flambagem

Carga excêntrica (Casos imperfeitos)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 e$$

A solução desta EDO é dada por: $y(x) = A\sin kx + B\cos kx - e$

Esta é a equação diferencial de equilíbrio para a coluna em estudo, sujeita às condições de contorno definidas a partir dos tipos de apoios.

$$\begin{cases} \text{Em } x = 0,\ y = 0 \\ \text{Em } x = L,\ y = 0 \end{cases}$$

A partir das condições de contorno, chega-se a equação da linha elástica de flambagem:

$$y(x) = e \cdot \left(\tan\frac{kL}{2} \cdot \sin kx + \cos kx - 1 \right)$$

Flambagem

Carga excêntrica (Casos imperfeitos)

É de maior interesse, porém, conhecer o valor da máxima deflexão que, neste caso, ocorre em x = L/2 (à meia altura):

$$\delta_{\max} = y(L/2) = e \cdot \left(\tan\frac{kL}{2} \cdot \sin\frac{kL}{2} + \cos\frac{kL}{2} - 1 \right) = e \cdot \left[\sec\left(\frac{kL}{2}\right) - 1 \right]$$

Substituindo $k = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$ na expressão acima, vem: $\delta_{\max} = e \cdot \left[\sec\left(\sqrt{\dfrac{P}{EI}} \dfrac{L}{2} \right) - 1 \right]$

É possível reescrever a equação acima em função da carga crítica de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow EI = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2} \quad \Rightarrow \quad \delta_{\max} = e \cdot \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{\frac{P_{cr} L^2}{\pi^2}}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad \Rightarrow \quad \delta_{\max} = e \cdot \left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

O que acontece se a carga externa P for igual à carga crítica? E, se P'=2P, δ'=2δ?

Flambagem

Máximo momento fletor

O máximo momento fletor também ocorre, neste caso, em x = L/2 (à meia altura) e pode ser calculado como:

$$M_{\max} = M(L/2) = P(e + \delta_{\max}) = Pe \cdot \left[\sec\left(k\frac{L}{2} \right) \right]$$

Substituindo $k = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$ na expressão acima, vem: $M_{\max} = Pe \cdot \left[\sec\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{P}{P_{cr}}} \right) \right]$

Flambagem

Máxima tensão normal

A máxima tensão normal também ocorre em x = L/2 (à meia altura) e pode ser calculada pela teoria da flexão composta:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{S} + \frac{M_{max} c}{I}$$

onde *c* é distância entre a fibra analisada e a LN da seção.

Substituindo o valor de M_{max} na expressão acima, tem-se:

