Revisão – Geometria das Massas

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

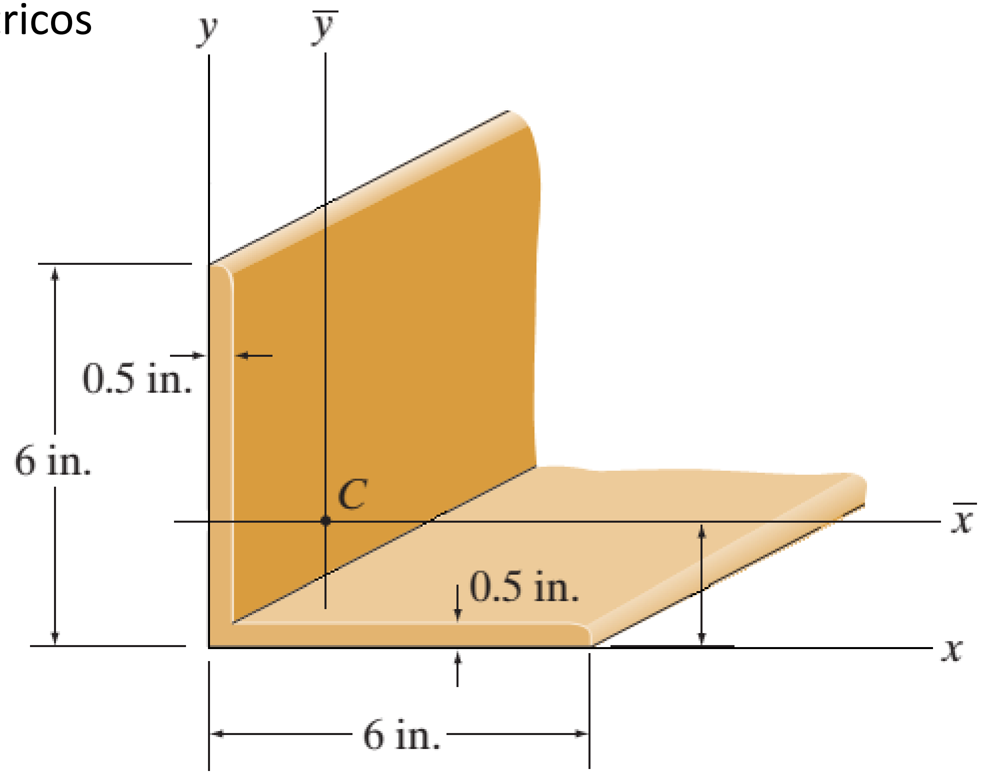
Exemplo

Dada a seção transversal mostrada abaixo, pede-se calcular:

a) As coordenadas do centroide

b) Os momentos e produto de inércia com relação aos eixos baricêntricos

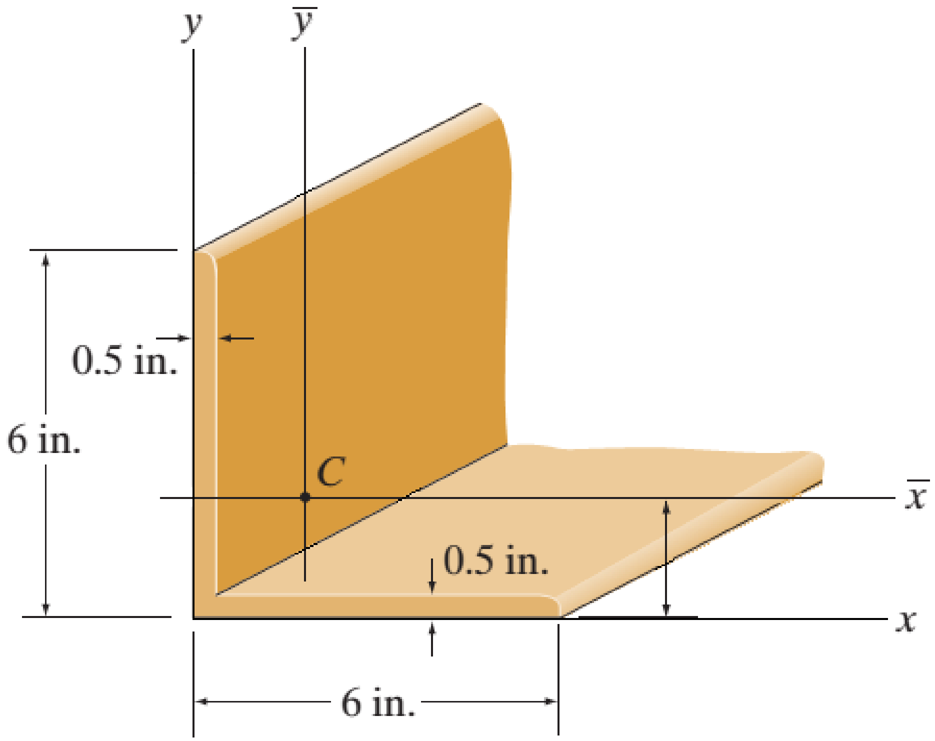
c) Os momentos e direções principais de inércia

