Flexão Reta x Flexão Oblíqua

PROF. ALEXANDRE A. CURY

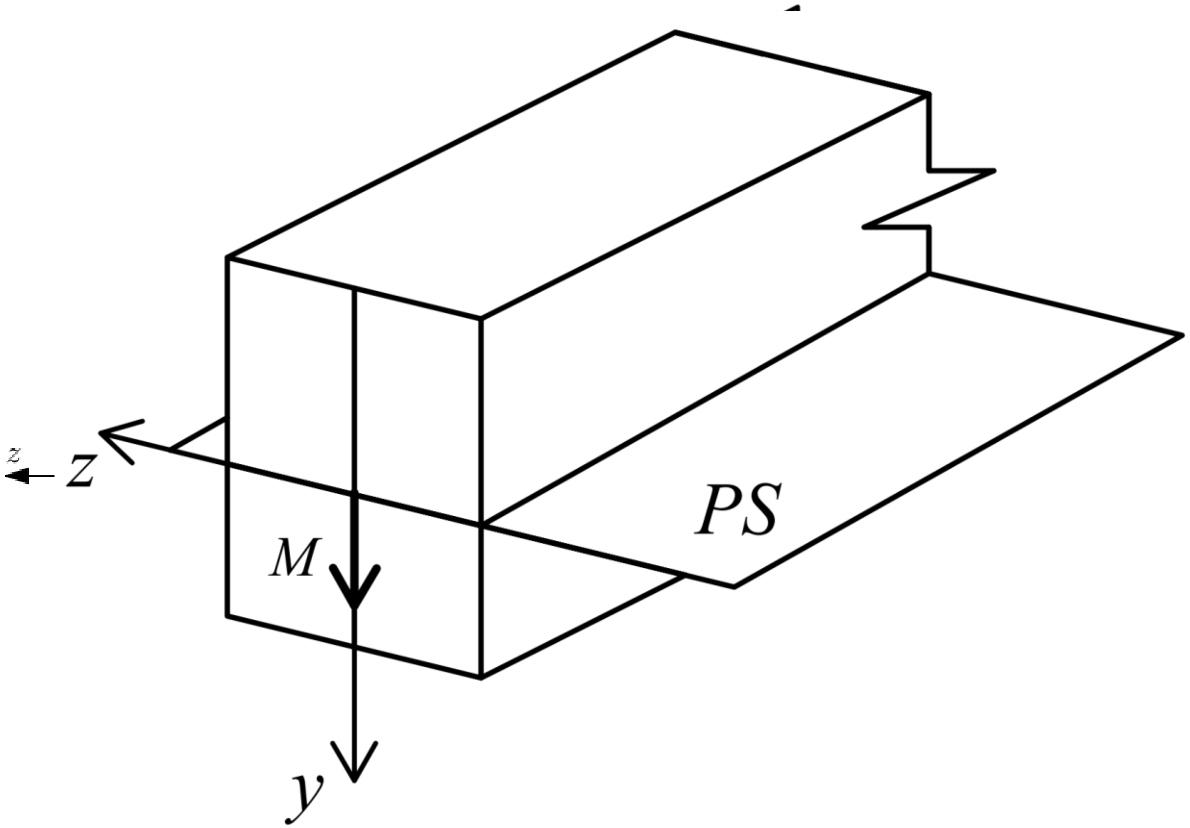
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

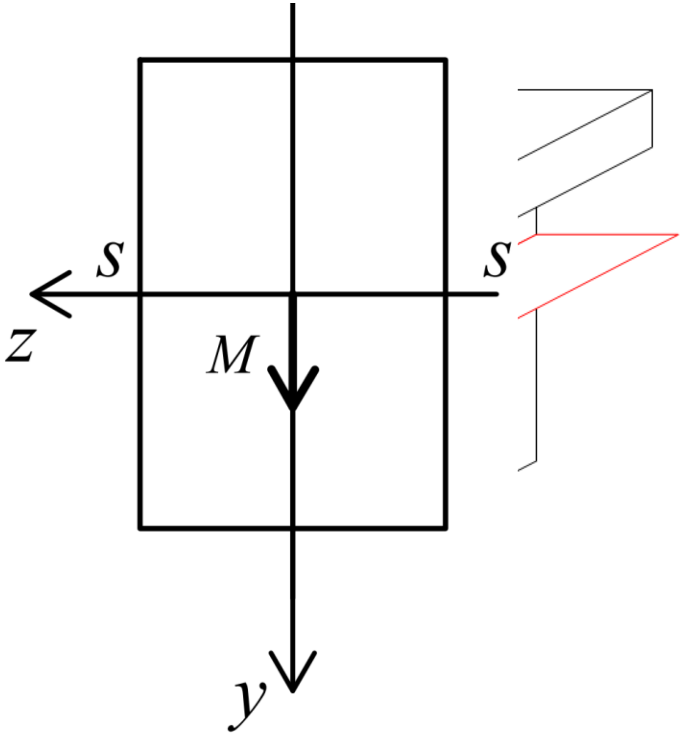
Flexão Reta

Flexão Reta

A flexão reta ocorre quando o plano ou eixo de solicitação **coincide** com **um dos eixos principais de inércia**.

Exemplos:

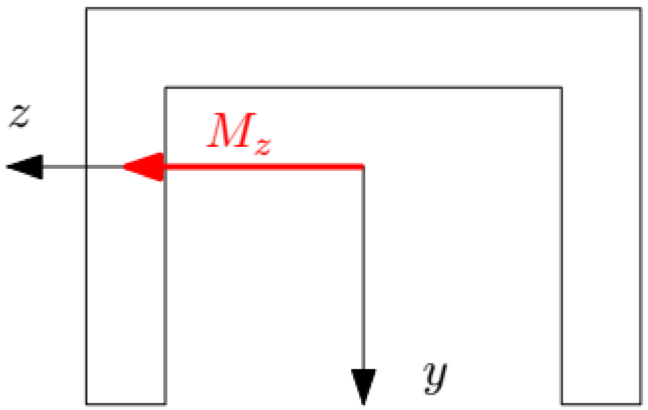




Flexão Reta

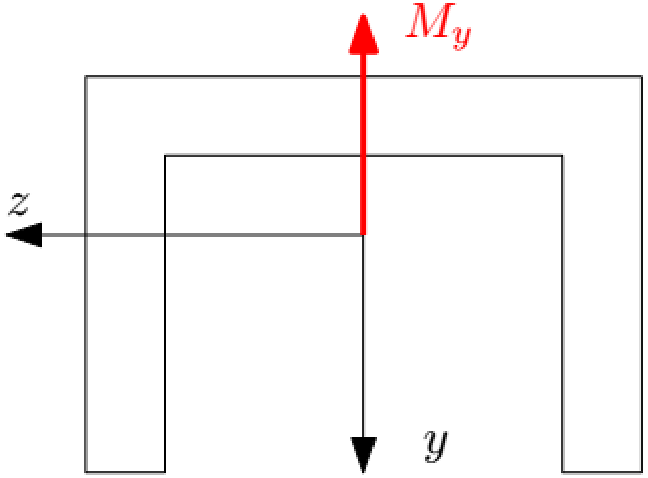
O cálculo das tensões normais na flexão reta é realizado de acordo com uma das expressões abaixo, a depender da direção do carregamento:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z}}$$