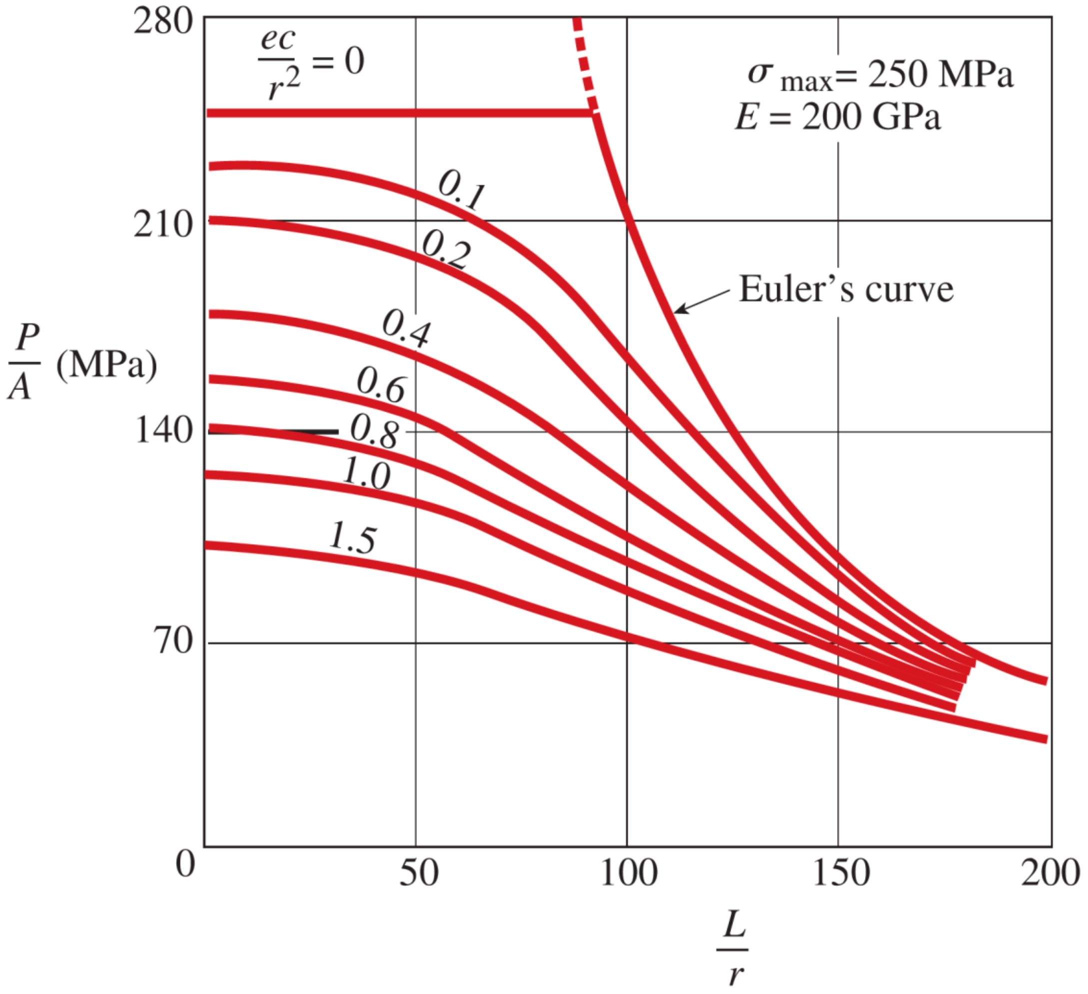
$$\sigma_{max} = \frac{P}{S}\left[1 + \frac{ec}{\rho^2} \sec\left(\frac{L}{2\rho}\sqrt{\frac{P}{ES}}\right)\right]$$

Equação da secante

Índice de excentricidade

Flambagem

O gráfico abaixo mostra as diversas situações representadas pela Equação da Secante.



Importante:

E se as condições de apoio forem diferentes do caso "rótula-rótula"?

Nesse caso, basta substituir a variável "L" por "L_e" nas equações.

Mas, atenção! Essa substituição é correta **somente** para a condição "**engaste-livre**".

Para a condição "**engaste-rótula**", uma nova EDO deverá ser formulada (com condições de contorno específicas)

Para a condição "**engaste-engaste**", estas análises simplesmente não fazem sentido! Por quê?

Flambagem

Exemplo 3) Uma carga P = 37 kN é aplicada excentricamente (e = 1,2 mm) a uma coluna de aço de 32 mm de diâmetro e 1,2 m de comprimento. Determine: a) a máxima deflexão lateral, b) a máxima tensão normal. Adotar E = 200 GPa.

a) Para determinar a máxima deflexão lateral, utilizaremos a expressão abaixo:

$$\delta_{\max} = e \cdot \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

Substituindo os valores e compatibilizando as unidades, vem:

$$\delta_{\max} = 1{,}2 \cdot \left[\sec\left(\sqrt{\frac{37 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \left(\frac{\pi (32)^4}{64} \right)}} \frac{1200}{2} \right) - 1 \right] = 1{,}2 \cdot [\sec(1{,}1375) - 1] = 1{,}2 \cdot \left[\frac{1}{\cos\underbrace{(1{,}1375)}_{\text{em radianos!}}} - 1 \right] = 1{,}2 \cdot (2{,}3817 - 1) = \boxed{1{,}658\ \text{mm}}$$

Flambagem

b) Para determinar a máxima tensão normal, temos duas possibilidades:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S}\left[1 + \frac{ec}{\rho^2}\sec\left(\frac{L}{2\rho}\sqrt{\frac{P}{ES}}\right)\right]$$

Eq. da Secante

ou

$$\begin{cases} M_{\max} = P(e + \delta_{\max}) \\ \sigma_{\max} = \dfrac{P}{S} + \dfrac{M_{\max} c}{I} \end{cases}$$

No caso deste exemplo, vamos utilizar a segunda abordagem, por ser a mais simples de se operar.