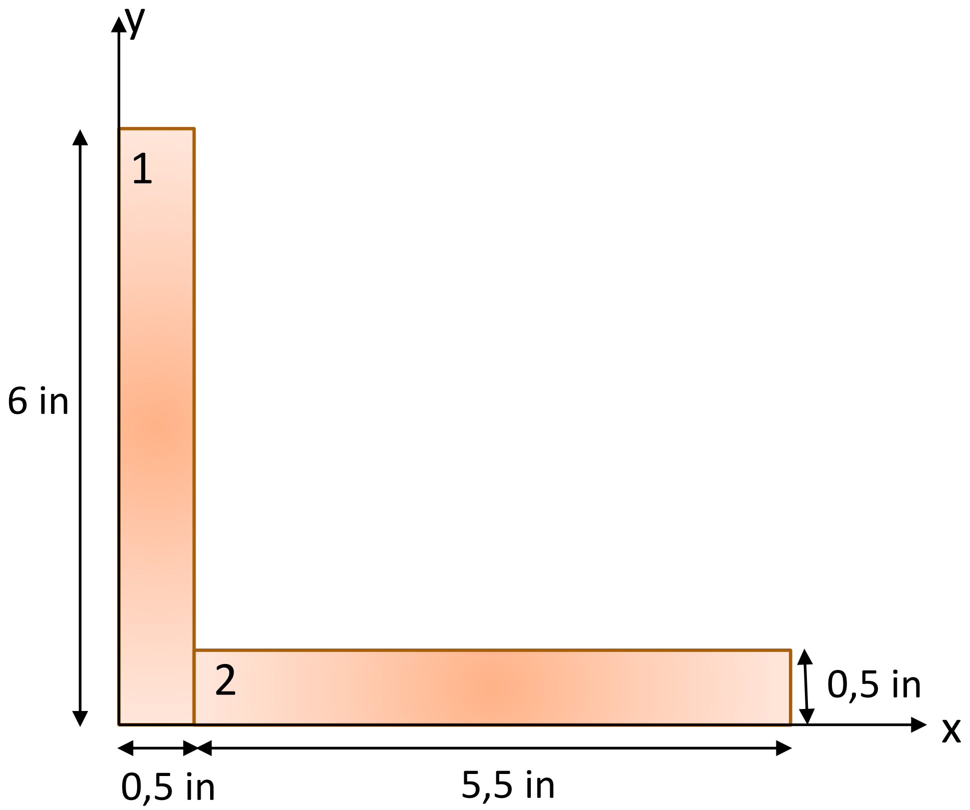


Exemplo

<u>1º passo</u>: Adotar um par de eixos auxiliares "x – y" que, por conveniência, deixe toda a seção no quadrante positivo.

<u>2º passo</u>: Subdividir a seção em figuras de geometria conhecida.