OU

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}}$$

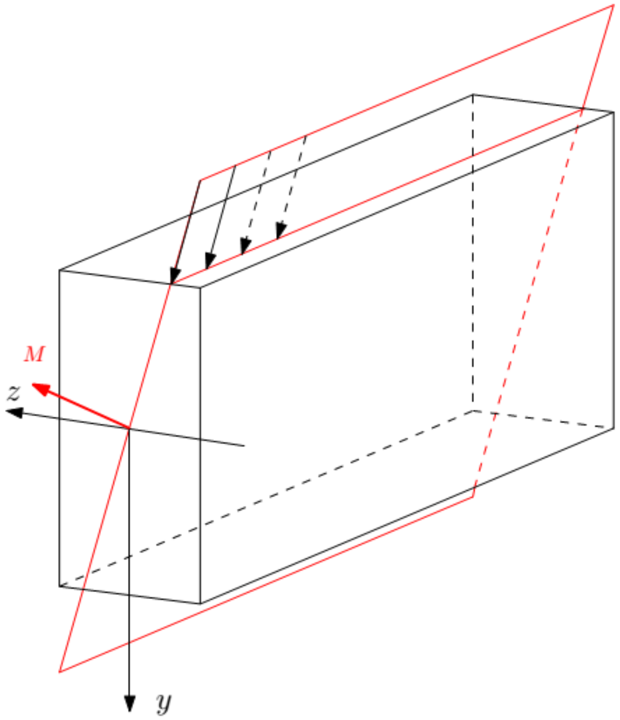


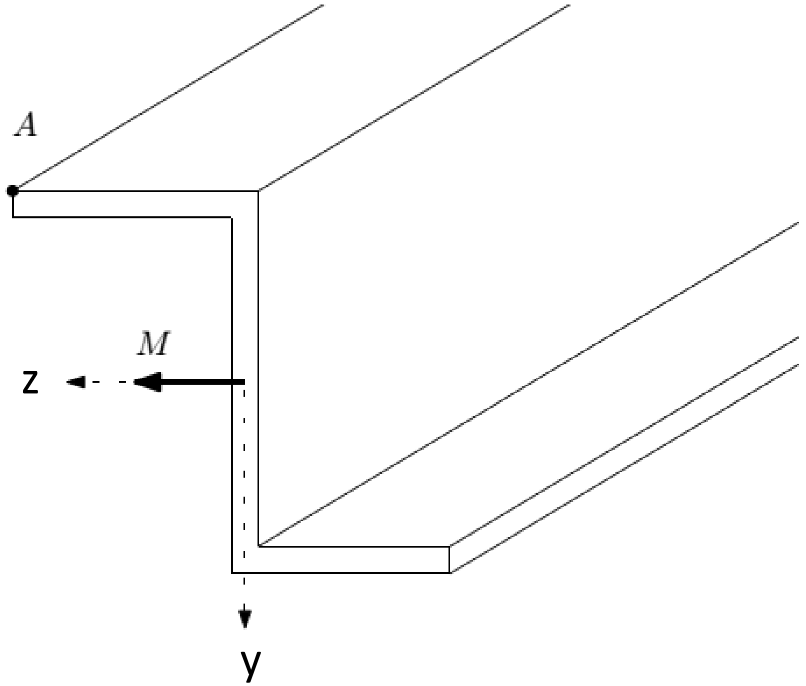
Flexão Oblíqua

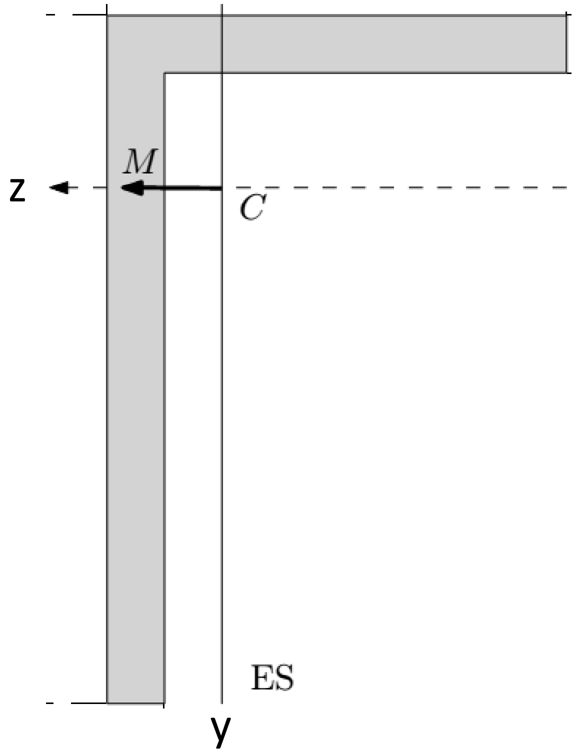
Flexão Oblíqua

Já a flexão oblíqua ocorre quando o plano ou eixo de solicitação **NÃO coincide** com **nenhum dos eixos principais de inércia**.

Exemplos:

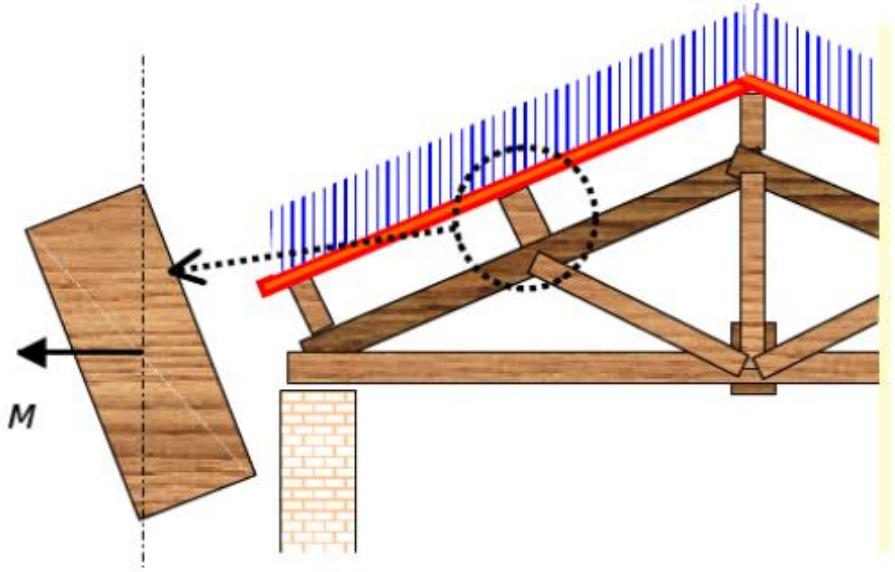




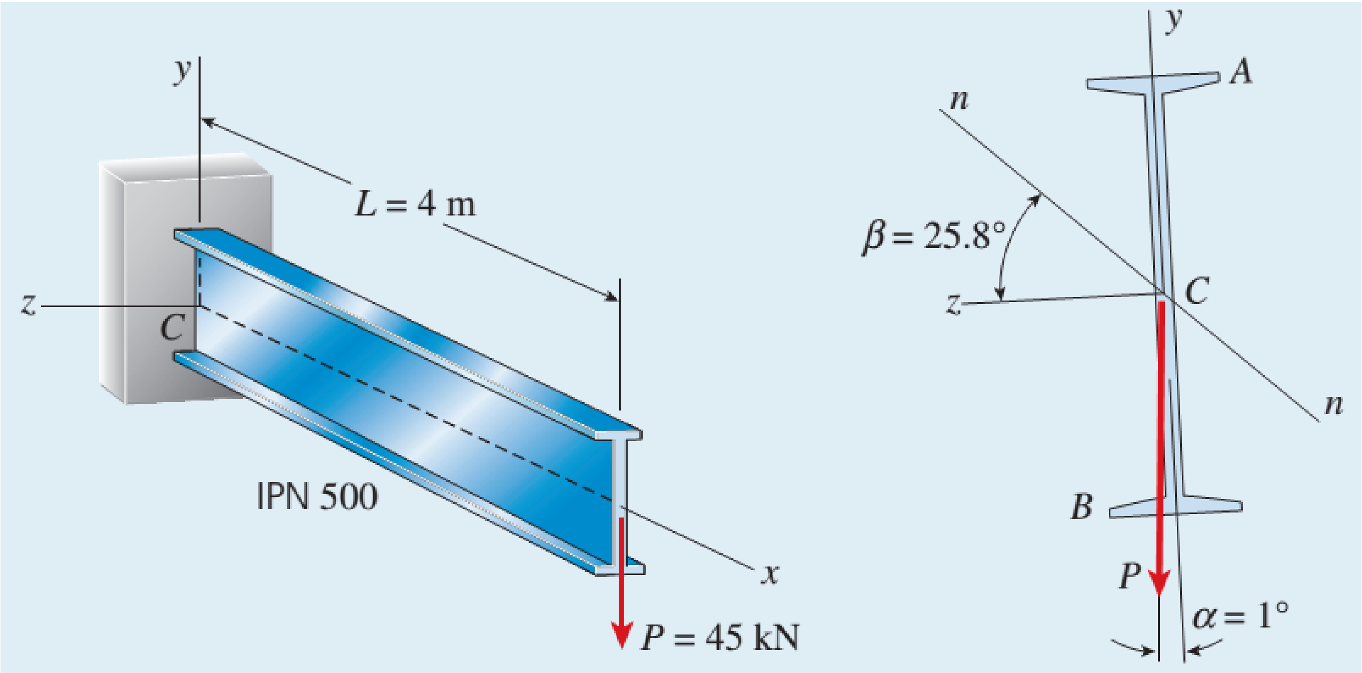


Flexão Oblíqua

<u>Ocorrências na prática</u>:



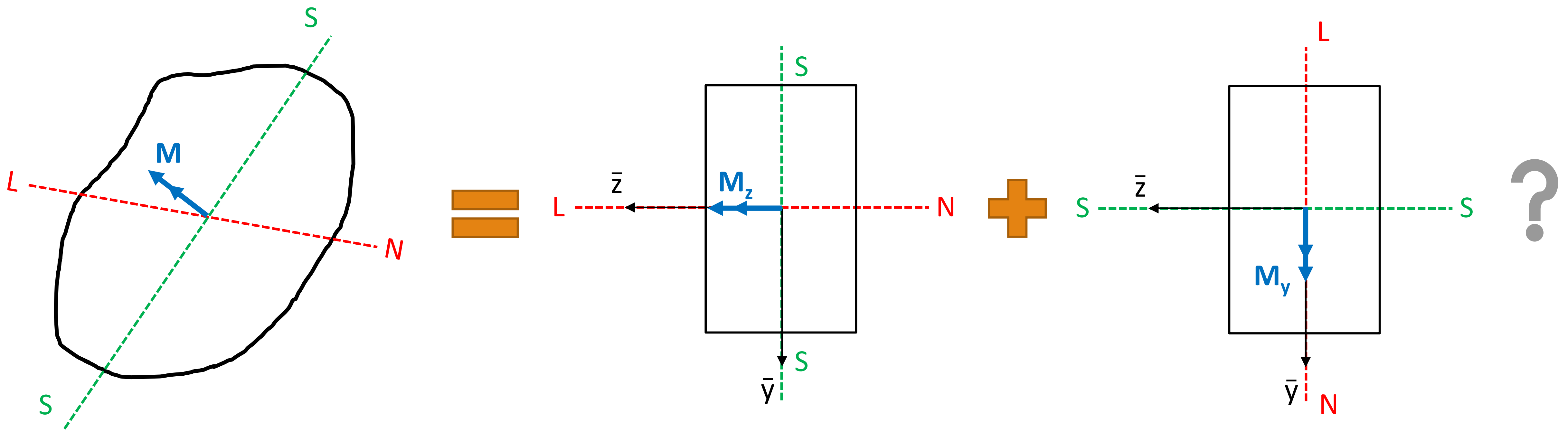
Carregamento nas "terças" de um telhado



Montagem incorreta de uma viga (viga montada com 1º de inclinação)

Flexão Oblíqua

Considere a situação mostrada abaixo. É possível resolver um problema de flexão oblíqua como uma superposição de duas flexões retas?



Sim, desde que $\bar{z}$ e $\bar{y}$ eixos sejam eixos principais de inércia!

Mas...e se não forem?

Flexão Oblíqua

Assumindo que as tensões normais se distribuem linearmente ao longo do plano z̄-ȳ da seção transversal da estrutura, podemos escrever:

$$\sigma_x = a\overline{y} + b\overline{z}$$

Para haver equilíbrio entre os esforços internos e externos (momentos fletores), devemos ter:

$$\begin{cases} M_{\overline{z}} = \displaystyle\int_S \sigma_x \overline{y}\, dS \\ M_{\overline{y}} = -\displaystyle\int_S \sigma_x \overline{z}\, dS \end{cases}$$

Flexão Oblíqua

Temos, assim, um sistema de duas equações e duas incógnitas (*a* e *b*) para resolver:

$$\begin{cases} I_{\overline{z}}a + I_{\overline{yz}}b = M_{\overline{z}} \\ -I_{\overline{zy}}a - I_{\overline{z}}b = M_{\overline{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{\overline{z}} & I_{\overline{yz}} \\ -I_{\overline{yz}} & -I_{\overline{y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{\overline{z}} \\ M_{\overline{y}} \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, chegamos às soluções:

$$a = \frac{M_{\overline{z}}I_{\overline{y}} + M_{\overline{y}}I_{\overline{zy}}}{I_{\overline{z}}I_{\overline{y}} - I_{\overline{yz}}^2} \qquad b = -\frac{M_{\overline{y}}I_{\overline{z}} + M_{\overline{z}}I_{\overline{zy}}}{I_{\overline{z}}I_{\overline{y}} - I_{\overline{yz}}^2}$$

Substituindo os valores de *a* e *b* na equação $\sigma_x = a\overline{y} + b\overline{z}$, vem:

Flexão Oblíqua

$$\sigma_x = \frac{(M_{\overline{z}} I_{\overline{y}} + M_{\overline{y}} I_{\overline{zy}})\overline{y} - (M_{\overline{y}} I_{\overline{z}} + M_{\overline{z}} I_{\overline{zy}})\overline{z}}{I_{\overline{y}} I_{\overline{z}} - I_{\overline{zy}}^2}$$

A expressão acima permite calcular o valor da tensão normal em qualquer ponto da seção transversal, sendo conhecidos os valores dos momentos de inércia, do produto de inércia e dos momentos fletores projetados sobre os eixos **baricêntricos** (não necessariamente principais de inércia!!)

OBS: As coordenadas dos pontos analisados também são descritas em relação aos eixos baricêntricos!

Flexão Oblíqua

E como determinar a posição da Linha Neutra?

Simples! Basta igualar a expressão abaixo a zero:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\overline{z}} I_{\overline{y}} + M_{\overline{y}} I_{\overline{zy}})\overline{y} - (M_{\overline{y}} I_{\overline{z}} + M_{\overline{z}} I_{\overline{zy}})\overline{z}}{I_{\overline{y}} I_{\overline{z}} - I_{\overline{zy}}^2}$$

e escrever a equação da reta em função de ȳ e z̄:

$$\overline{y} = \underbrace{\left(\frac{M_{\overline{y}} I_{\overline{z}} + M_{\overline{z}} I_{\overline{zy}}}{M_{\overline{z}} I_{\overline{y}} + M_{\overline{y}} I_{\overline{zy}}} \right)}_{\boxed{\text{coeficiente angular da LN}}} \overline{z}$$

Flexão Oblíqua

<u>Caso particular</u>: Caso os eixos baricêntricos sejam, também, os principais de inércia, a expressão anterior simplifica-se para:

$$\sigma_x = \left(\frac{M_z}{I_z}\right) y - \left(\frac{M_y}{I_y}\right) z$$

Isto acontece pois o produto de inércia da seção em relação aos eixos principais de inércia é sempre **nulo**.

E por que o sinal negativo da 2ª parcela?

Devido à convenção dos eixos y e z que adotamos neste curso...

Flexão Oblíqua

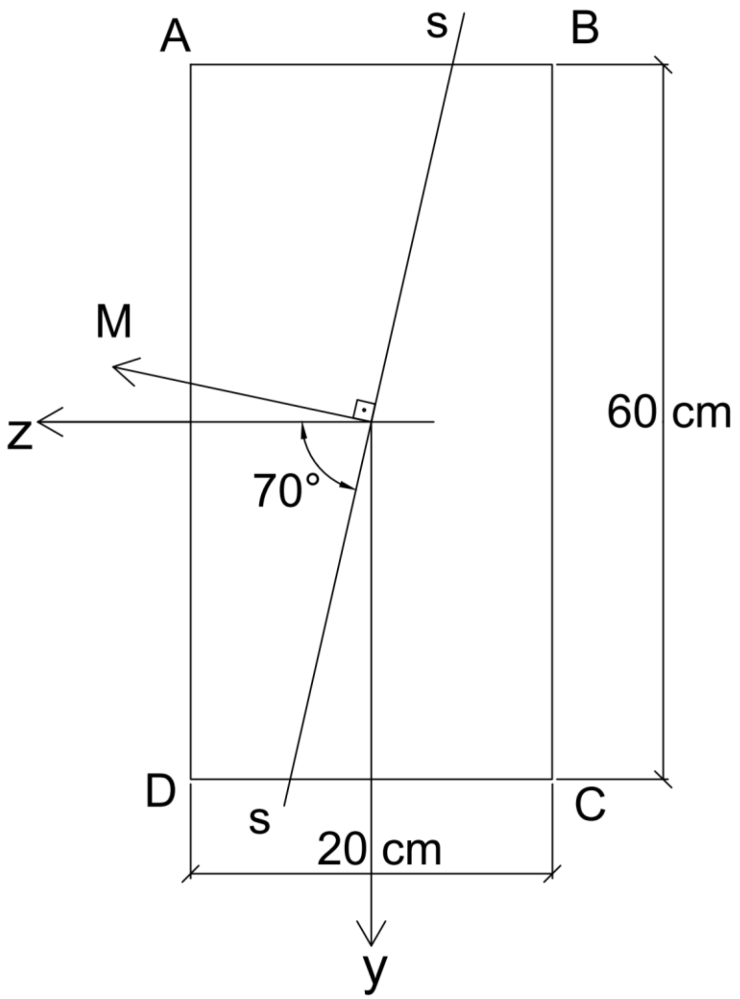
<u>Caso particular</u>: Para determinar a posição da LN basta, novamente, igualar a expressão abaixo a zero.