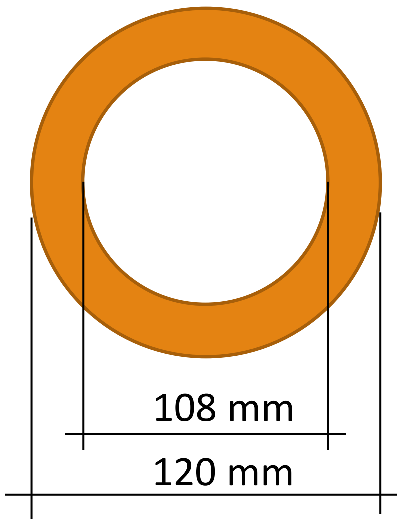
Substituindo os valores e compatibilizando as unidades, vem:

$$M_{\max} = 37 \cdot 10^3 (1{,}2 + 1{,}658) = 105.746 \text{ Nmm} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{37 \cdot 10^3}{\pi (32)^2 / 4} + \frac{105746 (32/2)}{\pi (32)^4 / 64} = \boxed{78{,}88 \text{MPa}}$$

Flambagem

Exemplo 4) Seja um tubo circular de latão de 2,8 m de comprimento, conforme mostrado abaixo. Sobre ele, aplica-se uma carga P com excentricidade e = 5 mm. Adotando E = 120 GPa, determine:

a) o valor da carga P de forma que a máxima deflexão lateral seja igual a 5 mm;
b) o valor da máxima tensão normal.



Flambagem

a) Para determinar o valor máximo da carga, utilizaremos a expressão abaixo:

$$\delta_{max} = e \cdot \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right]$$

Substituindo alguns valores e compatibilizando as unidades, vem:

$$5 = 5 \cdot \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \Rightarrow 1 = \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \Rightarrow \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) = 2 \Rightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Assim:

carga crítica de Euler

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{2\pi}{3L} \Rightarrow \frac{P}{EI} = \left(\frac{2\pi}{3L} \right)^2 \Rightarrow P = \frac{4}{9} \left(\frac{\pi^2 EI}{L^2} \right) = 235\,\mathrm{kN}$$

Flambagem

b) Novamente, para se determinar a máxima tensão normal, vamos utilizar a mesma abordagem utilizada no exemplo anterior.

$$M_{\max} = P(e+\delta_{\max})$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{S} + \frac{M_{\max} c}{I}$$

$$M_{\max} = 235 \cdot 10^3 (5+5) = 2{,}35 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{235 \cdot 10^3}{\pi(120^2 - 108^2)/4} + \frac{2{,}35 \cdot 10^6 (120/2)}{\pi(120^4 - 108^4)/64}$$