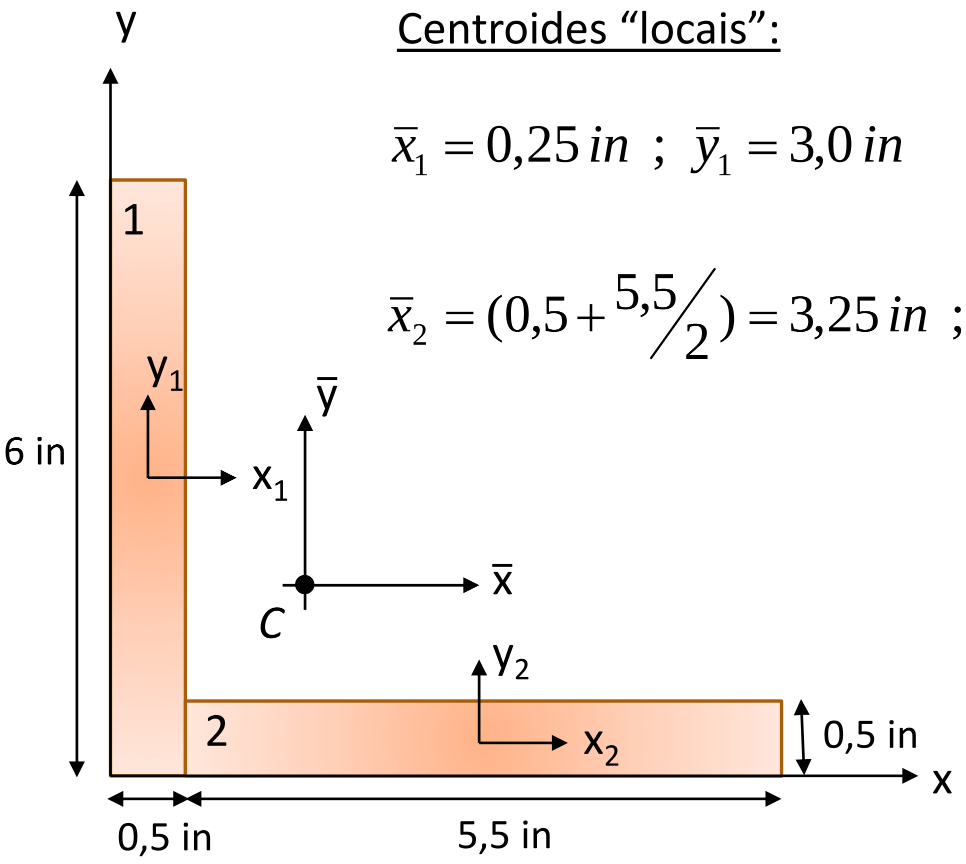


Exemplo

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} \quad \text{ou} \quad \bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}$$

a) Cálculo das coordenadas do centroide *C:*



Centroides “locais”:

$$\bar{x}_1 = 0{,}25\,in \;;\; \bar{y}_1 = 3{,}0\,in$$

$$\bar{x}_2 = (0{,}5 + 5{,}5/2) = 3{,}25\,in \;;\; \bar{y}_2 = 0{,}25\,in$$

Centroide global *C*:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0{,}25\cdot(0{,}5\cdot 6{,}0) + 3{,}25\cdot(5{,}5\cdot 0{,}5)}{0{,}5\cdot 6{,}0 + 5{,}5\cdot 0{,}5}$$

$$\boxed{\bar{x} = 1{,}685\,in}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3{,}0\cdot(0{,}5\cdot 6{,}0) + 0{,}25\cdot(5{,}5\cdot 0{,}5)}{0{,}5\cdot 6{,}0 + 5{,}5\cdot 0{,}5}$$

$$\boxed{\bar{y} = 1{,}685\,in}$$

Exemplo

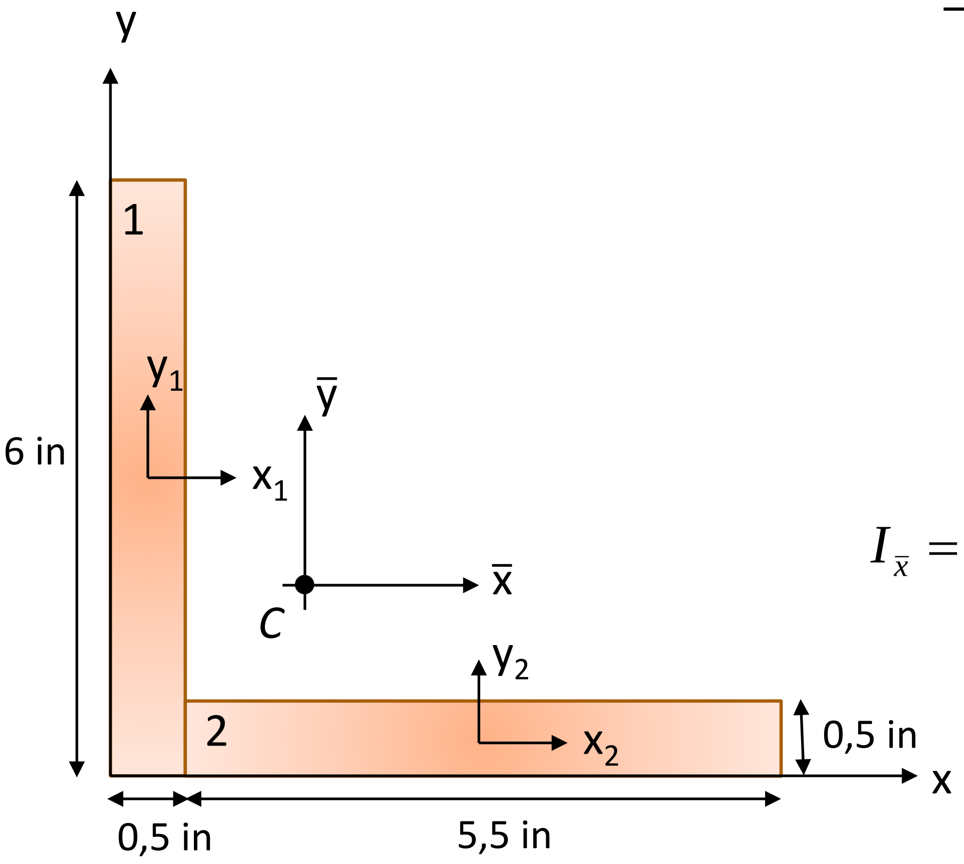
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \text{e} \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