$$\sigma_x = \left(\frac{M_z}{I_z}\right) y - \left(\frac{M_y}{I_y}\right) z \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\left(\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y}\right)}_{\boxed{\text{coeficiente angular da LN}}} z$$

<u>Importante</u>: Nas equações acima, I_z e I_y são os momentos principais de inércia!

Flexão Oblíqua

<u>**Exemplo 1**</u>**:** Para a seção ilustrada na figura abaixo, sendo dados M = 150 kNm e α = 70º, determine:



a) A posição da linha neutra (*nn*);

b) As tensões nos vértices da seção e trace o diagrama de tensões referenciados à *nn*.

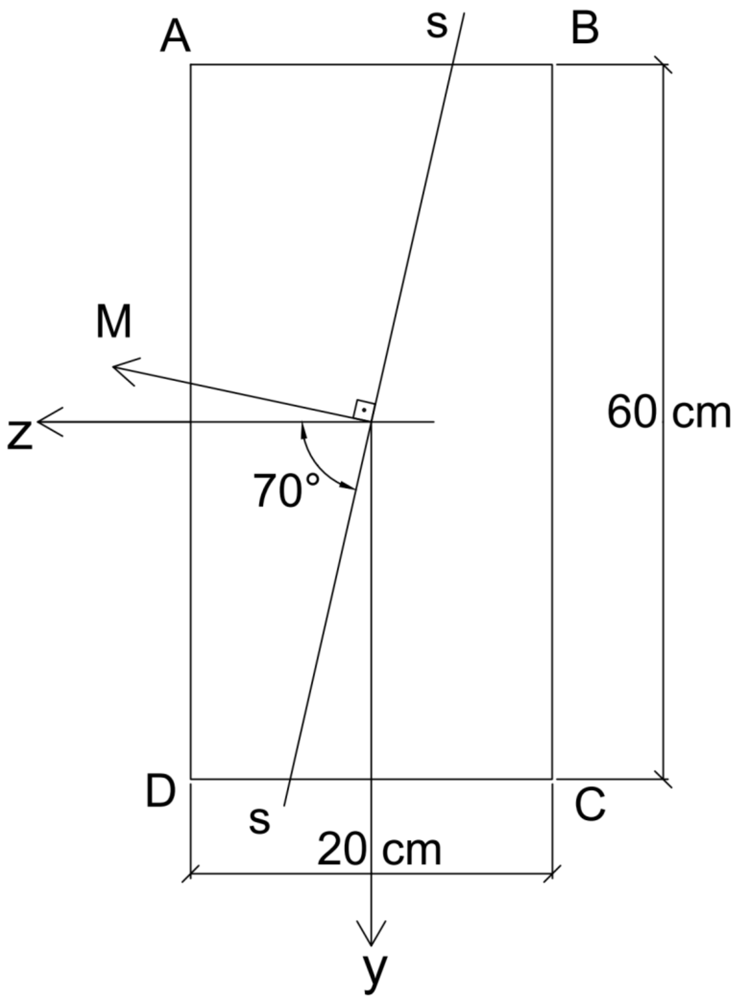
Flexão Oblíqua

a) Haja vista que os eixos *z*-*y* são eixos principais de inércia (pois são eixos de simetria), a posição da linha neutra pode ser obtida zerando-se a equação:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y}$$

Para tanto, precisamos calcular as projeções dos momentos fletores sobre *z* e *y*, além dos momentos de inércia.

Para facilitar as contas, é recomendável manter as unidades de força em [N] e as de dimensão em [mm]. Com isso, teremos as tensões na já usual unidade [MPa].



Flexão Oblíqua

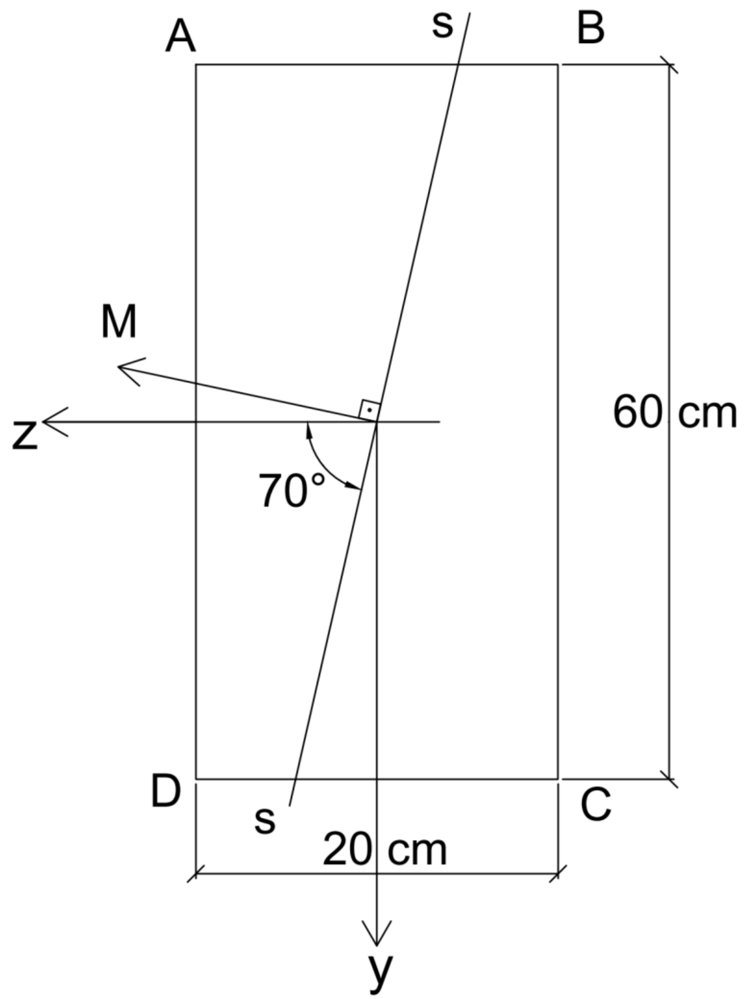
Assim, temos:

$$\begin{cases} M_z = M\cos(-20^o) \;\; = 140,95 \times 10^6 \text{ Nmm} \\ M_y = M\,\text{sen}(-20^o) = -51,30 \times 10^6 \text{ Nmm} \end{cases}$$

Note que a marcação dos ângulos é **POSITIVA** no sentido anti-horário e **NEGATIVA** no sentido horário.