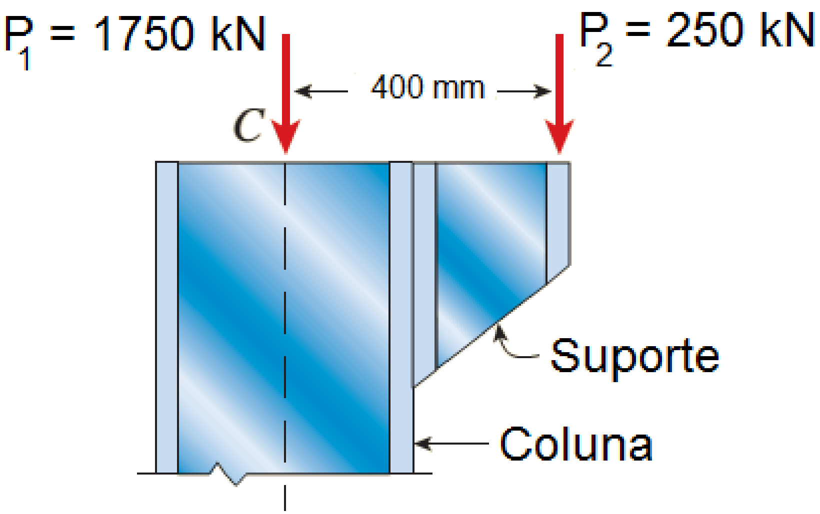
$$= \boxed{149{,}64 \text{ MPa}}$$

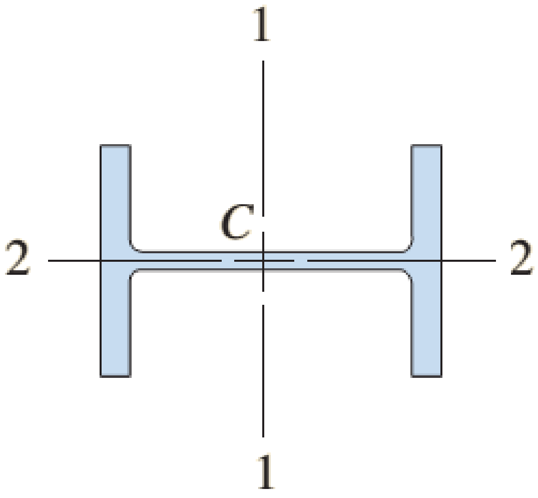
Flambagem

Exemplo 6) Uma coluna de aço (E = 210 GPa), cujo perfil é mostrado abaixo, está apoiada por pinos (birrotulada) nas extremidades e tem comprimento de 7,5 m. A coluna suporta um carregamento aplicado no centroide P1 = 1750 kN e um carregamento aplicado excentricamente P2 = 250 kN. Calcule a máxima tensão normal de compressão, utilizando:

a) a teoria da flexão composta;

b) a equação da secante.





<u>Dados do perfil:</u>

$I_1 = 486{,}89\text{x}10^6\ mm^3$

h = 362 mm

$\rho_1 = 157{,}81$ mm

A = 19550 mm²

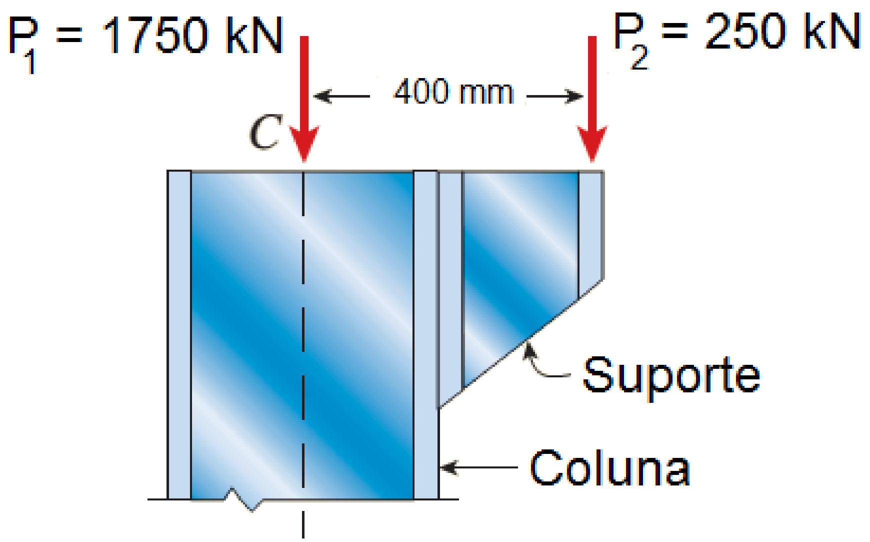
A flambagem ocorre sobre o eixo 1-1 da seção transversal e o carregamento excêntrico age no eixo 2-2 a uma distância de 400 mm do centroide da seção.

Flambagem

Tendo em vista que as duas cargas agem sobre a coluna, não é possível aplicar a equação da secante de forma direta, dada a relação não-linear entre carregamento e tensão.