b) Cálculo dos momentos e produto de inércia:

$$I_x = I_{\bar{x}} + A \cdot d_y^2$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + A \cdot d_x^2$$



- Momento de inércia em relação a $\bar{x}$:

$$I_{\bar{x}} = I_{x_1} + I_{x_2} = \left(I_{\bar{x}_1} + A_1 \cdot d_{y_1-\bar{y}}^2\right) + \left(I_{\bar{x}_2} + A_2 \cdot d_{y_2-\bar{y}}^2\right)$$

$$I_{\bar{x}} = \left(\frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 \cdot d_{y_1-\bar{y}}^2\right) + \left(\frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 \cdot d_{y_2-\bar{y}}^2\right)$$

$$I_{\bar{x}} = \left(\frac{0{,}5 \cdot 6{,}0^3}{12} + 0{,}5 \cdot 6{,}0 \cdot (3{,}0 - 1{,}685)^2\right) + \left(\frac{5{,}5 \cdot 0{,}5^3}{12} + 5{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}25 - 1{,}685)^2\right)$$

$$\boxed{I_{\bar{x}} = 19{,}908\, in^4}$$

Exemplo

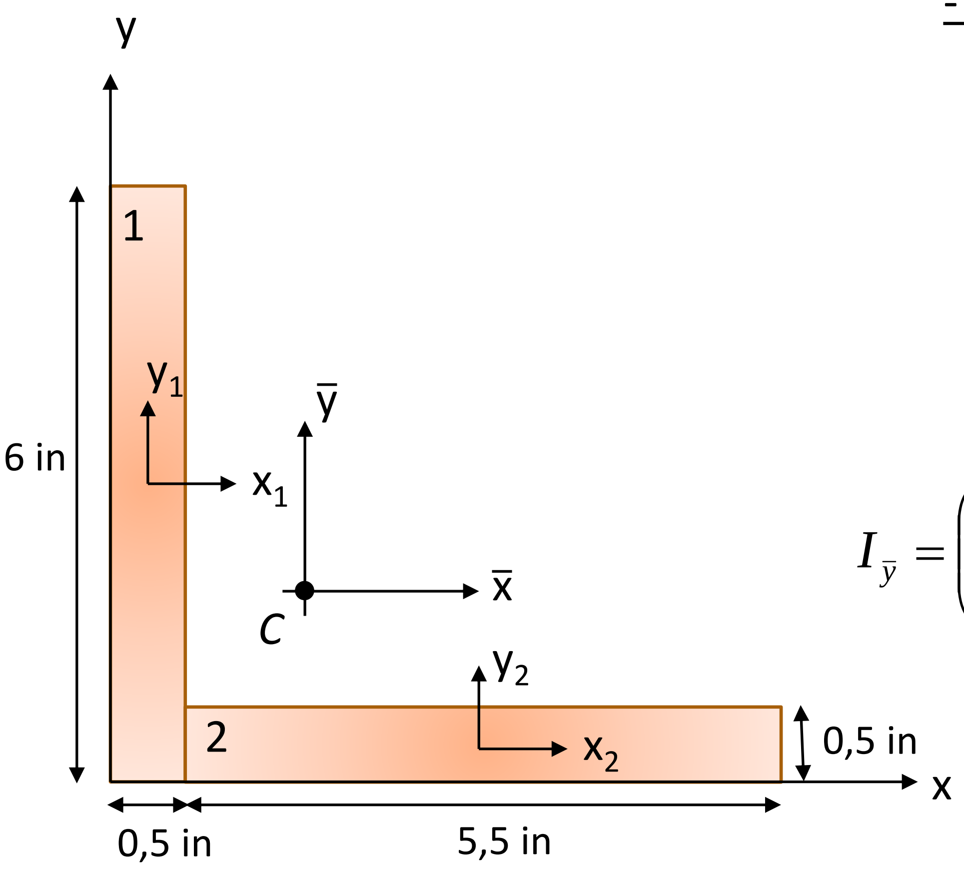
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \text{e} \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = I_{\overline{xy}} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

b) Cálculo dos momentos e produto de inércia:

$$I_x = I_{\bar{x}} + A \cdot d_y^2$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + A \cdot d_x^2$$