Os momentos de inércia em relação aos eixos *z* e *y* são:

$$\begin{cases} I_z = \dfrac{bh^3}{12} = \dfrac{200 \times 600^3}{12} = 3600 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_y = \dfrac{hb^3}{12} = \dfrac{600 \times 200^3}{12} = 400 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$



Flexão Oblíqua

Substituindo-se os valores na equação de σ_x mostrada anteriormente, vem:

$$\sigma_x = 0,03915y + 0,1282z$$

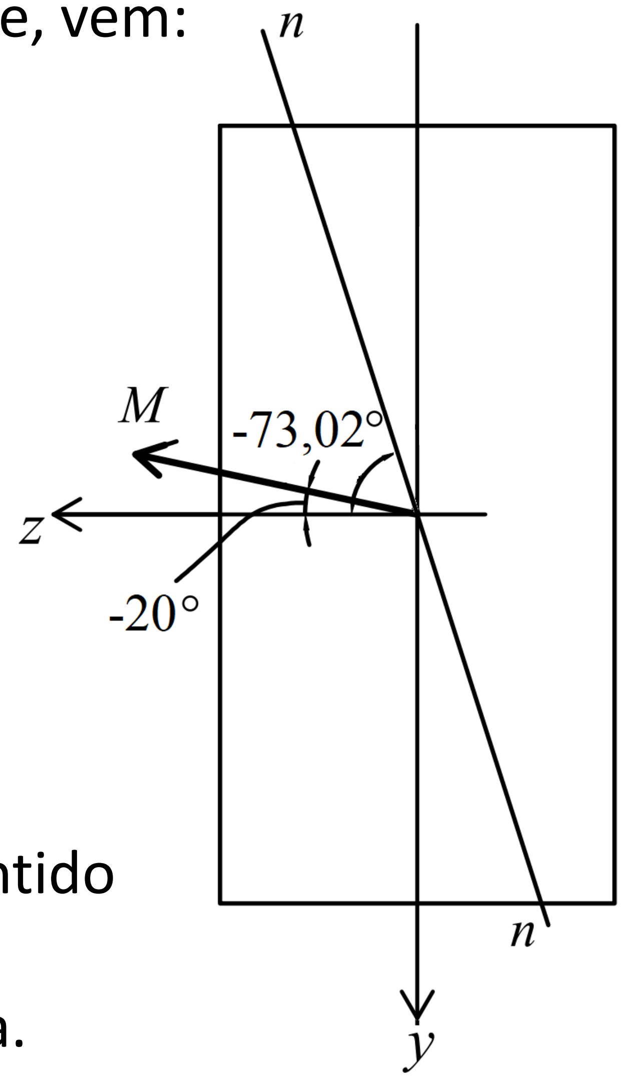
A equação da linha neutra é obtida fazendo-se $\sigma_x = 0$, isto é:

$$y + 3{,}725z = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = -3{,}725z$$

O coeficiente angular da reta é, portanto, arctan(-3,725) = **-73,02º**.

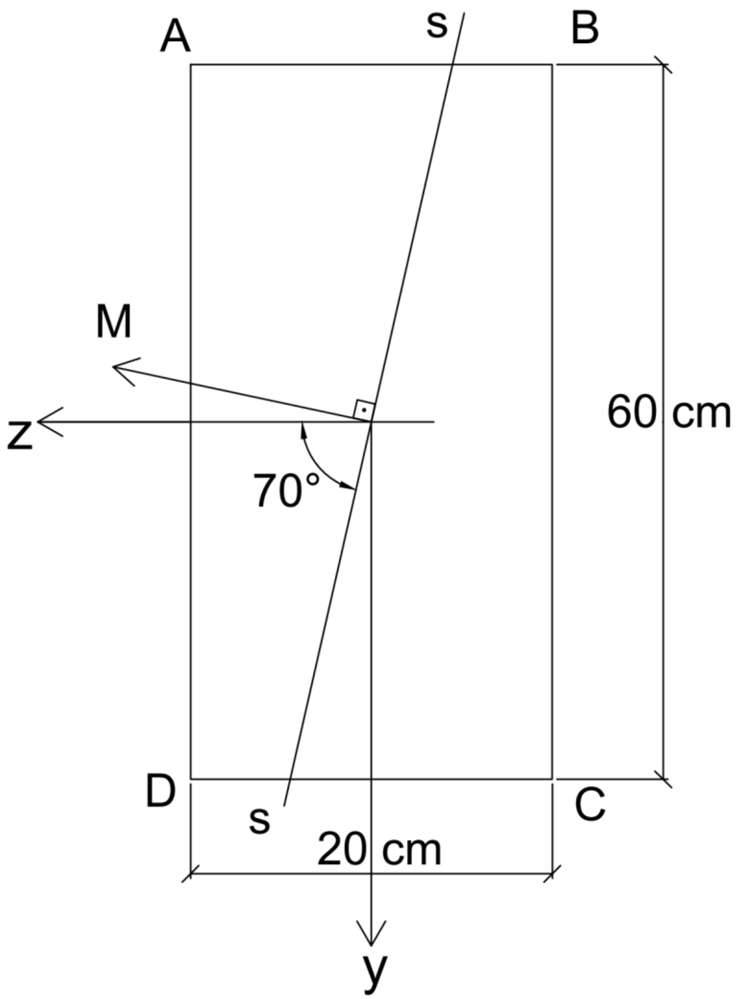
Ou seja:

- a linha neutra está a -73,02º a partir do eixo z, marcada no sentido horário, e
- o vetor momento fletor resultante *M* a -20º, como mostra a figura.



Flexão Oblíqua

b) As tensões normais nos vértices da seção são calculadas substituindo-se as coordenadas dos pontos A, B, C e D na expressão abaixo:



$$\sigma_x = 0,03915y + 0,1282z$$

As coordenadas dos pontos, em relação ao referencial *z-y* adotado, são:

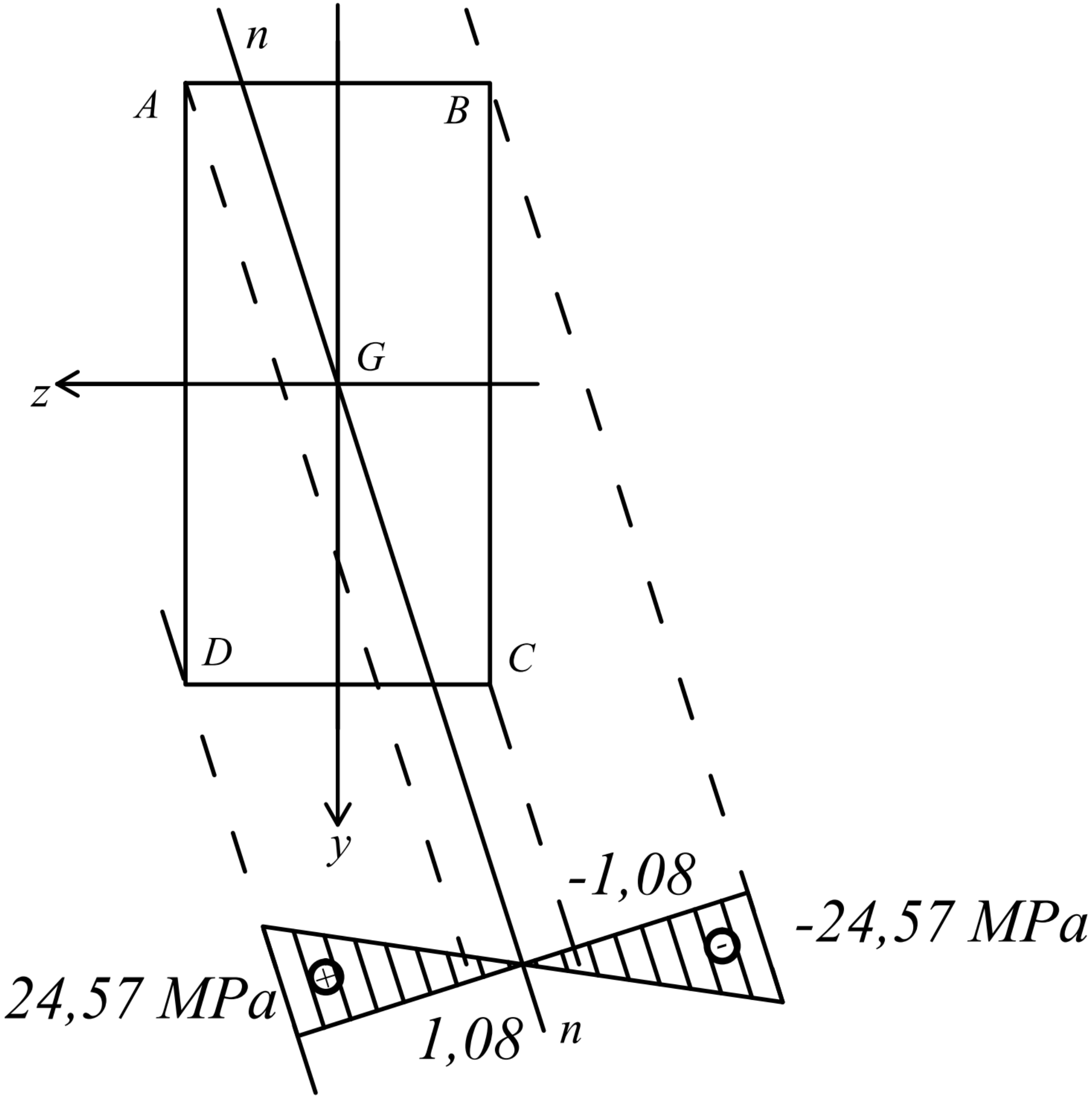
$$\begin{array}{lllll} A: & (y = -300 & ; & z = 100) \\ B: & (y = -300 & ; & z = -100) \\ C: & (y = 300 & ; & z = -100) \\ D: & (y = 300 & ; & z = 100) \end{array}$$