Assim, precisaremos calcular uma única carga resultante e uma excentricidade "equivalente" que gerem o mesmo momento fletor em relação ao centroide da seção.

Analisando a figura ao lado, o momento fletor em relação a C é dado por:



M^C = 1750 [kN] x 0 [mm] + 250 [kN] x 400 [mm] = **100.000 [kN mm]**

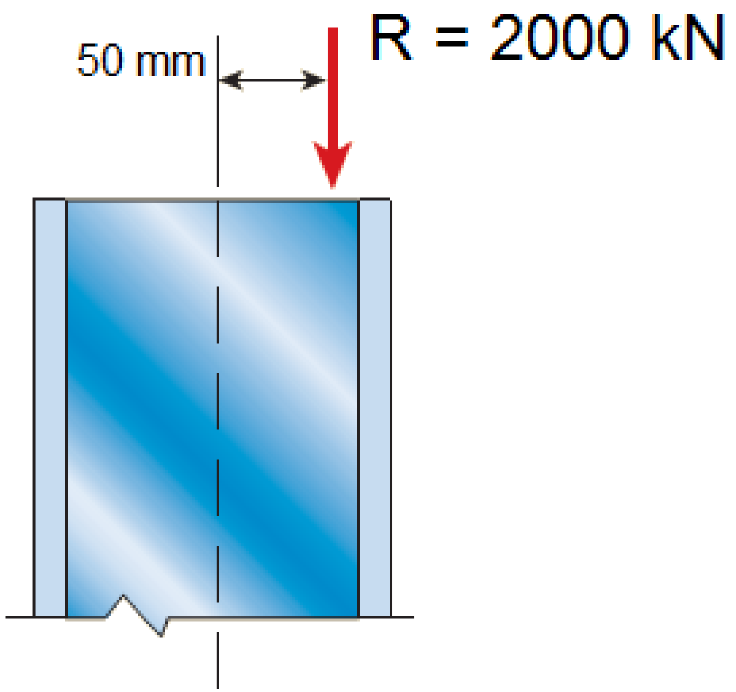
A força resultante é dada por $R = P_1 + P_2$ = **2000 kN**

Esta força resultante deverá gerar o mesmo momento em C, calculado anteriormente. Assim, a excentricidade "equivalente" é calculada como:
$e = M^C/R$ = 100000 [kNmm]/ 2000 [kN] = **50 mm.**

Flambagem

O sistema equivalente é mostrado na figura abaixo. A partir de agora, a análise será feita utilizando-se este sistema, apenas.

a) Pela teoria da flexão composta, tem-se que $\sigma = \frac{N}{S} + \frac{Mc}{I}$, onde *c* é a distância da LN à fibra em estudo (normalmente, a mais externa).



Substituindo os dados na expressão acima, vem:

$$\sigma = \frac{2000\times10^{3}[N]}{19550[mm^{2}]} + \frac{(100.000\times10^{3}[Nmm])\times(181[mm])}{486{,}89\times10^{6}[mm^{4}]} = \boxed{139{,}48\text{MPa}}$$

b) Pela Eq. da secante, tem-se:

$$\sigma = \frac{N}{S}\left[1 + \frac{ec}{\rho^{2}}\sec\left(\frac{L}{2\rho}\sqrt{\frac{N}{ES}}\right)\right]$$

Fazendo c = h/2 = 362/2 = 181 mm e substituindo os demais valores na expressão acima, vem:

$$\sigma = \frac{2000\times10^{3}}{19550}\left[1 + \frac{50\times181}{157{,}81^{2}}\sec\left(\frac{7500}{2\times157{,}81}\sqrt{\frac{2000\times10^{3}}{210\times10^{3}\times19550}}\right)\right] = \boxed{145{,}26\text{MPa}}$$

Flambagem

Perguntas:

1) Por que as tensões foram calculadas pensando-se na flambagem em torno do eixo 1-1, quando percebe-se, claramente, que o menor momento de inércia se dá em torno do eixo 2-2?

2) Por que ocorre essa diferença de valores entre as duas teorias? Qual é a mais adequada, neste caso?