- Momento de inércia em relação a $\bar{y}$:

$$I_{\bar{y}} = I_{y_1} + I_{y_2} = \left(I_{\bar{y}_1} + A_1 \cdot d_{x_1-\bar{x}}^2\right) + \left(I_{\bar{y}_2} + A_2 \cdot d_{x_2-\bar{x}}^2\right)$$

$$I_{\bar{y}} = \left(\frac{h_1 b_1^3}{12} + h_1 b_1 \cdot d_{x_1-\bar{x}}^2\right) + \left(\frac{h_2 b_2^3}{12} + h_2 b_2 \cdot d_{x_2-\bar{x}}^2\right)$$

$$I_{\bar{y}} = \left(\frac{6{,}0 \cdot 0{,}5^3}{12} + 6{,}0 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}25 - 1{,}685)^2\right) + \left(\frac{0{,}5 \cdot 5{,}5^3}{12} + 0{,}5 \cdot 5{,}5 \cdot (3{,}25 - 1{,}685)^2\right)$$

$$\boxed{I_{\bar{y}} = 19{,}908\ in^4}$$

Exemplo

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \text{e} \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

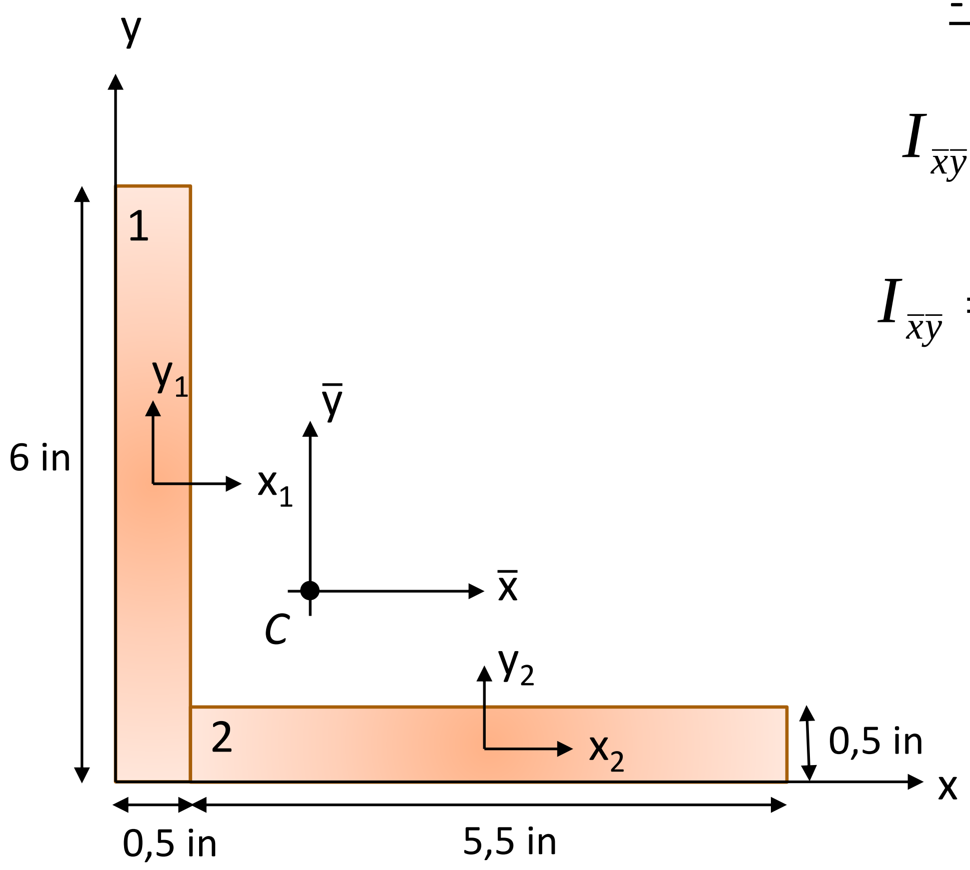
$$I_{xy} = \int_A xy\, dA$$

b) Cálculo dos momentos e produto de inércia:

$$I_x = I_{\bar{x}} + A \cdot d_y^2$$

$$I_y = I_{\bar{y}} + A \cdot d_x^2$$

$$I_{xy} = I_{\overline{xy}} + A \cdot d_x \cdot d_y$$



- Produto de inércia:

$$I_{\overline{xy}} = \left(I_{xy}\right)_1 + \left(I_{xy}\right)_2 = \left[\left(I_{\overline{xy}}\right)_1 + A_1 \cdot d_{x_1} \cdot d_{y_1}\right] + \left[\left(I_{\overline{xy}}\right)_2 + A_2 \cdot d_{x_2} \cdot d_{y_2}\right]$$

$$I_{\overline{xy}} = \left[0 + 0{,}5 \cdot 6{,}0 \cdot (0{,}25 - 1{,}685) \cdot (3{,}0 - 1{,}685)\right] +$$

$$+ \left[0 + 5{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (3{,}25 - 1{,}685) \cdot (0{,}25 - 1{,}685)\right]$$

$$\boxed{I_{\overline{xy}} = -11{,}837\ in^4}$$

Exemplo

$$I_{1,2} = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$tg\ 2\theta_p = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

c) Momentos e direções principais de inércia:

- Momentos principais de inércia:

$$I_{1,2} = \left(\frac{19{,}908 + 19{,}908}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{19{,}908 - 19{,}908}{2}\right)^2 + (-11{,}837)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= 31{,}745\ in^4 \\ I_2 &= 8{,}071\ in^4 \end{aligned}}$$

Verificação: $\boxed{I_x + I_y = I_1 + I_2}$

- Direções principais de inércia:

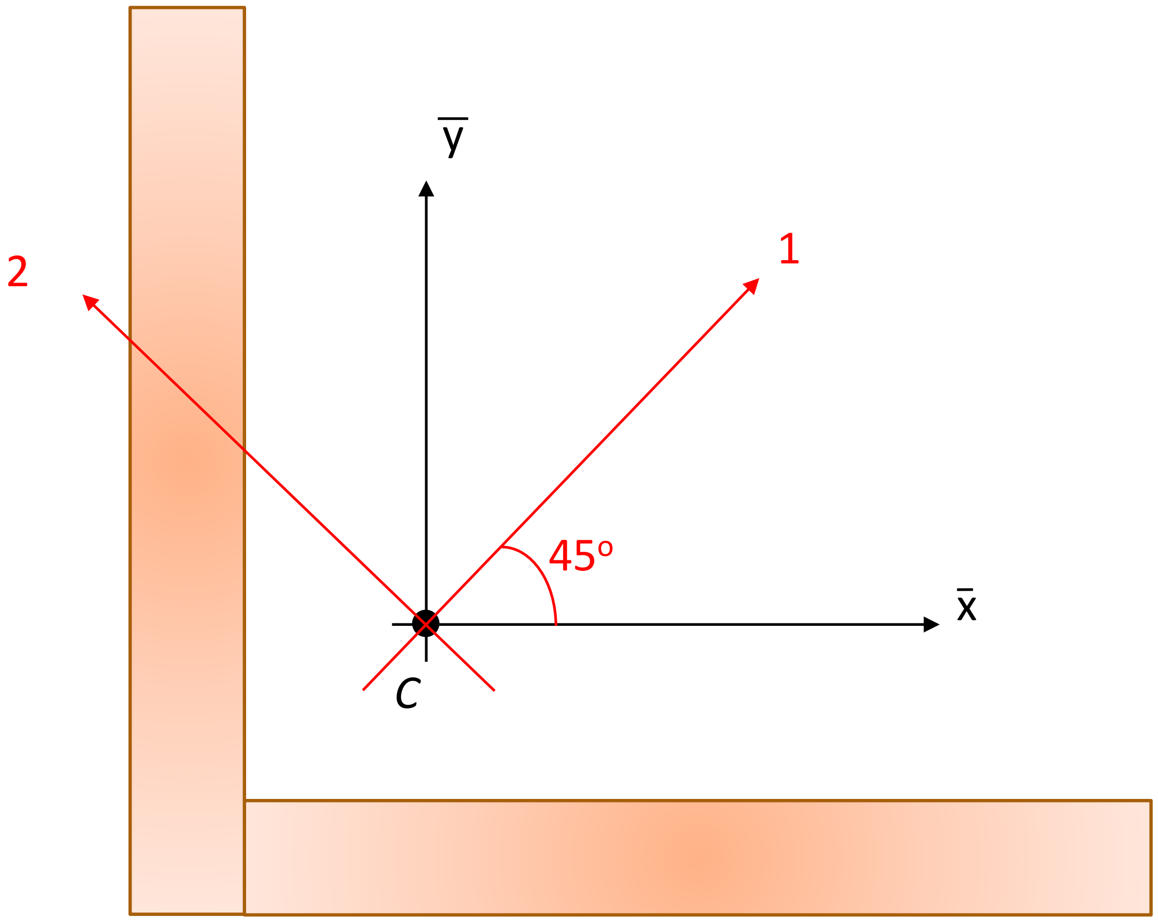
$$tg\ 2\theta_p = \frac{-2(-11{,}837)}{19{,}908 - 19{,}908} = \infty$$