Flexão Oblíqua

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_x^A = 1,08\,\text{MPa} \\ \sigma_x^B = -24,57\,\text{MPa} \\ \sigma_x^C = -1,08\,\text{MPa} \\ \sigma_x^D = 24,57\,\text{MPa} \end{cases}$$

De posse desses valores, o diagrama de tensões é traçado como mostra a figura:

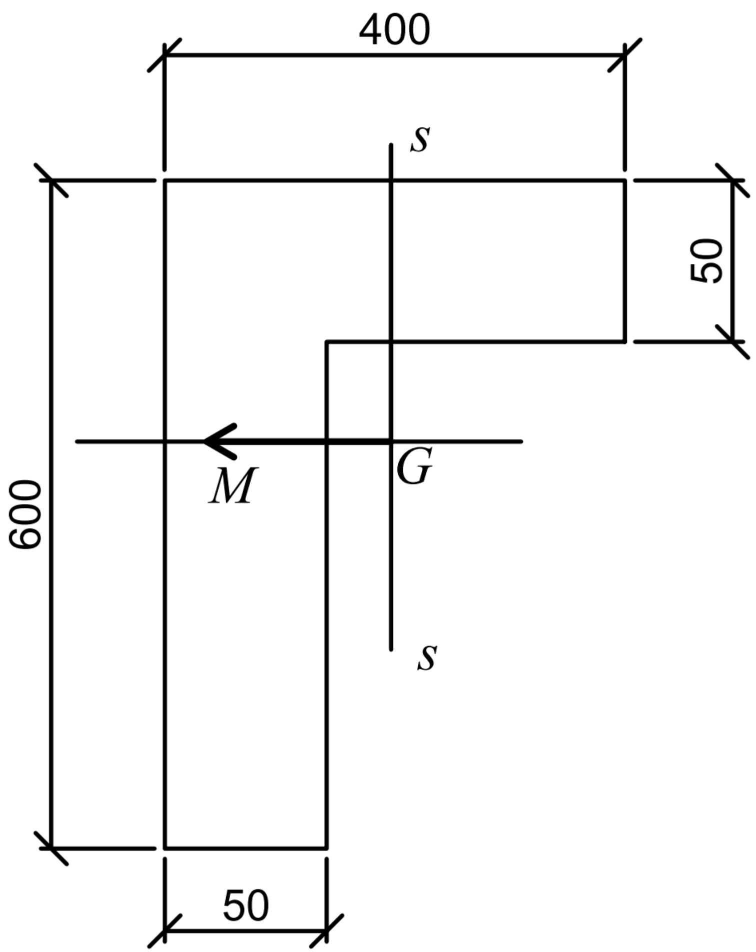


Flexão Oblíqua

Exemplo 2: Para o perfil *L* (dimensões em mm) mostrado na figura abaixo e considerando *M* = 50kNm, determine:

a) a posição da linha neutra*;*

b) as tensões normais máximas.

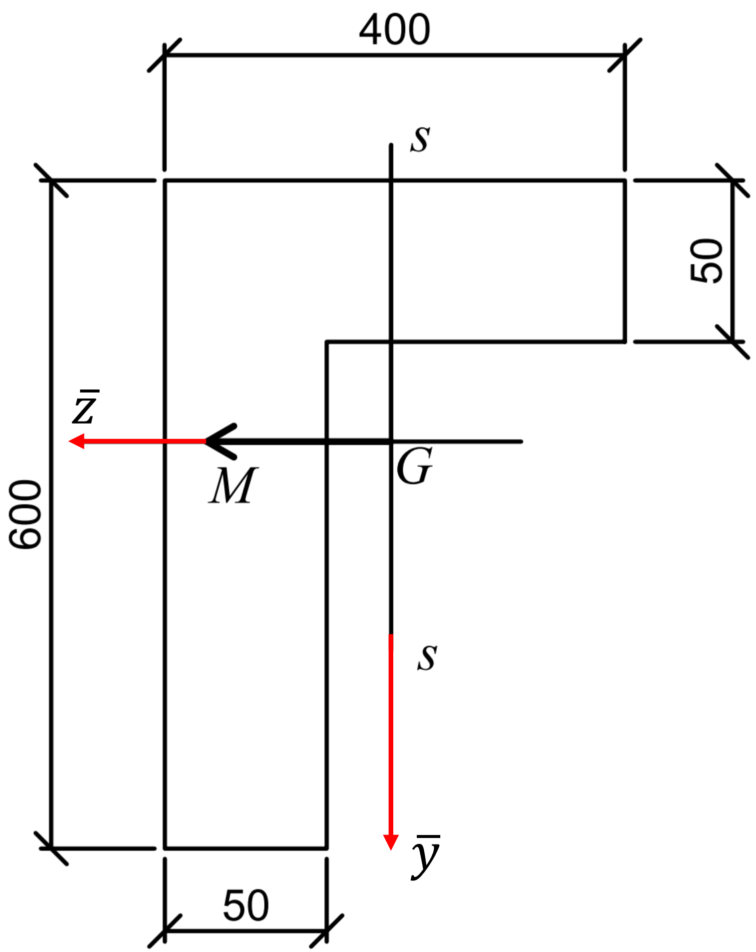


Flexão Oblíqua

a) Diferentemente do exemplo anterior, os eixos $\bar{z}$-$\bar{y}$ marcados **NÃO** são eixos principais de inércia (pois nenhum deles é eixo de simetria).

Assim, a posição da linha neutra pode ser mais facilmente obtida zerando-se a equação:

$$\sigma_x = \frac{(M_{\overline{z}} I_{\overline{y}} + M_{\overline{y}} I_{\overline{zy}})\overline{y} - (M_{\overline{y}} I_{\overline{z}} + M_{\overline{z}} I_{\overline{zy}})\overline{z}}{I_{\overline{y}} I_{\overline{z}} - I_{\overline{zy}}^2}$$



Para tanto, precisamos calcular as projeções dos momentos fletores sobre $\bar{z}$ e $\bar{y}$, além dos momentos de inércia e produto de inércia em relação a estes eixos baricêntricos.

Flexão Oblíqua

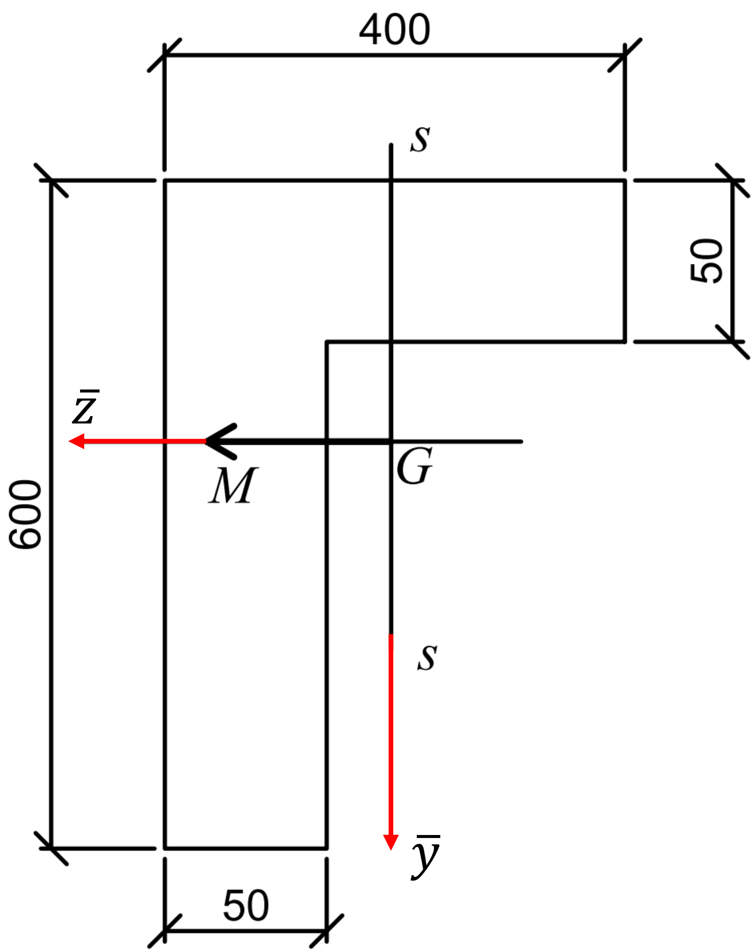
Assim, temos:

$$\begin{cases} M_{\bar{z}} = 50 \times 10^6 \ \text{Nmm} \\ M_{\bar{y}} = 0 \end{cases}$$