$$2\theta_p = 90^\circ$$

$$\theta_{p1} = 45^\circ$$

$$\theta_{p2} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

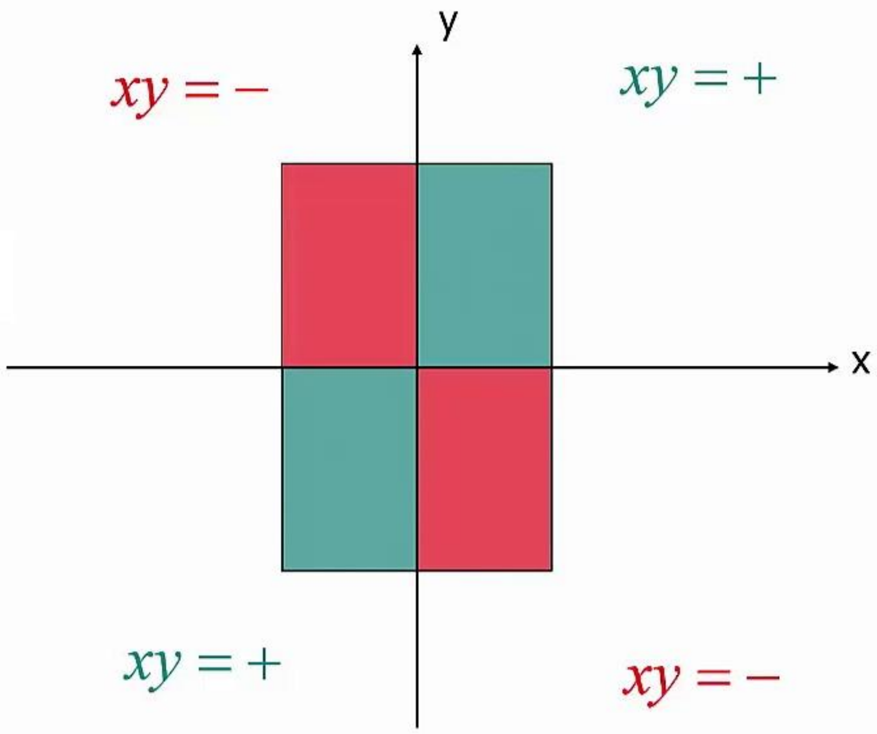
Exemplo

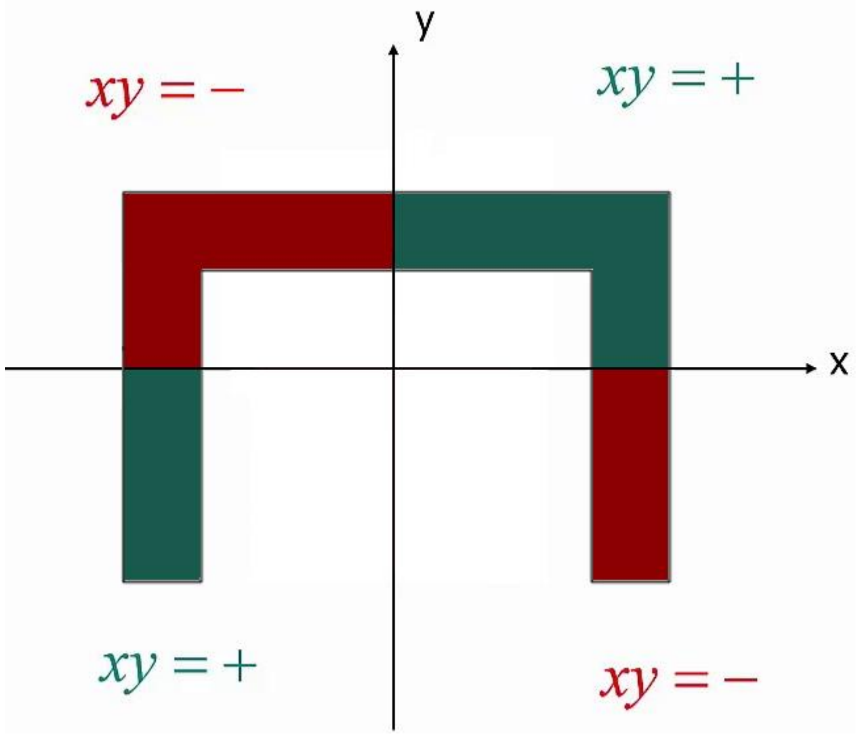


Pontos importantes

1) Caso a seção possua pelo menos um eixo de simetria, o produto de inércia da área em relação aos eixos é **nulo.**