As propriedades geométrica da seção são:

$$\begin{cases} I_{\bar{z}} = 17,395 \times 10^8 \ \text{mm}^4 \\ I_{\bar{y}} = 6,27 \times 10^8 \ \text{mm}^4 \\ I_{\overline{zy}} = 6,08 \times 10^8 \ \text{mm}^4 \end{cases}$$

Note que o produto de inércia é positivo, como esperado.



Flexão Oblíqua

Substituindo-se os valores na equação σ_x mostrada anteriormente, vem:

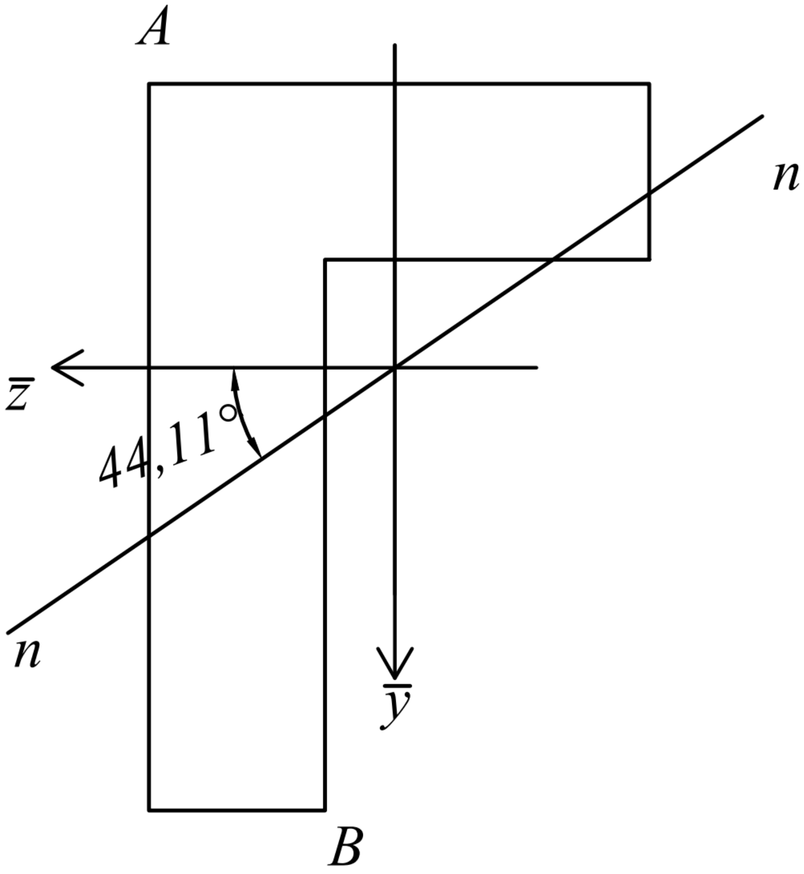
$$\sigma_x = 0,0435\bar{y} - 0,0422\bar{z}$$

A equação da linha neutra é obtida fazendo-se $\sigma_x = 0$, isto é:

$$0,0435\bar{y} - 0,0422\bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0,97\bar{z}$$

O coeficiente angular da reta é, portanto, arctan(0,97) = **44,11º**.

Ou seja, a linha neutra está a 44,11º a partir do eixo $\bar{z}$, marcada no sentido anti-horário, como mostra a figura ao lado.



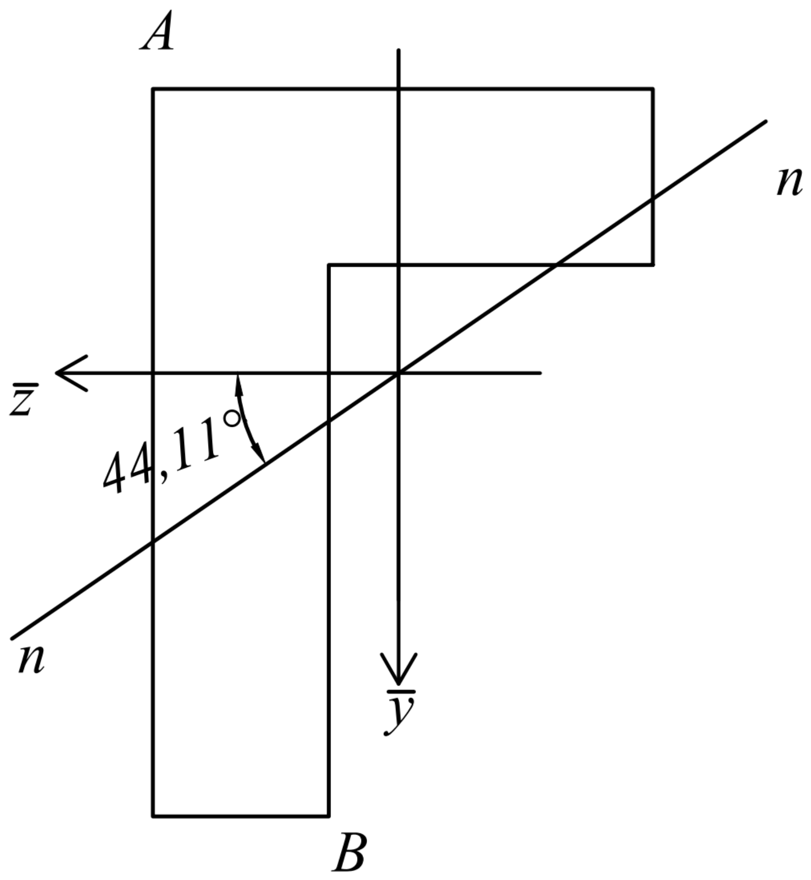
Flexão Oblíqua

b) As tensões normais máximas irão ocorrer, por inspeção, nos pontos *A* e *B* da seção, pois são aqueles mais afastados da linha neutra. Assim, basta substituir as coordenadas destes pontos na expressão abaixo:

$$\sigma_x = 0,0435\bar{y} - 0,0422\bar{z}$$

As coordenadas destes pontos em relação ao referencial $\bar{z}$ e $\bar{y}$ adotado são:

$$\begin{aligned} A &: z_A = 98,68 \text{ mm} \qquad && y_A = -198,68 \text{ mm} \\ B &: z_B = 48,68 \text{ mm} \qquad && y_B = 401,32 \text{ mm} \end{aligned}$$

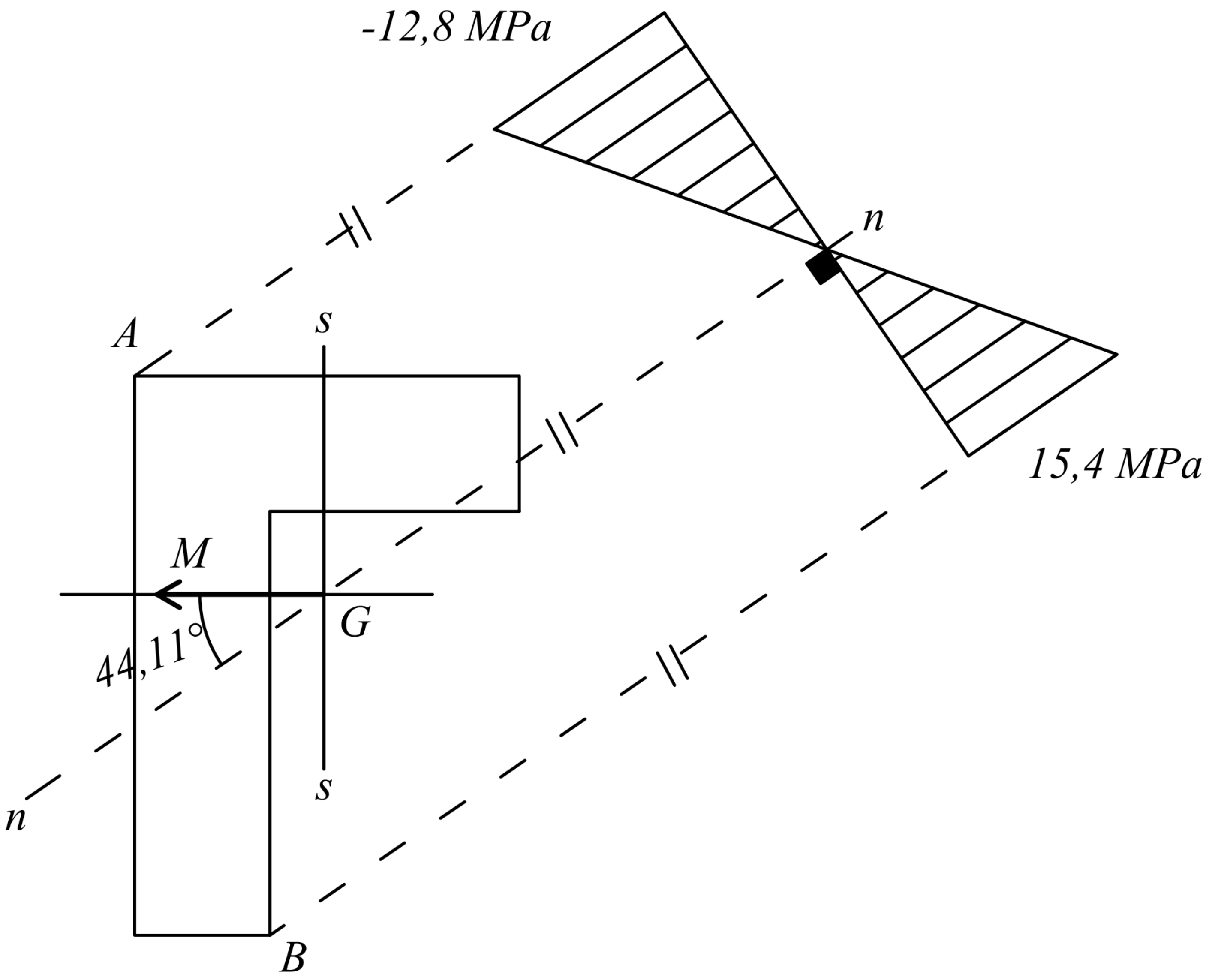


Flexão Oblíqua

Assim, tem-se:

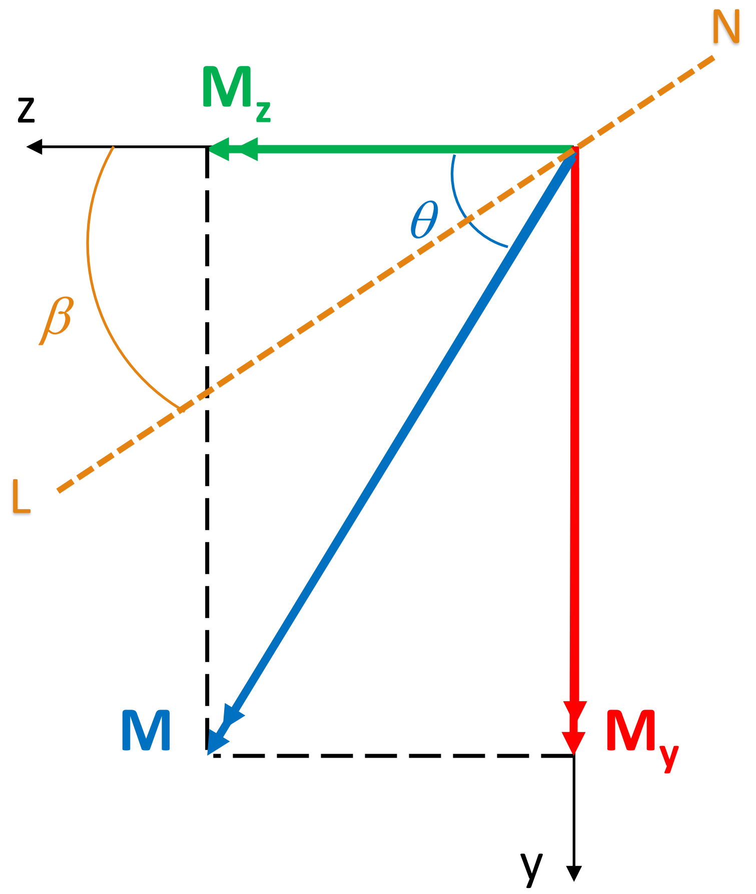
$$\begin{cases} \sigma_A = -12,80 \text{ MPa} \\ \sigma_B = 15,40 \text{ MPa} \end{cases}$$

De posse desses valores, o diagrama de tensões é traçado como mostra a figura ao lado:



Flexão Oblíqua – Conteúdo Extra

Vejamos uma outra forma de determinar a posição da LN, baseado no referencial <u>principal</u>:



$$y = \left(\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \right) z \qquad \tan\beta = \left(\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \right)$$

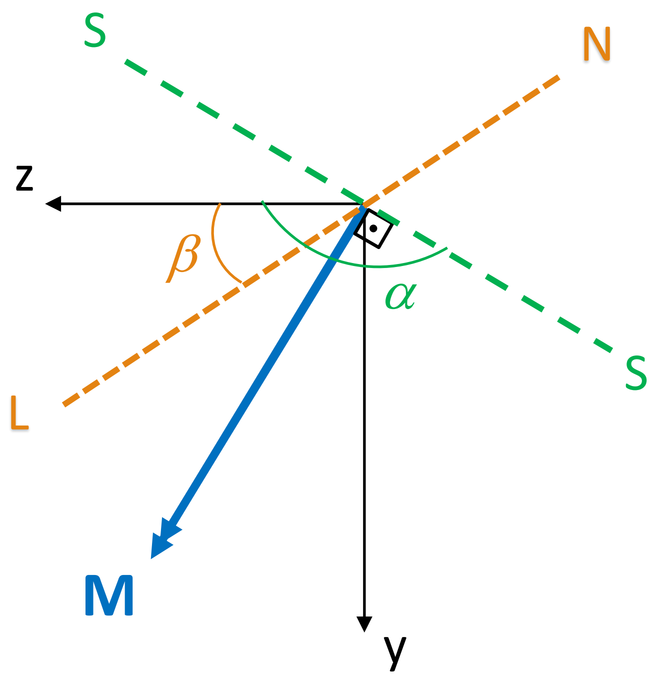
$$\tan\theta = \frac{M_y}{M_z} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta = \frac{I_z}{I_y} \tan\theta$$

$$\boxed{\tan\beta \cot\theta = \frac{I_z}{I_y}}$$

onde $\cot\theta = \dfrac{M_z}{M_y}$

Flexão Oblíqua – Conteúdo Extra

A posição da LN também pode ser determinada em função dos momentos de inércia e da direção do carregamento:



$$\tan\alpha \tan\beta = -\frac{I_z}{I_y}$$

Onde:

- α: o ângulo formado o eixo de solicitação (ss) e o eixo z principal;
- **I_z e I_y**: momentos de inércia em relação aos eixos z e y principais.

<u>Atenção</u>: Os ângulos são marcados positivamente no sentido anti-horário, a partir do eixo **z principal**.

Flexão Oblíqua

- Os slides apresentados foram livremente baseados nas Notas de Aula do prof. Elson Toledo – MAC/UFJF.

- Algumas figuras, fotos e equações presentes nos slides foram retiradas do material do prof. Leonardo Goliatt – MAC/UFJF.