Exemplos:

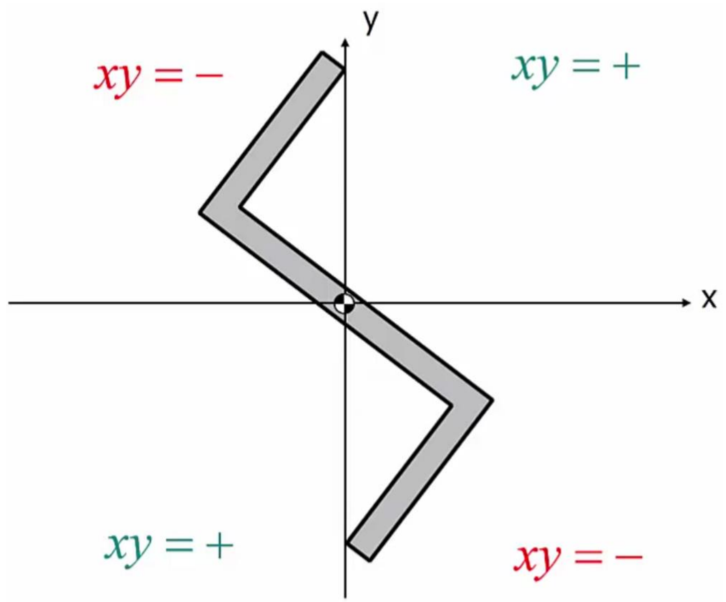




Pontos importantes

<u>Atenção</u>: Não confundir eixos de simetria com eixos de antissimetria!

<u>Exemplo</u>:



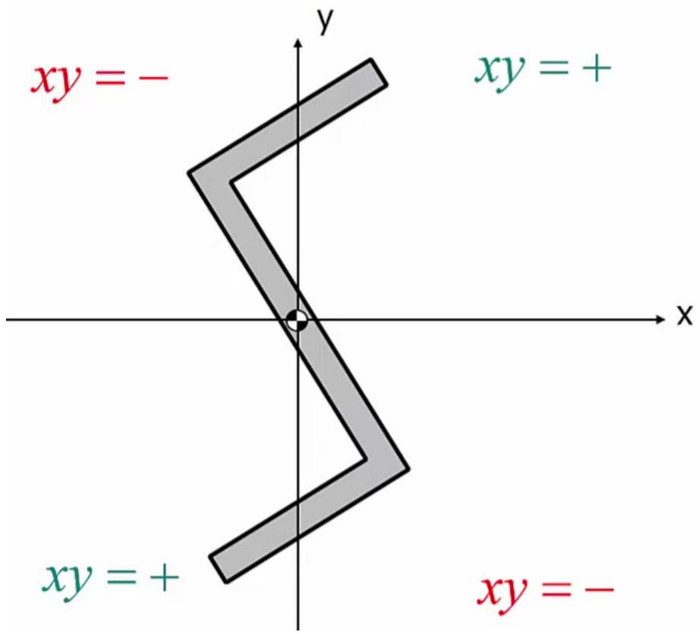
Na figura acima, os eixos *x* e *y* são eixos de antissimetria. Neste caso, o produto de inércia da área da seção **NÃO** é nulo.

Pontos importantes

2) O produto de inércia da área da seção também é **nulo** em relação aos eixos principais de inércia da seção.

MAS, os eixos principais de inércia não são, **necessariamente**, eixos de simetria.

Exemplo:



Na figura acima, os eixos *x* e *y* são eixos principais de inércia, mas **NÃO** são eixos de simetria.

Pontos importantes

3) Todo eixo de simetria é eixo principal de inércia. Vejamos pelas equações mostradas anteriormente:

$$\boxed{tg\ 2\theta_p = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

$$\boxed{I_{1,2} = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}}$$

Pela equação da esquerda: se os eixos *x* e *y* são eixos de simetria, o produto de inércia da área em relação a esses eixos (I_{xy}) é nulo. Logo, a solução para as direções principais θ_{p1} *e* θ_{p2} será 0º e 90º.

Decorre, portanto, que **os eixos principais de inércia são os próprios eixos *x* e *y***.

Pela equação da direita: se os eixos *x* e *y* são eixos de simetria, o produto de inércia (I_{xy}) é nulo. Logo, a solução para os momentos principais de inércia I_1 e I_2 será:

$$I_1 = I_x \text{ e } I_2 = I_y$$